

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Национальный исследовательский университет)

Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра математического и функционального анализа

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, доцент кафедры
дифференциальных и стохастических
уравнений

ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ»(НИУ),
д-р физ.-мат. наук,
доцент С.А. Загребина

Соглас

04.06.2016

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой математического
и функционального анализа

ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ»(НИУ),
д-р физ.-мат. наук,
доцент В.Л. Дильман

Дильман

07.06.2016

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЯ
БАРЕНБЛАТТА – ЖЕЛТОВА – КОЧИНОЙ
ЮУрГУ – 010100.62–2016–120.141. – 881. ВКР

Руководитель работы
к. ф.-м. н., доцент кафедры
уравнений мат.физики

Москевич /П.О. Москвичева/
"07" 06 2016 г.

Автор
Студент группы ММиКН–471
Лескова /Я.С. Александрова/
"07" 06 2016 г.

Нормоконтролер
к. ф.-м. н., доцент
Корытова /М.А. Корытова /
"07" 06 2016 г.

Челябинск
2016

Министерство науки и образования Российской Федерации
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра математического и функционального анализа

З А Д А Н И Е

студенту группы ММ-471
Александровой Яне Сергеевне
на выполнение выпускной квалификационной работы
по направлению 010100.62 – МАТЕМАТИКА

1. Тема дипломной работы

Исследование устойчивости уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной в ограниченной области.

(Утверждена приказом по университету от « 15 » апр. 2016 г. № 661)

2. Перечень подлежащих исследованию вопросов

1. Изучение литературы по исследуемой задаче.
2. Исследование метода фазового пространства для уравнений соболевского типа.
3. Исследование метода функций Ляпунова для нормированных пространств.
4. Изучение устойчивости нулевого решения уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной на основе метода функций Ляпунова.

3. Календарный план подготовки дипломной работы

| Наименование этапов дипломной работы | Срок выполнения этапов работы | Отметка о выполнении |
|--|-------------------------------|----------------------|
| 1. Обзор литературы | 23.09.15 – 23.10.15 | |
| 2. Получение результатов, формулировка выводов, структурирование текста. | 25.10.15 – 3.03.16 | |
| 3. Подготовка текста дипломной работы | 27.01.16 – 14.04.16 | |
| 4. Проверка и рецензирование работы руководителем, исправление замечаний | 29.04.16 – 24.05.16 | |

| | | |
|--|---------------------|---|
| 5. Подготовка доклада и текста выступления. Внешнее рецензирование | 25.05.16 – 1.06.16 |  |
| 6. Защита дипломной работы | 13.06.16 – 20.06.16 |  |

3. Дата выдачи задания «10» ноября 2015 г.

Руководитель работы

Кандидат физ.-мат.наук, доцент

кафедры мат.физики

(Москвичева П.О.)

Задание принял к исполнению

(Александрова Я.С.)

УДК 517.9

Александрова Я.С.

Исследование устойчивости уравнения Баренблатта — Желтова — Кочиной / Я.С. Александрова. — Челябинск, 2016. — 20 с.

В выпускной квалификационной работе рассматривается уравнение Баренблатта — Желтова — Кочиной, заданное в ограниченной области. Для данного уравнения рассматривается задача Коши — Дирихле. Исследуется устойчивость стационарного решения, которое понимается в терминах потока и функций Ляпунова.

Список лит. – 10 назв.

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Обозначения и соглашения | 4 |
| Введение | 6 |
| 1 Вспомогательные сведения | 8 |
| 1.1 Уравнение Баренблатта — Желтова — Кочиной | 8 |
| 1.2 Относительные p -ограниченные операторы | 9 |
| 1.3 Разрешающие группы операторов | 12 |
| 1.4 Функционал Ляпунова | 13 |
| 2 Исследование устойчивости уравнения Баренблатта — Желтова — Кочиной | 15 |
| 2.1 Фазовое пространство | 15 |
| 2.2 Устойчивость стационарного решения | 17 |
| Заключение | 19 |
| Список литературы | 20 |

Обозначения и соглашения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами готического алфавита. Исключение составляют множества с уже устоявшимися названиями, например, \mathbb{N} — множество натуральных чисел; \mathbb{R} — множество действительных чисел; \mathbb{C} — множество комплексных чисел; $L_p(\Omega)$ — пространства Лебега; $W_p^l(\Omega)$ — пространства Соболева и т.д. Причем здесь и далее через $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, обозначена некоторая область пространства \mathbb{R}^n . Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского или греческого алфавитов. Например, $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ обозначает линейную оболочку векторов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

2. Операторы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, причем $\text{dom } A$ — множество определения оператора A , $\text{dom } A = \{u \in \mathfrak{U} : \exists f \in \mathfrak{F}, Au = f\}$; $\text{im } A$ — образ оператора A (множество значений оператора A), $\text{im } A = \{f \in \mathfrak{F} : \exists u \in \mathfrak{U}, Au = f\} = A[\text{dom } A]$.

Запись $A : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ означает, что оператор A действует из пространства \mathfrak{U} в пространство \mathfrak{F} . Кроме того, символами \mathbb{I} и \mathbb{O} будем обозначать соответственно «единичный» и «нулевой» операторы, области определения которых ясны из контекста.

Множества операторов обозначаются рукописными заглавными буквами латинского алфавита, например,

$\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — множество линейных непрерывных операторов, определенных на пространстве \mathfrak{U} и действующих в пространство \mathfrak{F} ;

$\mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — множество линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве \mathfrak{U} и действующих в пространство \mathfrak{F} ;

$C^k(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — множество операторов, имеющих непрерывные производные Фреше до порядка $k \in \mathbb{N}$ включительно, определенных на пространстве \mathfrak{U} и действующих в пространство \mathfrak{F} ;

$C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — множество операторов, имеющих непрерывные производные Фреше любого порядка, определенных на пространстве \mathfrak{U} и действующих в пространство \mathfrak{F} .

Отметим, что вместо $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U})$, $\mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U})$ и $C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{U})$ для краткости будем писать соответственно $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $\mathcal{Cl}(\mathfrak{U})$ и $C^\infty(\mathfrak{U})$.

3. Все рассмотрения проводятся в вещественных банаховых пространствах, однако при рассмотрении «спектральных» вопросов вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированы движением «против часовой стрелки» и ограничивают область, лежащую «слева» при таком движении. Символами *const* обозначены разные, вообще говоря, константы.

4. Основные результаты каждого параграфа называются теоремами. Второстепенные и вспомогательные результаты называются леммами. Частные случаи условий теорем и лемм, а также выводы из них формулируются как следствия. Очевидные факты излагаются в замечаниях. Полные доказательства приведены только для новых результатов. Символ \square лежит в конце доказательства.

Введение

Уравнение Баренблатта — Желтова — Кочиной

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u \quad (1)$$

моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде [1], где параметры $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ характеризуют среду. Отметим, что внимательный анализ вывода уравнения (1), сделанный в [4], показал, что отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу. Кроме того, уравнение (1) может также служить моделью для влагопереноса в почве [10] и для теплопроводности в среде «с двумя температурами» [9].

Уравнение (1) относится к обширному классу уравнений соболевского типа. Впервые уравнения, не разрешенные относительно выделенной производной, впервые появились в работе А. Пуанкаре в 1885 году. Однако начало систематических исследований таких уравнений было положено в работе С.Л. Соболева [7], опубликованной в 1954 году. С тех пор уравнения соболевского типа активно изучались в связи с большим количеством приложений.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . Будем искать функцию $u = u(x, t)$ определенную в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$, и удовлетворяющую начальному

$$u(x, t) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (2)$$

и краевому

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \quad (3)$$

условиям. Нашей задачей будет изучение устойчивости в смысле Ляпунова единственного (нулевого) стационарного решения задачи (1)–(3).

Основы теории устойчивости уравнений соболевского типа заложены в [3], [5], где были изучены дихотомии линейных уравнений соболевского типа. В работе [8] описаны экспоненциальные дихотомии решений уравнений

Баренблатта — Желтова — Кочиной, определенных на геометрическом графике. В данной работе впервые применяется метод функционала Ляпунова для исследования устойчивости нулевого решения задачи (1)–(3). Он подробно описан в [2].

Наш подход заключается в редукции задачи (1)–(3) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \quad (4)$$

для абстрактного линейного однородного уравнения соболевского типа

$$Lu = Mu \quad (5)$$

и применении затем методов теории относительно p -ограниченных операторов [6].

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. В первой главе приводятся вспомогательные теоретические сведения: основные сведения теории относительно p -ограниченных операторов, разрешающих групп операторов, а так же метод функционала Ляпунова, модифицированный для случая нормированных пространств. Во второй главе проведена редукция задачи (1)–(3) к задаче (4)–(5), описано фазовое пространство уравнения (1), а также исследована устойчивость задачи (1)–(3), что и является основным результатом данной работы.

1. Вспомогательные сведения

1.1. Уравнение Баренблатта — Желтова — Кочиной

Пусть жидкость фильтруется в среде, состоящей из пористых блоков разделенных трещинами. Выберем масштаб длины так, чтобы объем, в котором протекает интересующий нас процесс, был велик по сравнению с размером блока. Закон фильтрации (закон Дарси) представим в виде

$$u_i \equiv \frac{K_{ij}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_i} \equiv -\frac{h^3}{\mu l} K_{ij}^0 \frac{\partial P}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где u_i — компоненты вектора скорости фильтрации u , μ — вязкость, h — среднее раскрытие трещин, l — размер блоков, K_{ij}^0 -тензор трещинной проницаемости.

Пусть давление в трещинах равно P_1 , в блоках — P_2 . Составим уравнение баланса жидкости в трещинах:

$$\frac{\partial(m_1 p)}{\partial t} + \operatorname{div}(p \bar{u}) - q = 0; \quad (7)$$

и в блоках, пренебрегая фильтрационным потоком:

$$\frac{\partial(m_2 p)}{\partial t} + q = 0, \quad (8)$$

m_1 — трещинноватая пористость (отношение объема трещин к общему объему), m_2 — пористость блоков(отношение объема пор в блоках к общему объему), p — плотность жидкости,

$$q = \alpha \frac{p K_2}{\mu} \frac{P_2 - P_1}{\mu}, \quad (9)$$

K_2 — проницаемость блоков, α -безмерный коэффициент, характеризующий породу. Трещинноватая пористость m_1 -мала, ею пренебрежем, а m_2 — пористость блоков-есть функция обоих давлений. Берем линейное приближение

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} = m_{20} \left(\beta_{21} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \beta_{22} \frac{\partial P_2}{\partial t} \right), \quad (10)$$

где $m_{20}, \beta_{21}, \beta_{22}$ считаем постоянными. Кроме того, для капельных жидкостей имеет место соотношение

$$p = p_0(1 + \beta_*(P_* - P_0)), \quad (11)$$

где $\beta_* = const$, а $P_* = P_{1,2}$ в зависимости от того, где оно рассматривается.

Подставляя (6), (9) — (11) в (7), (8) получаем

$$\begin{cases} \frac{p_0}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial P_1}{\partial x_j} - \frac{\alpha p_0 K_2}{l^2} \cdot \frac{P_2 - P_1}{\mu} \right) = 0; \\ m_{20} p_0 \left[-\beta_{21} \frac{\partial P_1}{\partial t} + (\beta_{22} + \beta_*) \frac{\partial P_2}{\partial t} \right] + \frac{\alpha p_0 K^2}{l^2} \cdot \frac{P_2 - P_1}{\mu} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Считаем среду однородной и изотропной, тогда $K_{ij} = K_{1\delta ij}$, и (12) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{\partial P_2}{\partial t} - \beta \frac{\partial P_1}{\partial t} + A(P_2 - P_1) = 0; \\ \chi \Delta P_1 - A(P_2 - P_1) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$\chi = \frac{K_1}{\mu}$ называют коэффициентом пьезопроводности. Представляя P_2 из второго уравнения (13) в первое, получим

$$[(\beta - 1) - \eta \Delta] \frac{\partial}{\partial t} P_1 = \chi \Delta P_1; \quad (14)$$

причем $\eta > 0$, а $\beta = \beta_{21}(\beta_{22} + \beta_*)$ может в силу (10) принимать значения меньше единицы. Причем физический смысл допускает, что оператор при производной по времени может не быть положительно определенным.

Уравнение (14) было получено в 1960 году Г.И. Баренблаттом, Ю.П. Желтовым и И.Н. Кочиной и с тех пор носит название своих авторов.

1.2. Относительные p -ограниченные операторы

Пусть \mathfrak{U} и \mathfrak{F} — банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, т.е. линейны и непрерывны.

Определение 1.1. Множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})\}$ называется *L-резолювентным множеством оператора M*, а множество $\mathbb{C} \setminus \rho^L(M) = \sigma^L(M)$ называется *L-спектром оператора M*.

Замечание 1.1. В случае, когда существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ L -резольвентное множество и L -спектр оператора M совпадают и резольвентным множеством и спектром операторов $L^{-1}M$ и LM^{-1} .

Определение 1.2. Оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$. $L_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}$ называют соответственно *L-резольвентной, правой L-резольвентной, левой L-резольвентной оператора M*.

Определение 1.3. Оператор M называется (L, σ) -ограниченным, если

$$\exists a > 0 \forall \mu \in \mathbb{C} (|\mu| > a) \Rightarrow \mu \in \rho^L(M).$$

Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Выберем в комплексной области \mathbb{C} замкнутый контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Тогда имеют смысл следующие интегралы от аналитических оператор-функций по замкнутому контуру:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\mu^L(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_\mu^L(M) d\mu.$$

Лемма 1.1. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ – проекторы.

Введем в рассмотрение пространства $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \text{im } P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{F}^1 = \text{im } Q$; и операторы $L_k(M_k)$, равные сужению оператора $L(M)$ на \mathfrak{U}^k , $k = 0, 1$.

Теорема 1.1. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда

- (i) операторы $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k, \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1, \mathfrak{F}^1)$, $M_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0, \mathfrak{F}^0)$;
- (iii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1, \mathfrak{U}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0, \mathfrak{U}^0)$. Из теоремы (1.1) вытекает существование операторов $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Следствие 1.1. Пусть оператор $M(L, \sigma)$ -ограничен, тогда при любом $\mu \in \rho^L(M)$ имеет место следующее представление:

$$(\mu L - M)^{-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} S^{k-1} L_1^1 Q.$$

Определение 1.4. Точка ∞ для L -резольвенты оператора M называется

- (i) устранимой особой точкой, если $H \equiv \mathbb{O}$;
- (ii) полюсом порядка p , если $H^p \neq \mathbb{O}$ и $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$;
- (iii) существенно особой точкой, если $H^q \neq \mathbb{O}$ при любом $q \in \mathbb{N}$.

Впрядь удобно ∞ в случае устранимой особой точки L -резольвенты оператора M считать полюсом порядка нуль. Если оператор $M(L, \sigma)$ -ограничен и ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то в этом случае оператор M будем называть (L, σ) -ограниченным.

В дальнейшем нас особо будет интересовать случай $(L, 0)$ -ограниченного оператора M . Из теоремы (1.1) вытекает, что оператор $M(L, 0)$ -ограничен, то $\ker L = \mathfrak{U}^0$, $im L = \mathfrak{F}^1$. Положим $\mathfrak{F}^2 = M[\ker L]$, справедлива.

Теорема 1.2. Пусть оператор $M(L, \sigma)$ -ограничен и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^1 \oplus \mathfrak{F}^2$, тогда *оператор $M(L, 0)$ -ограничен*.

Определение 1.5. Решением уравнения (5) называется *вектор-функция* $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathfrak{U})$, удовлетворяющая этому уравнению. Решение уравнения (5) называется *решением задачи Коши*.

$$u(0) = u_0, \tag{15}$$

если оно удовлетворяет (15).

Определение 1.6. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством уравнения (5)*, если

- (i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (5) лежит в \mathfrak{P} , т.е $u(t) \in \mathfrak{P} \forall t \in \mathbb{R}$;
- (ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (5).

Теорема 1.3. Пусть оператор M (L, p) -ограничен. Тогда подпространство \mathfrak{U}^1 является фазовым пространством уравнения (5).

1.3. Разрешающие группы операторов

Определение 1.7. Отображение $U^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{L}(\mathfrak{U}))$ называется *группой разрешающих операторов* уравнения (5), если

- (i) $U^s U^t = U^{s+t}$ при всех $s, t \in \mathbb{R}$;
- (ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ вектор функция $u(t) = U^t u_0$ - решение уравнения (5).

Следуя традиции, отождествим группу с ее множеством значений $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$. Группу $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ назовем *аналитической*, если она имеет аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость с сохранением свойств (i) и (ii) из определения (5).

Лемма 1.2. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$ - некоторый контур; оператор $M(L, \sigma)$ -ограничен. Тогда оператор-функция

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R} \quad (16)$$

является аналитической группой разрешающих операторов уравнения (5).

Определение 1.8. Пусть $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ -аналитическая группа разрешающих операторов уравнения (5). Тогда для нее можно определить *ядро*

$$\ker U^\bullet = \{u \in \mathfrak{U} : U^t u = 0 \text{ при некотором } t \in \mathbb{R}\}$$

и *образ*

$$im U^\bullet = \{u \in \mathfrak{U} : u = U^o u = 0\}.$$

Определение 1.9. Аналитическая группа разрешающих операторов уравнения (5) называется *вырожденной* если $\ker U^\bullet \neq \{0\}$. Вырожденная аналитическая группа разрешающих операторов уравнения (5) называется *разрешающей группой* уравнения (5), если ее образ $im U^\bullet$ совпадает с фазовым пространством.

Теорема 1.4. Пусть оператор $M(L, p)$ -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда существует единственная разрешающая группа уравнения (5).

Замечание 1.2. Искомая группа задается формулой (16).

Замечание 1.3. Если оператор $M(L, p)$ -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и $\ker L = \{0\}$, то существует оператор $L^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$. В этом случае разрешающую группу уравнения (5) можно представить тоже в виде (16).

1.4. Функционал Ляпунова

Пусть \mathfrak{U} — нормированное пространство. Говорят, что на \mathfrak{U} задан *локальный поток* (в дальнейшем — *поток*), если существует отображение S такое, что для любого $u \in \mathfrak{U}$ и некоторого $\tau = \tau(u) \in \mathbb{R}_+$ выполняются соотношения

- (i) $S = S(t, u) \in \mathfrak{U}$, при всех $t \in (-\tau; \tau)$; $S(0, u) = u$;
- (ii) $S(t+s, u) = S(t, S(s, u))$ при всех $t+s \in (-\tau, \tau)$.

Точка $u \in \mathfrak{U}$, такая, что

- (iii) $S(t, u) = u$, $t \in \mathbb{R}$,

называется *стационарной точкой* потока S .

Определение 1.10. Стационарная точка u потока S называется

- (i) *устойчивой* (по Ляпунову), если для любой окрестности O_u точки u существует (возможно, другая) окрестность O'_u той же точки, что $S(t, v) \in O'_u$ при всех $v \in O_u$ и $t \in \mathbb{R}_+$;
- (ii) *асимптотически устойчивой* (по Ляпунову), если она устойчива и для любой точки v из некоторой окрестности O_u точки u выполняется $S(t, v) \rightarrow u$ при $t \rightarrow \infty$.

Определение 1.11. Функционал $V \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ называется *функционалом Ляпунова* потока S , если

$$\dot{V}(u) \overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} (V(S(t, u)) - V(u)) \leq 0$$

для всех $u \in O_u$.

Теорема 1.5. Пусть u — стационарная точка потока S на O_u . Если для потока S существует функционал Ляпунова такой, что

- (i) $V(u) = 0$;
- (ii) $V(v) \geq \varphi(\|v - u\|)$; где φ — строго возрастающая непрерывная функция такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(r) > 0$ при $r \in \mathbb{R}_+$, то точка u устойчива.

Теорема 1.6. Пусть выполнены условия (1.5) и существует строго возрастающая непрерывная функция ψ такая, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(r) > 0$ при $r \in \mathbb{R}_+$, причем $\dot{V}(v) \leq -\psi(\|v - u\|)$, тогда точка u асимптотически устойчива.

2. Исследование устойчивости уравнения Баренблатта — Желтова — Кошиной

2.1. Фазовое пространство

Редуцируем задачу:

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u \quad (17)$$

$$u(x, t) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (18)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \quad (19)$$

к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \quad (20)$$

для абстрактного линейного однородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu \quad (21)$$

Для этого введем рассмотрение пространства

$$\mathfrak{U} = \{u \in W_p^{k+2}(\Omega) : u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega\},$$

$$\mathfrak{F} = W_p^k(\Omega), \quad \text{где } 1 < p < \infty, \quad k = 0, 1, \dots$$

и операторы $L = \lambda - \Delta : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$, $M = \alpha\Delta : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$.

Теорема 2.1. *При любых $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор $M(L, 0)$ -ограничен.*

Найдем L -спектр оператора M и убедимся в его ограниченности.

Пусть параметр $\lambda \in \sigma(\Delta)$, тогда $\ker L = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\}$, где φ_k — собственные функции однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ , причем их можно выбрать ортогональными в смысле скалярного произведения (\cdot, \cdot) из $L^2(\Omega)$.

Поскольку $\{\varphi_k\}$ является базисом в \mathfrak{U} и \mathfrak{F} , то возьмем произвольные векторы $u \in \mathfrak{U}$ и $f \in \mathfrak{F}$ и разложим их в ряды Фурье

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k \quad (22)$$

Теперь предположим, что при некоторых $f \in \mathfrak{F}$ и $\mu \in \mathbb{C}$ вектор u есть решение уравнения

$$(\mu L - M)u = f \quad (23)$$

подставим (22) в (23). А учитывая, что $L = \lambda - \Delta$, $M = \alpha\Delta$, получим

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu(\lambda - \lambda_k) - \alpha\lambda_k} = (\mu L - M)^{-1}f \quad (24)$$

Отсюда следует, что L -спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \{\mu_k = \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_k = \lambda\}\}.$$

Заметим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \alpha$. Поэтому L -спектр оператора M ограничен.

Для доказательства $(L, 0)$ -ограниченности оператора M воспользуемся теоремой (1.2). Рассмотрим два взаимоисключающих случая. Пусть сначала $\lambda \notin \{\lambda_k\}$. Тогда $\ker L = \{0\} = \mathfrak{U}^0$, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}^2 = M[\ker L] = \{0\}$, $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}$, и очевидно, $\mathfrak{F}^1 \oplus \mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}$.

Теперь пусть $\lambda \in \{\lambda_k\}$, тогда $\ker L = \text{span}\{\varphi_k : \lambda_k = \lambda\}$. Построим \mathfrak{F}^1 и \mathfrak{F}^2 . Из (24) найдем проектор

$$Q = \mathbb{I} - \sum_{\lambda_k=\lambda} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

а по проектору Q найдем пространство

$$\mathfrak{F}^1 = \{f \in \mathfrak{F} : \langle f, \varphi_k \rangle = 0, \lambda_k = \lambda\}.$$

Пространство $\mathfrak{F}^2 = M[\ker L] = \text{span}\{\varphi_k : \lambda_k = \lambda\}$. Очевидно, что $\mathfrak{F}^1 \oplus \mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}$.

Итак, задача (17)–(19) редуцирована к задаче (20)–(21), причем оператор M $(L, 0)$ -ограничен. Для нахождения фазового пространства уравнения (21) воспользуемся теоремой (1.3). Чтобы найти пространство \mathfrak{U}^1 , необходимо построить проектор P .

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L d\mu,$$

где замкнутый контур $\gamma \in \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M . В силу (24), проектор примет вид

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \mathbb{I} - \sum_{\lambda_k=-\lambda} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, & \text{если } \lambda \in \{\lambda_k\}. \end{cases} \quad (25)$$

Итак нами доказана

Теорема 2.2. *При любых $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и*

- (i) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_k\}$ фазовым пространством уравнения (21) служит все пространство \mathfrak{U} ;
- (ii) $\lambda \in \{\lambda_k\}$ фазовым пространством уравнения (21) служит подпространство $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_k \rangle = 0, \lambda_k = \lambda\}$.

2.2. Устойчивость стационарного решения

Применим результаты пункта 1.4 к нашей задаче. В пространстве \mathfrak{U} зададим норму пространства L_2 . Понятно, что пополнение пространства \mathfrak{U} по такой норме приведет нас к пространству L_2 , однако именно \mathfrak{U} является фазовым пространством нашей задачи. Таким образом на \mathfrak{U} существует поток, определяемый формулой

$$S(t, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) u e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

где замкнутый контур γ ограничивает область, содержащую L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M . Очевидно, точка нуль является стационарной точкой этого потока.

Рассмотрим по-отдельности два случая. Пусть $\lambda > 0$, в этом случае функцию Ляпунова определим следующим образом:

$$V = \int_{\Omega} (u_x^2 + \lambda u^2) dx. \quad (26)$$

Очевидно, что $V(0) = 0$ и поскольку $\lambda \in \mathbb{R}_+$, то

$$V(u) \geq c \| u \|_{\mathfrak{U}}^2,$$

где $c = \min \{1, \lambda\}$. Следовательно в силу теоремы (1.5) точка нуль устойчива по Ляпунову. Далее умножим (17) скалярно в L_2 на u .

$$\lambda \int_{\Omega} u_t u dx - \int_{\Omega} u_{txx} u dx = \alpha \int_{\Omega} u_{xx} u dx \quad (27)$$

и применяя интегрирование по частям с учетом условий (18)-(19) получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_x^2 + \lambda u^2) dx = -\alpha \int_{\Omega} u_x^2 dx. \quad (28)$$

Таким образом,

$$\dot{V}(u) = -2\alpha \| u \|^2 \quad (29)$$

Отсюда следует, что в силу теоремы (1.6) точка нуль асимптотически устойчива.

Рассмотрим случай когда $\lambda = 0$. Фазовым пространством задачи (17)-(19) служит подпространство \mathfrak{U}^1 . Введем в этом подпространстве норму

$$\| u \|^2 = \int_{\Omega} u_x^2 dx.$$

Зададим функцию Ляпунова как $V(u) = \| u \|$. В силу теоремы (1.5) получим устойчивость точки нуль. Аналогично предыдущим рассуждениям с учетом (27) и (28) получим, что (29) так же справедливо. Значит точка нуль является асимптотически устойчивой. Таким образом, доказана

Теорема 2.3. *При любых $\lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ нулевое решение задачи (17)-(19) асимптотически устойчиво.*

Заключение

В выпускной квалификационной работе исследована устойчивость нулевого решения уравнения Баренблатта — Желтова — Кочиной, заданного в ограниченной области. В качестве основного метода исследования применен метод функционала Ляпунова, модифицированный для случая полных нормированных пространств. Полученные результаты сформулированы в виде теоремы.

Данную теорему можно интерпретировать следующим образом. Параметры λ и α входящие в уравнение и характеризующие среду, имеют ключевое значение для оценки устойчивости. Анализ показал, что для асимптотической устойчивости требуется, чтобы $\alpha > 0$. Это условие будет выполнено в любом случае в силу физического смысла этого параметра, что было отмечено еще при постановке задачи. Таким образом, об устойчивости и асимптотической устойчивости мы можем судить по параметру λ . При $\lambda \geq 0$ нулевое решение задачи Коши — Дирихле для уравнения Баренблатта — Желтова — Кочиной асимптотически устойчиво.

Список литературы

- [1] Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // ПММ. – 1960. – Т. 24 – № 5. – С. 58–73.
- [2] Загребина, С.А. Второй метод Ляпунова в нормированных пространствах / С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2010: тез. докл. Воронеж. 2010. – С. 50–60.
- [3] Келлер, А.В. Исследование ограниченных решений линейных уравнений типа Соболева / А.В. Келлер // Челяб. гос. университет. – Челябинск. – 1997. – № 1(3). – С. 62–66.
- [4] Свиридович, Г.А. Линейные соболевские уравнения / Г.А. Свиридович// рук. доп. в ВИНИТИ –1985. – № 4265. – 40 с.
- [5] Свиридович, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридович, А.В. Келлер // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 60–68.
- [6] Свиридович, Г.А. Линейные уравнения соболевского типа / Г.А. Свиридович, Ф.Е. Федоров // Челябинск: ЧелГУ. –2003. – 179 с.
- [7] Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР, сер.матем – 1954. – Т. 18, – С. 3–50.
- [8] Шипилов, А.С. Об устойчивости решений уравнений Баренблатта–Желтова–Кочиной на геометрическом графе / А.С. Шипилов // Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование. –2008. – Вып. 1.– № 15 (115). – С. 106–110.
- [9] Chen P.J., Gurtin M.E On a theory of heat conduction involving two temperatures.— Z. Angew. Math. Phys. –1968.– V. 19,– P. 614–627.
- [10] Hallaire M. On a theory of moisture - transfer.— Inst.Rech. Agronom. –1964. – № 3. – P. 60–72.