Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ЮЖНО–УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Национально исследовательский университет)

Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра уравнение математической физики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, доцент кафедры
математического анализа
ФГБОУ ВПО «ЧелГУ»,
канд. физ.-мат. наук
Н.Д. Пазий
____
____________________ 10.06.2016

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой математического
и функционального анализа,
ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ»(НИУ),
д-р физ.-мат. наук
доцент В.Л.Дильман
____
____________________ 06.06.2016

РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА – ЖЕЛТОВА – КОЧИНОЙ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

ЮУрГУ – 010100.62–2016–12–013 – 1881. ВКР

Руководитель работы
д. ф.–м. н., доцент
__________/М.А. Сагадеева/
"__06__"__06________ 2016 г.

Автор
Студент группы ММиКН–471
__________/Р.Т.Абубакирова/
"__06__"__06________ 2016 г.

Нормоконтролер, к.ф.-м.н.,
доцент______/М.А. Корытова/
"__06__"__06________ 2016 г.

Челябинск
2016

Министерство науки и образования Российской Федерации
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра математического и функционального анализа

З А Д А Н И Е

студенту группы ММиКН – 471
Абубакировой Радмиле Талгатовне
на выполнение выпускной квалификационной работы
по направлению 010100.62 – Математика

1. Тема работы

Решение одного нестационарного уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в прямоугольнике

(Утверждена приказом по университету от «15» апреля 2016 г. №661)

2. Перечень подлежащих исследованию вопросов

2.1. Литературные указания (основные источники)

1. Свиридюк, Г. А. Линейные уравнения соболевского типа / Г.А.Свиридюк, В.Е.Федоров // Челябинский государственный ун–т: Челябинск. – 2003. – 179С.
2. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики – изд.4–е / В.С.Владимиров // Главная редакция физико-математической литературы: Наука. – 1981. – 512С.
3. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И.Баренблатт, Ю.П.Желтов, И.Н.Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960.– Т.24, №50. – С. 852–864.
4. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А.Свиридюк, С.А.Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2012. –№40(229).– С.7–18.

2.1.1. История вопроса

Ранее уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной рассматривали многие исследователи в различных аспектах. Однако рассматривался только случай, когда коэффициенты уравнения не зависели от времени.

Мы рассматриваем уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной с коэффициентами, зависящими от времени.

2.2. Постановка задачи

- Решение задачи Штурма–Лиувилля.
- Решение уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной на прямоугольнике методом Фурье.
- Получение решения для однородного и неоднородного нестационарного уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной.

2.3. Методы исследования

При доказательстве использовались методы уравнений частных производных, математического и функционального анализа.

Календарный план подготовки дипломной работы

Наименование этапов дипломной работы	Срок выполнения этапов работы	Отметка о выполнении
1. Обзор литературы	21.09.15 – 18.10.15	
2. Получение результатов, формулировка выводов, структурирование текста.	19.10.15 – 30.03.16	
3. Подготовка текста дипломной работы	1.02.16 – 21.04.16	
4. Проверка и рецензирование работы руководителем, исправление замечаний	30.04.16 – 20.05.16	
5. Подготовка доклада и текста выступления. Внешнее рецензирование	20.05.16 – 10.06.16	
6. Защита дипломной работы	13.06.16 – 17.06.16	

3. **Дата выдачи задания «20» сентября 2015 г.**

Руководитель работы

Кандидат физ.-мат.наук, доцент (Сагадеева М.А.)

Задание принял к исполнению (Абубакирова Р.Т.)

УДК 517.9

Абубакирова Р.Т.

Решение нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в прямоугольнике/Р.Т. Абубакирова. — Челябинск, 2016. - 24 с.

Выпускная квалификационная работа посвящена решению нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной и решение задачи Штурма – Лиувилля на прямоугольнике для нахождения собственных функций и собственных значений.

Список лит. – 13 назв.

Оглавление

Обозначения и соглашения

1) Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами готического алфавита, кроме:

   $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

   $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел; $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$;

   $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

   $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

2) Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского и греческого алфавитов, кроме операторов, которые обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

   $C(J; U)$ — непрерывные функции из $J \subset \mathbb{R}$ в пространстве U;

   $C^1(J; U)$ — непрерывные дифференцируеме функции из $J \subset \mathbb{R}$ в пространстве U.

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область в $\mathbb{R}^n$ с бесконечногладкой границей. Рассмотрим уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной [2] (БЖК)

$$(\lambda - \Delta)U_t = \alpha \Delta U + f \tag{1}$$

моделирующее динамику вязкоупругой жидкости в трещинновато-пористой среде [2], [5]. Здесь параметр λ и скалярная функция $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ характеризуют среду; функция $f = f(x, y, t)$ играет роль внешней нагрузки. В работе [8] было показано, что отрицательные значения параметра λ имеют физический смысл, и поэтому в этом уравнении оператор в правой части может зануляться.

Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной является одной из основных моделей, иллюстрирующих применение теории уравнений соболевского типа, развиваемой проф.Г.А. Свиридюком и его учениками. Ранее уравнение (1) с различными начальными и краевыми условиями рассматривались многими авторами. В отличие от предыдущих исследований мы рассматриваем уравнение (1) в нестационарном случае. Задачу Дирихле будем рассматривать на прямоугольнике $\Pi = [0, a] \times [0, b]$ с граничными условиями $U|_{\partial\Pi} = 0$ и начальными условиями

$$U(0, x, y) = U(0) = U_0(x, y) = 3 \sin \frac{3\pi}{a} x \sin \frac{3\pi}{b} y - 5 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{2\pi}{b} y$$

при нахождении ее решения будем использовать метод Фурье.

Работа посвящена решению нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в прямоугольнике методом Фурье. В работе рассмотрена задача Штурма – Лиувилля на нахождение собственных значений и собственных функций краевых задач оператора Лапласа.

Целью работы было освещение следующих вопросов:

1. Решение задача Штурма – Лиувилля на прямоугольнике для нахождения собственных функций и собственных значений;

2. Решение стационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной;

3. Нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Ранее уравнение (*) с различными начальными и краевыми условиями рассматривались многими авторами. В отличие от предыдущих исследований мы рассматриваем уравнение (*) в нестационарном случае. Задачу Дирихле будем рассматривать на прямоугольнике $\Pi = [0,a] \times [0,b]$ с граничными условиями $U|_{\partial\Pi} = 0$ и начальными условиями

$$U(0,x,y) = U(0) = U_0(x,y) = 3\sin\frac{3\pi}{a}x\sin\frac{3\pi}{b}y - 5\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{2\pi}{b}y$$

при нахождении ее решения будем использовать метод Фурье.

1. Предварительные сведения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область в $\mathbb{R}^n$ с бесконечногладкой границей. Рассмотрим уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной [2] (БЖК)

$$(\lambda - \Delta)U_t = \alpha \Delta U + f \tag{2}$$

с однородным граничным условием Дирихле и начальным условием

$$U(0) = U_0. \tag{3}$$

Спектр оператора Лапласа с граничным условием Дирихле $\sigma(\Delta)$ неотрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Занумеруем собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора Δ по неубыванию с учетом кратности.

Теорема. [13] *Пусть $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\alpha \in C([0,T);\mathbb{R}_+)$, тогда при любых $U_0 \in L_2(\Omega), f \in C(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$ существует единственное сильное решение $U \in C^1(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$ задачи (2)–(3), имеющее вид*

$$U(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\frac{\lambda_k}{\lambda+\lambda_k}\int\limits_0^t \alpha(\tau)d\tau} \langle U_0, \varphi_k\rangle\varphi_k +$$

$$+\sum_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_0^t e^{-\frac{\lambda_k}{\lambda+\lambda_k}\int\limits_s^t \alpha(\tau)d\tau} \frac{\langle u(s), \varphi_k\rangle\varphi_k}{\lambda+\lambda_k}\, ds.$$

2. Задача Штурма – Лиувилля

На прямоугольнике $\prod = [0, a] \times [0, b]$ рассмотрим задачу на нахождения собственных функций и собственных значений оператора Лапласа для краевой условии следующего вида

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = \mu U \tag{1}$$

$$\begin{cases} U(0, y) = U(a, y) = 0, \\ U(x, 0) = U(x, b) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Решаем задачу Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа на прямоугольнике с помощью метода разделения переменных метод Фурье.

Собственные функции будем искать в виде

$$U(x, y) = X(x)Y(y) \tag{3}$$

Подставляя это выражение в уравнение (1) получим

$$U(x, y) = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = \mu X(x)Y(y).$$

Разделим это выражение на $X(x)Y(y)$ и получим следующее равенство

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu - \frac{Y''(y)}{Y(y)} \tag{4}$$

Левая часть равенства (4) не зависит от y, а правая от x. Следовательно, эти выражения не зависят ни от x ни от y, то есть равны постоянной. Обозначая эту постоянную ν из (4) уравнения получаем два уравнения

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \nu, \tag{5}$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \mu - \nu. \tag{6}$$

1. Решим задачу по переменной x.

Составим задачу для уравнения (5) с учетом граничного условия (2)

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = \nu, \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases}$$

Найдем решение системы. Для этого запишем уравнение в виде

$$X''(x) - \nu X(x) = 0. \tag{7}$$

Составим для этого дифференциального уравнения характеристическое уравнение

$$w^2 - \nu = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим три случая:

1) При $\nu > 0$ данное уравнение имеет два различных действительных корня $w = \pm\sqrt{\nu}$. Следовательно общее решение уравнения (7) примет вид

$$X(x) = M\exp(\sqrt{\nu}x) + N\exp(-\sqrt{\nu}x)$$

– где M и N постоянные.

Определим их значения из граничных условий:

$$X(0) = M + N = 0, X(a) = M\exp(\sqrt{\nu}a) + N\exp(-\sqrt{\nu}a)$$

Система уравнений имеет только нулевое решение: $M = 0$, $N = 0$, поэтому $X(x) \equiv 0$. Отсюда, при $\nu > 0$ задача не имеет решений.

2) При $\nu = 0$ характеристическое уравнение (8) имеет вид $X'' = 0$, общее решение будет иметь вид:

$$X(x) = Mx + N.$$

Из граничных условий получаем $M = N = 0$. Поэтому, и в этом случае задача (7) не имеет решений.

3) При $\nu < 0$ характеристическое уравнение будет иметь два комплексных корня $w = \pm\iota\sqrt{\nu}$. Общее решение уравнения (7) примет вид

$$X(x) = M\cos(\sqrt{-\nu}x) + N\sin(\sqrt{-\nu}x) \tag{9}$$

Подставим в уравнение (9) граничные условия и получим: $X(0) = M$, отсюда следует, что $M = 0$. Для того чтобы получить решение, N не должно равняться нулю. Поэтому ν ищем из условия

$$\sin(\sqrt{-\nu}a) = 0.$$

получим

$$\sqrt{-\nu} = \frac{\pi k}{a}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда следует что решение задачи (7) существует при значениях

$$\nu_n = -\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = N_n \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right). \tag{10}$$

2. Решим задачу по y

Теперь составляем задачу для уравнения (6)

$$\begin{cases} \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \mu - \nu, \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

Решаем аналогично первому случаю, рассмотрим уравнение

$$Y''(y) - (\mu - \nu)Y(y) = 0. \tag{11}$$

Для этого дифференциального уравнения составляем характеристическое уравнение

$$w^2 - \mu + \nu = 0$$

Вместо ν мы подставляем значение из первой задачи и решаем. Как и выше нам нужен только тот случай, когда характеристическое уравнение будет иметь два комплексных корня $w = \pm\sqrt{\mu + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}$, т.е.

$$\mu + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 < 0$$

Тогда общее решение уравнения (11) примет вид

$$Y(y) = P\cos\sqrt{-\mu - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}\,y + R\sin\sqrt{-\mu - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}\,y. \tag{12}$$

Подставим в уравнение (12) граничные условия и получаем

$$Y(0) = P, \quad \text{отсюда следует, что} \quad P = 0.$$

Для того чтобы получить решение, R не должно равняться нулю. Поэтому $-\mu - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$ ищем из условия

$$\sin\sqrt{-\mu - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}\,b = 0.$$

Решаем это уравнение и получим

$$\sqrt{-\mu - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2} = \frac{\pi k}{b}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда решение уравнения (11) будет при значениях

$$\mu + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 = -\left(\frac{\pi k}{b}\right)^2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\mu_{n,k} = -\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2.$$

Ставим значение $\mu + (\frac{\pi n}{a})^2 = -(\frac{\pi k}{b})^2$ в уравнение (12)

$$Y_k(y) = R_k \sin\left(\frac{\pi k}{b}y\right). \tag{13}$$

Полученные уравнения (10) и (13) подставляем в уравнение (3)

$$U_{n,k}(x,y) = N_n \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \cdot R_k \sin\left(\frac{\pi k}{b}y\right). \tag{14}$$

3. Решение стационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной

3.1. Однородный вид решения Баренблатта – Желтова – Кочиной

Рассмотрим уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной в виде

$$(\lambda - \Delta)U_t = \alpha \Delta U \tag{15}$$

моделирующее динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде. Где α и λ – вещественные параметры, характеризующие среду. Параметр $\alpha \in \mathbb{R}_+$, а параметр λ может принимать и отрицательные значения не противоречащая физическому смыслу задачи.

Задачу Дирихле будем рассматривать на прямоугольнике $\Pi = [0, a] \times [0, b]$ с граничными условиями $U|_{\partial\Pi} = 0$ и начальными условиями

$$U(0, x, y) = U(0) = U_0(x, y) = \sin\frac{\pi}{a}x \sin\frac{5\pi}{b}y - 5\sin\frac{3\pi}{a}x \sin\frac{2\pi}{b}y. \tag{16}$$

Заметим что уравнение (15) стационарно так как α не зависит от t.

Решаем уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной методом Фурье. Функцию $U = U(t, x, y)$ запишем как произведение от трех функций.

$$U(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y). \tag{17}$$

Функцию (15) подставим в уравнение (17) и получим

$$\lambda T'(t)X(x)Y(y) - T'(t)X''(x)Y(y) - T'(t)Y''(y)X(x) =$$

$$\alpha(T(t)X''(x)Y(y) + T(t)Y''(y)X(x))$$

делим на $X(x)Y(y)T(t)$ и получим следующее равенство

$$\frac{\lambda T'(t)}{T(t)} - \frac{T'(t)X''(x)}{X(x)T(t)} - \frac{T'(t)Y''(y)}{Y(y)T(t)} = \alpha\left(\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}\right)$$

Вместо $\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}$ подставим μ из задачи Штурма–Лиувилля. Решать равенство будем с помощью метода разделения переменных

$$(\lambda - \mu_{n,k})\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha\mu_{n,k}, \quad \lambda \neq \mu_{n,k}.$$

Левая часть равенства зависит от t, поэтому можем приравнять к $A_{n,k}$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\alpha\mu_{n,k}}{\lambda - \mu_{n,k}} = A_{n,k},$$

решим дифференциальное уравнение вида

$$T'(t) = A_{n,k}T(t)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = A_{n,k}T(t)$$

так как α не зависит от t то получим

$$\int \frac{dT(t)}{T(t)} = \int A_{n,k}dt.$$

Берем этот интеграл

$$\ln T = A_{n,k}t + \ln C_{n,k},$$

$$\ln T = \ln C_{n,k} \exp(A_{n,k}t),$$

и получим функцию

$$T(t) = C_{n,k} \exp\left(\frac{\alpha\mu_{n,k}}{\lambda - \mu_{n,k}}t\right).$$

Подставим полученный результат в функцию (17)

$$U(t,x,y) = \sum_{n,k} C_{n,k} \exp\left(\frac{\alpha\mu_{n,k}}{\lambda - \mu_{n,k}}t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi k}{b}y\right). \qquad (18)$$

3.2. Решение задачи Коши

Общий вид функции

$$U(t,x,y) = \frac{4}{ab}\sum_{n,k} C_{n,k}\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi k}{b}y\right)\cdot\exp\left(\frac{\pi^2\alpha(-n^2-k^2)}{\lambda a^2b^2+\pi^2n^2+\pi^2k^2}t\right).$$

Найдем из начальных условий значение $C_{n,k}$ для этого вычислим интеграл

$$C_{n,k} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a\left(\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{5\pi}{b}y - 5\sin\frac{3\pi}{a}x\sin\frac{2\pi}{b}y\right)\cdot$$

$$\sin\frac{\pi n}{a}xdx\sin\frac{\pi k}{b}ydy =$$

используем формулу произведения для синусов

$$= \frac{1}{ab}\left(\int_0^b\cos\frac{5\pi-\pi k}{b}ydy - \int_0^b\cos\frac{5\pi+\pi k}{b}ydy\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^a\cos\frac{\pi-\pi n}{a}xdx - \int_0^a\cos\frac{\pi+\pi n}{a}xdx\right) -$$

$$-\frac{5}{ab}\left(\int_0^b\cos\frac{2\pi-\pi k}{b}ydy - \int_0^b\cos\frac{2\pi+\pi k}{b}ydy\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^a\cos\frac{3\pi-\pi n}{a}xdx - \int_0^a\cos\frac{3\pi+\pi n}{a}xdx\right).$$

Так как

$$\int_0^a\cos\frac{\pi\mp\pi n}{a}xdx = \begin{cases}1, & \text{если } n=\pm1\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

$$\int_0^a\cos\frac{3\pi\mp\pi n}{a}xdx = \begin{cases}1, & \text{если } n=\pm3\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

$$\int_0^b\cos\frac{5\pi\mp\pi k}{b}ydy = \begin{cases}1, & \text{если } k=\pm5\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

$$\int_0^b\cos\frac{2\pi\mp\pi k}{b}ydy = \begin{cases}1, & \text{если } k=\pm2\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Это соотношение выражает свойство ортогональности собственных функций задачи Штурма – Лиувилля.

Получим значения

$$C_{1,5} = 1, \quad C_{3,2} = -5,$$

$$C_{-1,5} = -1, \quad C_{-3,2} = 5,$$

$$C_{1,-5} = -1, \quad C_{3,-2} = 5,$$

$$C_{-1,-5} = 1, \quad C_{-3,-2} = -5.$$

Подставляем полученные значения в уравнение (18), тогда решение в общем случае имеет вид

$$U(t,x,y) = \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{b}y\right) \exp\left(\frac{-26\pi^2\alpha}{\lambda a^2 b^2 + 26\pi^2}t\right) -$$

$$-5\sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{b}y\right) \cdot \exp\left(\frac{-13\pi^2\alpha}{\lambda a^2 b^2 + 13\pi^2}t\right). \qquad (19)$$

3.3. Неоднородное уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

Рассмотрим уравнение Бареблатта – Желтова – Кочиной такого вида

$$(\lambda - \Delta)U_t = \alpha \Delta U + f \tag{20}$$

моделирующее динамику вязкоупругой жидкости в трещиновато-пористой среде.Уравнение (20) рассматриваем со следующими параметрами

$$\begin{cases} \lambda = 3, \quad \alpha = 10, \\ U(x,y,0) = 3 \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} - 5 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}, \\ f(x,y,t) = t \cdot \sin \frac{3\pi x}{a} \cdot \sin \frac{3\pi y}{b} + t^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}. \end{cases}$$

Здесь α и λ - вещественные параметры, характеризующие среду; параметр $\alpha \in \mathbb{R}_+$, функция $f = f(x,y,t)$ играет роль внешних воздействий на систему (истоки, стоки).

Для однородного решения задачу Дирихле будем рассматривать на прямоугольнике $\Pi = [0,a] \times [0,b]$ с граничными условиями $U|_{\partial\Pi} = 0$.

Будем искать функцию $U = U(x,y,t)$. Общий вид будет выглядеть следующем образом

$$U = U_{\text{ одн.}} + U_{\text{ неодн.}}, \tag{21}$$

однородное решение ищем в виде

$$U_{\text{ одн.}} = \sum_{n,k} C_{n,k} e^{\frac{\alpha \mu_{n,k}}{\lambda - \mu_{n,k}} t} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi k y}{b}, \tag{22}$$

а неоднородное решение в виде

$$U_{\text{ неодн.}} = \sum_{n,k} \int_0^t e^{\mu_{n,k}(t-s)} \left(s \cdot \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} + \right.$$

$$\left. + s^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right) ds. \tag{23}$$

Для неоднородного уравнения (23) будем решать два интеграла

$$\sum_{n,k}\int_0^t e^{\mu_{n,k}(t-s)}\cdot s\cdot\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}ds,$$

$$\sum_{n,k}\int_0^t e^{\mu_{n,k}(t-s)}\cdot s^2\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}ds$$

берем эти интегралы по частям.

Для первого интеграла ответ будет таким

$$\sum_{n,k}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\left(-\frac{t}{\mu_{n,k}}-\frac{1}{\mu_{n,k}^2}+\frac{e^{\mu_{n,k}t}}{\mu_{n,k}^2}\right),$$

а для второго –

$$\sum_{n,k}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\left(-\frac{t^2}{\mu_{n,k}}-\frac{2t}{\mu_{n,k}^2}-\frac{2}{\mu_{n,k}^2}+\frac{2e^{\mu_{n,k}t}}{\mu_{n,k}^2}\right).$$

Тогда неоднородное решение имеет вид

$$U\ \text{неодн.}=\sum_{n,k}\left[\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\left(-\frac{t}{\mu_{n,k}}-\frac{1}{\mu_{n,k}^2}+\frac{e^{\mu_{n,k}t}}{\mu_{n,k}^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\left(-\frac{t^2}{\mu_{n,k}}-\frac{2t}{\mu_{n,k}^2}-\frac{2}{\mu_{n,k}^2}+\frac{2e^{\mu_{n,k}t}}{\mu_{n,k}^2}\right)\right].$$

Подставим соответствующие значения n и k

$$U\ \text{неодн.}=\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\left(\frac{b^2a^2}{9\pi^2b^2+9\pi^2a^2}t-\frac{a^4b^4}{(9\pi^2b^2+9\pi^2a^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{a^4b^4}{(9\pi^2b^2+9\pi^2a^2)^2}e^{\frac{-9\pi^2(b^2+a^2)}{a^2b^2}t}\right)+\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{b^2a^2}{9\pi^2b^2+9\pi^2a^2}t^2-\frac{2a^4b^4}{(9\pi^2b^2+9\pi^2a^2)^2}t-\frac{2a^4b^4}{(9\pi^2b^2+9\pi^2a^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2a^4b^4}{(9\pi^2b^2+9\pi^2a^2)^2}e^{\frac{\pi^2(b^2+4a^2)}{a^2b^2}t}\right).$$

Для того чтобы найти $C_{n,k}$, подставим начальные условия для однородного случая (22)

$$U(x,y,0) = \sum_{n,k} C_{n,k} \cdot \sin\frac{\pi n x}{a} \sin\frac{\pi k y}{b} = 3\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b} - 5\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b},$$

отсюда следует, что решение будет только при значениях $n = 3$, $k = 3$ и $n = 1$, $k = 2$.

Тогда однородное решение выглядит следующим образом

$$U_{\text{одн.}} = 3\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\exp\left(\frac{-90\pi^2 b^2 - 90\pi^2 a^2}{3a^2b^2 + 9\pi^2 b^2 + 9\pi^2 a^2}t\right) -$$

$$-5\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\exp\left(\frac{-10\pi^2 b^2 - 40\pi^2 a^2}{3a^2b^2 + \pi^2 b^2 + 4\pi^2 a^2}t\right).$$

Полученные значения подставляем в общий вид(21)

$$U(x,y,t) = 3\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\exp\left(\frac{-90\pi^2 b^2 - 90\pi^2 a^2}{3a^2b^2 + 9\pi^2 b^2 + 9\pi^2 a^2}t\right) -$$

$$-5\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\exp\left(\frac{-10\pi^2 b^2 - 40\pi^2 a^2}{3a^2b^2 + \pi^2 b^2 + 4\pi^2 a^2}t\right) +$$

$$+\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\left(\frac{b^2a^2}{9\pi^2b^2 + 9\pi^2a^2}t - \frac{a^4b^4}{(9\pi^2b^2 + 9\pi^2a^2)^2} +\right.$$

$$\left.+\frac{a^4b^4}{(9\pi^2b^2 + 9\pi^2a^2)^2}e^{\frac{-9\pi^2(b^2+a^2)}{a^2b^2}t}\right) + \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{b^2a^2}{9\pi^2b^2 + 9\pi^2a^2}t^2 - \frac{2a^4b^4}{(9\pi^2b^2 + 9\pi^2a^2)^2}t - \frac{2a^4b^4}{(9\pi^2b^2 + 9\pi^2a^2)^2} +\right.$$

$$\left.+\frac{2a^4b^4}{(9\pi^2b^2 + 9\pi^2a^2)^2}e^{\frac{\pi^2(b^2+4a^2)}{a^2b^2}t}\right).$$

4. Нестационарное уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

Уравнение Бареблатта – Желтова – Кочиной – это уравнение такого вида

$$(\lambda - \Delta)U_t = \alpha \Delta U + f, \tag{24}$$

моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде.Здесь $\alpha = \alpha(t)$ – функция зависящая от свойств среды и жидкости, функция $f = f(x, y, t)$ характеризует внешнее воздействие, а λ – вещественный параметр.

Для однородного решения задачу Дирихле будем рассматривать на прямоугольнике $\Pi = [0, a] \times [0, b]$ с граничными условиями $U|_{\partial\Pi} = 0$.

Уравнение (24) будем рассматривать со следующими параметрами

$$\begin{cases} \lambda = 3, \quad \alpha(t) = 2t, \\ U(x, y, 0) = 3\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b} - 5\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}, \\ f(x, y, t) = t \cdot \sin\frac{3\pi x}{a} \cdot \sin\frac{3\pi y}{b} + t^3 \cdot \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}. \end{cases}$$

Будем искать функцию $U = U(x, y, t)$.

Общий вид будет выглядеть следующем образом

$$U = U \text{ одн.} + U \text{ неодн.}, \tag{25}$$

однородное решение ищем в виде

$$U \text{ одн.} = \sum_{n,k} C_{n,k} e^{\frac{\mu_{n,k}}{\lambda - \mu_{n,k}} \cdot \int_0^t 2\tau d\tau} \sin\frac{\pi n x}{a} \sin\frac{\pi k y}{b}, \tag{26}$$

а неоднородное в виде

$$U \text{ неодн.} = \sum_{n,k} \int_0^t \exp\left(\frac{\mu_{n,k}}{\lambda - \mu_{n,k}} \int_s^t 2\tau d\tau\right) \left(s \cdot \sin\frac{3\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{b} + \right.$$

$$+s^3\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\Big)\,ds. \tag{27}$$

Решим два интеграла для неоднородного решения (27)

$$\int_0^t e^{\frac{\mu_{n,k}}{\lambda-\mu_{n,k}}(t^2-s^2)}\cdot s\cdot\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}ds,$$

$$\int_0^t e^{\frac{\mu_{n,k}}{\lambda-\mu_{n,k}}(t^2-s^2)}\cdot s^3\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}ds.$$

Заменяем $\frac{\mu_{n,k}}{\lambda-\mu_{n,k}}=\omega$, тогда интегралы будут иметь вид

$$e^{\omega t^2}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\int_0^t e^{-\omega s^2}sds,$$

$$e^{\omega t^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\int_0^t e^{-\omega s^2}s^3ds.$$

Для первого интеграла ответ

$$\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\cdot\frac{1}{2\omega}(e^{\omega t^2}-1),$$

а для второго –

$$\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\left(\frac{t^2}{2\omega}-\frac{1}{2\omega^2}+\frac{e^{\omega t^2}}{2\omega^2}\right).$$

Тогда неоднородное решение имеет вид

$$U\ \text{неодн.}=\sum_{n,k}\left[\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\left(e^{\frac{\mu_{n,k}}{\lambda-\mu_{n,k}}t^2}-1\right)\frac{\lambda-\mu_{n,k}}{\mu_{n,k}}+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\left(\frac{\lambda-\mu_{n,k}}{\mu_{n,k}}\cdot\frac{t^2}{2}+\frac{(\lambda-\mu_{n,k})^2\cdot(e^{\frac{\mu_{n,k}}{\lambda-\mu_{n,k}}t^2}-1)}{\mu_{n,k}^2}\right)\right].$$

Подставим соответствующие значения n и k

$$U\ \text{неодн.}=\frac{3a^2b^2+9\pi^2b^2+9\pi^2a^2}{-9\pi^2b^2-9\pi^2a^2}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\cdot$$

$$\cdot\left[\exp\left(\frac{-9\pi^2b^2-9\pi^2a^2}{3a^2b^2+9\pi^2b^2+9\pi^2a^2}t^2\right)-1\right]+\frac{3a^2b^2+\pi^2b^2+4\pi^2a^2}{-\pi^2b^2-4\pi^2a^2}\cdot$$

$$\cdot \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\left[\frac{t^2}{2}+\frac{3a^2b^2+\pi^2b^2+4\pi^2a^2}{-\pi^2b^2-4\pi^2a^2}\exp\left(\frac{-\pi^2b^2-4\pi^2a^2}{3a^2b^2+\pi^2b^2+4\pi^2a^2}t^2\right)-1\right].$$

Для того чтобы найти $C_{n,k}$, подставим начальные условия для однородного решения (26)

$$U(x,y,0)=\sum_{n,k}C_{n,k}\cdot\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi ky}{b}=3\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}-5\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b},$$

отсюда следует, что решение будет только при значениях $n=3$, $k=3$ и $n=1$, $k=2$.

Тогда однородное решение выглядит следующим образом

$$U_{\text{ одн.}}=3\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\exp\left(\frac{-9\pi^2b^2-9\pi^2a^2}{3a^2b^2+9\pi^2b^2+9\pi^2a^2}t^2\right)-$$

$$-5\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\exp\left(\frac{-\pi^2b^2-4\pi^2a^2}{3a^2b^2+\pi^2b^2+4\pi^2a^2}t^2\right).$$

Полученные значения подставляем в общий вид (25)

$$U(t,x,y)=3\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\exp\left(\frac{-9\pi^2b^2-9\pi^2a^2}{3a^2b^2+9\pi^2b^2+9\pi^2a^2}t^2\right)-$$

$$-5\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\exp\left(\frac{-\pi^2b^2-4\pi^2a^2}{3a^2b^2+\pi^2b^2+4\pi^2a^2}t^2\right)+$$

$$+\frac{3a^2b^2+9\pi^2b^2+9\pi^2a^2}{-9\pi^2b^2-9\pi^2a^2}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\cdot$$

$$\cdot\left[\exp\left(\frac{-9\pi^2b^2-9\pi^2a^2}{3a^2b^2+9\pi^2b^2+9\pi^2a^2}t^2\right)-1\right]+\frac{3a^2b^2+\pi^2b^2+4\pi^2a^2}{-\pi^2b^2-4\pi^2a^2}\cdot$$

$$\cdot \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\left[\frac{t^2}{2}+\frac{3a^2b^2+\pi^2b^2+4\pi^2a^2}{-\pi^2b^2-4\pi^2a^2}\exp\left(\frac{-\pi^2b^2-4\pi^2a^2}{3a^2b^2+\pi^2b^2+4\pi^2a^2}t^2\right)-1\right].$$

Заключение

В выпускной квалификационной работе рассмотрены следующие задачи:

1. Задача Штурма – Лиувилля на прямоугольнике для нахождения собственных функций и собственных значений;

2. Стационарное уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной:

2.1. Однородное уравнение;

2.2. Неоднородное уравнение;

3. Нестационарное уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Таким образом все поставленные задачи решены.

Список литературы

[1] *Антоневич, А.Б.* Функциональный анализ и его приложения / *А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно.* – Минск: БГУ, 2006. – 430 с.

[2] *Баренблатт, Г.И.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / *Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина* // ПММ. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 58-73.

[3] *Владимиров, В.С.* Уравнения математической физики / *В.С. Владимиров, В.В. Жаринов.* – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.

[4] *Гусейнов, Ф.Б.* О смешанной задаче для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной в цилиндрической по пространственным переменным области / *Ф.Б. Гусейнов, Б.А. Искендеров* // УМН – 2006. – Т.61, вып.2 (№ 368), С. 165-166.

[5] *Желтов, Ю.П.* О смешанной задаче для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной в цилиндрической по пространственным переменным области / *Ю.П. желтов, Б.А. Искендеров* // УМН – 2006. – Т.61, вып.2 (№ 368), С. 165-166.

[6] *Келлер, А.В.* Относительно спектральная теорема / *А.В. Келлер* // Вестник Челяб. гос. университета. Сер. Матем. Мех. – 1996. – № 1(3). – С. 62-66.

[7] *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин* – М., 1976. – 544 с.

[8] *Свиридюк,Г.А.* Об одной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости /*Г.А.Свиридюк* // Изв.вузов. Матем. – 1988. – № 1. – С. 74-79.

[9] *Свиридюк, Г.А.* Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / *Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер* //Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 60–68.

[10] *Свиридюк, Г.А.* Линейные уравнения соболевского типа / *Г.А. Свиридюк, В.Е. Фёдоров* – Челябинск, 2003. – 239 с.

[11] *Свиридюк, Г.А.* Неклассические модели математической физики / *Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина* // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 7–18.

[12] *Тихонов, А.Н.* Уравнения математической физики / *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский.* – М.: Наука, 1966. – 724 с.

[13] *Sagadeeva, M.A.* Nonautonomous Linear Oskolkov Model on a Geometrical Graph: the Stability of Solutions and the Optimal Control Problem / *M.A. Sagadeeva, G.A. Sviridyuk* // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2015. – V. 113. – P. 257–271.