

УДК 519.612

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО МЕТОДУ ОБРАТНОГО ПРОЕКЦИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ ПРОЕКЦИОННЫХ ДАННЫХ В РЕНТГЕНОВСКОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ**

*Е.Н. Симонов*

В статье представлен метод уменьшения ошибки реконструкции изображения для рентгеновской компьютерной томографии путем применения вейвлет-фильтрации зашумленных проекционных данных. Разработанное достаточно недавно (конец 20-го века) вейвлет преобразование и основанное на нем вейвлет-фильтрация одномерных и двумерных сигналов дает возможность определять конкретное место соответствия частотной и временной (в данном случае пространственной по координате детекторов) области. Это позволяет однозначно определять переход из частотной области в пространственную и обратно. Такое свойство вейвлет преобразования принципиально отличает его от Фурье преобразования. Для фильтрации проекционных данных используется кратномасштабный анализ вейвлет преобразования, который дает возможность через коэффициенты, определяющие так называемые масштабирующие функции и вейвлеты, определять в частотной и пространственной области место шума в зашумленном сигнале и осуществлять выделение незашумленного сигнала путем назначения порогов фильтрации на вышеуказанные коэффициенты. Проведен анализ методов назначения порогов фильтрации (мягкий, жесткий, аффинный) и методов определения их значений. Определение значений порогов осуществляется для штрафного порога (правило Birge – Massart) и для адаптированного (правило Donoho – Johnstone). Вейвлет-фильтрация проводится для одномерного, двумерного, быстрого и стационарного дискретного вейвлет-преобразования, с использованием вейвлетов Добеши. Результаты исследований были подтверждены математическим моделированием зашумленных проекционных данных, их вейвлет-фильтрации и реконструкции по ним тестового изображения. Математическая модель тестового изображения и разработанный автором программный реконструктор томографического изображения позволили осуществлять решение прямой (получение проекционных данных по тестовому изображению), обратной (получение тестового изображения по проекционным данным) задач томографии и осуществлять сравнительный анализ качества реконструкции изображения с «идеальными» и зашумленными проекционными данными.

Ключевые слова: рентгеновская компьютерная томография, проекционные данные, вейвлеты.

## Введение

В рентгеновской компьютерной томографии реконструкция изображений производится по проекционным данным, получаемым следующим образом. С помощью рентгеновской трубки (источник) излучают пучки рентгеновских лучей интенсивности  $I_0$ , которые проходят через объект исследования и регистрируются детекторами. На рис. 1 показана параллельная схема сканирования и рентгеновского пучка.

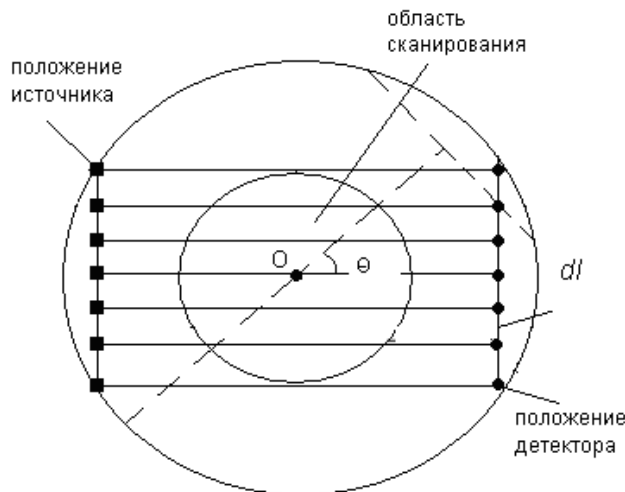


Рис. 1. Параллельная схема сканирования

Закон Бугера-Ламберта-Бера определяет ослабление монохроматического пучка излучения при распространении его в объекте исследования [1]:

$$I(l) = I_0 \exp\left(-\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_l dl\right), \quad (1)$$

где  $I_0$  – интенсивность входящего пучка в объект исследования,

$dl$  – элементарное расстояние, которое проходит рентгеновский луч через вещество по прямой  $l$ ,

$\mu_l$  – линейный коэффициент ослабления рентгеновского излучения на элементарном расстоянии  $dl$ .

Обозначив через  $q(l, \theta)$  проекционные данные для положения  $l$  детектора и угла поворота  $\theta$ , относительно начального положения, получим из (1)

$$q(l, \theta) = -\ln\left(\frac{I(l, \theta)}{I_0}\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_l dl\right)_{l, \theta}. \quad (2)$$

Запись (2) означает, что интеграл определяется для каждого значения  $l$  и  $\theta$ .

В полученных проекционных данных присутствует шум, потому что определенный уровень шума всегда имеет место в любой детекторной электронной системе, которая измеряет интенсивность рентгеновского пучка на входе  $I_0$  и выходе  $I(l)=I(l, \theta)$  объекта исследования.

Согласно [4], зашумленные проекционные данные можно представить в виде суммы чистых проекционных данных и аддитивного шума

$$\tilde{q} = q + \eta,$$

где  $\tilde{q}$  – зашумленные проекционные данные;  $q$  – проекционные данные без шума;  $\eta$  – шум.

Учитывая, что качество томографического изображения определяется, в основном, как показано в работе [3], шумовыми характеристиками проекционных данных, поэтому фильтрация от шумовой составляющей проекционных данных является актуальной задачей.

Реконструкция томографического изображения в параллельных лучах для алгоритма обратного проецирования с фильтрацией сверткой (Filtered Back Projection FBP) [2] представляет собой определение в (2)  $\mu_l$  в координатах  $(x, y)$ . Такое решение представляется, как обратное преобразование Радона уравнения (2)

$$\mu(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty g(s' - s) \tilde{q}(l, \theta) dl d\theta, \quad (3)$$

где  $g(\ell' - \ell)$  – ядро свертки (сворачивающая функция) для параллельной геометрии,

где  $g(l) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty |w| W(w) e^{iws} dw$ ,  $w$ - пространственная частота,  $W(w)$  – окно фильтрации;  $\tilde{q}(\ell, \theta)$  – исходные зашумленные проекционные данные;  $\ell'$  – расстояние между точкой Q  $(x, y)$  и прямой OE (рис. 2).

Алгоритм обратного проецирования с фильтрацией сверткой (3) относится к классу интегральных аналитических алгоритмов компьютерной томографии [2].

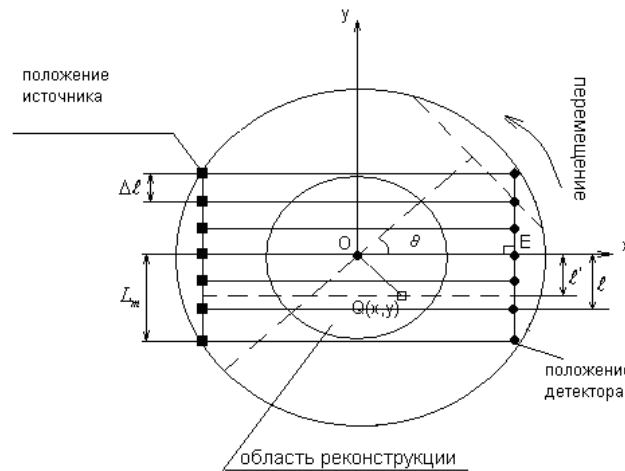


Рис. 2. Геометрические пояснения к уравнению (3)

В работе [3] для множества различных окон фильтрации  $W(w)$  (прямоугольного окна, синусного, параболического и др.) определены сворачивающие функции  $g(l)$  (ядра свертки). Так, например, для прямоугольного окна сворачивающая функция будет иметь вид

$$g(l) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{w_{np}}{l} \sin(w_{np} l) - \frac{2}{l^2} \sin^2 \left( \frac{w_{np} l}{2} \right) \right), \quad (4)$$

где пространственная частота  $w_{np} = \frac{1}{2\Delta l}$ .

Этот вид сворачивающей функции будем использовать ниже при моделировании томографических изображений.

Для фильтрации зашумленных проекционных данных будем использовать кратномасштабный анализ вейвлетов.

Вейвлеты – это обобщенное название семейств математических функций определенной формы, которые локальны во времени и по частоте, и в которых все функции получаются из одной базовой (порождающей) посредством ее сдвигов и растяжений по оси времени [4,5,6].

Кратномасштабный анализ вейвлетов заключается в следующем [5].

Рассмотрим цепочку пространств

$$V_j = \{f \in L^2(\mathfrak{R}), f \text{ – кусочно-постоянные на } [2^j k, 2^j(k+1)), k \in Z\},$$

они имеют свойства

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots, \text{ где } \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathfrak{R}), \quad \overline{\bigcap V_j} = \{0\};$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j-1};$$

$$f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x-n) \in V_0 \text{ для } \forall n \in \mathbb{Z};$$

и пусть существует  $\varphi \in V_0$ , что  $\{\varphi_{0,n}(x), n \in \mathbb{Z}\}$  – ортонормированный базис в  $V_0$ , где  $\{\varphi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - n), \forall j, n \in \mathbb{Z}\}$ , тогда идея заключается в том, что для любого набора подпространств, удовлетворяющих этим условиям, существует ортонормированный базис вейвлетов  $\{\psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k); j, k \in \mathbb{Z}\}$  для  $L^2(\mathfrak{R})$ , что для  $\forall f \in L^2(\mathfrak{R})$

$$P_{j-1}f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad P_j - \text{ ортогональное проектирование на } V_j.$$

Другими словами, кратномасштабный анализ может описать подпространства, определяемые свойствами, описанными выше, причем  $\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = f$ . Кроме того, существует  $\{h_n; n \in \mathbb{Z}\}$ , тогда для  $\varphi \in V_0 \subset V_{-1}$  выполняется

$$\varphi(x) = \sum_n h_n \varphi_{-1,n}(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \varphi(2x - n),$$

$\varphi_{-1,n}$  – ортонормированный базис в  $V_0$ ,  $h_n = \langle \varphi, \varphi_{-1,n} \rangle$ ,  $\sum_n |h_n|^2 = 1$ . Функцию  $\varphi$  называют “масштабирующей функцией” [5]. Кроме того, существует функция  $\psi$ , называемая “вейвлетом, ассоциированным с данным кратномасштабным анализом” [5], для которого  $P_{j-1}f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$ . Функция  $\psi$  может быть выражена следующим образом:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g_n \varphi(2x - n), \text{ где } g_n = (-1)^n h_{1-n}.$$

Распишем преобразование

$$\begin{aligned} P_j f &= \sum_n a_{j,n} \varphi_{j,n}(x) = \sum_n a_{j+1,n} \varphi_{j+1,n}(x) + \sum_n d_{j+1,n} \psi_{j+1,n}(x) = \\ &= \sum_n a_{j+2,n} \varphi_{j+2,n}(x) + \sum_n d_{j+2,n} \psi_{j+2,n}(x) + \sum_n d_{j+1,n} \psi_{j+1,n}(x) \end{aligned} \quad (5)$$

и такое преобразование можно продолжить далее (рис. 3).

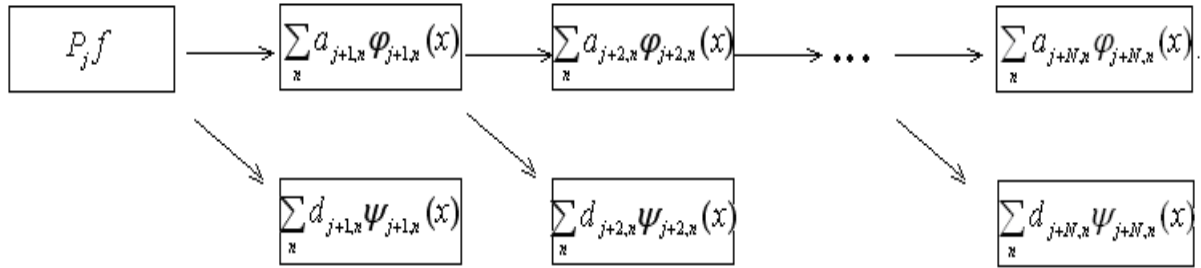


Рис. 3. Схема вейвлет-преобразования

$\{a_j\}$ ,  $\{d_j\}$ ,  $j \in Z$  – коэффициенты дискретного вейвлет преобразования.

Соответственно,

$$\varphi_{j,n} = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j} x - n) = 2^{(1-j)/2} \sum_k h_k \varphi(2^{1-j} x - 2n - k) = \sum_k h_k \varphi_{j-1,k+2n}(x) \quad (6)$$

$$\psi_{j,n} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} x - n) = 2^{(1-j)/2} \sum_k g_k \varphi(2^{1-j} x - 2n - k) = \sum_k g_k \varphi_{j-1,k+2n}(x) \quad (7)$$

Таким образом, в данном случае дискретное вейвлет преобразование производит перевод последовательности  $\{a_{j,n}\}$  в последовательности  $\{a_{j+1,n}, d_{j+1,n}\}$ . Множества  $\{h_n\}$ ,  $\{g_n\}$  позволяют по формулам (5)–(7) численно находить коэффициенты дискретного вейвлет преобразования.

Применяя преобразование (5) для нашей задачи, получим, что проекционные данные  $\tilde{q}(l, \theta)$ , можно представить, как

$$\tilde{q}(l, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j_n,k} \phi_{j_n,k}(l, \theta) + \sum_{j=-\infty}^{j_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(l, \theta),$$

где  $a_{j_n,k}$ ,  $d_{j,k}$  – коэффициенты вейвлет преобразования;  $\phi_{j_n,k}$  – масштабирующая функция;  $\psi_{j,k}$  – вейвлет, ассоциированный с данным кратномасштабным анализом.

Считается, что шум содержится в высокочастотных компонентах, т.е. находится в коэффициентах вейвлет преобразования, отвечающих за малые масштабы ( $d$ ). Фильтрация сводится к обрезанию «высоких частот», т.е. приравнению к нулю коэффициентов  $d$  ниже заданного значения (порога). В результате ожидается, что структура обрабатываемых данных, которая лежит в основе проекционного сигнала, сохранится и проявится после очищения от шума [7, 8].

Таким образом, алгоритм очистки проекционных данных сводится к следующим шагам:

1) проведение вейвлет преобразования проекционных данных. Например, с использованием стационарного дискретного вейвлет преобразования;

2) задание порога для коэффициентов вейвлет преобразования  $d$  в соответствии с их уровнем;

3) проведение фильтрации для заданного порога;

4) восстановление проекционных данных по измененным коэффициентам. Например, с использованием обратного стационарного дискретного вейвлет преобразования.

Существуют различные виды задания порога для коэффициентов вейвлет преобразования  $d$  [9]. Пусть  $d_j, \tilde{d}_j, j=1:n$  – вейвлет-коэффициенты некоторого уровня до фильтрации и после соответственно,  $t$  – значение порога, тогда:

мягкая вейвлет-фильтрация определяется следующим образом

$$\tilde{d}_j = \text{sign}(d_j) \cdot \max(0, |d_j| - t);$$

жесткая вейвлет-фильтрация

$$\tilde{d}_j = \begin{cases} 0, & |d_j| \leq t \\ d_j, & |d_j| > t \end{cases};$$

аффинная вейвлет-фильтрация

$$\tilde{d}_j = \begin{cases} 0, & |d_j| < t/2 \\ 2d_j + t, & -t \leq d_j \leq -t/2 \\ 2d_j - t, & t/2 \leq d_j \leq t \\ d_j, & |d_j| > t \end{cases}.$$

Значение порога  $t$  играет важную роль. Слишком малое значение порога не может удалить шумовые составляющие, слишком большое значение может удалить полезные составляющие проекционных данных.

Существуют следующие способы поиска порога [10–13]:

1. Универсальный порог:  $t = \sigma \sqrt{2 \log(n)}$ ,  $n$  – число отсчетов сигнала,  $\sigma$  – уровень шума. Этот порог является оптимальным для мягкой вейвлет-фильтрации и гауссовского шума.

2. Минимаксный порог:  $t = \sigma_{t_n}$ ,  $t_n$  – выбирается исходя из минимаксного правила, т.е.  $\inf(\sup(E(f, \tilde{f})))$ , где  $E(f, \tilde{f})$  – оценка среднеквадратичной ошибки между искомой и найденными функциями.

3. Штейновская объективная оценка риска: в основе стоит тот же принцип, что и при поиске минимаксного порога, но с различными оценками ошибки.

4. Штрафной порог: порог устанавливается на основании правила Birge-Massart,  $t = |c_k|$ , где  $k = \min_{\tilde{n}}(-\sum(c_j^2, j \leq \tilde{n}) + 2\sigma^2\tilde{n}(\alpha + \log(n/\tilde{n})))$ ,  $c_j$  – вейвлет-коэффициенты  $d_j$ , отсортированные в порядке убывания своих абсолютных значений,  $n$  – число отсчетов сигнала,  $1 \leq \tilde{n} \leq n$ .

5. Адаптированный порог:  $t = \sigma / \sigma_x$ ,  $\sigma_x$  – локальная ошибка исследуемой функции. Устанавливается на основании правила Donoho – Johnstone.

Таким образом, изменяя значения детализирующих коэффициентов  $d_{j,k}$ , ответственных за частоты, т.е. определяя их «вклад» в составляющие шумов, возможно проводить фильтрацию проекционных данных  $\tilde{q}(l, \theta)$ .

Реконструируя по формуле (3) функцию  $\mu(x, y)$  по зашумленным проекциям  $\tilde{q}(l, \theta)$  и фильтрованным  $q(l, \theta)$ , можно оценить качество томографического изображения и сделать сравнительный анализ.

### **Проведение исследований, результаты**

Для получения томографических изображений использовался разработанный нами программный пакет-реконструктор [14–16], позволяющий решать прямую (получение проекционных данных) и обратную (реконструкцию изображения) задачи томографии. Реконструктор позволяет получать матрицы изображений размером 512×512 или 1024×1024 пикселей. Реконструктор также позволяет преобразовывать проекционные данные из веерной геометрии рентгеновского пучка в параллельную и обратно. Объем проекционных данных может моделироваться для 600–1200 ракурсов облучения (угол  $\theta$ ), количества единичных отсчетов в линейке детекторов 500-1000, апертуры единичного детектора (значение  $\Delta l$ ) 0,2–1,56 мм.

При реконструкции томографического изображения использовалась сворачивающая функция (ядро свертки) с прямоугольным окном (4).

Для количественной оценки шума на изображении использовалась среднеквадратическая ошибка:

$$E = \left( \frac{\sum_i \sum_j (A_{i,j} - B_{i,j})^2}{\sum_i \sum_j (A_{i,j})^2} \right)^{1/2} \cdot 100\%, \quad (8)$$



где  $A, B$  – значение матрицы исходного и реконструируемого изображений;  $i, j$  – номер соответствующего элемента (пикселя) в матрице;  $\xi$  – количество элементов (пикселей) в матрице.

Для анализа была проведена мягкая (мвф) и жесткая (жвф) вейвлет-фильтрация для одномерного (1D) и двумерного (2D) быстрого дискретного вейвлет преобразования (БДВП), стационарного дискретного вейвлет преобразования (СДВП), с заданием порога по Donoho – Johnstone (DJ) и Birge – Massart (BM). Под 1D фильтрацией подразумевается фильтрация проекционных данных по каждому ракурсу независимо, под 2D – фильтрация всех проекционных данных, как единого целого. Для фильтрации использовался вейвлет Добеши типа 8.

Анализ проводился для изображений, приведенных на рис. 4.



Рис. 4. Исходное тестовое изображение (а)  
и реконструированное изображение (б)

Последовательность операций по оценке влияния вейвлет-фильтрации зашумленных проекционных данных на качество томографического изображения была следующей.

1. По исходному тестовому изображению (см. рис. 4 а) моделировались идеальные проекционные данные.

2. По этим идеальным проекционным данным моделировалось томографическое изображение (см. рис. 4 б).

3. На идеальные проекции аддитивно накладывался гауссовский шум с  $\sigma_o = 10\%$ .

4. Проводилась реконструкция изображения по проекциям с гауссовским шумом.

5. Проекция с гауссовским шумом на основе кратномасштабного анализа подвергалась фильтрации: определялись коэффициенты  $d_{j,k}$  и проводилась фильтрация для БДВП и СДВП: мвф, 1D, DJ; мвф, 1D, BM; жвф, 1D, DJ; жвф, 1D, BM; мвф, 2D, DJ; мвф, 2D, BM; жвф, 2D, DJ; жвф, 2D, BM.

6. Проводилась реконструкция изображения для отфильтрованных проекционных данных.

7. Проводился сравнительный анализ с оценкой (8) изображений, реконструируемых без применения вейвлет-фильтрации (п. 4) и с вейвлет-фильтрацией (п. 6).

Результаты реконструкции и оценка качества томографического изображения – среднеквадратическая ошибка, определенная по (8), приведены на рис. 5 и 6.

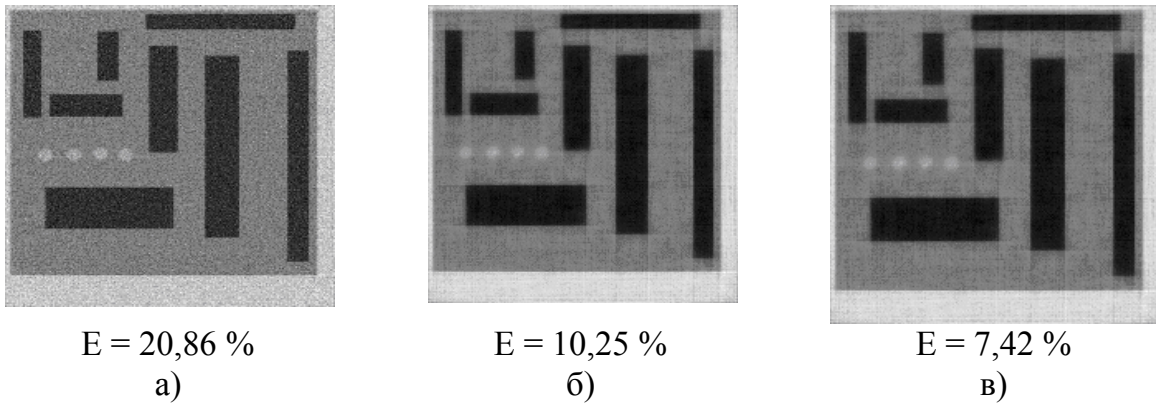


Рис. 5. Реконструированные изображения с прямоугольной функцией окна без вейвлет-фильтрации (а) и с использованием вейвлета Добеши типа 8 для (БДВП, мвф, 1D, DJ) (б) и (БДВП, мвф, 2D, DJ) (в)

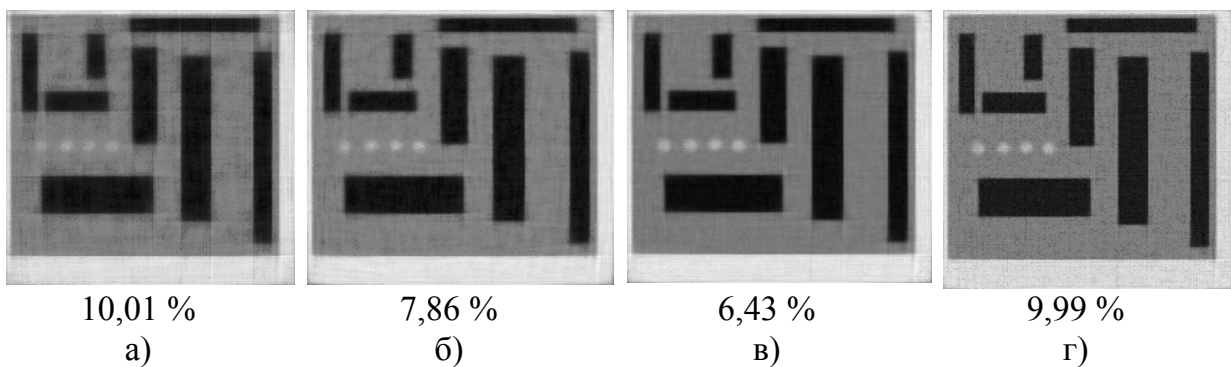


Рис. 6. Реконструированные изображения с прямоугольной функцией окна с использованием вейвлета Добеши типа 8 для (БДВП, мвф, 1D, VM) (а), (БДВП, мвф, 2D, VM) (б), (СДВП, мвф, 2D, DJ) (в), (СДВП, жвф, 2D, VM) (г)

Результаты оценки качества изображений без применения вейвлет-фильтрации и с вейвлет-фильтрацией приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

БДВП							
1D				2D			
мвф		жвф		мвф		жвф	
DJ	BM	DJ	BM	DJ	BM	DJ	BM
E=10,25%	10,01	19,65	13,44	7,42	7,86	15,66	11,61

Таблица 2

СДВП							
1D				2D			
мвф		жвф		мвф		жвф	
DJ	BM	DJ	BM	DJ	BM	DJ	BM
E=9,35%	8,64	16,98	11,79	6,43	6,72	12,77	9,99

При анализе исходного изображения и изображений, полученных при реконструкции, видно, что применение вейвлет-фильтрации проекционных данных может снизить ошибку реконструкции (с 20,86 % до 6,43 %).

Наилучшие результаты получены при стационарном дискретном (СДВП), двумерном (2D) вейвлет преобразовании, с мягким порогом (мвф) по правилу Donoho-Johnstone (DJ).

#### **Заключение**

Приведенный в статье метод фильтрации проекционных данных с применением кратномасштабного анализа показал, что ошибка реконструкции в рентгеновской компьютерной томографии может быть снижена благодаря вейвлет-фильтрации проекционных данных с детекторов практически в 2–3 раза.

#### **Библиографический список**

1. Бугер, П. Оптический трактат о градации света / П. Бугер/ пер. с франц. – М.:Изд. Академии Наук СССР, 1950. – 478 с.
2. Хермен, Г. Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии / Г. Хермен /пер. с англ. – М.: Мир, 1983 – 352 с.
3. Симонов, Е.Н. Физика визуализации изображений в рентгеновской компьютерной томографии: монография / Е.Н. Симонов. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. – 479 с.
4. Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: Советская Энциклопедия. – Т. 4 Ок – Сло. – 1984. – 1216 стб., ил.
5. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
6. Пикалов, В.В. Итерационный алгоритм с вейвлет-фильтрацией в задаче двумерной томографии / В.В. Пикалов, А.В. Непомнящий // Вычислительные методы и программирование. – 2003. – Т. 4. – С. 244–253.

7. Смоленцев, Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в Matlab / Н.К. Смоленцев. – М.: LVR Пресс, 2005. – 304 с.
8. Штарк, Г.-Г. Применение вейвлетов для ЦОС / Г.-Г. Штарк. – М.: Техносфера, 2007. – 192 с.
9. Donoho, D. Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decompositions / D. Donoho // Journal of Applied and Computational Harmonic Analysis, Vol. 2, No. 2, pp. 101–126, 1995.
10. Birge, L. From model selection to adaptive estimation / L. Birge, P. Massart. – D. Pollard (ed), Festschrift for L. Le Cam, Springer, 1997, pp. 55–88.
11. Chang, S. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising / S. Chang, B. Yu, M. Vetterli // IEEE Transactions on Image Processing, 2000. – Vol. 9, No. 9, pp. 1522-1531.
12. Donoho, D. De-noising by soft-thresholding / D. Donoho // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1995. 41, № 3. – pp. 613–627.
13. Donoho, D., Johnstone I. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage / D. Donoho, I. Johnstone // Biometrika. – 1994. –Vol. 81. – pp. 425–455.
14. Симонов, Е.Н. Реконструкция и анализ томографических изображений для верной геометрии и преобразования в геометрию параллельного пучка / Е.Н. Симонов, С.А. Лавров // Медицинская физика. – 2009. – № 1 (41) – С. 66–73.
15. Simonov, E.N. Classification of tomographic methods of examination / E.N. Simonov // Biomedical Engineering. – 2004. – Т. 38, № 4. – С. 199–204.
16. Lavrov S.A. Effect of regrouping of projecting data from fan to parallel geometry in reconstruction of tomographic images / S.A. Lavrov, E.N. Simonov // Biomedical Engineering. – 2010. – Т. 44, № 3. – С. 114–120.