Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ЮЖНО–УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Национальный исследовательский университет)

Факультет Математики, механики и компьютерных наук
Кафедра математического и функционального анализа

РАБОТА ПРОВЕРЕНА	ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Рецензент, доцент кафедры уравнений математической физики ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ»(НИУ), канд. физ.-мат. наук, доцент Г.А. Закирова	Зав. кафедрой математического и функционального анализа ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ»(НИУ), д-р физ.-мат. наук, доцент В.Л. Дильман
________________	________________
07.06.2016	07.06.2016

Многоточечное начально-конечное условие для уравнения Баренблатта–Желтова – Кочиной в квазисоболевых пространствах

ЮУрГУ – 010100.62–2016–12-025-1881. ВКР

Руководитель работы
д-р физ.–мат. наук, доцент
__________/С.А. Загребина/
"07" 06 2016 г.

Автор
Студент группы ММиКН–471
__________/Д.Р. Сафиуллина/
"07" 06 2016 г.

Нормоконтролер.
канд. физ.–мат. наук, доцент
__________/М.А. Корытова/
"07" 06 2016 г.

Челябинск
2016

Министерство науки и образования Российской Федерации
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра математического и функционального анализа

ЗАДАНИЕ

студенту группы ММ-471
Сафиуллиной Дание Рамилевне
на выполнение выпускной квалификационной работы
по направлению 010100.62 – МАТЕМАТИКА

1. Тема дипломной работы

Многоточечное начально-конечное условие для уравнения Баренблатта—Желтова--Кочиной в квазисоболевых пространствах.

(Утверждена приказом по университету от «15» апр. 2016 г. №661)

2. Перечень подлежащих исследованию вопросов

2.1. Литературные указания (основные источники), история вопроса и результаты предшественников

Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики /С.А. Загребина// Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. - 2013. - Т. 6, 2. - С. 5-24.

Келлер А.В. Относительно спектральная теорема Вестник ЧелГУ. – 1996. - №1. – С. 62-65.

Аль-Делфи, Дж.К. Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. – 2013. – 2(13). – С. 13-16.

Аль-Делфи, Дж.К. Квазисоболевы пространства l_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. – 2013. – 2(13). – С. 13-16.

История рассматриваемой задачи начинается в статье Панкова А.А. «Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом» , а также в его книге «Operator Theory», где она названа задачей Веригина и задачей сопряжения соответственно. Первые *результаты изложены в статье Свиридюка Г.А. «Задача Веригина для уравнений соболевского типа с относительнор-спектральными проекторами».*

2.2. Постановка задачи

1) *Обобщить результаты спектральной теории операторов в квазибанаховы пространства последовательностей;*
2) *Исследовать относительно ограниченные операторы в квазибанаховых пространствах последовательностей с получением результатов об их свойствах;*
3) *Обобщить результаты теории вырожденных голоморфных групп в квазибанаховы пространства последовательностей;*
4) *Исследовать разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для уравнений соболевского типа с использованием теории вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых пространствах последовательностей.*

2.3. Методы исследования и ожидаемые результаты

При исследовании данной задачи использовались методы математического и функционального анализа, а также методы теории полугрупп операторов.

Доказательство теоремы о существовании и единственности решения многоточечной начально-конечной задачи для уравнения Баренблатта—Желтова--Кочиной в квазисоболевом пространстве.

2. **Календарный план подготовки дипломной работы**

Наименование этапов дипломной работы	Срок выполнения этапов работы	Отметка о выполнении
1. Обзор литературы	20.09.15 –20.10.15	выполнено
2. Получение результатов, формулировка выводов, структурирование текста.	23.10.15 – 1.03.16	выполнено
3. Подготовка текста дипломной работы	30.01.16 – 16.04.16	выполнено
4. Проверка и рецензирование работы руководителем, исправление замечаний	29.04.16 – 23.05.16	выполнено
5. Подготовка доклада и текста выступления. Внешнее рецензирование	23.05.16 – 1.06.16	выполнено
6. Защита дипломной работы	13.06.16 – 20.06.16	

3. **Дата выдачи задания** «8» ноября 2015 г.

Руководитель работы

Доктор физ.-мат.наук, доцент ***(Загребина С.А.)***

Задание принял к исполнению ***(Сафиуллина Д.Р.)***

УДК 517.9

Сафиуллина Д.Р.

Многоточечное начально-конечное условие для уравнения Баренблатта–Желтова – Кочиной в квазисоболевых пространствах. / Д.Р. Сафиуллина. – Челябинск, 2016. – 29 с.

Исследовано многоточечное начально-конечное условие для уравнения Баренблатта–Желтова – Кочиной в квазисоболевых пространствах. Установлено и доказано существование единственного решения.

Список лит. – 34 назв..

Содержание

Введение

Целью нашего исследования является разрешимость в квазибанаховых пространствах уравнения

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{0.1}$$

с *многоточечным начально-конечным условием [7]*

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \;\; j = \overline{0, n}, \tag{0.2}$$

Здесь $\tau_j \in \mathbb{R}$ $(\tau_j < \tau_{j+1})$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0, n}$, а P_j – *относительно спектральные проекторы* . Заметим, что если $n = 1$, то (0.2) становится более простой начально-конечной задачей

$$P_{in}(u(0) - u_0) = 0, \;\; P_{fin}(u(\tau) - u_\tau) = 0. \tag{0.3}$$

История задачи (0.1), (0.2) начинается с одной стороны в [18], где она названа задачей Веригина, а с другой стороны и независимо – в [30], где она названа задачей сопряжения. Однако в обоих случаях вместо относительно спектральных проекторов P_{in} и P_{fin} рассматриваются спектральные проекторы оператора L, причем L вдобавок предполагается самосопряженным.

Наш подход основан на концепции относительного спектра, предложенной Г.А. Свиридюком [33], и развитой его учениками [11, 16, 19], в частности, В.Е. Федоровым. Кроме того, методы, предложенные Г.А. Свиридюком, стали фундаментом алгоритмов численного решения уравнений леонтьевского типа (т.е. конечномерных уравнений соболевского типа), которые в свою очередь сыграли важную роль в численных исследованиях экономических [14, 26, 21] и технических моделей [32, 28].

Первые результаты исследования задачи (0.1), (0.3) методом теории Г.А.Свиридюка изложены в [22], где рассмотрен частный случай задачи (0.3) причем с более жесткими чем здесь условиями L-спектр оператора

M. В [9] рассмотрена задача (0.3), но для тех же условий на L-спектр оператора M, что и в [22], однако с этом случае отмечена возможность большего произвола в относительно спектральных условиях. Необходимо отметить, что в настоящее время начально-конечные задачи для неклассических уравнений математической физики активно изучаются, в том числе и на множествах различной геометрической структуры [8, 17, 12]. Заметим еще, что если $\sigma^L_{fin}(M) = 0$, то задача (0.3) превращается в задачу Шоуолтера – Сидорова [27] $P(u(0) - u_0) = 0$ и поэтому считается естественным обобщением последней [5], которая, в свою очередь, обобщает задачу Коши.

Квазибанаховы пространства изучены Г.А.Свиридюком, А.В.Келлер, Аль-Делфи Кадимом Кхалафом. Они перенесли результаты теории Г.А. Свиридюка об относительно p-ограниченного оператора L в квазибанаховых пространства. В настоящее время так же появились результаты для случая p-спектрального оператора L [10]. В дальнейшем был рассмотрен вопрос существования экспонециальных дихотомий решений динамических уравнений соболевского типа, рассматриваемых в квазибанаховых пространствах [20].

Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - \Lambda)u = \alpha\Lambda u + f. \tag{0.4}$$

моделирует динамику давления жидкости,фильтрующейся в трещинноватопористой среде [4] . Здесь λ и α вещественные параметры, характеризующие среды; параметр $\alpha \in \mathbb{R}$, а параметр λ может принимать как положительные так и отрицательные значения,которые не противоречат физическому смыслу задачи [23] функция $f = f(x)$ играет роль внешней нагрузки. Кроме того, уравнение (0.4) описывает течение жидкостей второго порядка [34] процесс теплопроводности с "двумя температурами"[29] процесс влагопереноса в почве [31].

Джавад Кадим Аль-Делфи в диссертации [1] доказал однозначную разрешимость начально-конечной задачи для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в квазисоболевых пространствах.

1 Квазибанаховы пространства последовательностей

Пусть $\mathfrak{U}$— некоторый вещественный линеал; упорядоченная пара $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ называется*квазинормированным пространством*, если

(i) для любых $u \in \mathfrak{U}$ выполняется ${}_{\mathfrak{U}}\| u \| \geq 0$, причем ${}_{\mathfrak{U}}\| u \| = 0$ тогда и только тогда, когда $u = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0} \in \mathfrak{U}$

(ii) для любого $u \in \mathfrak{U}$ и для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняется ${}_{\mathfrak{U}}\| \alpha \cdot u \| = |\alpha| \cdot {}_{\mathfrak{U}}\| u \|$;

(iii) для любых $u, v \in \mathfrak{U}$ выполняется ${}_{\mathfrak{U}}\| u + v \| \leq C({}_{\mathfrak{U}}\| u \| + {}_{\mathfrak{U}}\| v \|)$, где константа $C \geq 1$ и не зависит ни от u, ни от v. Функция ${}_{\mathfrak{U}}\| \cdot \|\colon \mathfrak{U} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *квазинормой* в случае $C \geq 1$, а в случае $C = 1$ еще и нормой. Таким образом, понятие нормированного пространства обобщается понятием квазинормированного пространства . В дальнейшем $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\| \cdot \|)$ будем отождествлять с линеалом $\mathfrak{U}$.

Квазинорма ${}_{\mathfrak{U}}\| \cdot \|$ естественным образом задает топологию на $\mathfrak{U}$. Базисом окрестностей служит совокупность всех множеств вида $\{u \in \mathfrak{U} : {}_{\mathfrak{U}}\| u - v \| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. В случае $C = 1$ это топология определяется посредством метрики $\rho(u, v) = {}_{\mathfrak{U}}\| u - v \|$. Однако, квазинормированное пространство метризуемо и в случае $C > 1$.

Лемма 1.1 *Пусть $\mathfrak{U}$ квазинормированное пространство и пусть число α определяется уравнением $(2C)^\alpha = 2$. Тогда на $\mathfrak{U}$ существует метрика $d : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, такая, что при всех $u \in \mathfrak{U}$.*

$$d(\mathbf{0}, u) \leq {}_{\mathfrak{U}}\| u \|^\alpha \leq 2d(\mathbf{0}, u) \tag{1.1}$$

Из леммы 1.1 вытекает, что мы располагаем понятием *фундаментальной последовательности* $u_n \subset \mathfrak{U}$: $\lim\limits_{n,l\to\infty} {}_{\mathfrak{U}}\| u_n - u_l \| = 0$, а значит, и понятием полноты. Полное квазинормированное пространство называется *квазибанаховым.* Предел $u \in \mathfrak{U}$ сходящейся в квазибанаховом пространстве $\mathfrak{U}$ последовательности $u_n \in \mathfrak{U}$ будем обозначать символом $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

Пример 1.1 *Пространства последовательностей $l_p, q \in \overline{\mathbb{R}}_+$ банаховы при $q \in [1; +\infty]$ и квазибанаховы при $q \in (0,1)$. Во втором случае $= 2^{1/q}$*

Пространства последовательностей l_q при $q \in (0,1)$ будем называть *квазибанаховыми пространствами последовательностей.*

Пусть последовательность $\{\lambda\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. По аналогии с пространством Соболева W_p^m введем в рассмотрение *квазисоболевы пространства*

$$l_m^p = \left\{ \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda_k^{m/2} |u_k|\right)^p < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+$. Пространства l_p^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$${}_p^m \| u \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} \mid u_k \mid \right)^p \right)^{1/p},$$

причем они тоже банаховы только если $p \in [1, +\infty)$. Если $p \in (0,1)$ то константа $C = 2^{1/p}$. Заметим еще, что если $m = 0$, то $l_p^0 = l_p$.

Пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\| \cdot \|)$ и $(\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}; {}_{\mathfrak{F}}\| \cdot \|)$ – два квазибанаховых пространства последоваетльностей. Будем говорить, что

–$\mathfrak{U}$ вложено в $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{U}$ подмножество $\mathfrak{F}$, то есть $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$;

– $\mathfrak{U}$ плотно вложено в $\mathfrak{F}$, если вдобавок замыкание $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{F}$;

– $\mathfrak{U}$ плотно и непрерывно вложено в $\mathfrak{F}$, если вдобавок для всех $u \in \mathfrak{U}$ выполнено ${}_{\mathfrak{U}} \| u \| \geq C \cdot {}_{\mathfrak{F}} \| u \|$, где $C \in \mathbb{R}_+$ — некоторая константа, не зависящая от u. Плотное и непрерывное вложение будем обозначать символом $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Теорема 1.1 [3] *При всех $p \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$, $l \leq m$, имеют место плотные и непрерывные вложения $l_p^m \to l_p$.*

2 (L,p)-ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (линейный и непрерывный) и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (линейный, замкнутый и плотно определенный).

Определение 2.1 Оператор M называется *спектрально ограниченным относительно оператора* L (или просто (L,σ)*-ограниченным*), если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Замечание 2.1 Пусть $\mathrm{dom}M = \mathfrak{U}$ и оператор L непрерывно обратим. Тогда оператор M (L,σ)-ограничен. Если же оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ компактен, то оператор M не будет (L,σ)-ограниченным.

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, возьмем контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ и построим операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^L(M)d\mu \text{ и } Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L_\mu^L(M)d\mu,$$

где $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ – *правая, а* $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – *левая* L*-резольвенты оператора* M, причем интегралы понимаются в смысле Римана. По построению операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

Лемма 2.1 *Пусть оператор* M (L,σ)*-ограничен, тогда операторы* $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ *и* $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ *– проекторы.*

Лемма 2.2 *Пусть оператор* M (L,σ)*-ограничен. Тогда для любого* $u \in \mathrm{dom}M$ *вектор* $Pu \in \mathrm{dom}M$.

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im}P$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im}Q$, и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ $(\mathrm{domM} \cap \mathfrak{U}^k)$, $k = 0, 1$. Из леммы 2.1 следует, что линеалы $\mathrm{dom}M_k = \mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^k$ плотны в $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 2.1 [24] *(Теорема Свиридюка о расщеплении). Пусть оператор* M (L,σ)*-ограничен. Тогда*
(i) операторы $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0,\ 1$;
(ii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$ *и* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.

В силу теоремы о расщеплении, существуют операторы $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Следствие 2.1 *В условиях теоремы 2.1 для любых $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| > a$, имеем*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

Замечание 2.2 Пусть $G = L_0 M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0)$, $T = M_1 L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$ и выполнены условия следствия 2.1. Тогда

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k M_0^{-1} G^k (\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} L_1^{-1} T^{k-1} Q.$$

Определение 2.2 Для L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M бесконечно удаленную точку будем называть

(i) *устранимой особой точкой*, если $H = \mathbb{O}$;

(ii) *полюсом* порядка $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$;

(iii) *существенно особой точкой*, если $H^p \neq \mathbb{O}$ при любом $p \in \mathbb{N}$.

Замечание 2.3 В дальнейшем удобно называть устранимую особую точку полюсом порядка нуль. Оператор M назовем (L, p)-ограниченным, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, если он (L, σ)-ограничен, и точка ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его L-резольвенты.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$, вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ будем называть *собственным вектором* оператора L. Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ называется *цепочкой M-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если $L\varphi_{q+1} = M\varphi_q$, $q = 0, 1, \ldots$, $\varphi_l \notin \ker L \setminus \{0\}$, $l = 1, 2, \ldots$. Порядковый номер вектора в цепочке будем называть его *высотой.* Условимся собственные векторы оператора L называть M-присоединенными векторами высоты 0. Линейную оболочку M-присоединенных векторов оператора L назовем его *M-корневым линеалом. M-корневым пространством* будем называть замкнутый M-корневой линеал оператора L. Цепочка M-присоединенных векторов может быть бесконечной. В частности, она может быть заполнена нулями, если $\varphi_0 \in \ker M \bigcap \ker L$. Но она будет конечной в случае существования такого M-присоединенного вектора φ_q, что либо $\varphi_q \notin \operatorname{dom} M$, либо $M\varphi_q \notin \operatorname{im} L$. Высоту q последнего M-присоединенного вектора в конечной цепочке $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_q\}$ будем называть *длиной* этой цепочки.

Напомним, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ называется *фредгольмовым*, если $\dim \ker L = \operatorname{codim} L < \infty$.

Теорема 2.2 [14]*Пусть оператор L-фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
(i) оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;
(ii) длины всех цепочек M-присоединенных векторов не превосходит p, и существует по крайней мере одна цепочка длины p.

3 Голоморфные вырожденные группы операторов

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим линейное уравнение

$$L\dot{u} = Mu. \tag{3.1}$$

Решением $u = u(t)$ уравнения (3.1) будем называть вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую этому уравнению.

Решение $u(t)$ уравнения (3.1) назовем *решением задачи Коши для уравнения (3.1)*, если оно вдобавок удовлетворяет *условию Коши*

$$u(0) = u_0 \tag{3.2}$$

при некотором векторе $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Определение 3.1 Множество $\mathfrak{P}$ назовем *фазовым пространством* уравнения (3.1), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (3.1) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория (т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при любом $t \in \mathbb{R}$);

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (3.1), (3.2).

Теорема 3.1 *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения (3.1) служит подпространство $\mathfrak{U}^1$.*

Действительно, в силу теоремы 3.1 уравнение (3.1) эквивалентно системе

$$H\dot{u}^0 = u^0, \quad u^1 = Su^1, \tag{3.3}$$

где $u^0 = (\mathbb{I} - P)u$, $u^1 = Pu$. Дифференцируя правое уравнение системы (3.3) и умножая слева на H, последовательно получим

$$0 = H^{p+1}u^{0(p+1)} = H^p u^{0(p)} = \ldots H\dot{u}^0 = u^0.$$

Определение 3.2 Отображение $U^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{U})$ будем называть *группой разрешающих операторов* (или, коротко, *группой*) уравнения (3.1) , если:

(i) $U^sU^t = U^{s+t}$ при любых s, $t \in \mathbb{R}$;

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ является решением уравнения (3.1) .

Следуя традиции [12], отождествим группу с ее графиком $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$. Группу $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ назовем *голоморфной*, если она аналитически продолжима во всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с сохранением свойств (i), (ii); и *вырожденной*, если ее единица U^0 является проектором. Для голоморфной вырожденной группы корректным является понятие *ядра*

$$\ker U^\cdot = \ker U^0 = \ker U^t \text{ при любом } t \in \mathbb{R}$$

и *образа*

$$\operatorname{im} U^{\cdot} = \operatorname{im} U^0 = \operatorname{im} U^t \text{ при любом } t \in \mathbb{R}.$$

Голоморфную вырожденную группу $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ назовем разрешающей группой уравнения (3.1) , если ее образ $\operatorname{im} U^{\cdot}$ совпадает с фазо́вым пространством уравнения (3.1) .

Теорема 3.2 *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда существует единственная разрешающая группа уравнения (3.1) , которая к тому же имеет вид*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \ t \in \mathbb{R},$$

где замкнутый контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Доказательство. Пусть контур $\gamma' = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r' > r\}$, тогда

$$U^s U^t = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma'} \int\limits_{\gamma} R^L_\lambda(M) R^L_\mu(M) e^{\mu t + \lambda s} d\lambda d\mu =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int\limits_{\gamma'} \frac{e^{\lambda s} d\lambda}{\lambda - \mu} \int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu + \int\limits_{\gamma'} R^L_\lambda(M) e^{\lambda s} d\lambda \int\limits_{\gamma} \frac{e^{\mu t} d\mu}{\mu - \lambda} \right) = U^{s+t}$$

в силу теоремы Фубини, теоремы о вычетах и *правого относительно резольвентного тождества Гильберта.* Далее покажем, что группа разрешает уравнение вида

$$R^L_\beta(M) \dot{u} = (\beta L - M)^{-1} M u.$$

Теперь пусть $u_0 \in \mathfrak{U}$, тогда

$$R^L_\beta \frac{d}{dt} U^t u_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (\beta L - M)^{-1} \mu L R^L_\mu(M) u_0 e^{\mu t} d\mu = (\beta L - M)^{-1} M U^t u_0,$$

в силу теоремы Коши.

Поскольку,

$$U^0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu = P,$$

тогда решением уравнения

$$R_\beta^L(M)\dot{u} = (\beta L - M)^{-1} M u$$

будет

$$u(t) = U^t u_0 = U^{0+t} u_0 = U^0 U^t u_0 = P U^t u_o \in \mathfrak{U}^1 = \mathrm{dom} M_1 \subset \mathrm{dom} M,$$

в силу теоремы 2.1.

Поэтому функция $u(t) = U^t u_0$ является решением уравнения (3.1).И группа $R_\beta^L(M)\dot{u} = (\beta L - M)^{-1} M u$ является разрешающей и для уравнения (3.1).

Очевидно, $U^\bullet \in C(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{F}))$ продолжается во всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Следовательно, теорема доказана. •

Единственная разрешающая группа уравнения (3.1) может оказаться далеко не единственной голоморфной вырожденной группой данного уравнения. Введем в рассмотрение условие

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma^L(M) = \bigcup\limits_{j=0}^{n} \sigma_j^L(M),\ n \in \mathbb{N},\ \text{причем } \sigma_j^L(M) \neq \emptyset,\ \text{существует} \\ \text{замкнутый контур } \gamma_j \subset \mathbb{C},\ \text{ограничивающий область } D_j \supset \sigma_j^L(M), \\ \text{такой, что } \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset,\ \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \emptyset\ \forall j,k,l = \overline{1,n}, k \neq l. \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Теорема 3.3 *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен и выполнено условие (3.4). Тогда существуют голоморфные вырожденные группы уравнения ((3.1).*

Доказательство. Построим интегралы *типа Данфорда – Тейлора* (понимаемые в смысле Римана)

$$U_j^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_j} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, j = \overline{1,n}.$$

Затем, рассуждая аналогично теореме 3.1, получим требуемое. •

Следствие 3.1 *Пусть выполнены условия теоремы 3.3. Тогда* $\{U_0^t : t \in \mathbb{R}\}$ *– голоморфная вырожденная группа уравнений (3.1).*

Доказательство. Голоморфность группы $\{U_0^t : t \in \mathbb{R}\}$ очевидна. Докажем выполнение свойства (i) определения 3.2

$$U_0^s U_0^t = (U^s - \sum_{k=1}^{n} U_k^s)(U^t - \sum_{l=1}^{n} U_l^t) = U^{s+t} - \sum_{k=1}^{n} U_k^s U^t -$$

$$- \sum_{l=1}^{n} U^s U_l^t + \sum_{k,l=1}^{n} U_k^s U_l^t = U^{s+t} - 2\sum_{k=1}^{n} U_k^{s+t} + \sum_{k=1}^{n} U_k^{s+t} = U_0^{s+t}$$

в силу теоремы 3.1, 3.2 и следствия 3.1. •

Следствие 3.2 *Пусть выполнены условия теоремы 3.3. Тогда*

(i) $U^t U_j^s = U_j^s U^t = U_j^{s+t}$ *при всех* $s,\ t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$;

(ii) $U_k^t U_l^s = U_l^s U_k^t = \mathbb{O}$ *при всех* $s,\ t \in \mathbb{R}$, $k,\ l = \overline{1,n}$, $k \neq l$.

$$(i) \quad U^t U_j^s = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma} \int\limits_{\gamma_j} R_\mu^L(M) R_\lambda^L(M) e^{\mu t + \lambda s} d\mu d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int\limits_{\gamma} \frac{e^{\mu t} d\mu}{\mu - \lambda} \int\limits_{\gamma_j} R_\lambda^L(M) e^{\lambda s} d\lambda + \int\limits_{\gamma} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu \int\limits_{\gamma_j} \frac{e^{\lambda s} d\lambda}{\lambda - \mu} \right) = U_j^{s+t}$$

в силу теоремы Фубини, теоремы о вычетах и правого относительно резольвентного тождества Гильберта. Второе равенство в (i) и доказываются аналогично.

(ii) Теперь, применяя те же теоремы и то же тождество, что и в (i), получим

$$U_k^t U_l^s = \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int\limits_{\gamma_k} \frac{e^{\mu t} d\mu}{\mu - \lambda} \int\limits_{\gamma_l} R_\lambda^L(M) e^{\lambda s} d\lambda + \int\limits_{\gamma_k} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu \int\limits_{\gamma_l} \frac{e^{\lambda s} d\lambda}{\lambda - \mu} \right) = \mathbb{O},$$

если $k \neq l$. •

Положим $U_0^t = U^t - \sum\limits_{k=1}^{n} U_k^t$, $t \in \mathbb{R}$.

Замечание 3.1 Рассмотрим единицы $P_j = U_j^0$, $j = \overline{0,n}$, построенных (в силу условия (3.4) голоморфных вырожденных групп $U_j^t : t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0,n}$ уравнения (3.1). Очевидно,

(i) $PP_j = P_jP = P_j$, $j = \overline{0,n}$;

(ii) $P_kP_l = P_lP_k = \mathbb{O}$, k, $l = \overline{0,n}$, $k \neq l$.

4 Многоточечная начально-конечная задача

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,σ)-ограничен, причем выполнено условие (3.4). Возьмем

$$-\infty \leq a < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < b \leq +\infty,$$

векторы $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$, вектор-функцию $f \in C^\infty((a,b);\mathfrak{F})$ и рассмотрим линейное неоднородое уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{4.1}$$

Вектор-функцию $u \in C^\infty((a,b);\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (4.1), назовем *решением уравнения* (4.1). Решение $u = u(t)$, $t \in (a,b)$ уравнения (4.1), удовлетворяющее условиям

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, j = \overline{0,n}, \tag{4.2}$$

назовем *решением многоточечной начально-конечной задачи для уравнения* (4.1). Здесь проекторы P_j, $j = \overline{0,n}$ силу теоремы 3.3 и замечания 3.1 имеют вид

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} R_\mu^L(M)d\mu,\ j = \overline{0,n}.$$

Построим операторы

$$Q_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} L_\mu^L(M)d\mu,\ j = \overline{0,n},$$

которые по построению лежат в пространстве $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

Лемма 4.1 [6] *Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем выполнено условие (3.4), а оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда операторы $Q_j : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$, $j = \overline{1,n}$, – проекторы, причем*
(i) $QQ_j = Q_jQ = Q_j$, $j = \overline{1,n}$;
(ii) $Q_kQ_l = Q_lQ_k = \mathbb{O}$, k, $l = \overline{1,n}$, $k \neq l$.

Замечание 4.1 *Построим оператор $Q_0 = Q - \sum\limits_{k=1}^{n} Q_k$, который тоже является проектором, причем*
(i) $QQ_0 = Q_0Q = Q_0$;
(ii) $Q_0Q_j = Q_jQ_0 = \mathbb{O}$, $j = \overline{1,n}$.

Учитывая сказанное в замечаниях 3.1, 4.1 и лемме 4.1, назовем проекторы P_j и Q_j, $j = \overline{0,n}$, *относительно спектральными проекторами.*

Введем в рассмотрение подпространства $\mathfrak{U}^{1j} = \mathrm{im}P_j$, $\mathfrak{F}^{1j} = \mathrm{im}Q_j$, $j = \overline{0,n}$. По построению

$$\mathfrak{U}^1 = \bigoplus_{j=0}^{n} \mathfrak{U}^{1j} \text{ и } \mathfrak{F}^1 = \bigoplus_{j=0}^{n} \mathfrak{F}^{1j}.$$

Через L_{1j} обозначим сужение оператора L на $\mathfrak{U}^{1j}$, $j = \overline{0,n}$, а через M_{1j} обозначим сужение оператора M на $\mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^{1j}$, $j = \overline{0,n}$. Поскольку, как нетрудно показать, $P_j\varphi \in \mathrm{dom}\, M$, если $\varphi \in \mathrm{dom}\, M$, то область определения $\mathrm{dom}\, M_{1j} = \mathrm{dom}\, M \cap \mathfrak{U}^{1j}$ плотна в $\mathfrak{U}^{1j}$, $j = \overline{0,n}$.

Теорема 4.1 [6] (Обобщенная спектральная теорема). *Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а оператор M (L,σ)-ограничен, причем выполнено условие (3.4). Тогда*
(i) операторы $L_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j};\mathfrak{F}^{1j})$, $M_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j};\mathfrak{F}^{1j})$, $j = \overline{0,n}$;
(ii) существуют операторы $L_{1j}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{1j};\mathfrak{U}^{1j})$, $j = \overline{0,n}$.

В условиях теоремы 4.1 существуют операторы $S_j = L_{1j}M_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j})$, $j = \overline{0,n}$.

Теорема 4.2 *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, причем выполнено условие (3.4). Тогда для любых $f \in C^\infty((a,b);\mathfrak{F}))$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j=\overline{0,n}$ существует единственное решение задачи (4.1), (4.2), которое к тому же имеет вид*

$$
\begin{gathered}
u(t) = -\sum_{q=0}^{p}(M_0^{-1}L_0)^q M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f^{(q)}(t)+ \\
+\sum_{j=0}^{n} U_j^{t-\tau_j}u_j + \sum_{j=0}^{n}\int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s}L_{1j}^{-1}Q_j f(s)ds.
\end{gathered} \tag{4.3}
$$

Доказательство. Уравнение (4.1) посредством теоремы 1.1 и (4.2) сведем к системе

$$
H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f,\ \dot{u}^{1j} = S_j u^{1j} + L_{1j}^{-1}Q_j f,\ j=\overline{0,n},, \tag{4.4}
$$

где $u^0 = (\mathbb{I}-P)u$, $u^{1j} = P_j u$, $j=\overline{0,n}$, и каждое уравнение определено на "своем" подпространстве. Из первого уравнения (4.4), последовательно его дифференцируя и умножая слева на H, в силу нильпотентности оператора H получим

$$
u^0(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^K M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f^{(k)}(t) \tag{4.5}
$$

Для остальных уравнений (4.4) условия (4.2) становятся условиями Коши

$$
u^{1j}(\tau_j) = P_j u_j, \quad j=\overline{0,n}. \tag{4.6}
$$

Последовательно решая эти задачи, получим

$$
u^{1j}(t) = U_j^{t-\tau_j}u_j + \int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s}L_{1j}^{-1}Q_j f(s)ds,\ j=\overline{0,n} \tag{4.7}
$$

Складывая (4.5) и (4.7), получим (4.3). Единственность решения задачи (4.1), (4.2) в силу приведенного доказательства очевидна. •

5 Квазисоболевы пространства и квазиоператоры Лапласа и Грина

Квазисоболевы пространства

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – два квазибанаховых пространства последовательностей. Будем говорить, что:

• $\mathfrak{U}$ вложено в$\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{U}$ подмножество $\mathfrak{F}$, то есть $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$;

• $\mathfrak{U}$ плотно вложено в$\mathfrak{F}$, если вдобавок замыкание $\bar{\mathfrak{U}} = \mathfrak{F}$;

• $\mathfrak{U}$ плотно и непрерывно вложено в $\mathfrak{F}$, если вдобавок для всех $u \in \mathfrak{U}$ $_q\|u\|_{\mathfrak{U}} \geq C_q\|u\|_{\mathfrak{F}}$, где $C \in \mathbb{R}_+$ – некоторая константа не зависящая от u. Плотное и непрерывное вложение будем обозначать символом $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Теперь пусть $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ – соболевское пространство, а W_2^{-1} – сопряженное к нему относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ из $L_2(\Omega)$ пространство с негативной нормой. Из теоремы вложения Соболева вытекает, что

$$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega). \tag{5.1}$$

Также хорошо известно, что оператор Лапласа – Δ, определяемый формулой

$$-\langle\Delta u, v\rangle = \sum_{m=1} n \int_\Omega u_{x_m} v_{x_m} dx,$$

задает тополинейный изоморфизм:

$$-\Delta : \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \to W_2^{-1}(\Omega). \tag{5.2}$$

Далее, пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – множество собственных значений оператора Лапласа - Δ, занумерованное по неубыванию с учетом их кратности. построим пространства:

$$l_2^1 = \left\{u = u_k : \sum_{k=1}^\infty \lambda_k |u_k|^2 < +\infty\right\},$$

$$l_2^{-1} = \left\{u = u_k : \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{-1} |u_k|^2 < +\infty\right\}$$

и отметим тополинейные изоморфизмы $l_2^1 \cong \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \doteq W_2^{-1}(\Omega)$, а также плотность и непрерывность вложений

$$l_2^1 \hookrightarrow l_2 \hookrightarrow l_2^1, \tag{5.3}$$

вытекающие из (5.1). Отметим банаховость пространств l_2^1 и l_2^{-1} с нормами $\|u\|_1^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k|^2$ и $\|v\|_{-1}^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |v_k|^2$ соответственно.

Введем в рассмотрение квазиоператор Лапласа

$$\Lambda u = \lambda_k u_k. \tag{5.4}$$

Поскольку $\|\Lambda u\|_{-1} = \|u\|_1$, то из (5.4) следует тополинейность изоморфизма $\Lambda : l_2^1 \hookrightarrow l_2^{-1}$, который, впрочем, легко получить из (5.2), (5.3). Обратный к Λ оператор (квазиоператор Грина Λ^{-1}) задается формулой

$$\Lambda^{-1} v = \lambda_k^{-1} v_k. \tag{5.5}$$

Данная часть посвящена перенесению описанной выше идеологии на квазибанаховы пространства $l_p, p \in (0,1)$. Построим квазисоболевы пространства:

$$l_p^1 = \left\{ u = u_k : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k{}^{p/2} |u_k\|^p < +\infty \right\},$$

$$l_p^{-1} = \left\{ u = u_k : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-p/2} \|u_k\|^p < +\infty \right\},$$

$\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$, а $p \in (0,1)$.

По аналогии с пространствами Соболева W_p^m введем в рассмотрение квазисоболевы пространства

$$l_p^m = \left\{ u = u_k : \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|)^p < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}_+$. пространства l_p^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$$
{}^m_q\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|)^p \right)^{1/p},
$$

причем они тоже банаховы только если $p \in [1, +\infty)$. Если $p \in (0, 1)$, то константа $C = 2^{1/p}$. Заметим еще, что если $m = 0$, то $l_p^0 = l_p$.

Теорема 5.1 [3]*При всех $p \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}, l \leq m$, имеют место плотные и непрерывные вложения $l_p^m \hookrightarrow l_p^l$.*

Теорема 5.2 [2] *При всех $p \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{R}$ квазиоператор Лапласа Λ : $l_p^{m+2} \to l_p^m$ – тополинейный изоморфизм.*

6 Уравнение Баренблатта –Желтова – Кочиной

Пусть $\mathfrak{U} = l_p^{m+2}, \mathfrak{F} = l_p^m$, операторы L, M зададим формулами $L = \lambda + \Lambda, M = \alpha I$,где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ – некоторые константы.

Лемма 6.1 *Для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ операторы $L, M \in \mathfrak{L}(l_p^{m+2}, l_q^m)$.*

Доказательство. В силу теоремы 5.2 оператор Лапласа Λ, определенный в (5.4), линеен и непрерывен.

Следовательно, операторы L и M по определению принадлежат пространству $\mathfrak{L}(l_p^{m+2}, l_q^m)$.•

Лемма 6.2 *Для любого $\lambda \notin \sigma(\Lambda)$ существует оператор $L^{-1} \in \mathfrak{L}(l_p^m, l_q^{m+2})$*

Доказательство. Утверждение следует из формулы определения оператора $L = \lambda + \Lambda$ и свойства оператора.•

Теорема 6.1 *Для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ оператор $M(L, 0)$-ограничен.*

Доказательство. Если $\lambda \notin \sigma^L(M)$, то утверждение следует из леммы 6.2, теореме аналога Банаха. Пусть $\lambda \in \sigma^L(M)$, положим $kerL = span\{\varphi_k, \lambda = -\lambda_k\}$. Тогда, если $\sum\limits_{\lambda=-\lambda_k} | c_k |> 0$, имеем

$$\psi = \sum_{\lambda=-\lambda_k} c_k M \varphi_k \notin imL.$$

Отсюда в силу леммы 6.2 следует утверждение теоремы. Поскольку L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M состоит из точек

$$\left\{\mu_k = \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda+\lambda_k}, k \in \mathbb{N}\backslash\{l : \lambda = \lambda_l\}\right\}, \tag{6.1}$$

то оператор $M(L,\sigma)$-ограничен, и

$$\mathfrak{U}^0 = \begin{cases} \{0\}, \text{если} \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : u_k = 0, k \in \mathbb{N}\backslash\{\lambda = \lambda_l\}\}; \end{cases}$$

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U}, \text{если} \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : u_l = 0, \lambda_l = \lambda\}. \end{cases}$$

Подпространства $\mathfrak{F}^k, k = 0,1$ определяется аналогично.

Действительно, как нетрудно показать при всех $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, оператор $H = \mathbb{O}$, и следовательно, оператор $M(L,0)$-ограничен.•

Рассмотрим аналог уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной как одного из наиболее известных из неклассических уравнений математической физики [24]

$$(\lambda - \Lambda)u = \alpha\Lambda u. \tag{6.2}$$

Как было показано ранее [1], голоморфная разрешающая группа уравнения 6.2 будет иметь вид

$$U^t = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{\mu_k t} e_k, \text{если} \lambda \notin \{\lambda_k\}, k \in \mathbb{N} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{\mu_k t} e_k, \text{если существует} \lambda \in \mathbb{N} : \lambda = \lambda_l. \end{cases}$$

Здесь $\mu_k = \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}$ – такой L-спектра оператора M, последовательность $u_{0k} = u_0 \in l_q^{m+2}$, векторы $e_k = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$, где единица стоит на k-том месте. Фазовым пространством уравнения (6.2) будет множество $\mathfrak{U}^1$ из доказательства теоремы 6.1.

Перейдем к рассмотрению аналога неоднородного уравнения Баренблатта–Желтова– Кочиной

$$(\lambda - \Lambda)u = \alpha\Lambda u + f. \tag{6.3}$$

Наконец, рассмотрим многоточечную начально-конечную задачу (4.2) для уравнения (6.3).

Теорема 6.2 Для любых векторов $u_j \in l_q^{m+2}, j = \overline{0,n}$ и любой вектор-функции $f : [a,b] \to l_q^m$, существует единственное решение $u \in C^1([a,b]; l_q^{m+2})$ задачи (6.3),(4.2).

Заключение

Доказана теорема о существовании и единственности решения задачи для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной с многоточечным начально конечным условием в квазисоболевом пространстве.

Список литературы

[1] *Аль-Делфи Дж.К.* Исследование вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых пространствах: дис. ... канд. физ.-мат.наук: 05.13.18 / Дж.К. Делфи; Юж.-Урал.гос.ун-т. – Челябинск,2015.

[2] *Аль-Делфи Дж.К.* Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. — 2013. — 2 (13). — С. 13–16.

[3] *Аль-Делфи Дж.К.*Квазисоболевы пространства l_p^m /Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2013. – Т. 5, 1. – С. 107–109.

[4] *Баренблатт Г. И.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах /Г.И.Баренблатт, Ю.П.Желтов, И.Н.Кочина//ПММ.1960.Т.24,№5.С.58-73

[5] *Берг, Й.* Интерполяционные пространства. Введение /Й. Берг, Й. Лёфстрем. – М.: Мир, 1980.

[6] *Загребина, С.А.* Многоточечная начально-конечная задача для уравнения соболевского типа с (L, p)-ограниченным оператором/С.А. Загребина// Вырожденные полугрупы и пропагаторы уравнений соболевского типа: материалы докл. Междунар. симпозиума, Челябинск, 10 - 14 нояб. 2014г./Юж-Урал.гос.ун-т (нац.исслед.ун-т). – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014г.- с.19-32

[7] *Загребина, С.А.* Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2013. — Т. 6, 2. — С. 5–24.

[8] *Загребина, С. А.* Начально-конечная задача для эволюционных уравнений соболевского типа на графе /С.А. Загребина, Н.П. Сольвьева// Вестник ЮУрГУ, Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск,2008. – № 15 (115), вып.1 – С. 23-26.

[9] *Загребина, С. А.* О задаче Шоуолтера – Сидорова /С.А. Загребина// Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3.. – С. 22-28.

[10] *Замышляева А.А.* Голоморфные вырожденые полугруппы операторов и эволюционные уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей./А.А. Замышляева,Дж.К.Аль-Исави// Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, 4. – С. 27–37.

[11] *Замышляева, А. А.* Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка: моногр. /А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.

[12] *Замышляева, А. А.* Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссиневска – Лява /А.А. Замышляева// Вестник ЮУрГУ, Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск,2011. – № 37 (254), вып.10 – С. 22-29.

[13] *Иосида К.* Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967.

[14] *Келлер, А. В.* Алгоритм решения задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей леонтьевского типа /А.В. Келлер// Вестник ЮУрГУ, Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск,2011. – № 4 (241), вып.7 – С. 40-46.

[15] *Келлер А.В.* Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика.Физика. – 2015. – Т. 7, 1. – С. 20–27

[16] *Манакова, Н. А.* Задачи оптимального управления для уравнения соболевского типа: моногр. /Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.

[17] *Манакова, Н. А.* Об одной задаче оптимального уравнения с функционалом качества общего вида /Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – Самара, 2011. – № 4 (25). – С. 18-24.

[18] *Панков, А. А.* Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом при производной/А.А. Панков, Т.Е. Панкова.//Докл. Акад.наук Украины. – 1993. – № 9. – С.18-20.

[19] *Сагадеева, М. А.* Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа: моногр. /М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.

[20] *Сагадеева М.А.* Существаование инвариантных подпространств и экспоненциальных дихотомий решений динамических уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах./М.А. Сагадеева, Ф.Л. Хасан//Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, 4. – С. 46–54.

[21] *Свиридюк, Г. А.* Алгоритмы решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами /Г.А. Свиридюк, И.В. Бурлачко// Журн. вычисл. математикии мат. физик. – 2003. – Т-43, № 11 – С. 1677-1683.

[22] *Свиридюк, Г. А.* Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p-секториальными операторами /Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина// Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 12. – С. 1646-1652.

[23] *Свиридюк, Г.А.* Задачи Коши для линейного сингулярного уравнения типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, 12. — С. 2169–2171.

[24] *Свиридюк, Г.А.* Неклассические модель математической физи- ки / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Се- рия: Математическое моделирование и программирование. — 2012. — 40 (299). — С. 7–18.

[25] *Свиридюк Г.А.* Теорема о расщеплении в квазибанаховых пространствах / Г.А. Свиридюк, Дж.К. Аль-Делфи // Математические заметки СВФУ. — 2013. — Т. 20, 2. — С. 180–185.

[26] *Свиридюк, Г. А.* Численное решение систем уравнений леонтьевского типа /Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев// Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 8. – С. 46-52.

[27] *Сидоров, Н. А.* Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией /Н.А. Сидоров// Мат. заметки. – 1984. – Т. 35, № 4. – С. 569-578.

[28] *Шестаков, А. Л.* Численное решение задачи оптимального измерения /А.л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова// Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107-115.

[29] *Chen P.J.* On a theory of heat conduction involvimg two temperatures// P.J.Chen,M.E. Gurtin, Z.Angew.Math.Phys.1968.V.19.P614-627.

[30] *Pyatkov, S. G.* Operator Theory. Nonclassical Problems /S.G. Pyatkov. – Utrecht: Boston: Kölu; Tokyo: VSP, 2002.

[31] *Hallaire M.* On a theory of moisture-transfer/ M.Hallaire// Inst.Rech.Agronom.1964.V.84.P.160-180.

[32] *Shestakov, A. L.* Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals /A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk// Вестник ЮУрГУ, Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск,2011. – No. 17 (234), issue. 8 – P. 70-75.

[33] *Sviriduk, G. A.* Lineal Sobolev Type Equations and Degenerate Semiggroups of Operators/G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Kölu; Tokyo: VSP, 2003.

[34] *Ting T. W.*Certain non-steady flows of second-order fluids//Arch.Rat.Mech.Anal.1963.V.14,№1.P.28-57.