

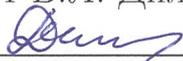
Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Национальный исследовательский университет)

Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра математического и функционального анализа

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, доцент кафедры
уравнений математической физики
ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ»(НИУ),
канд. физ.-мат. наук,
доцент Г.А. Закирова


07.06.16

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой математического
и функционального анализа
ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ»(НИУ),
д-р физ.-мат. наук,
доцент В.Л. Дильман


07.06.16

Начально-конечное условие для линейного уравнения Хоффа в
квазисоболевых пространствах
ЮУрГУ – 010100.62–2016–12-023-1881. ВКР

Руководитель работы

д-р физ.-мат. наук, доцент

/С.А. Загребина/

" 07 " 06 2016 г.

Автор

Студент группы ММиКН-471

/Л.В. Луканина/

" 07 " 06 2016 г.

Нормоконтролер.

канд. физ.-мат. наук, доцент

/М.А. Коротова/

" 07 " 06 2016 г.

Челябинск
2016

ЗАДАНИЕ

студенту группы ММ-471

Луканиной Любови Владимировне

на выполнение выпускной квалификационной работы
по направлению 010100.62 – МАТЕМАТИКА

1. Тема дипломной работы

Начально-конечное условие для линейного уравнения Хоффа в квазисоболевых пространствах.

(Утверждена приказом по университету от « 15 » апреля 2016 г. № 661)

2. Перечень подлежащих исследованию вопросов

2.1. Литературные указания (основные источники), история вопроса и результаты предшественников

Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики /С.А. Загребина// Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. - 2013. - Т. 6, 2. - С. 5-24.

Hoff, N.J. Creep bucking/N.J. Hoff// The Aeronautical Quarterly. – 1956. – V. 7,1. – P. 1-20.

Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп / Г.А. Свиридюк // Усп. мат. наук. – 1954. - Т. 49, №4. – С. 47-74.

Келлер А.В. Относительно спектральная теорема /А.В. Келлер// Вестник ЧелГУ. Серия Математика. – 1996. - №1. – С. 62-65.

Аль-Делфи, Дж.К. Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. – 2013. – 2(13). – С. 13-16.

Аль-Делфи, Дж.К. Квазисоболевы пространства l_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. – 2013. – 2(13). – С. 13-16.

История начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа начинается в статье А.А. Панкова, Т.Е. Панковой «Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом», а также в монографии С.Г. Пяткова «Operator Theory. Nonclassical Problems», где она названа задачей Веригина и задачей сопряжения соответственно. Однако в обоих случаях вместо относительно спектральных проекторов P_0 и P_1 рассматриваются спектральные проекторы оператора L , причем L вдобавок предполагаются самосопряженными. Наш подход был заложен в статье Г.А. Свиридюка и С.А. Загребинной «Задача Веригина для уравнений соболевского типа с относительно p -спектральными проекторами» и основан на теории Г.А. Свиридюка. Первым уравнение Хоффа начали изучать Г.А. Свиридюк, В.О. Казак, в статье «Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа» они показали, что множество понимаемое как фазовое пространство уравнения Хоффа, является простым банаховым C^∞ -многообразием.

2.2. Постановка задачи

- 1) Изучить результаты спектральной теории операторов в квазибанаховы пространства последовательностей;
- 2) Исследовать относительно ограниченные операторы в квазибанаховых пространствах последовательностей с получением результатов об их свойствах;
- 3) Изучить результаты теории вырожденных голоморфных групп в квазибанаховы пространства последовательностей;
- 4) Исследовать разрешимость задачи Коши, начально-конечной задачи для уравнений соболевского типа с использованием теории вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых пространствах последовательностей.
- 5) Исследовать разрешимость для уравнения Хоффа в квазисоболевом пространстве.

2.3. Методы исследования и ожидаемые результаты

При исследовании данной задачи использовались методы математического и функционального анализа, а также методы теории полугрупп операторов.

Доказательство теоремы о существовании и единственности решения начально-конечной задачи для уравнения Хоффа в квазисоболевом пространстве.

3. Календарный план подготовки дипломной работы

Наименование этапов дипломной работы	Срок выполнения этапов работы	Отметка о выполнении
1. Обзор литературы	20.09.15 – 20.10.15	
2. Получение результатов, формулировка выводов, структурирование текста.	23.10.15 – 1.03.16	
3. Подготовка текста дипломной работы	30.01.16 – 16.04.16	
4. Проверка и рецензирование работы руководителем, исправление замечаний	29.04.16 – 23.05.16	
5. Подготовка доклада и текста выступления. Внешнее рецензирование	23.05.16 – 1.06.16	
6. Защита дипломной работы	13.06.16 – 20.06.16	

4. Дата выдачи задания «8» ноября 2015 г.

Руководитель работы

Доктор физ.-мат.наук, доцент

(Загребина С.А.)

Задание принял к исполнению

(Луканина Л.В.)

УДК 517.9

Луканина Л.В.

Начально-конечное условие для линейного уравнения Хоффа в квази-
соболевых пространствах / Л.В. Луканина. – Челябинск, 2016. – 29 с.

Исследована начально-конечная задача для уравнения Хоффа в квази-
соболевых пространствах. Установлено и доказано существование и един-
ственность решения.

Список лит. – 31 назв.

Содержание

Введение	3
1 Квазибанаховы пространства последовательностей	6
2 (L, p) -ограниченные операторы	7
3 Голоморфные вырожденные группы операторов	10
4 Начально-конечная задача для неоднородного уравнения	13
5 Квазисоболевы пространства и квазиоператоры Лапласа и Грина	16
6 Уравнение Хоффа	19
Заключение	21
Список литературы	21

Введение

Целью нашего исследования является разрешимость в квазибанаховых пространствах уравнения

$$L\dot{u} = Mu + f. \quad (0.1)$$

с так называемым *начально-конечным условием*

$$P_0(u(\tau_0) - u_0) = P_1(u(\tau_1) - u_1) = 0, \quad (0.2)$$

$-\infty \leq \tau_0 < \tau_1 \leq +\infty$, P_0, P_1 – относительно спектральные проекторы (которые будут определены позднее).

История задачи (0.1), (0.2) начинается с одной стороны в [17], где она названа задачей Веригина, а с другой стороны и независимо – в [3], где она названа задачей сопряжения. Однако в обоих случаях вместо относительно спектральных проекторов P_0 и P_1 рассматриваются спектральные проекторы оператора L , причем L вдобавок предполагается самосопряженным.

Наш подход в исследовании задачи (0.1), (0.2) основан на концепции относительного спектра, предложенной Г.А. Свиридюком [20], и развитой его учениками [11, 14, 18, 6], в частности, В.Е. Федоровым. Кроме того, методы, предложенные Г.А. Свиридюком, стали фундаментом алгоритмов численного решения уравнений леонтьевского типа (т.е. конечномерных уравнений соболевского типа), которые в свою очередь сыграли важную роль в численных исследованиях экономических [13, 21, 22] и технических моделей [4, 31].

В [23] изложены первые результаты исследований задачи (0.1), (0.2), где рассмотрен частный случай задачи (0.1), (0.2) причем с более жесткими чем здесь условиями L -спектр оператора M . В [7] рассмотрена задача (0.1), (0.2), с теми же условиями на L -спектр оператора M , что и в [23], однако с этом случае отмечена возможность большего произвола

в относительно спектральных условиях. Необходимо отметить, что в настоящее время начально-конечные задачи для неклассических уравнений математической физики активно изучаются, в том числе и на множествах различной геометрической структуры [8, 15, 12]. Заметим еще, что если $\sigma_1^L(M) = 0$, то условие (0.2) становится условием Шоуолтера – Сидорова [27] $P(u(0) - u_0) = 0$ и поэтому считается естественным обобщением последнего [5], которое, в свою очередь, обобщает условие Коши.

Квазибанаховыми пространствами, как объектом исследования, заинтересовались не так давно, примером этого могут служить работы Н. Кэлтона (N. Kalton) [2], кроме того, такие пространства возникают при исследовании абелевых групп [5] и прикладных задач [16], [1]. Квазибанаховы пространства изучены Г.А.Свиридюком, А.В.Келлер, Аль-Делфи Кадимом Кхалафом. Они перенесли результаты теории Г.А.Свиридюка об относительно p -ограниченного оператора L в квазибанаховы пространства. В настоящее время так же появились результаты для случая p -спектрального оператора L [10]. В дальнейшем был рассмотрен вопрос существования экспоненциальных дихотомий решений динамических уравнений соболевского типа, рассматриваемых в квазибанаховых пространствах [19].

В [28] Н.А. Сидоровым и его учениками [29, 30] впервые были изучены начально-краевые задачи для уравнения Хоффа, причем в [29, 30] был отмечен феномен несуществования решений этих задач при произвольных начальных данных. Изучение множества начальных значений, обеспечивающих существование и единственность решения начально-краевой задачи для уравнения Хоффа, было проведено в [24]. В [25] показано, что это множество, понимаемое как фазовое пространство уравнения Хоффа, является простым C^∞ -многообразием. Начально-конечная задача для уравнения Хоффа в банаховом пространстве была исследована [9].

Работа состоит из введения, заключения, списка литературы и 6 пара-

графов. Первый параграф посвящен знакомству с понятием - квазибанахово пространство последовательностей. Во втором параграфе рассмотрен вопрос (L, p) -ограниченные операторы. В третьем параграфе содержится информация о голоморфных вырожденных группах операторов. Квази-соболевы пространства и квазиоператоры Лапласа – главный вопрос четвертого параграфа. В пятом параграфе рассмотрены начально-конечная задача для неоднородного уравнения. Заключительный параграф посвящен уравнению Хоффа.

1 Квазибанаховы пространства последовательностей

Пусть \mathcal{U} – некоторый вещественный линеал; упорядоченная пара $(\mathcal{U}; \|\cdot\|)$ называется *квазинормированным пространством*, если

(i) $\forall u \in \mathcal{U} \quad \|\cdot\| u \geq 0$, причем $\|\cdot\| u = 0 \Leftrightarrow u = 0$, где $0 \in \mathcal{U}$;

(ii) $\forall u \in \mathcal{U} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha u\| = |\alpha| \|\cdot\| u$;

(iii) $\forall u, v \in \mathcal{U} \quad \|\cdot\| u + v \leq C(\|\cdot\| u + \|\cdot\| v)$, где $C \geq 1$ и не зависит не от u , ни от v . Функция $\|\cdot\|: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *квазинормой* в случае $C \geq 1$, а в случае $C = 1$ еще и *нормой*. Таким образом, понятия квазинормированного пространства является обобщенным понятием нормированного пространства. В дальнейшем квазинормированное пространство $(\mathcal{U}; \|\cdot\|)$, будем отождествлять с линеалом \mathcal{U} .

Квазинорма $\|\cdot\|$ естественным образом задает топологию на \mathcal{U} . Базисом окрестностей служит совокупность всех множеств вида $\{u \in \mathcal{U} : \|\cdot\| u - v < \varepsilon\}$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. С случае $C = 1$ это топология определяется посредством метрики $\rho(u, v) = \|\cdot\| u - v$. Однако, квазинормированное пространство метризуемо и в случае $C > 1$.

Лемма 1.1 Пусть \mathcal{U} – квазинормированное пространство и пусть число α определяется уравнением $(2C)^\alpha = 2$. Тогда на \mathcal{U} существует метрика $d: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что при всех $u \in \mathcal{U}$

$$d(0, U) \leq \|\cdot\| u^\alpha \leq 2d(0, u). \quad (1.1)$$

Из леммы 1.1 вытекает, что мы располагаем понятием *фундаментальной последовательности* $\{u_n\} \subset \mathcal{U} : \lim_{n, l \rightarrow \infty} \|\cdot\| u_n - u_l = 0$, а значит, и понятием *полноты*. Полное квазинормированное пространство называется *квазибанаховым*. Предел $u \in \mathcal{U}$ сходящейся в квазибанаховом пространстве \mathcal{U} последовательности $\{u_n\} \subset \mathcal{U}$ будем обозначать символом $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$.

Пример 1.1 Пространства последовательностей $l_q, q \in \mathbb{R}_+$ банаховы при

$q \in [1, +\infty)$ и квазибанаховы при $q \in (0, 1)$. Во втором случае $C = 2^{1/q}$.

Пространства последовательностей l_q при $q \in (0, 1)$ будем называть *квазибанаховым пространством последовательностей*.

Пусть последовательность $\{\lambda\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$. По аналогии с пространством Соболева W_p^m введем в рассмотрение *квазисоболевы пространства*

$$l_p^m = \left\{ \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|)^p < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+$. Пространства l_p^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$$\|u\|_p^m = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|)^p \right)^{1/p},$$

причем они тоже банаховы только если $p \in [1, +\infty)$. Если $p \in (0, 1)$, то константа $C = 2^{1/p}$. Заметим еще, что если $m = 0$, то $l_p^0 = l_p$.

Пусть $\mathcal{U} = (\mathcal{U}; \|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}; \|\cdot\|)$ – два квазибанаховых пространства последовательностей. Будем говорить, что

- \mathcal{U} вложено в \mathfrak{F} , если \mathcal{U} подмножество \mathfrak{F} , то есть $\mathcal{U} \subset \mathfrak{F}$;
- \mathcal{U} плотно вложено в \mathfrak{F} , если вдобавок замыкание $\bar{\mathcal{U}} = \mathfrak{F}$;
- \mathcal{U} плотно и непрерывно вложено в \mathfrak{F} , если вдобавок для всех $u \in \mathcal{U}$ выполнено $\|u\| \geq C_{\mathfrak{F}} \|u\|$, где $C \in \mathbb{R}_+$ – некоторая константа, не зависящая от u . Плотное и непрерывное вложение будем обозначать символом $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Теорема 1.1 При всех $p \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{R}, l \leq m$, имеют место плотные и непрерывные вложения $l_p^m \hookrightarrow l_p^l$.

2 (L, p) -ограниченные операторы

Пусть \mathcal{U} и \mathfrak{F} – квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathfrak{F})$ (линейный и непрерывный) и $M \in Cl(\mathcal{U}; \mathfrak{F})$ (линейный, замкнутый и плотно определенный).

Рассмотрим L -резольвентное множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$$

и L -спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M . Так как множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, то L -спектр $\sigma^L(M)$ всегда замкнут, а L -резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M голоморфна на $\rho^L(M)$.

Определение 2.1 Оператор M называется *спектрально ограниченным относительно оператора L* (или просто (L, σ) -ограниченным), если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Замечание 2.1 Пусть $\text{dom} M = \mathfrak{U}$ и оператор L непрерывно обратим. Тогда оператор M (L, σ) -ограничен. Если же оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ компактен, то оператор M не будет (L, σ) -ограниченным.

Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, возьмем контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ и построим операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\mu}^L(M) d\mu,$$

где $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ — правая, а $L_{\mu}^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ — левая L -резольвенты оператора M , причем интегралы понимаются в смысле Римана. По построению операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

Лемма 2.1 Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, тогда операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ — проекторы.

Лемма 2.2 Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда для любого $u \in \text{dom} M$ вектор $Pu \in \text{dom} M$.

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \text{im} P$, $\mathfrak{F}^1 = \text{im} Q$, и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на \mathfrak{U}^k ($\text{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$. Из леммы 1 следует, что линеалы $\text{dom} M_k = \text{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$ плотны в \mathfrak{U}^k , $k = 0, 1$.

Теорема 2.1 (Теорема Свиридюка о расщеплении). Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда

- (i) операторы $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) операторы $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$;
- (iii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Положим $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Следствие 2.1 В условиях теоремы 1 для любых $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| > a$, имеем

$$(\mu L - M)^{-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

Замечание 2.2 Пусть $G = L_0 M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0)$, $T = M_1 L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$ и выполнены условия следствия 1. Тогда

$$(\mu L - M)^{-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k M_0^{-1} G^k (\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} L_1^{-1} T^{k-1} Q.$$

Определение 2.2 Бесконечно удаленную точку для L -резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M будем называть

- (i) *устранимой особой точкой*, если $H = \mathbb{O}$;
- (ii) *полюсом* порядка $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$;
- (iii) *существенно особой точкой*, если $H^p \neq \mathbb{O}$ при любом $p \in \mathbb{N}$.

Замечание 2.3 Далее устраняемую особую точку будем называть полюсом порядка нуль. Оператор M назовем (L, p) -ограниченным, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, если он (L, σ) -ограничен, и точка ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его L -резольвенты.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$, вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ будем называть *собственным вектором* оператора L . Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ называется *цепочкой M -присоединенных векторов* собственного вектора

φ_0 , если $L\varphi_{q+1} = M\varphi_q$, $q = 0, 1, \dots$, $\varphi_l \notin \ker L \setminus \{0\}$, $l = 1, 2, \dots$. *Высотой* назовем порядковый номер вектора в цепочке. Собственные векторы оператора L будем называть M -присоединенными векторами высоты 0. M -корневым линеалом назовем линейную оболочку M -присоединенных векторов оператора L . M -корневым пространством будем называть замкнутый M -корневой линеал оператора L . Цепочка M -присоединенных векторов может быть бесконечной. В частности, она может быть заполнена нулями, если $\varphi_0 \in \ker M \cap \ker L$. Но она будет конечной в случае существования такого M -присоединенного вектора φ_q , что либо $\varphi_q \notin \text{dom } M$, либо $M\varphi_q \notin \text{im } L$. Высоту q последнего M -присоединенного вектора в конечной цепочке $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_q\}$ будем называть *длиной* этой цепочки.

Напомним, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ называется *фредгольмовым*, если $\dim \ker L = \text{codim } L < \infty$.

Теорема 2.2 Пусть оператор L -фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;
- (ii) длины всех цепочек M -присоединенных векторов не превосходит p , и существует по крайней мере одна цепочка длины p .

3 Голоморфные вырожденные группы операторов

Пусть \mathfrak{U} и \mathfrak{F} – квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим линейное уравнение

$$L\dot{u} = Mu. \quad (3.1)$$

Решением $u = u(t)$ уравнения будем называть вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую этому уравнению.

Решение $u(t)$ уравнения (3.1) назовем *решением задачи Коши для уравнения (3.1)*, если оно вдобавок удовлетворяет *условию Коши*

$$u(0) = u_0 \quad (3.2)$$

при некотором векторе $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Определение 3.1 Множество \mathfrak{F} назовем *фазовым пространством* уравнения (3.1), если

- (i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (3.1) лежит в \mathfrak{F} как траектория (т.е. $u(t) \in \mathfrak{F}$ при любом $t \in \mathbb{R}$);
- (ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{F}$ существует единственное решение задачи (3.1), (3.2).

Теорема 3.1 Пусть оператор M (L, p) -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения (3.1) служит подпространство \mathfrak{U}^1 .

Действительно, в силу теоремы 2.1 уравнение (3.1) эквивалентно системе

$$H\dot{u}^0 = u^0, \quad u^1 = Su^1, \quad (3.3)$$

где $u^0 = (\mathbb{I} - P)u$, $u^1 = Pu$. Дифференцируя правое уравнение системы (3.3) и умножая слева на H , последовательно получим

$$0 = H^{p+1}u^{0(p+1)} = H^p u^{0(p)} = \dots H\dot{u}^0 = u^0.$$

Определение 3.2 Отображение $U \cdot \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ будем называть *группой разрешающих операторов* (или, коротко, *группой*) уравнения (3.1), если:

- (i) $U^s U^t = U^{s+t}$ при любых $s, t \in \mathbb{R}$;
- (ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ является решением уравнения (3.1).

Следуя традиции [5], отождествим группу с ее графиком $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$. Группа $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ называется *голоморфной*, если она аналитически продолжима во всю комплексную плоскость \mathbb{C} с сохранением свойств (i), (ii); и *вырожденной*, если ее единица U^0 является проектором. Для голоморфной вырожденной группы корректным является понятие *ядра*

$$\ker U \cdot = \ker U^0 = \ker U^t \text{ при любом } t \in \mathbb{R}$$

и образа

$$\operatorname{im} U \cdot = \operatorname{im} U^0 = \operatorname{im} U^t \text{ при любом } t \in \mathbb{R}.$$

Голоморфную вырожденную группу $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ назовем разрешающей группой уравнения (3.1), если ее образ $\operatorname{im} U \cdot$ совпадает с фазовым пространством уравнения (3.1).

Теорема 3.2 Пусть оператор M (L, p) -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда существует единственная разрешающая группа уравнения (3.1), которая к тому же имеет вид

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

где замкнутый контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Единственная разрешающая группа уравнения (3.1) может оказаться далеко не единственной голоморфной вырожденной группой данного уравнения. Введем в рассмотрение условие

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^L(M) = \sigma_0^L(M) \cup \sigma_1^L(M), \quad n \in \mathbb{N}, \text{ причем } \sigma_0^L(M) \cup \sigma_1^L(M) \neq \emptyset, \\ \text{существует замкнутый контур } \gamma_1 \subset \mathbb{C}, \text{ ограничивающий} \\ \text{область } D_1 \supset \sigma_1^L(M), \text{ такой, что } \overline{D_1} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset, \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \emptyset \\ \forall k, l = \overline{1, n}, k \neq l. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Теорема 3.3 Пусть оператор M (L, σ) -ограничен и выполнено условие 3.4. Тогда существуют голоморфные вырожденные группы уравнения 3.1.

Следствие 3.1 Пусть выполнены условия теоремы 3.3. Тогда

(i) $U^t U_1^s = U_1^s U^t = U_1^{s+t}$ при всех $s, t \in \mathbb{R}$;

(ii) $U_k^t U_l^s = U_l^s U_k^t = \mathbb{O}$ при всех $s, t \in \mathbb{R}, k, l = \overline{1, n}, k \neq l$.

Положим $U_0^t = U^t - \sum_{k=1}^n U_k^t, t \in \mathbb{R}$.

Следствие 3.2 Пусть выполнены условия теоремы 3.3. Тогда $\{U_0^t : t \in \mathbb{R}\}$ – голоморфная вырожденная группа уравнений 3.1.

Замечание 3.1 Рассмотрим единицы $P_j = U_j^0$, $j = 0, 1$, построенных (в силу условия (3.4)) голоморфных вырожденных групп $\{U_j^t : t \in \mathbb{R}\}$, $j = 0, 1$ уравнения (3.1). Очевидно,

$$(i) PP_j = P_jP = P_j, j = 0, 1;$$

$$(ii) P_0P_1 = P_1P_0 = \mathbb{O}.$$

4 Начально-конечная задача для неоднородного уравнения

Пусть \mathfrak{U} и \mathfrak{F} – квазибинаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Пусть оператор $M(L, p)$ – ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. На отрезке $[\tau_0, \tau_1] \in \mathbb{R}$ рассмотрим неоднородное уравнение соболевского типа

$$Lu = Mu + f. \quad (4.1)$$

Пусть L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M распадается на две непересекающиеся компоненты, т.е. выполнено условие

$$\sigma^L(M) = \sigma_{\tau_0}^L(M) \cup \sigma_{\tau_1}^L(M) \quad \text{и} \quad \sigma_{\tau_0}^L(M) \cap \sigma_{\tau_1}^L(M) = \emptyset. \quad (4.2)$$

Тогда существуют непересекающиеся контуры γ_{τ_0} и γ_{τ_1} , ограничивающие области, содержащие соответственно части спектра $\sigma_{\tau_0}^L(M)$ и $\sigma_{\tau_1}^L(M)$. Согласно относительной спектральной теореме [2, 5] в квазибанаховых пространствах последовательностей можно построить спектральные проекторы

$$P_{\tau_0(\tau_1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{0(1)}} R_{\mu}^L(M) d\mu \quad \text{и} \quad Q_{\tau_0(\tau_1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1(2)}} L_{\mu}^L(M) d\mu$$

Лемма 4.1 Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем выполнено условие (3.4), а оператор $M(L, \sigma)$ -ограничен. Тогда оператор $Q_{\tau_1} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$, $Q_{\tau_0} = Q - Q_{\tau_1}$ – проекторы, причем

- (i) $QQ_{\tau_1} = Q_{\tau_1}Q = Q_{\tau_1}$;
- (ii) $QQ_{\tau_0} = Q_{\tau_0}Q = Q_{\tau_0}$;
- (iii) $Q_{\tau_0}Q_{\tau_1} = Q_{\tau_1}Q_{\tau_0} = \mathbb{O}$,

Учитывая сказанное в замечании (2.1) и лемме (4.1), назовем проекторы P_{τ_0}, P_{τ_1} и Q_{τ_0}, Q_{τ_1} , относительно спектральными проекторами.

Введем в рассмотрение подпространства $\mathfrak{U}^{10} = \text{im}P_{\tau_0}$, $\mathfrak{U}^{11} = \text{im}P_{\tau_1}$, $\mathfrak{F}^{10} = \text{im}Q_{\tau_0}$, $\mathfrak{F}^{11} = \text{im}Q_{\tau_1}$. По построению

$$\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^{10} \oplus \mathfrak{U}^{11} \text{ и } \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^{10} \oplus \mathfrak{F}^{11}.$$

Через L_{10}, L_{11} обозначим сужения оператора L на $\mathfrak{U}^{10}, \mathfrak{U}^{11}$ соответственно, а через M_{10}, M_{11} обозначим сужения оператора M на $\text{dom}M \cap \mathfrak{U}^{10}, \text{dom}M \cap \mathfrak{U}^{11}$ соответственно. Поскольку, как нетрудно показать, $P_0\varphi \in \text{dom}M$, $P_1\varphi \in \text{dom}M$, если $\varphi \in \text{dom}M$, то область определения $\text{dom}M_{10} = \text{dom}M \cap \mathfrak{U}^{10}$, $\text{dom}M_{11} = \text{dom}M \cap \mathfrak{U}^{11}$ плотна в $\mathfrak{U}^{10}, \mathfrak{U}^{11}$.

Теорема 4.1 (Относительно спектральная теорема). Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а оператор M (L, σ) -ограничен, причем выполнено условие (3.4). Тогда

- (i) операторы $L_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j}; \mathfrak{F}^{1j})$, $M_{1j} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^{1j}; \mathfrak{F}^{1j})$, $j = 0, 1$;
- (ii) существуют операторы $L_{1j}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{1j}; \mathfrak{U}^{1j})$, $j = 0, 1$.

При выполнении условия 4.2 для уравнения 4.1 сформулируем начально-конечные условия [30]

$$P_{\tau_0}(u(\tau_0) - u_{\tau_0}) = 0, \quad P_{\tau_1}(u(\tau_1) - u_{\tau_1}) = 0 \quad (4.3)$$

с некоторыми элементами $u_{\tau_0}, u_{\tau_1} \in \mathfrak{U}$.

Вектор-функцию $u \in C^1([\tau_0, \tau_1], \mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (4.1), назовем решением начально-конечной задачи (4.1), (4.3), если она удовлетворяет уравнению (4.1), и условиям (4.3).

Согласно относительно спектральной теореме, уравнение (4.1) редуцируется к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} H\dot{u}(t) &= u^0(t) + M_0^{-1}L_0f_0(t), \\ \dot{u}_{\tau_0}(t) &= S_{\tau_0}u_{\tau_0}^1(t) + L_{\tau_0}^{-1}f_{\tau_0}(t), \\ \dot{u}_{\tau_1}^1(t) &= S_{\tau_1}u_{\tau_1}^1(t) + L_{\tau_1}^{-1}f_{\tau_1}(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

где операторы $H = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$; векторы $u_k \in \mathfrak{U}^k$, $f_k \in \mathfrak{F}^k$, $k = 0, 1$.

Лемма 4.2 Пусть оператор M (L, p) -ограничен $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M удовлетворяю условию (4.2). Тогда для любой вектор-функции $f^0 \in C^{p+1}([\tau_0, \tau_1]; \mathfrak{F}^0)$ существует единственное решение $u^0 \in C^1([\tau_0, \tau_1]; \mathfrak{U}^0)$ уравнения (4.1), которое к тому же имеет вид

$$u^0 = - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} \frac{d^q}{dt^q} f^0(t)$$

Доказательство. Подстановкой вектор функции $u^0 = u^0(t)$ в первое уравнение (4.4) убеждаемся в существовании решения. Единственность получается последовательным дифференцированием однородного уравнения (4.1) $0 = H^p u^{0(p)} = \dots = H\dot{u}^0 = u^0$. Лемма доказана. •

Лемма 4.3 В условиях леммы 4.2 для любого вектора $u_{\tau_0} \in \mathfrak{U}(u_{\tau_1} \in \mathfrak{U})$ и для любой вектор-функции $f^1 \in C^1([\tau_0, \tau_1]; \mathfrak{F}^1)$ существует единственное решение $u_{\tau_0}^1 \in C^1([\tau_0, \tau_1]; \mathfrak{U}_{\tau_0}^1)$ ($u_{\tau_1}^1 \in C^1([\tau_0, \tau_1]; \mathfrak{U}_{\tau_1}^1)$) задачи $P_{\tau_0}(u(\tau_0) - u_{\tau_0}) = 0$ ($P_{\tau_1}(u(\tau_1) - u_{\tau_1}) = 0$), для уравнения (4.1), которое к тому же имеет вид

$$\begin{aligned} u_{\tau_0}^1(t) &= U^t u_{\tau_0} + \int_{\tau_0}^t U^{t-s} L_{\tau_0}^{-1} g_{\tau_0}^1(s) ds \\ \left(u_{\tau_1}^1(t) &= U^t u_{\tau_1} + \int_{\tau_1}^t U^{t-s} L_{\tau_1}^{-1} g_{\tau_1}^1(s) ds \right) \end{aligned}$$

Доказательство. Для задачи $P_{\tau_0}(u(\tau_0) - u_{\tau_0}) = 0$ существование решения следует из результатов предыдущего параграфа, если за ненулевую точку взять τ_0 . Докажем $P_{\tau_1}(u(\tau_1) - u_{\tau_1}) = 0$. Сначала покажем единственность. С помощью подстановки убедимся, что вектор функция $u_{\tau_1}^1 = u_{\tau_1}^1(t)$ является решением данной задачи. Пусть $v = v(t)$, $t \in [\tau_0, \tau_1]$ – другое решение этой задачи. Построим вектор-функцию $w(s, t) = L_{\tau_1} U^{t-s} v(s)$. По построению

$$\frac{\partial w(s, t)}{\partial s} = L_{\tau_1} \frac{\partial U^{t-s}}{\partial s} v(s) + L_{\tau_1} U^{t-s} \frac{\partial v(s)}{\partial s} = 0.$$

Значит, $w(\tau_1, t) = w(t, t)$, т.е. $U^{t-\tau_1} v(t) - v(t) = 0$.

Подстановкой вектор-функцией $u_{\tau_1}^1(t)$ в уравнение (4.1) убеждаемся, что она удовлетворяет этому уравнению. Лемма доказана. •

Итак, доказана

Теорема 4.2 *Для любых векторов $u_{\tau_0}, u_{\tau_1} \in \mathfrak{U}$ и любой вектор-функции $f : [\tau_0, \tau_1] \rightarrow \mathfrak{F}$, которая удовлетворяет условиям лемм 1, 2, существует единственное решение $u \in C^1([\tau_0, \tau_1]; \mathfrak{U})$ задачи (4.1), (4.3), которое к тому же имеет вид $u(t) = u^0(t) + u_{\tau_0}^1(t) + u_{\tau_1}^1(t)$.*

5 Квазисоболевы пространства и квазиоператоры Лапласа и Грина

Квазисоболевы пространства

Пусть \mathfrak{U} и \mathfrak{F} – два квазибанаховых пространства последовательностей.

Будем говорить, что:

- \mathfrak{U} вложено в \mathfrak{F} , если \mathfrak{U} подмножество \mathfrak{F} , то есть $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$;
 - \mathfrak{U} плотно вложено в \mathfrak{F} , если вдобавок замыкание $\bar{\mathfrak{U}} = \mathfrak{F}$;
 - \mathfrak{U} плотно и непрерывно вложено в \mathfrak{F} , если вдобавок для всех $u \in \mathfrak{U}$ $\|u\|_{\mathfrak{U}} \geq C_q \|u\|_{\mathfrak{F}}$, где $C \in \mathbb{R}_+$ – некоторая константа не зависящая от u .
- Плотное и непрерывное вложение будем обозначать символом $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Пусть $\overset{\circ}{W} \frac{1}{2}(\Omega)$ – соболевское пространство, а W_2^{-1} – сопряженное к нему относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Omega)$ пространство с негативной нормой. Из теоремы вложения Соболева вытекает, что

$$\overset{\circ}{W} \frac{1}{2}(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega). \quad (5.1)$$

Оператор Лапласа – Δ , определяемый формулой

$$-\langle \Delta u, v \rangle = \sum_{m=1}^n \int_{\Omega} u_{x_m} v_{x_m} dx,$$

задает тополинейный изоморфизм:

$$-\Delta : \overset{\circ}{W} \frac{1}{2}(\Omega) \rightarrow W_2^{-1}(\Omega). \quad (5.2)$$

Далее, пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – множество собственных значений оператора Лапласа – Δ , занумерованное по неубыванию с учетом их кратности. построим пространства:

$$l_2^1 = \left\{ u = u_k : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k|^2 < +\infty \right\},$$

$$l_2^{-1} = \left\{ u = u_k : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |u_k|^2 < +\infty \right\}$$

и отметим тополинейные изоморфизмы $l_2^1 \cong \overset{\circ}{W} \frac{1}{2}(\Omega) \doteq W_2^{-1}(\Omega)$, а также плотность и непрерывность вложений

$$l_2^1 \hookrightarrow l_2 \hookrightarrow l_2^{-1}, \quad (5.3)$$

вытекающие из (3.1). Отметим банаховость пространств l_2^1 и l_2^{-1} с нормами $\|u\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k|^2$ и $\|v\|_{-1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |v_k|^2$ соответственно.

Введем в рассмотрение квазиоператор Лапласа

$$\Lambda u = \lambda_k u_k. \quad (5.4)$$

Поскольку

$$\|\Lambda u\|_{-1} = \|u\|_1,$$

то из (5.4) следует тополинейность изоморфизма $\Lambda : l_2^1 \leftrightarrow l_2^{-1}$, который, впрочем, легко получить из (5.2), (5.3). Обратный к Λ оператор (квазиоператор Грина Λ^{-1}) задается формулой

$$\Lambda^{-1}v = \lambda_k^{-1}v_k. \quad (5.5)$$

Данная часть посвящена перенесению описанной выше идеологии на квазибанаховы пространства $l_p, p \in (0, 1)$. Построим квазисоболевы пространства:

$$l_p^1 = \left\{ u = u_k : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/2} \|u_k\|^p < +\infty \right\},$$

$$l_p^{-1} = \left\{ u = u_k : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-p/2} \|u_k\|^p < +\infty \right\},$$

$\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$, а $p \in (0, 1)$.

По аналогии с пространствами Соболева W_p^m введем в рассмотрение квазисоболевы пространства

$$l_p^m = \left\{ u = u_k : \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{m/2} |u_k|)^p < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+$. пространства l_p^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$$\|u\|_p^m = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{m/2} |u_k|)^p \right)^{1/p},$$

причем они тоже банаховы только если $p \in [1, +\infty)$. Если $p \in (0, 1)$, то константа $C = 2^{1/p}$. Заметим еще, что если $m = 0$, то $l_p^0 = l_p$.

Теорема 5.1 При всех $p \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$, $l \leq m$, имеют место плотные и непрерывные вложения $l_p^m \hookrightarrow l_p^l$.

Доказательство. Вложение $l_p^m \subset l_p^l$ очевидно. Докажем плотность вложения. Пусть $u \in l_p$, тогда рассмотрим последовательность $\{u_k\}$, где

$$u_1 = (u^1, 0, 0, \dots), \quad u_2 = (u^1, u^2, 0, 0, \dots), \dots$$

$$\dots, u_k = (u^1, u^2, \dots, u^k, 0, 0, \dots), \dots$$

Очевидно, $\{u_k\} \subset l_p^m$, причем, $u_k \rightarrow u$ в квазинорме l_p^l . Непрерывность вложения тоже очевидна. •

Теорема 5.2 При всех $p \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$ квазиоператор Лапласа $\Lambda : l_p^{m+2} \rightarrow l_p^m$ – тополинейный изоморфизм.

Доказательство. Непрерывность оператора Λ очевидна –

$${}_p^m \|\Lambda u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(m/2)-1} |u_k|^p \right)^{1/p} = {}_p^m \|u\|.$$

Построим обратный оператор $\Lambda^{-1}u = \lambda_k^{-1}u_k$ (квазиоператор Грина). Очевидно, $\Lambda \Lambda^{-1}u = u$ при всех $u \in l_p^{-1}$, и $\Lambda^{-1}\Lambda u = u$ при всех $u \in l_p^m$. Далее

$${}_p^{m+2} \|\Lambda^{-1}u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(m/2)+1} |u_k|^p \right)^{1/p} = {}_p^m \|u\|. \bullet$$

6 Уравнение Хоффа

Пусть $\mathfrak{U} = l_p^{m+2}$, $\mathfrak{F} = l_p^m$, операторы L, M зададим формулами $L = \lambda + \Lambda$, $M = \alpha I$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – некоторые константы.

Лемма 6.1 Для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ операторы $L, M \in \mathfrak{L}(l_p^{m+2}, l_q^m)$.

Доказательство. В силу теоремы 5.2 оператор Лапласа Λ , определенный в (5.4), линеен и непрерывен.

Следовательно, операторы L и M по определению принадлежат пространству $\mathfrak{L}(l_p^{m+2}, l_q^m)$. •

Лемма 6.2 Для любого $\lambda \notin \sigma(\Lambda)$ существует оператор $L^{-1} \in \mathfrak{L}(l_p^m, l_q^{m+2})$.

Доказательство. Утверждение следует из формулы определения оператора $L = \lambda + \Lambda$ и свойства оператора. •

Теорема 6.1 Для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор $M(L, 0)$ -ограничен.

Доказательство. Если $\lambda \notin \sigma^L(M)$, то утверждение следует из леммы (6.2.), замечания и формулы. Пусть $\lambda \in \sigma^L(M)$, положим $\ker L = \text{span}\{\varphi_k, \lambda = -\lambda_k\}$. Тогда, если $\sum_{\lambda=-\lambda_k} |c_k| > 0$, имеем

$$\psi = \sum_{\lambda=-\lambda_k} c_k M \varphi_k \notin \text{im} L.$$

Отсюда в силу следствия (6.2) следует утверждение теоремы. Поскольку L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M состоит из точек

$$\left\{ \mu_k = \frac{\alpha \lambda_k}{\lambda + \lambda_k}, k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\} \right\}, \quad (6.1)$$

то оператор $M(L, \sigma)$ -ограничен, и

$$\mathfrak{U}^0 = \begin{cases} \{0\}, \text{ если } \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : u_k = 0, k \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda = -\lambda_l\}\}; \end{cases}$$

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U}, \text{ если } \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : u_l = 0, \lambda_l = -\lambda\}. \end{cases}$$

Подпространства $\mathfrak{F}^k, k = 0, 1$ определяется аналогично.

При всех $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, оператор $H = \mathbb{O}$, и следовательно, оператор $M(L, 0)$ -ограничен. •

Пример 6.1. Рассмотрим квазиоператор Грина $\Lambda^{-1} \in \mathfrak{L}(l_p^m, l_p^{m+2})$ как оператор $\Lambda^{-1} \in \mathfrak{L}(l_p^m, l_p^m)$, что возможно в силу аналога теорем вложения Соболева.

Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = l_p^m$, оператор $L = \Lambda^{-1}$, $M = \mathbb{I}$ – единичный оператор на l_p^m . Поскольку L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M не является (L, σ) -ограниченным.

Пример 6.1. устанавливает тот факт, что не все операторы относительно σ -ограничены.

Рассмотрим аналог уравнения Хоффа как одного из наиболее известных из неклассических уравнений математической физики [30]

$$(\lambda + \Lambda)u = \alpha u. \quad (6.2)$$

Голоморфная разрешающая группа уравнения (6.2) будет иметь вид

$$U^t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{\mu_k t} e_k, & \text{если } \lambda \notin \{\lambda_k\}, k \in \mathbb{N} \\ \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{\mu_k t} e_k, \text{ если существует } \lambda \in \mathbb{N} : \lambda = -\lambda_k. \right\} \end{cases}$$

Здесь $\mu_k = \frac{\alpha}{\lambda + \lambda_k}$ – такой L -спектра оператора M , последовательность $u_{0k} = u_0 \in l_q^{m+2}$, векторы $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, где единица стоит на k -том месте.

Перейдем к рассмотрению аналога уравнения Хоффа

$$(\lambda + \Lambda)u_t = \alpha u + f. \quad (6.3)$$

В силу теорем справедливо следующее

Рассмотрим начально-конечную задачу (4.3) для уравнения (6.3). Так как L -спектр оператора M имеет вид (6.1), то он дискретен и имеет только одну точку "накопления": $-\alpha$. В силу этого всегда можно выбрать части спектра, удовлетворяющие условию (4.1). Элементы в проекторах будут выбираться по выделенным индексам.

В силу всего этого, а также теорем 4.1 и 6.1 справедливо

Следствие 6.1. Для любых векторов $u_{\tau_0}, u_{\tau_1} \in l_q^{m+2}$ и любой вектор-функции $f : [\tau_0, \tau_1] \rightarrow l_q^m$, удовлетворяющей условиям

$$(\mathbb{I} - Q)f \in C^1([\tau_0, \tau_1]; l_q^m) \quad \text{и} \quad Qf \in C([\tau_0, \tau_1]; l_q^m),$$

существует единственное решение $u \in C^1([\tau_0, \tau_1]; l_q^{m+2})$ задачи (6.3), (4.3), которое к тому же имеет вид

$$u(t) = -M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f(t) + U^{t-\tau_0}u_{\tau_0} - U^{\tau_1-t}u_{\tau_1} + \\ + \int_{\tau_0}^t U^{t-s}L_1^{-1}Q_{\tau_0}f(s)ds - \int_t^{\tau_1} U^{t-s}L_1^{-1}Q_{\tau_1}f(s)ds.$$

Заключение

Доказана теорема о существовании и единственности решения начально-конечной задачи для уравнения Хоффа в квазисоболевом пространстве.

Список литературы

- [1] *Hardtke, J. D.* A Remark on Condensation of Singularities / J.D. Hardtke // Journal of mathematical physics, analysis, Geometry. — 2013. — V. 9, 4. — P. 448–454.
- [2] *Kalton, N.* Quasi-Banach Spaces / N. Kalton // Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2, Edit. by W.B. Johnson and J. Lindenstrauss. — Amsterdam etc.: Elsevier, 2003. — P. 1099– 1130.
- [3] *Pyatkov, S. G.* Operator Theory. Nonclassical Problems /S.G. Pyatkov. — Utrecht: Boston: Kōlu; Tokyo: VSP, 2002.
- [4] *Shestakov, A. L.* Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals /A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk// Вестник ЮУрГУ, Серия: Математическое моделирование и программирование. — Челябинск, 2011. — No. 17 (234), issue. 8 — P. 70-75.
- [5] *Берг, Й.* Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрем. — М.: Мир, 1980.
- [6] *Загребина, С. А.* Устойчивые и неустойчивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа: моногр./С.А. Загребина, М.А. Сагадеева. — Челябинск, Изд. центр ЮУрГУ, 2012.
- [7] *Загребина, С. А.* О задаче Шоуолтера – Сидорова /С.А. Загребина// Изв. вузов. Математика. — 2007. — № 3.. — С. 22-28.
- [8] *Загребина, С. А.* Начально-конечная задача для эволюционных уравнений соболевского типа на графе /С.А. Загребина, Н.П. Сольвьева// Вестник ЮУрГУ, Серия: Математическое моделирование и программирование. — Челябинск, 2008. — № 15 (115), вып.1 — С. 23-26.
- [9] *Загребина, С. А.* Многоточечная начально-конечная задача для линейной модели Хоффа, /С.А. Загребина// Вестник ЮУрГУ. Серия:

Математическое моделирование и программирование. – 2012. – Вып. 11. – С. 4-12.

- [10] *Замышляева А.А.* Голоморфные вырожденные полугруппы операторов и эволюционные уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей. /А.А. Замышляева, Дж.К. Аль-Исави// Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, 4. – С. 27–37.
- [11] *Замышляева, А. А.* Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка: моногр. /А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.
- [12] *Замышляева, А. А.* Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссиневска – Лява /А.А. Замышляева// Вестник ЮУрГУ, Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 37 (254), вып.10 – С. 22-29.
- [13] *Келлер, А. В.* Алгоритм решения задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей леонтьевского типа /А.В. Келлер// Вестник ЮУрГУ, Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 4 (241), вып.7 – С. 40-46.
- [14] *Манакова, Н. А.* Задачи оптимального управления для уравнения соболевского типа: моногр. /Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.
- [15] *Манакова, Н. А.* Об одной задаче оптимального управления с функционом качества общего вида /Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – Самара, 2011. – № 4 (25). – С. 18-24.

- [16] *Новиков, С. Я.* Об особенностях оператора вложения симметричных функциональных пространств на $[0, 1]$ / С.Я. Новиков // Математические заметки. — 1997. — Т. 62, вып. 4. — С. 549–563.
- [17] *Панков, А. А.* Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом при производной / А.А. Панков, Т.Е. Панкова. // Докл. Акад. наук Украины. — 1993. — № 9. — С. 18–20.
- [18] *Сагадеева, М. А.* Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа: моногр. / М.А. Сагадеева. — Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.
- [19] *Сагадеева М.А.* Существование инвариантных подпространств и экспоненциальных дихотомий решений динамических уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах. / М.А. Сагадеева, Ф.Л. Хасан // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2015. — Т. 7, 4. — С. 46–54.
- [20] *Свиридюк, Г. А.* К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // УМН. — 1994. — Т.49, № 4. — С. 47–74.
- [21] *Свиридюк, Г. А.* Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев // Изв. вузов. Математика. — 2003. — № 8. — С. 46–52.
- [22] *Свиридюк, Г. А.* Алгоритмы решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / Г.А. Свиридюк, И.В. Бурлачко // Журн. вычисл. математики и мат. физик. — 2003. — Т.43, № 11 — С. 1677–1683.
- [23] *Свиридюк, Г. А.* Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p -секториальными операторами / Г.А.

- Свиридюк, С.А. Загребина // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 12. – С. 1646-1652.
- [24] Свиридюк, Г. А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений топа Соболева /Г.А. Свиридюк// Изв. РАН, сер. математическая. – 1998. – Т. 57, № 3. – С. 192-207.
- [25] Свиридюк, Г. А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Мат. заметки.– 2002. – Т. 71, № 2.– С. 292 – 297.
- [26] Свиридюк, Г. А. Неклассическая модель математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – 40 (299). – С. 7–18.
- [27] Сидоров, Н. А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвекцией /Н.А. Сидоров// Мат. заметки. – 1984. – Т. 35, № 4. – С. 569-578.
- [28] Сидоров, Н. А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления /Н.А. Сидоров. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1982.
- [29] Сидоров, Н. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений /Н.А. Сидоров, О.А. Романова// Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 9. – С. 1516-1526.
- [30] Сидоров, Н. А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной/Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев// Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 4. – С. 726-728.

- [31] *Шестаков, А. Л.* Численное решение задачи оптимального измерения /А.л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова// Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107-115.