УДК 531.3

АЛГОРИТМЫ ВЫПИСЫВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

А.И. Телегин, М.И. Кайгородцев

THE ALGORITHMS OF CREATING EQUATIONS FOR THE DYNAMICS OF FLAT LINKWORKS

A.I. Telegin, M.I. Kaygorodtsev

Предложены новые виды уравнений динамики (УД) произвольных плоских шарнирных механизмов (ШМ), которые используются в алгоритмах выписывания УД конкретных ШМ. Полученные рекуррентные формулы выписывания коэффициентов УД ШМ позволяют минимизировать число операций при их вычислении. Приведены рекомендации эффективного использования предлагаемых видов УД для решения различных задач динамики и управления ШМ.

Ключевые слова: динамическое уравнение, шарнирные механизмы, рекуррентные формулы, задачи динамики.

The article offers new kinds of dynamic equations of the arbitrary flat linkworks, which are used in the algorithm of creating dynamic equations for concrete linkworks. The obtained recurrent formulas of creating dynamic equation coefficients **for** flat linkworks allow to minimize the operation quantity during the calculation. Recommendations are given for the efficient use of the offered types of dynamic equations to accomplish different tasks of dynamics and linkwork control.

Keywords: dynamic equation, UnkworL·, recurrent formulas, the tasks of dynamics.

Введение. В следствии 6 статьи [1] получен следующий вид УД ШМ:

$$\sum_{i}^{k-1}\left(J^{c}_{ki+1}\ddot{\alpha}_i + J^{s}_{ki+1}\dot{\alpha}_i^2\right) + J_k\ddot{\alpha}_k + \sum_{j,k}\sum_{i\geq j}\left(J^{c}_{ij}\ddot{\alpha}_i - J^{s}_{ij}\dot{\alpha}_i^2\right) - G_k - \bar{k}\cdot\left(\overline{M}_{rk} + \sum_{j,k}\overline{R}_j \times \sum_{i\geq j}\overline{F}_{ri}\right) = M_k - \sum_{i,k} M_i ,$$

где к=1, 2, ..., N; N - число звеньев ШМ; $M_к$ - движущий момент силы к-го звена (остальные величины описаны в 1-м разделе). Из-за вида правой части назовём эти УД рекуррентными (РУД). В следствии 4 статьи [2] представлены РУД N-звенника (ШМ с одной открытой ветвью), которые отличаются от приведённого вида только отсутствием слагаемых с векторами $\overline{F}_{ri}$, $\overline{M}_{rk}$ и использованием знаков суммирования на линейной структуре. В предлагаемой статье получены новые виды УД ШМ в абсолютных и относительных угловых скоростях и ускорениях звеньев. Даны рекомендации эффективного использования этих видов.

1. Используемые понятия и обозначения. Звенья ШМ образуют друг с другом и с основанием (стойкой, станиной, землёй) шарниры, оси которых перпендикулярны плоскости P движения звеньев. Одно из звеньев ШМ, образующее со стойкой шарнир, считается первым по порядку звеном. Произвольный ШМ может иметь звенья, от которых до стойки существуют различные «пути» (последовательности звеньев, связанных шарнирами друг с другом). Для устранения этой неоднозначности мысленно разрываются шарниры между звеньями так, чтобы каждое звено имело единственный путь до стойки, который называют несущей цепочкой этого звена. В дальнейшем будем считать, что после разрыва минимального количества шарниров и изоляции ШМ от воздействий внешней среды получен древовидный ШМ, на звенья которого действуют соответствующие силы и моменты сил реакции $\overline{F}_{ri}, \overline{M}_{ri}$.

В РУД и в других видах УД ШМ используются следующие обозначения: $\bar{k}$ – орт перпендикуляра к плоскости P, направленный в сторону исследователя, m_i – масса i-го дополненного тела (ДТ) [1, 2], т. е. масса i-го звена вместе с массами тех звеньев, которые несет на себе i-е звено; $\dot\alpha_i$, $\ddot\alpha_i$ – абсолютные угловая скорость и ускорение i-го звена; C_{di} – проекция центра масс (ЦМ) i-го ДТ на плоскость P; O_i – точка плоскости P на оси относительного вращения i-го звена; $d_i = O_iC_{di}$; $m_{di} = m_id_i$; $\bar{i}_i$ – орт радиус-вектора $\overline{O_iC_{di}}$ ($\bar{i}_i = \overline{O_iC_{di}}/d_i$); $O_i\bar{i}_i\bar{j}_i\bar{k}$ – правый репер, жёстко связанный с i-м звеном; $\bar{R}_j = \overline{O_{j-1}O_j}$; $\bar{e}_j = \overline{O_{j-1}O_j}/R_j$; R_j – длина $\bar{R}_j$; α_{ij} – угол, откладываемый от $\bar{e}_i$ до $\bar{i}_j$; $s_{ij} = \sin\alpha_{ij}$; $c_{ij} = \cos\alpha_{ij}$; $J_{ji} = m_{dj}R_i$; $J^c_{ji} = J_{ji}c_{ij}$; $J^s_{ji} = J_{ji}s_{ij}$; J_i – момент инерции i-го ДТ относительно оси $O_i\bar{k}$; $\bar{g}$ – ускорение силы тяжести; $G_k = m_{dk}\bar{g}\cdot\bar{j}_k$; M_k – движущий момент силы, действующий на k-е звено со стороны его базы, приведенный к шарнирной оси k-го звена; $\bar{F}_{ri}$, $\bar{M}_{ri}$ – главный вектор и момент сил (относительно точки O_i), действующих на i-е звено и возникших в процессе изоляции ШМ и мысленного разрыва связей (шарниров); $\sum\limits_{i}^{k-1} a_i$ – знак суммирования по номерам несущей цепочки k-го звена, т. е. $i \in \{1,\ldots,k\}$, где $\{1,\ldots,k\}$ – множество номеров звеньев из несущей цепочки k-го звена; $\sum\limits_{j,k} a_j$ – знак суммирования по номерам звеньев, смежных k-му звену; $\sum\limits_{j>i} a_j$ – знак суммирования по номерам звеньев, несомых i-м звеном; $\sum\limits_{j\ge i} a_j = a_i + \sum\limits_{j>i} a_j$. Здесь и в дальнейшем операция декремента индекса является относительной, т. е. индекс i-1 любой величины равен номеру базы i-го звена [1, 2].

2. УД ШМ в абсолютных угловых скоростях и ускорениях звеньев. Из формул вычисления силовых факторов в сочленениях системы твёрдых тел, выведенных в статье [1], следует:

Утверждение 1. Для вывода УД произвольного ШМ можно использовать формулы:

$$\sum_{i}^{k-1}\left(A^k_{i+1}\ddot\alpha_i - B^k_{i+1}\dot\alpha_i^2\right) + \sum_{i\ge k}\left[\left(J_i + m_{di}R^x_{ki} + \sum_{j,i}A^j_j\right)\ddot\alpha_i + \left(m_{di}R^y_{ki} - \sum_{j,i}B^j_j\right)\dot\alpha_i^2 - G_k\right] - M_{rk} = M_k; \quad (1)$$

$$M_{rk} = \bar{k}\cdot\sum_{i\ge k}\left(\bar{M}_{ri} + \bar{R}_{ki}\times\bar{F}_{ri}\right); \quad (2)$$

$$A^k_m = \sum_{j\ge k} m_{dj}\bar{i}_j\cdot\bar{R}_m,\quad B^k_m = \sum_{j\ge k} m_{dj}\bar{j}_j\cdot\bar{R}_m, \quad (3)$$

где k=1, 2, …, N; R^x_{ki}, R^y_{ki} – проекции вектора $\bar{R}_{ki} = \overline{O_kO_i}$ на оси $O_i\bar{i}_i$, $O_i\bar{j}_i$ соответственно.

Доказательство. Для изучения предлагаемого доказательства необходимо познакомиться с статьёй [1], ссылки на формулы из которой условимся записывать в виде (1.i), где i – номер формулы в этой статье.

Для ШМ из формулы (1.26) получим следующий вид искомых УД:

$$M_k = \bar{k}\cdot\bar{M}_k = \bar{k}\cdot\bar{m}^c_k\times\sum_{i}^{k-1}\left[\bar\varepsilon_i\times\bar{R}_{i+1} + \bar\omega_i\times(\bar\omega_i\times\bar{R}_{i+1})\right] + \bar{k}\cdot\sum_{i\ge k}\left(I_{ki}\cdot\bar\varepsilon_i + \bar\omega_i\times I_{ki}\cdot\bar\omega_i + \bar\omega_i\bar\omega_i\cdot\bar{I}_{ki}\right) -$$
$$-\bar{k}\cdot\bar{m}^c_k\times\bar{g} - \bar{k}\cdot\sum_{i\ge k}\left(\bar{M}_{ri} + \bar{R}_{ki}\times\bar{F}_{ri}\right).$$

Из (1.3) и принятых обозначений следует, что для ШМ $\bar{m}_j = m_jd_j\bar{i}_j$. Поэтому согласно (1.21) $\bar{k}\times\bar{m}^c_k = \sum\limits_{j\ge k} m_jd_j\bar{k}\times\bar{i}_j = \sum\limits_{j\ge k} m_{dj}\bar{j}_j$. Теперь, учитывая равенства $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$, $\bar\omega_i = \dot\alpha_i\bar{k}$, $\bar\varepsilon_i = \ddot\alpha_i\bar{k}$, получаем

$$\bar{k}\cdot\bar{m}^c_k\times\sum_{i}^{k-1}\left[\bar\varepsilon_i\times\bar{R}_{i+1} + \bar\omega_i\times(\bar\omega_i\times\bar{R}_{i+1})\right] = \sum_{j\ge k} m_{dj}\bar{j}_j\cdot\sum_{i}^{k-1}\left[\bar{k}\times\bar{R}_{i+1}\ddot\alpha_i + \bar{k}\times(\bar{k}\times\bar{R}_{i+1})\dot\alpha_i^2\right] =$$

$$=\sum_i^{k-1}\left(\sum_{j\geq k} m_{dj}\bar{i}_j\cdot\bar{R}_{i+1}\ddot{\alpha}_i+\sum_{j\geq k} m_{dj}\bar{i}_j\cdot\bar{k}\times\bar{R}_{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right)=\sum_i^{k-1}\left(A_{i+1}^k\ddot{\alpha}_i-\sum_{j\geq k} m_{dj}\bar{j}_j\cdot\bar{R}_{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right)=\sum_i^{k-1}\left(A_{i+1}^k\ddot{\alpha}_i-B_{i+1}^k\dot{\alpha}_i^2\right),$$

что совпадает с первой суммой искомых УД (1). Аналогично

$$\bar{k}\cdot\bar{m}_k^c\times\bar{g}=\bar{k}\times\sum_{j\geq k} m_{dj}\bar{i}_j\cdot\bar{g}=\sum_{j\geq k} m_{dj}\bar{j}_j\cdot\bar{g}=\sum_{j\geq k} G_j,$$

где $G_j=m_{dj}\bar{g}\cdot\bar{j}_j$, что совпадает с определением величины G_j.

Так как $\bar{k}\cdot\bar{\omega}_i\times(I_{ki}\cdot\bar{\omega}_i)=\dot{\alpha}_i(\bar{k}\times\bar{k})\cdot I_{ki}\cdot\bar{\omega}_i=0$, получим

$$\bar{k}\cdot\sum_{i\geq k}\left(I_{ki}\cdot\bar{\varepsilon}_i+\bar{\omega}_i\times I_{ki}\cdot\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_i\bar{\omega}_i\cdot\bar{I}_{ki}\right)=\sum_{i\geq k}\left(\bar{k}\cdot I_{ki}\cdot\bar{k}\ddot{\alpha}_i+\bar{k}\cdot\bar{I}_{ki}\dot{\alpha}_i^2\right).$$

Учитывая (1.23), получаем $\bar{k}\cdot\bar{I}_{ki}=\bar{k}\cdot\left(\bar{m}_i\times\bar{R}_{ki}+\sum_{j,i}\bar{R}_j\times\bar{m}_j^c\right)=\bar{k}\times\bar{m}_i\cdot\bar{R}_{ki}-\sum_{j,i}\bar{k}\times\bar{m}_j^c\cdot\mathbf{\bar{R}}_j=$ $=m_{di}\bar{j}_i\cdot\bar{R}_{ki}-\sum_{j,i}\bar{R}_j\cdot\sum_{l\geq j} m_{dl}\bar{j}_l=m_{di}R_{ki}^y-\sum_{j,i}\sum_{l\geq j} m_{dl}\bar{j}_l\cdot\bar{R}_j$, что с учётом обозначений (3) совпадает с множителем при $\dot{\alpha}_i^2$ во второй сумме искомых УД (1). Из (1.24) имеем:

$$I_{ki}=I_i+\bar{m}_i\cdot\bar{R}_{ki}E-\bar{m}_i\bar{R}_{ki}+\sum_{j,i}\left(\bar{R}_j\cdot\bar{m}_j^cE-\bar{R}_j\bar{m}_j^c\right),\tag{4}$$

$$I_i=I_i^c+m_{0i}\left(r_i^2E-\bar{r}_i\bar{r}_i\right)+\sum_{j,i} m_j\left(R_j^2E-\bar{R}_j\bar{R}_j\right),\tag{5}$$

где $\bar{r}_i=\overline{O_iC_i}$; C_i – ЦМ i-го звена; I_i^c – тензор инерции i-го звена относительно его ЦМ. В любом репере $\bar{m}_i\cdot\bar{R}_{ki}E=m_{di}\bar{i}_i\cdot\bar{R}_{ki}E=m_{di}R_{ki}^xE$, $\sum_{j,i}\bar{R}_j\cdot\bar{m}_j^cE=\sum_{j,i}\bar{R}_j\cdot\sum_{l\geq j} m_{dl}\bar{i}_lE=\sum_{j,i}\sum_{l\geq j} m_{dl}\bar{i}_l\cdot\mathbf{\bar{R}}_jE=$ $=\sum_{j,i} A_j^jE$. В репере $O_i\bar{i}_i\bar{j}_i\bar{k}$ i-го звена имеем $\bar{m}_i\bar{R}_{ki}=m_{di}\bar{i}_i\bar{R}_{ki}=m_{di}(1,0,0)^T(R_{ki}^x,R_{ki}^y,R_{ki}^z)$. В любом репере величина $\bar{k}\cdot I_{ki}\cdot\bar{k}$ является элементом 3-й строки 3-го столбца матрицы I_{ki} в этом репере. Обозначим этот элемент через I_{ki}^z. Используя правило формирования элементов диадного произведения двух векторов [3], получаем, что элемент 3-й строки 3-го столбца матрицы $\bar{m}_i\bar{R}_{ki}$ равен нулю. Аналогично равен нулю последний элемент матрицы $\bar{R}_j\bar{m}_j^c$. Таким образом, из (4) для элемента I_{ki}^z получим $I_{ki}^z=J_i+m_{di}R_{ki}^x+\sum_{j,i} A_j^j$, что совпадает с множителем при $\ddot{\alpha}_i$ во 2-й сумме искомых УД. Здесь J_i – элемент 3-й строки 3-го столбца тензора I_i и согласно (5) это – момент инерции i-го ДТ относительно оси шарнира i-го звена. *Утверждение доказано.*

Если из геометрических соображений выражения для величин R_{ji}^x, R_{ji}^y, A_m^k, B_m^k получаются быстро и выглядят компактно, то использование УД ШМ в виде (1) – (3) оправдано. Это относится к многозвенным ШМ с одной степенью подвижности. Но если ШМ древовидный и имеет несколько степеней свободы, то для вывода его УД по формулам (1) – (3) необходимо выполнить ряд математических операций, так как для вычисления величин R_{ji}^x, R_{ji}^y, A_m^k, B_m^k требуется определённая аналитическая работа. В этом случае рекомендуется использовать:

Утверждение 2. Для выписывания УД ШМ можно использовать формулы:

$$\sum_i^{k-1}\left(A_{ki}\ddot{\alpha}_i+a_{ki}\dot{\alpha}_i^2\right)+\sum_{i\geq k}\left(B_{ik}\ddot{\alpha}_i+b_{ik}\dot{\alpha}_i^2\right)-G_{ok}-M_{rk}=M_k,\qquad k=1,2,\ldots,N,\tag{6}$$

где $G_{ok}=G_k+\sum_{j,k} G_{oj}$, $k=N,N-1,\ldots,1$; (7)

$$A_{ki}=\sum_{j\geq k} J_{ji+1}^c;\ a_{ki}=\sum_{j\geq k} J_{ji+1}^s;\ B_{ik}=J_i+\sum_{j,k+1}^{i} J_{ij}^c+\sum_{j>i} J_{ji+1}^c;\ b_{ik}=-\sum_{j,k+1}^{i} J_{ij}^s+\sum_{j>i} J_{ji+1}^s.\tag{8}$$

Доказательство. Из УД (1) с учетом обозначений $s_{ij} = \sin\alpha_{ij}$, $c_{ij} = \cos\alpha_{ij}$ следуют выражения для A_{ki}, a_{ki} формул (8). Действительно,

$$A_{ki} = A_{i+1}^{k} = \sum_{j\ge k} m_{dj}\bar{i}_j \cdot \bar{R}_{i+1} = \sum_{j\ge k} m_{dj}R_{i+1}\bar{e}_{i+1}\cdot \bar{i}_j = \sum_{j\ge k} J_{ji+1}\cos\alpha_{i+1,j} = \sum_{j\ge k} J_{ji+1}c_{i+1,j} = \sum_{j\ge k} J_{ji+1}^{c};$$

$$a_{ki} = -B_{i+1}^{k} = -\sum_{j\ge k} m_{dj}\bar{j}_j \cdot \bar{R}_{i+1} = -\sum_{j\ge k} m_{dj}R_{i+1}\cos(\alpha_{i+1,j} + \pi/2) = \sum_{j\ge k} J_{ji+1}s_{i+1,j} = \sum_{j\ge k} J_{ji+1}^{s}.$$

Учитывая равенство $\bar{R}_{ki} = \sum_{j,k+1}^{i}\bar{R}_j$ и обозначения c_{ij}, s_{ij}, получаем:

$$\bar{R}_{ki}\cdot\bar{i}_i = \sum_{j,k+1}^{i}\bar{R}_j\cdot\bar{i}_i = \sum_{j,k+1}^{i}R_j\bar{e}_j\cdot\bar{i}_i = \sum_{j,k+1}^{i}R_j\cos\alpha_{ji} = \sum_{j,k+1}^{i}R_jc_{ji};$$

$$\bar{R}_{ki}\cdot\bar{j}_i = \sum_{j,k+1}^{i}\bar{R}_j\cdot\bar{j}_i = \sum_{j,k+1}^{i}R_j\cos(\alpha_{ji} + \pi/2) = -\sum_{j,k+1}^{i}R_js_{ji}.$$

Учитывая равенство $\sum_{j,i}\sum_{p\ge j}a_{pj} = \sum_{j>i}a_{ji+1}$, получаем:

$$\sum_{j,i}\sum_{p\ge j}m_{dp}\bar{i}_p\cdot\bar{R}_j = \sum_{j,i}\sum_{p\ge j}R_jm_{dp}c_{jp} = \sum_{j,i}\sum_{p\ge j}J_{pj}c_{jp} = \sum_{j>i}J_{ji+1}c_{i+1,j} = \sum_{j>i}J_{ji+1}^{c};$$

$$\sum_{j,i}\sum_{p\ge j}m_{dp}\bar{j}_p\cdot\bar{R}_j = \sum_{j,i}\sum_{p\ge j}J_{jp}\cos(\alpha_{jp} + \pi/2) = -\sum_{j,i}\sum_{p\ge j}J_{pj}s_{jp} = -\sum_{j>i}J_{ji+1}s_{i+1,j} = -\sum_{j>i}J_{ji+1}^{s}.$$

Следовательно, из (1) и (3) получим

$$B_{ik} = J_i + m_{di}\bar{R}_{ki}\cdot\bar{i}_i + \sum_{j,i}\sum_{p\ge j}m_{dp}\bar{i}_p\cdot\bar{R}_j = J_i + \sum_{j,k+1}^{i}m_{di}R_jc_{ji} + \sum_{j>i}J_{ji+1}c_{i+1,j};$$

$$b_{ik} = m_{di}\bar{R}_{ki}\cdot\bar{j}_i - \sum_{j,i}\sum_{p\ge j}m_{dp}\bar{j}_p\cdot\bar{R}_j = -\sum_{j,k+1}^{i}m_{di}R_js_{ji} + \sum_{j>i}J_{ji+1}^{s},$$

что с учетом введённых обозначений совпадает с искомыми формулами вычисления величин B_{ik}, b_{ik}.

Из первой суммы формулы (2) получим $G_{ok} = \sum_{i\ge k}m_{di}\bar{g}\cdot\bar{j}_i$. Учитывая тождество

$$D_k = \sum_{j\ge k}d_j = d_k + \sum_{j,k}\sum_{p\ge j}d_p = d_k + \sum_{j,k}D_j,$$

получаем $G_{ok} = m_{dk}\bar{g}\cdot\bar{j}_k + \sum_{j,k}G_{oj}$. Отсюда с учётом обозначения $G_k = m_{dk}\bar{g}\cdot\bar{j}_k$ получаем формулу (7). *Утверждение доказано.*

С целью эффективной алгоритмизации процесса выписывания УД ШМ и минимизации количества арифметических операций в формулах вычисления коэффициентов A_{ki}, a_{ki}, B_{ik}, b_{ik} рекомендуется использовать:

Утверждение 3. Коэффициенты УД ШМ (6) можно выписывать по следующим рекуррентным формулам:

$$A_{ki-1} = J_{ki}^{c} + \sum_{j,k}A_{ji-1}; \qquad a_{ki-1} = J_{ki}^{s} + \sum_{j,k}a_{ji-1}; \tag{10}$$

$$B_{kk} = J_k + \sum_{j,k}A_{jk}; \qquad b_{kk} = \sum_{j,k}a_{jk}; \tag{11}$$

$$B_{ki-1} = B_{ki} + J_{ki}^{c}; \qquad b_{ki-1} = b_{ki} - J_{ki}^{s}. \tag{12}$$

Здесь для каждого k, изменяющегося от номера последнего звена (k=N) до номера первого звена (k=1) у формул (10) и (12), индекс i изменяется от значения i=k вдоль несущей цепочки k-го звена до значения, при котором относительный декремент индекса i равен 1.

Доказательство. Из формулы (8) для A_{ki} с учетом тождества $D_k = \sum_{j\ge k} d_j = d_k + \sum_{j,k} D_j$ получим $A_{ki-1} = \sum_{j\ge k} J^c_{ji} = J^c_{ki} + \sum_{j,k}\sum_{p\ge j} J^c_{pi} = J^c_{ki} + \sum_{j,k} A_{ji-1}$, что и требовалось доказать. Аналогично доказывается рекуррентная формула выписывания коэффициентов a_{ki}. Из (8) для i=k получим $b_{kk} = \sum_{j>k} J^s_{jk+1}$. Отсюда $b_{kk} = \sum_{i,k}\sum_{j\ge i} J^s_{ji}$. Из (8) $a_{ki} = \sum_{j\ge k} J^s_{ji+1}$. Следовательно, $b_{kk} = \sum_{i,k} a_{ii-1} = \sum_{i,k} a_{ik}$, что и требовалось доказать. Аналогично доказывается выражение для B_{kk}.

В заключение из (8) с учётом (11) получим

$$B_{ik} = B_{ii} + \sum_{j,k+1}^{i} J^c_{ij} = B_{ii} + \sum_{j,k+2}^{i} J^c_{ij} + J^c_{ik+1} = B_{ik+1} + J^c_{ik+1};\ \ B_{ik-1} = B_{ik} + J^c_{ik}.\ \ B_{ki-1} = B_{ki} + J^c_{ki}.$$

Аналогично доказывается рекуррентная формула вычисления b_{ki}. *Утверждение доказано.*

3. УД ШМ в относительных угловых скоростях и ускорениях звеньев. В УД ШМ (1), (6) используются абсолютные угловые скорости и ускорения звеньев. Если в управляемом ШМ датчики состояния звеньев измеряют относительные углы поворота и скорости звеньев, то для решения задач управления, как правило, используются УД в относительных координатах. Для вывода УД конкретного ШМ в относительных угловых скоростях и ускорениях звеньев можно использовать

Утверждение 4. УД произвольного ШМ можно представить в виде

$$\sum_{i}^{k-1}\left[H_{ki}\ddot{q}_i + h_{ki}\left(\dot{q}_i^2 + 2\dot{q}_i\dot{\alpha}_{i-1}\right)\right] + H_{kk}\ddot{q}_k + \sum_{i>k}\left[H_{ik}\ddot{q}_i - h_{ik}\left(\dot{q}_i^2 + 2\dot{q}_i\dot{\alpha}_{i-1}\right)\right] - G_{ok} - \mathbf{M}_{rk} = M_k, \qquad (13)$$

где $k = 1, 2, ..., N$ и элементы симметричной матрицы инерционных коэффициентов

$$H_{ki} = \sum_{j\ge k}\left[J_j + m_{dj}\left(R^x_{kj} + R^x_{ij}\right)\right], \qquad (14)$$

элементы кососимметричной матрицы коэффициентов инерционных сил

$$h_{ki} = \sum_{j\ge k} m_{dj}\left(R^y_{kj} - R^y_{ij}\right), \quad h_{kk} = 0, \qquad (15)$$

$\dot{q}_i, \ddot{q}_i$ – скорость и ускорение вращения i-го звена относительно своей базы. В H_{ki}, h_{ki} индекс $i \in \{1,...,k\}$.

Доказательство. Абсолютные угловые скорость и ускорение i-го звена ШМ выражаются через относительные угловые скорости и ускорения несущих звеньев по формулам $\dot{\alpha}_i = \sum_{j}^{i} \dot{q}_j$, $\ddot{\alpha}_i = \sum_{j}^{i} \ddot{q}_j$. После элементарных преобразований получим

$$\dot{\alpha}_i^2 = \left(\sum_{j}^{i}\dot{q}_j\right)^2 = \sum_{j}^{i}\dot{q}_j^2 + 2\sum_{j}^{i}\dot{q}_j\sum_{m}^{j-1}\dot{q}_m = \sum_{j}^{i}\dot{q}_j^2 + 2\sum_{j}^{i}\dot{q}_j\dot{\alpha}_{j-1} = \sum_{j}^{i}\dot{q}_j\left(\dot{q}_j + 2\dot{\alpha}_{j-1}\right).$$

Используем обозначения

$$\dot{\alpha}_{qj} = \dot{q}_j\left(\dot{q}_j + 2\dot{\alpha}_{j-1}\right),\ D_{ik} = J_i + m_{di}R^x_{ki} + \sum_{m,i} A^m_m,\ E_{ik} = m_{di}R^y_{ki} - \sum_{m,i} \mathbf{B}^m_m.$$

Тогда согласно утверждению 1 получим:

$$\sum_{i}^{k-1}\left(A^k_{i+1}\ddot{\alpha}_i - B^k_{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right) = \sum_{i}^{k-1}\left(A^k_{i+1}\sum_{j}^{i}\ddot{q}_j - B^k_{i+1}\sum_{j}^{i}\dot{\alpha}_{qj}\right) = \sum_{j}^{k-1}\left(\ddot{q}_j\sum_{i,j}^{k-1}A^k_{i+1} - \dot{\alpha}_{qj}\sum_{i,j}^{k-1}B^k_{i+1}\right);$$

$$\sum_{i\ge k}\left(J_i + m_{di}\mathbf{R}^x_{ki} + \sum_{m,i}A^m_m\right)\ddot{\alpha}_i = \sum_{i\ge k}D_{ik}\sum_{j}^{i}\ddot{q}_j = \sum_{i\ge k}D_{ik}\left(\sum_{j}^{k-1}\ddot{q}_j + \sum_{j,k}^{i}\ddot{q}_j\right) =$$

$$= \sum_{j}^{k-1}\left(\sum_{i\ge k}D_{ik}\right)\ddot{q}_j + \sum_{i\ge k}D_{ik}\sum_{j,k}^{i}\ddot{q}_j = \sum_{j}^{k-1}\left(\sum_{i\ge k}D_{ik}\right)\ddot{q}_j + \sum_{j\ge k}\left(\sum_{i\ge j}D_{ik}\right)\ddot{q}_j;$$

$$\sum_{i\ge k} E_{ik}\dot\alpha_i^2 = \sum_{i\ge k} E_{ik}\sum_j^i \dot\alpha_{qj} = \sum_j^{k-1}\left(\sum_{i\ge k} E_{ik}\right)\dot\alpha_{qj} + \sum_{j\ge k}\left(\sum_{i\ge k} E_{ik}\right)\dot\alpha_{qj}.$$

Здесь использованы известные формулы изменения порядка суммирования [1]:

$$\sum_i^{k-1} a_{i+1}\sum_j^i b_j = \sum_i^{k-1} b_j \sum_{i,j}^{k-1} a_{i+1}, \qquad \sum_{i\ge k} a_i \sum_{j,k}^i b_j = \sum_{j\ge k} b_j \sum_{i\ge j} a_i .$$

Таким образом,

$$\sum_i^{k-1}\left(A_{i+1}^k\ddot\alpha_i - B_{i+1}^k\dot\alpha_i^2\right) + \sum_{i\ge k}\left(D_{ik}\ddot\alpha_i + E_{ik}\dot\alpha_i^2\right) = \sum_j^{k-1}\left[\ddot q_j\left(\sum_{i,j}^{k-1} A_{i+1}^k + \sum_{i\ge k} D_{ik}\right) + \right.$$

$$\left. + \dot\alpha_{qj}\left(\sum_{i\ge k} E_{ik} - \sum_{i,j}^{k-1} B_{i+1}^k\right)\right] + \sum_{j\ge k}\left(\ddot q_j \sum_{i\ge j} D_{ik} + \dot\alpha_{qj}\sum_{i\ge j} E_{ik}\right).$$

Введем обозначения $H_{jk} = \sum_{i\ge j} D_{ik}$, $h_{jk} = -\sum_{i\ge j} E_{ik}$. Используя известную формулу изменения порядка суммирования $\sum_{i\ge j}\sum_{m,i} b_m \sum_{p\ge m} a_p = \sum_{p\ge j} a_p \sum_{m,j+1}^{p} b_m$ [4], учитывая равенство $\overline{R}_{jp} = \sum_{m,j+1}^{p}\overline{R}_m$ и обозначения (3), получаем $\sum_{i\ge j}\sum_{m,i} A_m^m = \sum_{i\ge j}\sum_{m,i}\sum_{p\ge m} m_{dp}\bar i_p\cdot\overline{R}_m = \sum_{p\ge j} m_{dp}\bar i_p\cdot\sum_{m,j+1}^{p}\overline{R}_m = \sum_{i\ge j} m_{di}\bar i_i\cdot\overline{R}_{ji}$;
$\sum_{i\ge j}\sum_{m,i} B_m^m = \sum_{i\ge j}\sum_{m,i}\sum_{p\ge m} m_{dp}\bar j_p\cdot\overline{R}_m = \sum_{i\ge j} m_{di}\bar j_i\cdot\overline{R}_{ji}$. Следовательно,

$$H_{jk} = \sum_{i\ge j} D_{ik} = \sum_{i\ge j}\left(J_i + m_{di}R_{ki}^x\right) + \sum_{i\ge j}\sum_{m,i} A_m^m = \sum_{i\ge j}\left[J_i + m_{di}\left(R_{ki}^x + R_{ji}^x\right)\right];$$

$$h_{jk} = -\sum_{i\ge j} E_{ik} = -\sum_{i\ge j} m_{di}R_{ki}^y + \sum_{i\ge j}\sum_{m,i} B_m^m = \sum_{i\ge j} m_{di}\left(R_{ji}^y - R_{ki}^y\right).$$

Далее имеем

$$\sum_{i,j}^{k-1} A_{i+1}^k = \sum_{i,j}^{k-1}\sum_{m\ge k} m_{dm}\bar i_m\cdot\overline{R}_{i+1} = \sum_{m\ge k} m_{dm}\bar i_m\cdot\sum_{i,j}^{k-1}\overline{R}_{i+1} = \sum_{m\ge k} m_{dm}\bar i_m\cdot\overline{R}_{jk} = \sum_{i\ge k} m_{di}\bar i_i\cdot\overline{R}_{jk}.$$

Для j-го и k-го звеньев из несущей цепочки i-го звена имеет место равенство $\overline{R}_{jk} = \overline{R}_{ji} - \overline{R}_{ki}$.
Следовательно, $\sum_{i,j}^{k-1} A_{i+1}^k = \sum_{i\ge k} m_{di}\bar i_i\cdot\left(\overline{R}_{ji} - \overline{R}_{ki}\right) = \sum_{i\ge k} m_{di}\left(R_{ji}^x - R_{ki}^x\right)$. Аналогично получим

$$\sum_{i,j}^{k-1} B_{i+1}^k = \sum_{i,j}^{k-1}\sum_{m\ge k} m_{dm}\bar j_m\cdot\overline{R}_{i+1} = \sum_{i\ge k} m_{di}\left(R_{ji}^y - R_{ki}^y\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{i,j}^{k-1} A_{i+1}^k + \sum_{i\ge k} D_{ik} = \sum_{i\ge k}\left[m_{di}\left(R_{ji}^x - R_{ki}^x\right) + J_i + m_{di}\left(R_{ki}^x + R_{ki}^x\right)\right] = \sum_{i\ge k}\left[J_i + m_{di}\left(R_{ji}^y + R_{ki}^y\right)\right] = H_{kj},$$

$$-\sum_{i,j}^{k-1} B_{i+1}^k + \sum_{i\ge k} E_{ik} = \sum_{i\ge k}\left[m_{di}\left(R_{ki}^y - R_{ji}^y\right) + m_{di}\left(R_{ki}^y - R_{ki}^y\right)\right] = h_{kj}.$$

Отсюда получим искомые выражения (13)–(15). *Утверждение доказано.*

Если все ветви ШМ открыты и содержат более 2 звеньев, то для выписывания H_{ki}, h_{ki} рекомендуется использовать:

Утверждение 5. Величины H_{ki} и h_{ki} можно выписывать по следующим формулам:

$$H_{ki} = \sum_{j\ge k}\left(J_j + \sum_{m,i+1}^{k} J_{jm}^c + 2\sum_{m,k+1}^{j} J_{jm}^c\right), \quad h_{ki} = \sum_{j\ge k}\sum_{m,i+1}^{k} J_{jm}^s, \quad h_{kk} = 0. \qquad (16)$$

Доказательство. По определению $R_{ij}^{y} = \overline{R}_{ij} \cdot \overline{j}_j$. Тогда из (15) с учетом равенства $\overline{R}_{ij} = \overline{R}_{ik} \cdot \overline{R}_{kj}$ получим $h_{ki} = \sum_{j\ge k} m_{dj}\left(\overline{R}_{kj} \cdot \overline{j}_j - \overline{R}_{ij} \cdot \overline{j}_j\right) = -\sum_{j\ge k} m_{dj} \overline{R}_{ik} \cdot \overline{j}_j$. Далее имеем

$$\overline{R}_{ik} \cdot \overline{j}_j = \sum_{m,i+1}^{k} \overline{R}_m \cdot \overline{j}_j = \sum_{m,i+1}^{k} R_m \overline{e}_m \cdot \overline{j}_j = \sum_{m,i+1}^{k} R_m \cos\left(\alpha_{mj} + \pi/2\right) = -\sum_{m,i+1}^{k} R_m \sin\alpha_{mj}.$$

Отсюда $h_{ki} = \sum_{j\ge k} m_{dj} \sum_{m,i+1}^{k} R_m \sin\alpha_{mj} = \sum_{m,i+1}^{k} \sum_{j\ge k} J_{jm}^{s}$, что и требовалось доказать. Аналогично из (14) получим $H_{ki} = \sum_{j\ge k}\left[J_j + m_{dj}\left(\overline{R}_{kj} \cdot \overline{i}_j + \overline{R}_{ij} \cdot \overline{i}_j\right)\right] = \sum_{j\ge k} J_j + \sum_{j\ge k} m_{dj}\left(\overline{R}_{ik} \cdot \overline{i}_j + 2\overline{R}_{kj} \cdot \overline{i}_j\right)$. Далее имеем $\overline{R}_{ik} \cdot \overline{i}_j = \sum_{m,i+1}^{k} R_m \overline{e}_m \cdot \overline{i}_j = \sum_{m,i+1}^{k} R_m \cos\alpha_{mj}$, $\overline{R}_{kj} \cdot \overline{i}_j = \sum_{m,k+1}^{j} R_m \overline{e}_m \cdot \overline{i}_j = \sum_{m,k+1}^{j} R_m \cos\alpha_{mj}$. Следовательно, $H_{ki} = \sum_{j\ge k} J_j + \sum_{j\ge k} m_{dj}\left(\sum_{m,i+1}^{k} R_m \cos\alpha_{mj} + 2\sum_{m,k+1}^{j} R_m \cos\alpha_{mj}\right)$. Учитывая введённые обозначения, получим искомую формулу вычисления H_{ki}. *Утверждение доказано.*

С целью эффективной алгоритмизации процесса выписывания коэффициентов H_{ki}, h_{ki} рекомендуем использовать:

Утверждение 6. H_{ki} и h_{ki} можно выписывать по следующим рекуррентным формулам:

$$H_{kk} = J_k + \sum_{j,k}\left(H_{jj} + 2A_{jk}\right), \quad k=N, N-1,\ldots,1; \tag{17}$$

$$H_{ki-1} = H_{ki} + A_{ki-1}, \quad h_{ki-1} = h_{ki} + a_{ki-1}, \quad i=k,\ k-1,\ \ldots,\ 2. \tag{18}$$

Доказательство. Используя введенные обозначения из (16) для $i = k$, получим

$$H_{kk} = \sum_{j\ge k}\left(J_j + 2\sum_{m,k+1}^{j} J_{jm}^{c}\right). \tag{19}$$

Учитывая равенство $\sum_{j>k} b_j = \sum_{i,k}\sum_{j\ge i} b_j$ и следующее из него равенство $\sum_{j\ge k}\sum_{m,k+1}^{j} a_m = \sum_{j>k}\sum_{m,k+1}^{j} a_m =$

$$= \sum_{i,k}\sum_{j\ge i}\sum_{m,i}^{j} a_m,$$ из (19) получаем $$H_{kk} = J_k + \sum_{j>k}\left(J_j + 2\sum_{m,k+1}^{j} J_{jm}^{c}\right) = J_k + \sum_{i,k}\sum_{j\ge k}\left(J_j + 2\sum_{m,i}^{j} J_{jm}^{c}\right) =$$

$$= J_k + \sum_{i,k}\sum_{j\ge k}\left(J_j + 2\sum_{m,i+1}^{j} J_{jm}^{c} + 2J_{ji}^{c}\right) = J_k + 2\sum_{i,k}\sum_{j\ge i} J_{ji}^{c} + \sum_{i,k}\sum_{j\ge i}\left(J_j + 2\sum_{m,i+1}^{j} J_{jm}^{c}\right) =$$

$= J_k + 2\sum_{i,k}\sum_{j\ge i} J_{ji}^{c} + \sum_{i,k} H_{ii} = J_k + 2\sum_{i,k} A_{ii-1} + \sum_{i,k} H_{ii} = J_k + 2\sum_{i,k} A_{ik} + \sum_{i,k} H_{ii}$, что и требовалось получить для рекуррентного представления формулы вычисления величины H_{kk}.

Из (16) с использованием введенных обозначений получим

$$h_{ki} = \sum_{j\ge k}\sum_{m,i+1}^{k} J_{jm}^{s} = \sum_{j\ge k}\left(J_{ji+1}^{s} + \sum_{m,i+2}^{k} J_{jm}^{s}\right) = \sum_{j\ge k} J_{ji+1}^{s} + \sum_{j\ge k}\sum_{m,i+2}^{k} J_{jm}^{s} = \sum_{j\ge k} J_{ji+1}^{s} + h_{ki+1} = a_{ki} + h_{ki+1}.$$

Если теперь в формуле $h_{ki} = a_{ki} + h_{ki+1}$ выполнить декремент индекса i, то получим искомую формулу (18).

Из (16) с использованием введенных обозначений получим

$$H_{ki} = \sum_{j\ge k}\left(J_j + 2\sum_{m,k+1}^{j} J_{jm}^{c} + \sum_{m,i+1}^{k} J_{jm}^{c}\right) = \sum_{j\ge k}\left(J_j + 2\sum_{m,k+1}^{j} J_{jm}^{c} + \sum_{m,i+2}^{k} J_{jm}^{c} + J_{ji+1}^{c}\right) =$$

$$= H_{k,i+1} + \sum_{j,i+1} J^c_{ji+1} = H_{k,i+1} + A_{ki}\,.$$

После декремента индекса i получим искомую формулу (18). *Утверждение доказано.*

4. Векторно-матричный вид РУД ШМ. Любое представление УД ШМ можно записать в векторно-матричном виде. РУД ШМ не являются исключением.

Утверждение 7. РУД ШМ имеют следующую векторно-матричную запись:

$$H\cdot\ddot{\alpha} + h\cdot\dot{\alpha}^2 - G - M_r = S\cdot M\,, \tag{20}$$

где использованы квадратные NxN матрицы H, h, S и вектор-столбцы $\ddot{\alpha} = (\ddot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_2, ..., \ddot{\alpha}_N)^T$, $\dot{\alpha}^2 = (\dot{\alpha}_1^2, \dot{\alpha}_2^2, ..., \dot{\alpha}_N^2)^T$, $G = (G_1, G_2, ..., G_N)^T$, $M_r = (M_{r1}, M_{r2}, ..., M_{rN})^T$, $M = (M_1, M_2, ..., M_N)^T$, N – общее количество звеньев ШМ. Диагональные (i=k) и поддиагональные (i<k) элементы H_{ki} симметричной положительно-определённой матрицы инерционных коэффициентов $H = \{H_{ki}\}_{NxN}$ вычисляются по формуле

$$H_{ki} = \begin{cases} J_k - \text{если } i = k, \\ 0 - \text{если } i < k \text{ и } i \notin \{1,...,k\}, \\ m_k d_k R_{i+1} \cos(\bar{e}_{i+1}, \bar{i}_k) - \text{если } i < k \text{ и } i \in \{1,...,k\}. \end{cases} \tag{21}$$

Поддиагональные (i<k) элементы h_{ki} кососимметричной матрицы коэффициентов инерционных сил $h = \{h_{ki}\}_{NxN}$ вычисляются по формуле

$$h_{ki} = \begin{cases} 0 - \text{если } i \notin \{1,...,k\}, \\ m_k d_k R_{i+1} \sin(\bar{e}_{i+1}, \bar{i}_k) - \text{если } i \in \{1,...,k\}. \end{cases} \tag{22}$$

В (21), (22) индекс i+1 равен номеру звена следующего за i-м звеном на пути к k-му звену. Элементы S_{ki} верхней $i \ge k$ треугольной матрицы распределения моментов движущих сил приводов $S = \{S_{ki}\}_{NxN}$ вычисляются по формуле

$$S_{ki} = \begin{cases} 1 - \text{ если } i = k, \\ 0 - \text{ если } i > k \text{ и } k \ne i{-}1 \\ -1 - \text{ если } i > k \text{ и } k = i{-}1. \end{cases} \tag{23}$$

В (23) индекс i-1 равен номеру базы i-го звена.

Доказательство. Из [1] или введения настоящей статьи следует, что для выписывания УД ШМ можно использовать следующий алгоритм:

1. В качестве первого по порядку выбрать одно из звеньев, образующих шарнир с опорой (стойкой, землёй).

2. Все звенья последовательно занумеровать числами 2, 3, ..., N. Рекомендуется применять под системную нумерацию звеньев [4].

3. Мысленно разорвать шарниры между опорой и звеньями (кроме шарнира между опорой и первым звеном) так, чтобы от любого звена до опоры существовал единственный путь, проходящий через звенья и их шарниры. Разорванные шарниры заменить силами реакции $\bar{F}_{ri}$ отброшенных связей, где i - номер звена, образующего с опорой разорванную связь.

4. Последовательно для к =1, 2, ... , N составить систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, раскрыв суммы в следующем выражении:

$$\sum_{i}^{k-1}\left(J^c_{ki+1}\ddot{\alpha}_i + J^s_{ki+1}\dot{\alpha}_i^2\right) + J_k\ddot{\alpha}_k + \sum_{j,k}\sum_{i\ge j}\left(J^c_{ij}\ddot{\alpha}_i - J^s_{ij}\dot{\alpha}_i^2\right) - G_k - M_{rk} = M_k - \sum_{i,k} M_i\,. \tag{24}$$

Здесь M_{rk} – момент силы, действующий на k-е звено и обусловленный (вызванный) силами реакции отброшенных связей и/или изоляции ШМ от воздействия внешней среды ,

$$M_{rk} = M_{ok} + L_k \bar{k}\cdot\bar{p}_k \times \bar{F}_{rk} + \sum_{i,k} R_i \bar{k}\cdot\bar{e}_i \times \sum_{j\ge i} \bar{F}_{rj}\,, \tag{25}$$

где $\bar{k}$ – единичный вектор нормали к плоскости движения; $\bar{F}_{rk}$ – сила реакции, приложенная к k-му звену (если k-е звено не замкнуто на опору, то $\overline{F}_{rk} = 0$); L_k – расстояние от оси вращения k-го звена до точки приложения силы $\overline{F}_{rk}$; M_{ok} – момент силы относительно оси $O_k\overline{k}$, обусловленный воздействием опоры на k-е звено; $\overline{p}_k$ – орт, направленный из точки O_k в точку приложения силы $\overline{F}_{rk}$. Остальные величины формулы (24) описаны во введении.

Из (24) видно, что в k-м РУД множителем при $\ddot{\alpha}_k$ является число J_k, т.е. в матричном представлении РУД в матрице коэффициентов при угловых ускорениях на главной диагонали располагаются величины $J_1, J_2, ..., J_N$, что соответствует формуле (21). По определению индекс суммирования i в сумме $\sum_{i}^{k-1} a_i$ перебирает номера звеньев из несущей цепочки k-го звена, т.е. $i \in \{1..k\}$. Следовательно, при $i \notin \{1,...,k\}$ слагаемое $H_{ki}\ddot{\alpha}_i$ в k-м РУД отсутствует, т.е. $H_{ki} = 0$ при $i < k$ и $i \notin \{1,...,k\}$. При $i \in \{1,...,k\}$ имеем $H_{ki}\ddot{\alpha}_i = J^c_{ki+1}\ddot{\alpha}_i$. Учитывая формулу вычисления величины J^c_{ki+1}, получаем $H_{ki} = m_k d_k R_{i+1} \cos(\overline{e}_{i+1}, \overline{i}_k)$ при i<k и $i \in \{1,...,k\}$, что соответствует доказываемой формуле (21). Матрица коэффициентов при ускорениях в РУД механической системы является матрицей коэффициентов квадратичной формы кинетической энергии T этой системы, т. е. $T = \ddot{\alpha}^T H \ddot{\alpha}$, где H – симметричная и положительно-определённая матрица [3].

Аналогично доказывается формула (22) вычисления коэффициентов матрицы h. Её кососимметричность следует из формулы (24). Формула (23) формирования элементов матрицы S следует из правой части РУД (24) и определения знака суммирования $\sum_{i,k} M_i$. *Утверждение доказано.*

Заключение. Полученные представления УД ШМ и предложенные рекомендации по их использованию позволяют упростить процессы вывода УД для конкретных ШМ. Рекуррентные формулы вычисления коэффициентов УД позволяют эффективно выписывать УД конкретных ШМ, а также автоматизировать этот процесс.

Литература

1. Телегин, А.И. Общий и частные виды уравнений динамики систем абсолютно твёрдых тел / А.И. Телегин //Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». -2007. -Вып. 9. -№11(83). -С. 3—13.

2. Телегин, А.И. Новые формулы для динамического силового анализа плоских рычажных механизмов / А.И. Телегин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». - 2007. - Вып. 10. - №25(97). - С. 3-11.

3. Лурье, А.И. Аналитическая механика /А.И. Лурье. - М.: Физматгиз, 1961. -824 с.

4. Телегин, А.И. Уравнения математических моделей механических систем: учеб. пособие / А.И. Телегин. - Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1999. - 181 с.

Поступила в редакцию 31 мая 2010 г.

Телегин Александр Иванович. Доктор физико-математических наук, профессор, декан электротехнического факультета, заведующий кафедрой «Системы управления и математическое моделирование», Южно-Уральский государственный университет (филиал в г. Миассе). Область научных интересов - математическое моделирование управляемых систем. Тел.: (3513) 53-22-16.

Alexander I. Telegin. The doctor of physical-mathematical science, professor, the dean of the Electrotechnical faculty of the Miass branch of the South Ural State University, the head of «Control system and mathematical modeling» department. The area of scientific interests - mathematical modeling of the controllable systems. Tel.: (3513) 53-22-16.

Кайгородцев Максим Игоревич. Аспирант кафедры «Системы управления и математическое моделирование», Южно-Уральский государственный университет. Область научных интересов - имитационное моделирование систем и процессов.

Maxim I. Kaygorodtsev. The postgraduate student of «Control system and mathematical modeling» department of the South Ural State University. The area of scientific interests - simulation modeling of the systems and processes.