

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«Южно-Уральский государственный университет»  
(национальный исследовательский университет)  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

РАБОТА ПРОВЕРЕНА

Рецензент, к.ф.-м.н., доцент

доцент кафедры математического моделирования ЮУрГУ

 /М.А. Сагадеева/  
«10» июня 2016 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н., доцент

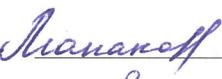
 /В.Л. Дильтман/  
«14» июня 2016 г.

Численное исследование одной математической  
модели фильтрации с трехточечным  
начально-конечным условием

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ЮУрГУ – 010100.62. 2016. 12-030-1881. ВКР

Руководитель, д.ф.-м.н., доцент

 /Н.А. Манакова/  
«9» июня 2016 г.

Автор, студент группы ММиКН - 471

 /Ф.Н. Шаяхметова/  
«09» 06 2016 г.

Нормоконтролер, к.ф.-м.н., доцент

 /М.А. Корытова/  
«09» 06 2016 г.

Челябинск, 2016

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Факультет математики, механики и компьютерных наук  
Кафедра математического и функционального анализа

## Задание

студентки группы ММиКН - 471  
Шаяхметовой Физалии Насимовны  
на выполнение выпускной квалифицированной работы  
по направлению 010100.62 – МАТЕМАТИКА

### 1. Тема дипломной работы

Численное исследование одной математической модели фильтрации с трехточечным начально-конечным условием

(Утверждена приказом по университету от «15» апреля 2016 г. № 661)

### 2. Перечень подлежащих исследованию вопросов

- 2.1. Изучить построении модели Баренблатта – Желтова – Кошиной
- 2.2. Изучить основные положения метода Фурье
- 2.3. Исследовать разрешимость трехточечной начально-конечной задачи для линейного уравнения соболевского типа
- 2.4. Разработать алгоритм численного решения трехточечной начально – конечной задачи для модели Баренблатта – Желтова – Кошиной на основе модифицированного проекционного метода Галеркина
- 2.5. Написать программу, реализующую численный алгоритм в среде Maple 18

### 3. Календарный план подготовки выпускной квалифицированной работы

Наименование этапов выпускной квалифицированной работы	Срок выполнения этапов работы	Отметка о выполнении
1. Обзор литературы	15.02.2016 – 15.03.2016	выполнено
2. Выбор и разработка методов исследования	16.03.2016 – 16.04.2016	выполнено
3. Получение результатов, формулировка выводов, структура текста. Подготовка текста дипломной работы	17.04.2016 – 18.05.2016	выполнено
4. Проверка и рецензирование работы руководителем, исправление замечаний	18.05.2016 – 25.05.2016	выполнено
5. Подготовка доклада и текста выступления	26.05.2016 – 1.06.2016	выполнено
6. Внешние рецензирования	26.05.2016 – 1.06.2016	выполнено
7. Нормоконтроль, предзащита	1.06.2016 – 5.06.2016	выполнено
8. Защита дипломной работы	5.06.2016 – 29.06.2016	

4. Дата выдачи задания «15» 02 2016 г.

Руководитель работы (к. ф. - м. н., профессор) Манаков / Н.А. Манакова

Задание принял к исполнению Шаяхметова / Ф.Н. Шаяхметова

УДК 517.9

**Шаяхметова Ф.Н.**

Численное исследование одной математической модели фильтрации с трехточечным начально-конечным условием /Ф.Н. Шаяхметова. — Челябинск, 2016. — 46 с.

Квалификационная работа посвящена численному исследованию одной математической модели фильтрации с трехточечным начально-конечным условием. Разработан алгоритм численного решения трехточечной начально-конечной задачи для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной на основе модифицированного проекционного метода Галеркина. На основе теоретических результатов разработана и реализована в среде Maple 18.0 программа численного решения изучаемой задачи. Проведены вычислительные эксперименты.

Список литературы – 16, рисунков – 8, таблица – 1.

# Содержание

Введение . . . . .	4
1. Математическая модель Баренблатта – Желтова – Кочиной . . . . .	6
2. Тригонометрические ряды Фурье . . . . .	9
3. Задача Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа . . . . .	13
4. Относительный спектр . . . . .	16
5. Метод Фурье решения трехточечной начально-конечной задачи для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной . . . . .	18
6. Алгоритм численного метода и описание программы . . . . .	30
7. Вычислительные эксперименты . . . . .	34
Заключение . . . . .	44
Библиографический список . . . . .	45

## Введение

Рассмотрим уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной [1]

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + f, \quad 0 < s < l, \quad t_1 < t \leq t_3, \quad (0.1)$$

которое описывает движение жидкости фильтрующейся в трещиновато-пористой среде. Здесь  $\alpha$  и  $\lambda$  – коэффициенты, описывающие среду; параметр  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , а параметр  $\lambda \in \mathbb{R}$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения, которые не противоречат физическому смыслу задачи, функция  $f = f(s, t)$  – характеризует внешнюю нагрузку (т.е. истоки или стоки жидкости) соответственно. Различные начально-краевые задачи для уравнения (0.1) рассматривались в работах [4, 5, 13]. Уравнение (0.1) относится к широкому классу уравнений соболевского типа [5, 6, 10, 11, 12, 13].

Добавим к уравнению (0.1) граничные и начальные условия:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [t_1, t_3], \quad (0.2)$$

$$\begin{aligned} P_1(u(s, t_1) - u^1(s)) &= 0, \quad 0 \leq s \leq l, \\ P_2(u(s, t_2) - u^2(s)) &= 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad t_2 \in [t_1, t_3], \\ P_3(u(s, t_3) - u^3(s)) &= 0, \quad 0 \leq s \leq l, \end{aligned} \quad (0.3)$$

где  $P_1, P_2, P_3$  – специальным образом построенные относительно спектральные проекторы [4];  $u^1(s), u^2(s), u^3(s)$  – заданные функции. Уравнение (0.1) с граничным условием (0.2) образуют модель Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Модель Баренблатта – Желтова – Кочиной (0.1), (0.2) можно рассматривать в рамках абстрактного линейного уравнения [13]

$$Lu = Mu + f, \quad \ker L \neq \{0\}. \quad (0.4)$$

Целью работы является численное исследование трехточечной начально-конечной задачи для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Для достижения цели необходимо:

1. Исследовать разрешимость трехточечной начально-конечной задачи для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной на отрезке на основе метода Фурье.
2. Разработать алгоритм численного метода решения трехточечной начально-конечной задачи для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной на основе модифицированного проекционного метода Галеркина.

3. Реализовать алгоритм численного метода в виде программы для ЭВМ.
4. Провести вычислительные эксперименты.

Началом научных исследований потоков жидкостей в подземной гидросфере являются работы А. Дарси. Впервые гидродинамические модели фильтрации жидкостей в пористых средах были построены М. Маскетом и Л.С. Лейбензоном. Уравнения соболевского типа возникают при моделировании различных процессов в технических и в естественных науках. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной впервые было получено Г.И. Баренблаттом, Ю.П. Желтовым и И.Н. Кочиной [1, 2, 3].

Уравнения и системы уравнений, неразрешенные относительно старшей производной, называют уравнениями соболевского типа. Их систематическое изучение началось в середине прошлого века с работ С.Л. Соболева [14]. Впервые термин "уравнения соболевского типа" ввел Р.Е. Шоултер. Уравнения соболевского типа в различных аспектах изучались в работах Г.В. Демиденко, И.В. Мельниковой, С.Г. Пяткова, Г.А. Свиридука, Т.Г. Сукачевой, А. Фавини, В.Е. Федорова, Р.Е. Шоултера, А. Яги и многих других. История начально-конечной задачи для уравнения (0.4) начинается с работы Г.А. Свиридука и С.А. Загребиной [4], где она первоначально называлась задачей Веригина [12]. Начально-конечное условие являются более общими по сравнению с классическим условием Коши [4, 11].

В связи с развитием технологий, возросли возможности моделирования динамики сложных систем, в том числе при построении реалистичных моделей фильтрационных потоков подземной гидросферы в пористых и трещиновато-пористых средах. Возникла необходимость в разработке методов для расчетов полей давлений, температур и параметров, характеризующих исследуемые среды. Прикладные численные методы являются одним из мощных математических средств решения задач. В работе рассмотрен модифицированный метод Галеркина [16]. Преимущество данного метода заключается в его универсальности, то есть возможности эффективного использования для широкого круга практических и теоретических задач.

В работе разработан алгоритм численного метода решения многоточечной начально-конечной задачи для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной, который реализован с помощью среды Maple 18. Проведены вычислительные эксперименты.

# 1. Математическая модель

## Баренблатта – Желтова – Кочиной

**Параметры, описывающие накопление и перенос жидкости в пористой среде**

*Пористость:*

Пористость выявляет количество жидкости, которое помещается в некотором объеме пористой среды:

$$c = \frac{\tau_{por}}{\tau}, \quad (1.1)$$

где  $c$  – пористость,  $\tau_{por}$  – объем пор,  $\tau$  – общий объем однородного пористого материала.

*Просветность:*

Представим поперечный разрез пористой среды. В сформировавшемся сечении часть площади  $S_{pros}$  будут занимать поры, а остальная часть  $S - S_{pros}$  – площадь твердого вещества пористой среды:

$$p = \frac{S_{pros}}{S}, \quad (1.2)$$

где  $p$  – просветность,  $S_{pros}$  – площадь просветности сечения,  $S$  – общая площадь сечения.

*Скорость:*

Скоростью фильтрации – векторная величина при фильтрации жидкости:

$$V = \frac{Q}{S}, \quad (1.3)$$

где  $V$  – скорость фильтрации,  $Q$  – объем расхода жидкости,  $S$  – площадь поперечного сечения.

Скорость фильтрации вводит фиктивную скорость, с которой двигалась бы жидкость, если бы пористая среда отсутствовала ( $c = 1$ ).

Средняя скорость движения жидкости:

$$W = \frac{Q}{S_{pros}}, \quad (1.4)$$

где  $W$  – средняя скорость,  $Q$  – объем расхода,  $S_{pros}$  – площадь просветов.

Связь между скоростью фильтрации и средней скоростью движения имеет вид:

$$W = \frac{V}{c}. \quad (1.5)$$

Закон фильтрации Дарси назначает линейную зависимость между объемным расходом несжимаемой жидкости и потерей напора и имеет вид:

$$u_i \equiv -\frac{K_{ij}}{\nu} \frac{\partial P}{\partial x_j} \equiv -\frac{h^3}{\nu l} K_{ij}^0 \frac{\partial P}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.6)$$

где  $K_{ij}^0$  – тензор трещинной проницаемости;  $\nu$  – вязкость;  $u_i$  – компоненты вектора скорости фильтрации;  $h$  – среднее раскрытие трещин;  $l$  – размер блока.

Обозначим через  $P_1$  – давление в трещинах,  $P_2$  – в блоках, составим уравнения баланса жидкости в трещинах:

$$\frac{\partial(c_1\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) - q = 0 \quad (1.7)$$

и в блоках:

$$\frac{\partial(c_2\rho)}{\partial t} + q = 0, \quad (1.8)$$

принебрегая фильтрационным потоком, где  $c_1$  – трещиноватая пористость;  $c_2$  – пористость блоков;  $\rho$  – плотность жидкости.

Проницаемость – фильтрующее свойство пористых сред, которые пропускают сквозь себя жидкости и газы. Это свойство характеризуется коэффициентом проницаемости  $\psi$ . В отличие от коэффициента фильтрации  $c$  коэффициент проницаемости  $\psi$  зависит только от свойств пористой среды:

$$q = \psi \frac{\rho K_2}{\nu} \frac{P_2 - P_1}{\nu}, \quad (1.9)$$

где  $K_2$  – проницаемость блоков;  $\psi$  – безразмерный коэффициент, характеризующий породу.

Поскольку трещиноватая пористость  $c_1$  мала, ею пренебрежем. Пористость блоков  $c_2$  есть функция обоих давлений. Возьмем линейное приближение

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = c_{20} \left( \beta_{21} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \beta_{22} \frac{\partial P_2}{\partial t} \right), \quad (1.10)$$

где  $c_{20}$ ,  $\beta_{21}$ ,  $\beta_{22}$  считаем постоянными. Кроме того, для капельных жидкостей имеет место соотношение

$$\rho = \rho_0(1 + \beta_*(P_* - P_0)), \quad (1.11)$$

где  $\beta_* = \text{const}$ , а  $P_* = P_{1,2}$  в зависимости от того, где оно рассматривается. Подставляя (1.5), (1.9) – (1.11) в (1.7), (1.8), получаем

$$\frac{\rho_0}{\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial P_1}{\partial x_j} \right) - \frac{\psi \rho_0 K_2}{l^2} \frac{P_2 - P_1}{\nu} = 0, \quad (1.12)$$

$$m_{20\rho_0} \left[ -\beta_{21} \frac{\partial P_1}{\partial t} + (\beta_{22} + \beta_*) \frac{\partial P_2}{\partial t} \right] + \frac{\psi \rho_0 K_2}{l^2} \frac{P_2 - P_1}{\nu} = 0. \quad (1.13)$$

Если среда является однородной и изотропной, тогда  $K_{ij} = k_1 \delta_{ij}$  и (1.12), (1.13) приведем к виду

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} - \beta \frac{\partial P_1}{\partial t} + A(P_2 + P_1) = 0, \quad (1.14)$$

$$k \Delta P_1 - A(P_2 + P_1) = 0, \quad (1.15)$$

где  $k = \frac{k_1}{\nu}$  – коэффициент пьезопроводности. Подставляя (1.15) в (1.14), получим

$$[(\beta - 1) - \gamma \Delta] \frac{\partial}{\partial t} P_1 = k \Delta P_1, \quad (1.16)$$

причем  $\gamma > 0$ , а  $\beta = \beta_{21}(\beta_{22} + \beta_*)$  может в силу (1.6) принимать значения меньше единицы. Обозначив через  $\lambda = \frac{\beta-1}{\gamma}$ ,  $\alpha = \frac{k}{\gamma}$ ,  $P_1 = u$  получим уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - \Delta) u_t = \alpha \Delta u. \quad (1.17)$$

## 2. Тригонометрические ряды Фурье

*Определение 2.1.* Функциональные ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ns + b_n \sin ns, \quad (2.1)$$

где  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  называются тригонометрическими рядами или рядами по тригонометрической системе

$$\{1, \cos s, \sin s, \dots, \cos ns, \sin ns, \dots\} = \{\cos ns, \sin ns : n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

*Теорема 2.1.* [7] Если тригонометрический ряд равномерно сходится на всей числовой оси  $\mathbb{R}$  и  $f(s)$  – его сумма, т.е.

$$f(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ns + b_n \sin ns, \quad (2.2)$$

тогда коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  определяются из равенств

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ns \, ds, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ns \, ds, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

*Теорема 2.2.* [7] (Лебег) Если функции  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то  $f_1(s) = f_2(s)$  всюду, кроме, быть может, множества меры нуль.

### Система ортогональных функций в $L^2(\Omega)$

Пусть  $\Omega$  – открытая область в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  и  $L^2(\Omega)$  – совокупность всех интегрируемых в квадрате функций на  $\Omega$ , то есть  $f \in L^2(\Omega)$ , если  $f$  измеримая функция от  $s = (s_1, \dots, s_n) \in \Omega$ , для которой  $\int_{\Omega} |f(s)|^2 ds < +\infty$ . Определим норму

$$\|f(s)\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

Отождествляем функции  $f(s)$  и  $g(s)$ , если они совпадают почти всюду в  $\Omega$ .

**Определение 2.2.** [9] Пространство  $L^2(\Omega)$  является *полным*, то есть если  $f_n \in L^2(\Omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и последовательность  $\{f_n\}$  фундаментальна, иначе говоря

$$\|f_n - f_m\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad (n, m \rightarrow \infty), \quad (2.5)$$

то существует такая функция  $f \in L^2(\Omega)$ , что  $\|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение 2.3.** [9] (*Ортогональная система*) Функции  $\{\varphi_n\}$ , где  $\varphi_n \in L^2(\Omega)$  образуют ортонормальную систему, если они образуют ортогональную систему, то есть

$$\int \varphi_n(s) \varphi_m(s) ds = 0, \quad n \neq m, \quad (2.6)$$

и удовлетворяют условию

$$\int |\varphi_n(s)|^2 ds = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Пусть функция  $\{\varphi_n\}$  образуют ортонормальную систему. Рассмотрим разложение функции  $f \in L^2(\Omega)$  в ряд Фурье:

$$f(s) \sim c_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) + \dots + c_n \varphi_n(s) + \dots, \quad (2.8)$$

где

$$c_n = \int f(s) \varphi_n(s) ds. \quad (2.9)$$

Числа  $c_n$  называются *коэффициентами Фурье*.

**Определение 2.4.** [9] (*Полной ортонормальной системы*) Ортонормальная система  $\{\varphi_n\}$  называется *полной*, если из равенств  $\int f(s) \varphi_n(s) ds = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , для функции  $f \in L^2(\Omega)$  вытекает, что  $f(s) \equiv 0$ .

**Теорема 2.3.** [9] (i) Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(s)$  сходится равномерно в открытом подмножестве  $\Omega_1$  области  $\Omega$ , а  $f(s)$  и  $\varphi_n(s)$  непрерывны в  $\Omega_1$ , то

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(s), \quad s \in \Omega_1. \quad (2.10)$$

(ii) Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |\varphi_n(s)| < +\infty$$

сходится не равномерно, но почти всюду в  $\Omega_1$  и если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |\varphi_n(s)| \leq \Phi(s), \quad \int_{\Omega} \Phi^2(s) ds < +\infty, \quad (2.11)$$

тогда

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(s) \quad (2.12)$$

почти всюду в  $\Omega_1$ .

**Теорема 2.4.** [15] Тригонометрическая система функций

$$\{1, \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi s}{l}, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi s}{l}, \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi s}{l}, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{2\pi s}{l}, \dots, \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi ns}{l}, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi ns}{l}, \dots\} \quad (2.13)$$

на сегменте  $[-l, l]$  является ортонормированной.

**Скорость сходимости тригонометрических рядов**

**Теорема 2.5.** [7] Пусть функция  $f(s)$  имеет на  $[-l, l]$  непрерывные производные до  $(k - 1)$ -го порядка и абсолютно интегрируемую с квадратом производную  $k$ -го порядка, причем  $f^{(i)}(-l) = f^{(i)}(l)$ ,  $i = 0, \dots, k$ , тогда, если

$$f(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ns + b_n \sin ns, \quad (2.14)$$

то для  $\forall n \in \mathbb{N}$  имеет место оценка

$$|a_n| \leq \frac{\xi_n}{n^k}, \quad |b_n| \leq \frac{\xi_n}{n^k}, \quad (2.15)$$

где  $\xi_n$  такие, что сходится числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty. \quad (2.16)$$

**Теорема 2.6.** [7] Пусть дан тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ns + b_n \sin ns). \quad (2.17)$$

Если для коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$  справедливы соотношения

$$|n^m a_n| \leq M, \quad |n^m b_n| \leq M, \quad (m \geq 2, M = \text{const}), \quad (2.18)$$

то сумма ряда (2.17) есть непрерывная функция периода  $2\pi$ , обладающая  $m-2$  непрерывными производными, которые могут быть получены почленным дифференцированием ряда.

**Теорема 2.7.** [7] (*Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда*) Если для функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(s)$  можно указать такой сходящийся числовой

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , что для всех  $n \geq n_0$  и для всех  $s \in E$  выполняется условие  $|u_n(s)| \leq a_n$ , тогда функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на множестве  $E$ .

**Теорема 2.8.** [15] (*Теорема о дифференцировании функционального ряда*)

Пусть  $u_n \in C^1[a; b]$  и выполнено.

- 1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(s) = G(s)$  поточечно сходится на  $[a; b]$ ,
- 2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(s) = \sigma(s)$  равномерно сходится при  $s \in [a, b]$ .

Тогда  $G(s) \in C^1[a, b]$  и  $G'(s) = \sigma(s)$ .

### 3. Задача Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа

3.1. Требуется найти такие значения параметра  $\lambda$ , при которых существует нетривиальные решения задачи

$$S''(s) = \lambda S(s), \quad 0 < s < l, \quad (3.1)$$

$$S(0) = S(l) = 0, \quad (3.2)$$

а также найти сами эти решения.

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (3.1) имеет вид

$$\mu^2 = \lambda. \quad (3.3)$$

Рассмотрим три случая:

1) При  $\lambda > 0$  характеристическое уравнение (3.3) имеет два различных действительных корня  $\mu = \pm\sqrt{\lambda}$ . Следовательно, общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$S(s) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}s} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}s},$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные. Определим их из граничных условий (3.2):

$$S(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad S(l) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0.$$

Откуда получим, что:  $C_1 = 0, C_2 = 0$ , поэтому  $S(s) \equiv 0$ . Следовательно, при  $\lambda > 0$  задача (3.1), (3.2) не имеет нетривиальных решений.

2) При  $\lambda = 0$  уравнение (3.1) принимает вид  $S''(s) = 0$ , общее решение которого:

$$S(s) = C_1 s + C_2,$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные, определим их из граничных условий (3.2):

$$S(0) = C_2 = 0, \quad S(l) = C_1 l = 0,$$

откуда получаем, что  $C_1 = C_2 = 0$ . Следовательно, и в этом случае задача (3.1), (3.2) не имеет нетривиальных решений.

3) При  $\lambda < 0$  характеристическое уравнение (3.3) имеет два комплексносопряженных корня  $\mu = \pm i\sqrt{-\lambda}$ . Общее решение (3.3) в этом случае имеет вид

$$S(s) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}s) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}s).$$

Из граничных условий (3.2) получаем

$$S(0) = C_1 = 0, \quad S(l) = C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0.$$

Для того чтобы получить нетривиальное решение,  $C_2$  не должно быть равно нулю. Поэтому  $\lambda$  ищем из условия  $\sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0$ . Решая это уравнение, получаем

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

( $n$  не может быть меньше либо равным 0, так как  $\sqrt{-\lambda} > 0$ ). Следовательно, нетривиальные решения задачи (3.1), (3.2) существует лишь при значениях

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$S_n(s) = C_n \sin \frac{\pi n}{l} s,$$

определенные с точностью до произвольных множителей  $C_n$ . Определим множители  $C_n$  из условия ортонормированной тригонометрической системы функций и получим  $C_n = \sqrt{\frac{2}{l}}$ .

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad S_n(s) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} s, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

**3.2.** Требуется найти такие значения параметра  $\lambda$ , при которых существует нетривиальные решения задачи

$$S''(s) = \lambda S(s), \quad 0 < s < l, \quad (3.5)$$

$$S(0) = S'(l) = 0. \quad (3.6)$$

Общее решение уравнения (3.5) примет вид

$$S(s) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}s} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}s}, \quad \lambda > 0,$$

$$S(s) = C_1 s + C_2, \quad \lambda = 0,$$

$$S(s) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}s) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}s), \quad \lambda < 0.$$

Из краевого условия (3.6) имеем:

- 1) При  $\lambda > 0$ ,  $C_1 = -C_2$ ,  $S'(l) = C_1 \sqrt{\lambda} (e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l})$ ,  $C_1 \sqrt{\lambda} = 0$ ,  $C_1 = 0$ , получаем, что  $C_1 = C_2 = 0$ .

2) При  $\lambda = 0$ ,  $S(0) = C_2$ ,  $S'(s) = C_1$ ,  $S'(l) = C_1 = 0$ ,  $C_1 = C_2 = 0$ .

Следовательно, задача (3.5), (3.6) не имеет нетривиальных решений.

3) При  $\lambda < 0$ ,  $S(0) = C_1 = 0$ ,  $S'(l) = C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}l) = 0$ ,  $S'(l) = \cos(\sqrt{-\lambda}l) = 0$ ,

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

( $n$  не может быть меньше 0, так как  $\sqrt{-\lambda} > 0$ ). Следовательно, нетривиальные решения задачи (3.5), (3.6) существует лишь при значениях  $\lambda < 0$ .

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = -\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l}\right)^2, \quad S_n(s) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l}s\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

**3.3.** Требуется найти такие значения параметра  $\lambda$ , при которых существует нетривиальные решения задачи

$$S''(s) = \lambda S(s), \quad 0 < s < l, \quad (3.8)$$

$$S'(0) = S(l) = 0. \quad (3.9)$$

Общее решение уравнения (3.8) примет вид

$$S(s) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}s} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}s}, \quad \lambda > 0,$$

$$S(s) = C_1 s + C_2, \quad \lambda = 0,$$

$$S(s) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}s) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}s), \quad \lambda < 0.$$

Из краевого условия (3.9) имеем:

1) При  $\lambda > 0$ ,  $S'(0) = C_1 \sqrt{\lambda} - C_2 \sqrt{\lambda} = 0$ ,  $\lambda = 0$ ;  $C_1 = C_2$ .

Из второго краевого условия получаем  $C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$ ,  $(e^{\sqrt{\lambda}l} + e^{-\sqrt{\lambda}l}) \neq 0$ . Отсюда следует, что  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ , поэтому  $S(s) \equiv 0$ . Следовательно, при  $\lambda > 0$  задача (3.8), (3.9) не имеет нетривиальных решений.

2) При  $\lambda = 0$ ,  $S'(0) = C_1$ ,  $S(s) = C_2$ ,  $S(l) = 0$ , откуда получаем, что  $C_1 = C_2 = 0$ .

Следовательно, и в этом случае задача (3.8), (3.9) не имеет нетривиальных решений.

3) При  $\lambda < 0$ ,  $S'(0) = -C_2 \sqrt{-\lambda} = 0$ ,  $C_2 = 0$ ,  $S(s) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}s)$ .

Из второго краевого условия получаем  $S(l) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}l) = 0$ . Для того чтобы получить нетривиальное решение,  $C_1 \neq 0$ ,  $\lambda$  ищем из условия  $\cos(\sqrt{-\lambda}l) = 0$ ,  $\sqrt{-\lambda}l = \frac{\pi}{2} + \pi n$ .

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = -\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l}\right)^2, \quad S_n(s) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l}s\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

## 4. Относительный спектр

Пусть  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  — банаховы пространства, операторы  $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ .

**Определение 4.1.** [13]  $L$  — резольвентным множеством оператора  $M$  называется множество  $p^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})\}$ . Множество  $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus p^L(M)$  называется  $L$  — спектром оператора  $M$ .

**Определение 4.2.** [13] Оператор  $M$  называется ограниченным относительно оператора  $L$  ( $(L, \sigma)$ -ограниченным), если  $\exists a \in \mathbb{R}_+$ ,  $\forall \mu \in \mathbb{C} (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in p^L(M))$ . Построим операторы:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M) d\mu, \quad (4.1)$$

где  $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ ,  $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1}$  — правая, а  $L_{\mu}^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$  — левая  $L$ -резольвенты оператора  $M$ .

**Лемма 4.1.** [13] Пусть оператор  $M(L, \sigma)$ -ограничен, тогда операторы  $P \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U})$  и  $Q \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$  — проекторы.

**Условие 4.1.** Пусть  $\sigma^L(M) = \bigcup_{m=1}^3 \sigma_m^L(M)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , причем  $\sigma_m^L(M) \neq 0$ ,  $m = 1, 2, 3$ , и существуют замкнутые контуры  $\Gamma_m \subset \mathbb{C}$ , ограничивающие области  $D_m \supset \sigma_m^L(M)$ ,  $m = 2, 3$  такие, что  $\overline{D}_m \cap \sigma_1^L(M) = \emptyset$  и  $\overline{D}_2 \cap \overline{D}_3 = \emptyset$  (см. рис. 1).

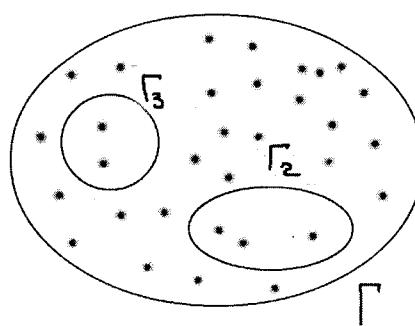


Рис. 1. Пример относительного спектра  $(L, \sigma)$ -ограниченного оператора  $M$

Аналогично (4.1) построим операторы:

$$P_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R_{\mu}^L(M) d\mu, \quad Q_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} L_{\mu}^L(M) d\mu, \quad m = 2, 3, \quad (4.2)$$

и оператор  $P_1 = P - P_2 - P_3$ .

**Лемма 4.2.** [4] Пусть операторы  $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$  и оператор  $(L, \sigma)$ -ограничен, причем выполнено условие 4.1. Тогда  $P_m$  и  $Q_m$ ,  $m = 1, \dots, 3$  – проекторы.

Рассмотрим пространства

$$\mathfrak{U} = \{u \in W_2^{k+2}(\Omega) : u(s) = 0, s \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = W_2^k(\Omega) \quad (4.3)$$

и построим операторы

$$L = \lambda + \Delta, \quad M = \alpha\Delta. \quad (4.4)$$

Операторы  $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$  при всех  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  [13]. Тогда  $L$ -спектр оператора  $M$  примет вид [13]:

$$\sigma^L(M) = \{\mu_n \in \mathbb{C} : \mu_n = \frac{\alpha\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}, \lambda \neq \lambda_n\}, \quad (4.5)$$

где  $\{\lambda_n\}$  – собственные значения однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа  $\Delta$ , за- нумерованные по неубыванию с учетом кратности, а  $\{\varphi_n\}$  – соответствующие им собственные функции.

В силу условия 4.1 проекторы

$$P_m u = \sum_{n:\mu_n \in \sigma_m^L} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad m = \overline{1, 3}. \quad (4.6)$$

Тогда в силу (4.6) трехточечное начально-конечное условие (0.3) примет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{n:\mu_n \in \sigma_1^L} \langle u(s, t_1) - u^1(s), \varphi_n(s) \rangle \varphi_n(s) &= 0, \\ \sum_{n:\mu_n \in \sigma_2^L} \langle u(s, t_2) - u^2(s), \varphi_n(s) \rangle \varphi_n(s) &= 0, \\ \sum_{n:\mu_n \in \sigma_3^L} \langle u(s, t_3) - u^3(s), \varphi_n(s) \rangle \varphi_n(s) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

**Теорема 4.3.** [4] При любых  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $u_m \in \mathfrak{U}$ ,  $m = \overline{1, 3}$ ,  $f \in C^\infty((a, b); \mathfrak{F})$  трехточечная начально-конечная задача для уравнения (0.1) с краевым условием (0.2) имеет единственное решение  $u \in C^\infty((a, b); \mathfrak{U})$ , которое к тому же имеет вид

$$u(t) = (Q - \mathbb{I})f(t) + \sum_{m=1}^3 \sum_{n:\mu_n \in \sigma_m^L} e^{\mu_n(t-t_m)} \langle u_m, \varphi_n \rangle \varphi_n + \sum_{m=1}^3 \sum_{n:\mu_n \in \sigma_m^L} \int_{t_m}^t e^{\mu_n(t-s)} \langle f(s), \varphi_n \rangle \varphi_n ds.$$

## 5. Метод Фурье решения трехточечной начально-конечной задачи для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной

5.1. Рассмотрим начально-краевую задачу для однородного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в случае когда  $\exists k : \lambda = \lambda_k$ .

Рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u, \quad 0 < s < l, \quad t_1 < t \leq t_3. \quad (5.1)$$

Добавим к уравнению (5.1) граничные и начальные условия:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [t_1, t_3], \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n: \mu_n \in \sigma_1^L} \langle u(s, t_1) - u^1(s), \varphi_n(s) \rangle \varphi_n(s) &= 0, \quad 0 \leq s \leq l, \\ \sum_{n: \mu_n \in \sigma_2^L} \langle u(s, t_2) - u^2(s), \varphi_n(s) \rangle \varphi_n(s) &= 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad t_2 \in [t_1, t_3], \\ \sum_{n: \mu_n \in \sigma_3^L} \langle u(s, t_3) - u^3(s), \varphi_n(s) \rangle \varphi_n(s) &= 0, \quad 0 \leq s \leq l, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $u^1(s), u^2(s), u^3(s)$  – заданные функции, удовлетворяющие условиям: функция  $u^m(s)$  дважды непрерывно дифференцируема,  $\frac{\partial^3 u^m}{\partial s^3}$  кусочнонепрерывная функция, причем  $u^m(0) = u^m(l) = 0$  и  $\frac{\partial^2 u^m(0)}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u^m(l)}{\partial s^2} = 0$ ,  $m = 1, 2, 3$ .

Построим множества

$$Q = \{(s, t) : 0 < s < l, t_1 < t \leq t_3\},$$

$$\overline{Q} = \{(s, t) : 0 \leq s \leq l, t_1 \leq t \leq t_3\}.$$

Требуется найти такую функцию  $u = u(s, t) : u \in C^2(Q), u \in C(\overline{Q})$ , которая удовлетворяет уравнению (5.1), краевому условию (5.2) и начальному условию (5.3).

Будем искать решение задачи (5.1) – (5.3) в виде

$$u(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(s), \quad (5.4)$$

где функции  $\varphi_n(s)$  являются решением задачи Штурма – Лиувилля (3.1), (3.2). Тогда собственные функции  $\varphi_n(s)$  соответствующей задачи Штурма – Лиувилля имеют вид

$$\varphi_n(s) = \sin \frac{\pi n s}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.5)$$

Далее будем находить решение задачи в виде ряда

$$u(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n s}{l}, \quad (5.6)$$

где функции  $u_n(t)$  неизвестны (их нужно определить подстановкой ряда (5.6) в исходное уравнение (5.1) и начальное условие (5.3)).

Представим функции  $u^m(s)$ ,  $m = 1, 2, 3$ , в виде их ряда Фурье:

$$u^m(s) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^m \sin \frac{\pi n s}{l}, \quad (5.7)$$

где

$$u_n^m = \frac{2}{l} \int_0^l u^m(s) \sin \frac{\pi n s}{l} ds. \quad (5.8)$$

Подставляем ряд (5.6) в уравнение (5.1) и получим

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \sin \frac{\pi n s}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sin \frac{\pi n s}{l} = -\alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sin \frac{\pi n s}{l}, \quad (5.9)$$

тогда

$$\begin{aligned} \lambda u'_n(t) + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} u'_n(t) &= -\alpha \frac{\pi^2 n^2}{l^2} u_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ u'_n(t) \left( \lambda + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \right) &= -\alpha \frac{\pi^2 n^2}{l^2} u_n(t). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Найдем общее решение уравнений (5.10):

$$\begin{aligned} \ln |u_n(t)| &= - \left( \frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2} \right) t + \ln |C|, \\ u_n(t) &= C_n e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Тогда решение уравнения (5.1), удовлетворяющее условию (5.2), имеет вид

$$u(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \sin \frac{\pi n s}{l}. \quad (5.12)$$

В силу начальных условий (5.3), получим

$$\begin{aligned} \sum_{n: \mu_n \in \sigma_m^L} (u_n(t_m) - u_n^m) \sin \frac{\pi n s}{l} &= 0, \quad m = 1, 2, 3, \\ (u_n(t_m) - u_n^m) \sin \frac{\pi n s}{l} &= 0, \end{aligned}$$

$$u_n(t_m) = u_n^m. \quad (5.13)$$

Из начального условия (5.3) и выражения (5.11) получим:

$$u_n(t_m) = e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) t_m} C_n^m, \quad (5.14)$$

тогда

$$C_n^m = u_n^m e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) t_m}, \quad m = 1, 2, 3. \quad (5.15)$$

Тогда решение задачи (5.1) – (5.3) примет вид:

$$\begin{aligned} u(s, t) = & \sum_{n: \mu_n \in \sigma_1^L} C_n^1 e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) t} \sin \frac{\pi n s}{l} + \sum_{n: \mu_n \in \sigma_2^L} C_n^2 e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) t} \sin \frac{\pi n s}{l} + \\ & + \sum_{n: \mu_n \in \sigma_3^L} C_n^3 e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) t} \sin \frac{\pi n s}{l}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

### Обоснование метода Фурье

Покажем, что сумма ряда (5.16) функция  $u(s, t)$  удовлетворяет условию

$$u \in C^2(Q), \quad u \in C(\overline{Q}).$$

Для этого исследуем ряд (5.16) на равномерную сходимость. Рассмотрим

$$\begin{aligned} |u_n(s, t)| &= |C_n^m e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) t} \sin \frac{\pi n s}{l}| \leq \\ &\leq |C_n^m| |e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) t}| |\sin \left( \frac{\pi n}{l} \right)| \leq |C_n^m| |e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) t}| \leq |C_n^m|, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где

$$|C_n^m| = |u_n^m e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) t_m}| \leq |u_n^m| |e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) t_m}|.$$

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^m|,$$

то для  $n \in \mathbb{N}$  в силу теоремы 2.5 имеет место оценка  $|u_n^m| \leq \xi_n$ , где  $\xi_n$ , такие что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty.$$

Тогда в силу теоремы 2.7 функциональный ряд (5.16) сходится равномерно на множестве  $\overline{Q}$ .

Исследуем равномерную сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^m \left( -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2} \right) e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) t} \sin \frac{\pi n s}{l}. \quad (5.18)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial u_n(s, t)}{\partial t} \right| &= \left| C_n^m \frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2} e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \sin \frac{\pi n s}{l} \right| \leq \\
 &\leq |C_n^m| \left| \frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2} \right| \left| e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \right| \left| \sin \frac{\pi n s}{l} \right| \leq \\
 &\leq |C_n^m| \left| \frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2} \right| \left| e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \right| \leq |C_n^m| \left| \frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2} \right| \leq |C_n^m| \cdot C,
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

где

$$|C_n^m| = \left| u_n^m e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t_m} \right| \leq |u_n^m| \left| e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t_m} \right| \leq |u_n^m| \cdot M_1. \tag{5.20}$$

Тогда в силу признака Вейерштрасса ряд (5.16) сходится равномерно на множестве  $Q$ .

Исследуем функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^m e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \left(-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right) \sin \frac{\pi n s}{l} \tag{5.21}$$

на равномерную сходимость  $Q$ .

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial^2 u_n(s, t)}{\partial s^2} \right| &= \left| u_n^m e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \left(-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right) \sin \frac{\pi n s}{l} \right| \leq \\
 &\leq |u_n^m| \left| e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \right| \left| \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \right| \left| \sin \frac{\pi n s}{l} \right| \leq \\
 &\leq |u_n^m| \left| e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \right| \left| \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \right| \leq |u_n^m| \left| \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \right|, \\
 |u_n^m| \left| \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \right| &\leq \frac{\xi_n}{n^k} \frac{\pi^2 n^2}{l^2} = \xi_n \frac{1}{n^{k-2}} M^2.
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Если  $k - 2 > 1$ , тогда числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{1}{n^{k-2}} M^2$  сходится. Так как функция  $u^m(s)$  дважды непрерывно дифференцируема,  $\frac{\partial^2 u^m}{\partial s^2}$  кусочнонепрерывная функция, то в силу теоремы 2.3 ряд (5.21) сходится равномерно на (5.16). Тогда  $u \in C^2(Q)$ ,  $u \in C(\bar{Q})$ .

**5.2.** Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Баренблатта – Желтова – Ко-чиной в случае, когда  $\exists k : \lambda = \lambda_k$ .

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u, \quad 0 < s < l, \quad t_1 < t \leq t_3, \quad (5.23)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [t_1, t_3], \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n:\mu_n \in \sigma_1^L, n \neq k} (u(s, t_1) - u^1(s), \varphi_n(s)) \varphi_n(s) &= 0, \quad 0 \leq s \leq l, \\ \sum_{n:\mu_n \in \sigma_2^L, n \neq k} (u(s, t_2) - u^2(s), \varphi_n(s)) \varphi_n(s) &= 0, \quad t_2 \in [t_1, t_3], \quad 0 \leq s \leq l, \\ \sum_{n:\mu_n \in \sigma_3^L, n \neq k} (u(s, t_3) - u^3(s), \varphi_n(s)) \varphi_n(s) &= 0, \quad 0 \leq s \leq l. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Будем искать решение задачи (5.23) – (5.25) в виде (5.4). Аналогично случаю 5.1 получим

1) если  $n \neq k$ , тогда

$$u_n(t) = C_n e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})t}, \quad (5.26)$$

2) если  $n = k$ , где

$$0 = -\alpha \frac{\pi^2 n^2}{l^2} u_k(t),$$

отсюда

$$u_k(t) = 0. \quad (5.27)$$

В силу начального условия (5.25) получим

1) если  $n \neq k$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n:\mu_n \in \sigma_m^L} (u_n(t_m) - u_n^m) \sin \frac{\pi n s}{l} &= 0, \quad m = 1, 2, 3, \\ C_n^m &= u_n^m e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})t_m}, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

2) если  $n = k$ , то начальное условие отсутствует.

Тогда решение задачи (5.23) – (5.25) примет вид:

$$\begin{aligned} u(s, t) &= \sum_{n:\mu_n \in \sigma_1^L, n \neq k} C_n^1 e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})t} \sin \frac{\pi n s}{l} + \sum_{n:\mu_n \in \sigma_2^L, n \neq k} C_n^2 e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})t} \sin \frac{\pi n s}{l} + \\ &+ \sum_{n:\mu_n \in \sigma_3^L, n \neq k} C_n^3 e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})t} \sin \frac{\pi n s}{l}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

**5.3.** Рассмотрим начально-краевую задачу для неоднородного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в случае когда  $\exists k : \lambda = \lambda_k$ .

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + f, \quad 0 < s < l, \quad t_1 < t \leq t_3, \quad (5.29)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [t_1, t_3], \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n:\mu_n \in \sigma_1^L} (u(s, t_1) - u^1(s), \varphi_n(s))\varphi_n(s) &= 0, \quad 0 \leq s \leq l, \\ \sum_{n:\mu_n \in \sigma_2^L} (u(s, t_2) - u^2(s), \varphi_n(s))\varphi_n(s) &= 0, \quad t_2 \in [t_1, t_3], \quad 0 \leq s \leq l, \\ \sum_{n:\mu_n \in \sigma_3^L} (u(s, t_3) - u^3(s), \varphi_n(s))\varphi_n(s) &= 0, \quad 0 \leq s \leq l. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Будем искать решение задачи (5.19) – (5.21) в виде (5.6). Представим функцию  $f(s, t)$  в виде ее ряда Фурье:

$$f(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n s}{l}, \quad (5.32)$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(s, t) \sin \frac{\pi n s}{l} ds. \quad (5.33)$$

Подставляем ряд (5.6) в уравнение (5.29) и получим

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \sin \frac{\pi n s}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sin \frac{\pi n s}{l} = -\alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sin \frac{\pi n s}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n s}{l},$$

тогда

$$\begin{aligned} \lambda u'_n(t) + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} u'_n(t) &= -\alpha \frac{\pi^2 n^2}{l^2} u_n(t) + f_n(t), \\ u'_n(t) \left( \lambda + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \right) &= -\alpha \frac{\pi^2 n^2}{l^2} u_n(t) + f_n(t), \quad n = 1, 2, 3\dots \end{aligned} \quad (5.34)$$

Найдем общее решение уравнения (5.34):

$$\frac{du_n}{dt} \left( \lambda + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \right) + \alpha \frac{\pi^2 n^2}{l^2} u_n(t) = f_n(t). \quad (5.35)$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{du_n}{dt} \left( \lambda + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \right) + \alpha \frac{\pi^2 n^2}{l^2} u_n(t) = 0,$$

$$u'_n(t) = - \left( \frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2} \right) u_n(t), \quad (5.36)$$

интегрируем (5.36), отсюда

$$\ln |u_n(t)| = - \left( \frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2} \right) t + \ln |C|.$$

Будем искать решения уравнения (5.29) в виде

$$u_n(t) = C_n(t) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t}. \quad (5.37)$$

Тогда

$$u'_n(t) = C'_n(t) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} - \left( \frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2} \right) C_n(t) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t}. \quad (5.38)$$

Подставим полученные выражения в уравнение (5.35) получим

$$C'_n(t) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \left( \frac{\lambda l^2 + \pi^2 n^2}{l^2} \right) = f_n(t). \quad (5.39)$$

Тогда

$$C'_n(t) = \frac{f_n(t) l^2}{(\lambda l^2 + \pi^2 n^2)} e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t}. \quad (5.40)$$

Интегрируем (5.40), отсюда получим

$$C_n(t) = \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)\tau} d\tau + \tilde{C}_n. \quad (5.41)$$

Тогда из (5.37), получим

$$u_n(t) = \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)\tau} d\tau + \tilde{C}_n \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t}. \quad (5.42)$$

Значит решение уравнения (5.1), удовлетворяющее условию (5.2), имеет вид

$$u(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)\tau} d\tau + \tilde{C}_n \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \sin \frac{\pi n s}{l}. \quad (5.43)$$

Определим неизвестную постоянную  $\tilde{C}_n$  из условия (5.31), рассмотрим для этого

$$u(s, t_m) = \sum_{n: \mu_n \in \sigma_m^L} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^{t_m} f_n(\tau) e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)\tau} d\tau + \tilde{C}_n^m \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t_m} \sin \frac{\pi n s}{l}$$

и получим

$$\tilde{C}_n^m = u_n^m e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right) t_m} - \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^{t_m} f_n(\tau) e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right) \tau} d\tau. \quad (5.44)$$

Тогда решение задачи (5.29) – (5.31) примет вид

$$\begin{aligned} u(s, t) = & \sum_{n: \mu_n \in \sigma_1^L} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right) \tau} d\tau + \tilde{C}_n^1 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right) t} \sin \frac{\pi n s}{l} + \\ & + \sum_{n: \mu_n \in \sigma_2^L} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right) \tau} d\tau + \tilde{C}_n^2 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right) t} \sin \frac{\pi n s}{l} + \\ & + \sum_{n: \mu_n \in \sigma_3^L} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right) \tau} d\tau + \tilde{C}_n^3 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right) t} \sin \frac{\pi n s}{l}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

где  $\tilde{C}_n^m$  имеют вид (5.44).

**5.4.** Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Баренблатта – Желтова – Ко-чиной в случае, когда  $\exists k : \lambda = \lambda_k$ .

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u + f, \quad 0 < s < l, \quad t_1 < t \leq t_3, \quad (5.46)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [t_1, t_3], \quad (5.47)$$

$$\sum_{n: \mu_n \in \sigma_1^L, n \neq k} (u(s, t_1) - u^1(s), \varphi_n(s)) \varphi_n(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq l,$$

$$\sum_{n: \mu_n \in \sigma_2^L, n \neq k} (u(s, t_2) - u^2(s), \varphi_n(s)) \varphi_n(s) = 0, \quad t_2 \in [t_1, t_3], \quad 0 \leq s \leq l, \quad (5.48)$$

$$\sum_{n: \mu_n \in \sigma_3^L, n \neq k} (u(s, t_3) - u^3(s), \varphi_n(s)) \varphi_n(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq l.$$

Будем искать решение задачи (5.29) – (5.31) в виде (5.4) и (5.32). Аналогично случаю 5.3 получим

1) если  $n \neq k$ ,

$$u_n(t) = \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right) \tau} d\tau + \tilde{C}_n \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right) t}, \quad (5.49)$$

2) если  $n = k$ , тогда

$$0 = -\alpha \frac{\pi^2 n^2}{l^2} u_k(t) + f_k(t),$$

отсюда

$$u_k(t) = f_k(t) \frac{\alpha l^2}{\pi^2 k^2}. \quad (5.50)$$

В силу начального условия (5.48), получим

$$C_n^m = u_n^m e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) t_m} - \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^{t_m} f_n(\tau) e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) \tau} d\tau, \quad n \neq k. \quad (5.51)$$

Тогда решение задачи (5.46) – (5.48) примет вид

$$\begin{aligned} u(s, t) = & \sum_{n: \mu_n \in \sigma_1^L, n \neq k} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) \tau} d\tau + \tilde{C}_n^1 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \sin \frac{\pi n s}{l} + \\ & + \sum_{n: \mu_n \in \sigma_2^L, n \neq k} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}) \tau} d\tau + \tilde{C}_n^2 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \sin \frac{\pi n s}{l} + \\ & + \sum_{n: \mu_n \in \sigma_3^L, n \neq k} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right) \tau} d\tau + \tilde{C}_n^3 \right) e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \sin \frac{\pi n s}{l} + \\ & + f_k(t) \frac{\alpha l^2}{\pi^2 k^2} \sin \frac{\pi k s}{l}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

где  $\tilde{C}_n^m$  имеют вид (5.51).

**Теорема 5.1.** Пусть функция  $f(s, t)$  – непрерывна при  $0 < s < l$ ,  $t_1 < t \leq t_3$ ,  $u^m(s)$ ,  $m = 1, 2, 3$  – дважды непрерывно дифференцируемые функции, имеющие кусочно-непрерывную третью производную при  $0 \leq s \leq l$ , причем  $u^m(0) = u^m(l) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 u^m}{\partial s^2}(0) = \frac{\partial^2 u^m}{\partial s^2}(l) = 0$ , тогда существует единственное решение задачи (5.46) – (5.48):

- 1) если  $\exists \lambda = \lambda_k$ , то решение задачи имеет вид (5.52);
- 2) если  $\exists \lambda = \lambda_k$ , то решение задачи имеет вид (5.45).

**5.5** Рассмотрим начально-краевую задачу для однородного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u + f, \quad 0 < s < l, \quad t_1 < t \leq t_3. \quad (5.53)$$

Добавим к уравнению (5.53) граничные и начальные условия:

$$u(0, t) = u_s'(l, t) = 0, \quad t \in [t_1, t_3], \quad (5.54)$$

$$\sum_{n: \mu_n \in \sigma_1^L} (u(s, t_1) - u^1(s), \varphi_n(s)) \varphi_n(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq l,$$

$$\sum_{n:\mu_n \in \sigma_2^L} (u(s, t_2) - u^2(s), \varphi_n(s)) \varphi_n(s) = 0, \quad t_2 \in [t_1, t_3], \quad 0 \leq s \leq l, \quad (5.55)$$

$$\sum_{n:\mu_n \in \sigma_3^L} (u(s, t_3) - u^3(s), \varphi_n(s)) \varphi_n(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq l.$$

Будем искать решение задачи (5.53) – (5.55) в виде

$$u(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(s), \quad (5.56)$$

где функции  $\varphi_n(s)$  являются решением задачи Штурма – Лиувилля (3.5), (3.6). Тогда собственные функции  $\varphi_n(s)$  соответствующей задачи Штурма – Лиувилля имеют вид

$$\varphi_n(s) = \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l}s\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.57)$$

Далее будем находить решение задачи в виде ряда

$$u(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l}s\right), \quad (5.58)$$

где функции  $u_n(t)$  неизвестны (их нужно определить подстановкой ряда (5.58) в исходное уравнение (5.53) и начальное условие (5.55)).

Тогда решение задачи (5.53) – (5.55) в случае когда  $\exists k : \lambda = \lambda_k$  примет вид

$$u(s, t) = \sum_{n:\mu_n \in \sigma_1^L} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})\tau} d\tau + \tilde{C}_n^1 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l}s\right) +$$

$$+ \sum_{n:\mu_n \in \sigma_2^L} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})\tau} d\tau + \tilde{C}_n^2 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l}s\right) + \quad (5.59)$$

$$+ \sum_{n:\mu_n \in \sigma_3^L} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)\tau} d\tau + \tilde{C}_n^3 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l}s\right) +$$

$$+ f_k(t) \frac{\alpha l^2}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi k}{l}s\right),$$

где  $\tilde{C}_n^m$  имеют вид (5.44).

В случае, когда  $\exists k : \lambda = \lambda_k$ , решение задачи (5.53) – (5.55) примет вид

$$u(s, t) = \sum_{n:\mu_n \in \sigma_1^L, n \neq k} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})\tau} d\tau + \tilde{C}_n^1 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l}s\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n:\mu_n \in \sigma_2^L, n \neq k} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})\tau} d\tau + \tilde{C}_n^2 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \sin \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l} s \right) + \quad (5.60) \\
& + \sum_{n:\mu_n \in \sigma_3^L, n \neq k} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})\tau} d\tau + \tilde{C}_n^3 \right) e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \sin \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l} s \right) + \\
& \quad + f_k(t) \frac{\alpha l^2}{\pi^2 k^2} \sin \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \pi k}{l} s \right),
\end{aligned}$$

где  $\tilde{C}_n^m$  имеют вид (5.51).

**5.6** Рассмотрим начально-краевую задачу для однородного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u + f, \quad 0 < s < l, \quad t_1 < t \leq t_3. \quad (5.61)$$

Добавим к уравнению (5.61) граничные и начальные условия:

$$u'_s(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [t_1, t_3], \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n:\mu_n \in \sigma_1^L} (u(s, t_1) - u^1(s), \varphi_n(s)) \varphi_n(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \\
& \sum_{n:\mu_n \in \sigma_2^L} (u(s, t_2) - u^2(s), \varphi_n(s)) \varphi_n(s) = 0, \quad t_2 \in [t_1, t_3], \quad 0 \leq s \leq l, \\
& \sum_{n:\mu_n \in \sigma_3^L} (u(s, t_3) - u^3(s), \varphi_n(s)) \varphi_n(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq l.
\end{aligned} \quad (5.63)$$

Будем искать решение задачи (5.61) – (5.63) в виде

$$u(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(s), \quad (5.64)$$

где функции  $\varphi_n(s)$  являются решением задачи Штурма – Лиувилля (3.8), (3.9). Тогда собственные функции  $\varphi_n(s)$  соответствующей задачи Штурма – Лиувилля имеют вид

$$\varphi_n(s) = \cos \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l} s \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.65)$$

Далее будем находить решение задачи в виде ряда

$$u(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l} s \right), \quad (5.66)$$

где функции  $u_n(t)$  неизвестны (их нужно определить подстановкой ряда (5.66) в исходное уравнение (5.61) и начальное условие (5.63)).

Тогда решение задачи (5.61) – (5.63) в случае когда  $\exists k : \lambda = \lambda_k$  примет вид

$$\begin{aligned}
u(s, t) = & \sum_{n: \mu_n \in \sigma_1^L} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})\tau} d\tau + \tilde{C}_n^1 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \cos \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l} s \right) + \\
& + \sum_{n: \mu_n \in \sigma_2^L} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})\tau} d\tau + \tilde{C}_n^2 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \cos \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l} s \right) + \\
& + \sum_{n: \mu_n \in \sigma_3^L} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})\tau} d\tau + \tilde{C}_n^3 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \cos \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l} s \right) + \\
& + f_k(t) \frac{\alpha l^2}{\pi^2 k^2} \sin \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \pi k}{l} s \right),
\end{aligned} \tag{5.67}$$

где  $\tilde{C}_n^m$  имеют вид (5.44).

В случае, когда  $\exists k : \lambda = \lambda_k$ , решение задачи (5.61) – (5.63) примет вид

$$\begin{aligned}
u(s, t) = & \sum_{n: \mu_n \in \sigma_1^L, n \neq k} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})\tau} d\tau + \tilde{C}_n^1 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \cos \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l} s \right) + \\
& + \sum_{n: \mu_n \in \sigma_2^L, n \neq k} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})\tau} d\tau + \tilde{C}_n^2 \right) e^{-\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \cos \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l} s \right) + \\
& + \sum_{n: \mu_n \in \sigma_3^L, n \neq k} \left( \frac{l^2}{\lambda l^2 + n^2 \pi^2} \int_0^t f_n(\tau) e^{-(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2})\tau} d\tau + \tilde{C}_n^3 \right) e^{\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2 \lambda + n^2 \pi^2}\right)t} \cos \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l} s \right) + \\
& + f_k(t) \frac{\alpha l^2}{\pi^2 k^2} \cos \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \pi k}{l} s \right),
\end{aligned} \tag{5.68}$$

где  $\tilde{C}_n^m$  имеют вид (5.51).

## 6. Алгоритм численного метода и описание программы

На основе модифицированного метода Галеркина был разработан численный метод решения трехточечной начально-конечной задачи для модели Баренблатта – Желтова – Кошиной (0.1) – (0.3). Приведем алгоритм численного метода:

1) Будем искать приближенное решение уравнения (0.1) в виде галеркинской суммы

$$u^N(s, t) = \sum_{n=1}^N u_n(t) \varphi_n(s), \quad (6.1)$$

где  $\{\varphi_n(s)\}$  являются собственными функциями однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа  $\Delta$ , а  $\{\lambda_k\}$  – соответствующие им собственные числа занумерованные по неубыванию с учетом кратности,  $u_n(t)$  неизвестные функции.

2) Представим правую часть и начальные функции задачи (0.1) – (0.3) в виде:

$$f^N(s, t) = \sum_{n=1}^N \langle f(s, t), \varphi_n(s) \rangle \varphi_n(s) = \sum_{n=1}^N f_n(t) \varphi_n(s), \quad (6.2)$$

$$u^{Nm}(s) = \sum_{n=1}^N \langle u^m(s) \varphi_n(s) \rangle \varphi_n(s) = \sum_{n=1}^N u_n^m \varphi_n(s). \quad (6.3)$$

3) Подставим (6.1), (6.2) в уравнение (0.1) и получим

$$\sum_{n=1}^N (\dot{u}_n(t) \varphi_n(s) - \dot{u}_n(t) \lambda_n \varphi_n(s)) = \sum_{n=1}^N \alpha u_n(t) \lambda_n \varphi_n(s) + \sum_{n=1}^N f_n(t) \varphi_n(s). \quad (6.4)$$

4) Скалярно умножив уравнение (6.4) на собственные функции  $\varphi_n(s)$ ,  $n = 1 \dots N$ , генерируем систему алгебро-дифференциальных уравнений

$$\sum_{n=1}^N \langle \dot{u}_n(t) \varphi_n(s) - \dot{u}_n(t) \lambda_n \varphi_n(s), \varphi_n(s) \rangle = \sum_{n=1}^N \langle \alpha u_n(t) \lambda_n \varphi_n(s), \varphi_n(s) \rangle + \sum_{n=1}^N \langle f_n(t) \varphi_n(s), \varphi_n(s) \rangle, \quad (6.5)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение в  $L_2(0, l)$ .

5) Генерируем начальные условия:

$$\forall n : \mu_n \in \sigma_m^n, \quad u_n(t_m) = u_n^m. \quad (6.6)$$

6) Проверим условие на невырожденный (вырожденный) случай. В зависимости от параметра  $\lambda$ , получаем дифференциальное ( $\lambda \neq \lambda_k$ ) или алгебраическое ( $\lambda = \lambda_k$ ) уравнения.

7) Если уравнение (0.1) невырожденное ( $\exists k : \lambda = \lambda_k$ ), то получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (6.5) с начальными условиями (6.6) и находим неизвестные функции  $u_n(t)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , в приближенном решении (6.1).

8) Если уравнение (0.1) вырожденное ( $\exists k : \lambda = \lambda_k$ ), то  $k$ -ое уравнение системы будет алгебраическим, а оставшиеся – дифференциальными. Отдельно решим алгебраическое уравнение относительно  $u_k(t)$  и найдем  $k$ -ое слагаемое галеркинской суммы. Исключаем  $k$ -ое условие из (6.6) и формируем систему ( $N - 1$ ) дифференциальных уравнений с ( $N - 1$ ) начальным условием.

9) Находим решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальным условием. В случае ( $\lambda = \lambda_k$ ) объединяем решение системы дифференциальных уравнений с решением алгебраического уравнения.

10) Выводим приближенное решение и строим его график.

Приведем описание программы для нахождения численного исследования одной математической модели фильтрации с трехточечным начально-конечным условием. Программа позволяет находить решение задачи на отрезке при произвольных начальных данных, а также выводит на экран график решения.

### Описание программы

**Шаг 1.** Вводим количество слагаемых галеркинской суммы  $N$ , коэффициенты уравнения  $\lambda, \alpha$ , начальные функции  $u_1(s), u_2(s), u_3(s)$ , длину отрезка на котором ищется решение и промежуток времени  $(t_1, t_3)$  и момент времени  $t_2$ .

**Шаг 2.** Находим решение задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа  $\Delta$  в соответствующей области. Вычисляем собственные значения  $\{\lambda_n\}$  и собственные функции  $\{\varphi_n(s)\}$  соответствующей задачи.

**Шаг 3.** Составим искомое приближенное решение в виде галеркинской суммы (6.1) при помощи цикла `for()` от 1 до  $N$ .

**Шаг 4.** Подставим приближенное решение в уравнение (0.1), генерируем систему уравнений.

**Шаг 5.** Генерируем трехточечное начально-конечное условие при помощи цикла `for()` и при помощи процедуры интегрирования `int`.

**Шаг 6.** Делаем проверку на вырожденность (невырожденность) уравнения. Рассматриваем является ли  $\lambda$  собственным значением оператора Лапласа или нет.

**Шаг 7.** В случае вырожденности системы уравнений мы извлекаем недифференциальное уравнение и решаем его с помощью процедуры `solve`. Далее формируем систему алгебро-

дифференциальных уравнений. Находим решение системы дифференциальных уравнений с начальными условиями при помощи встроенной процедуры **dsolve**.

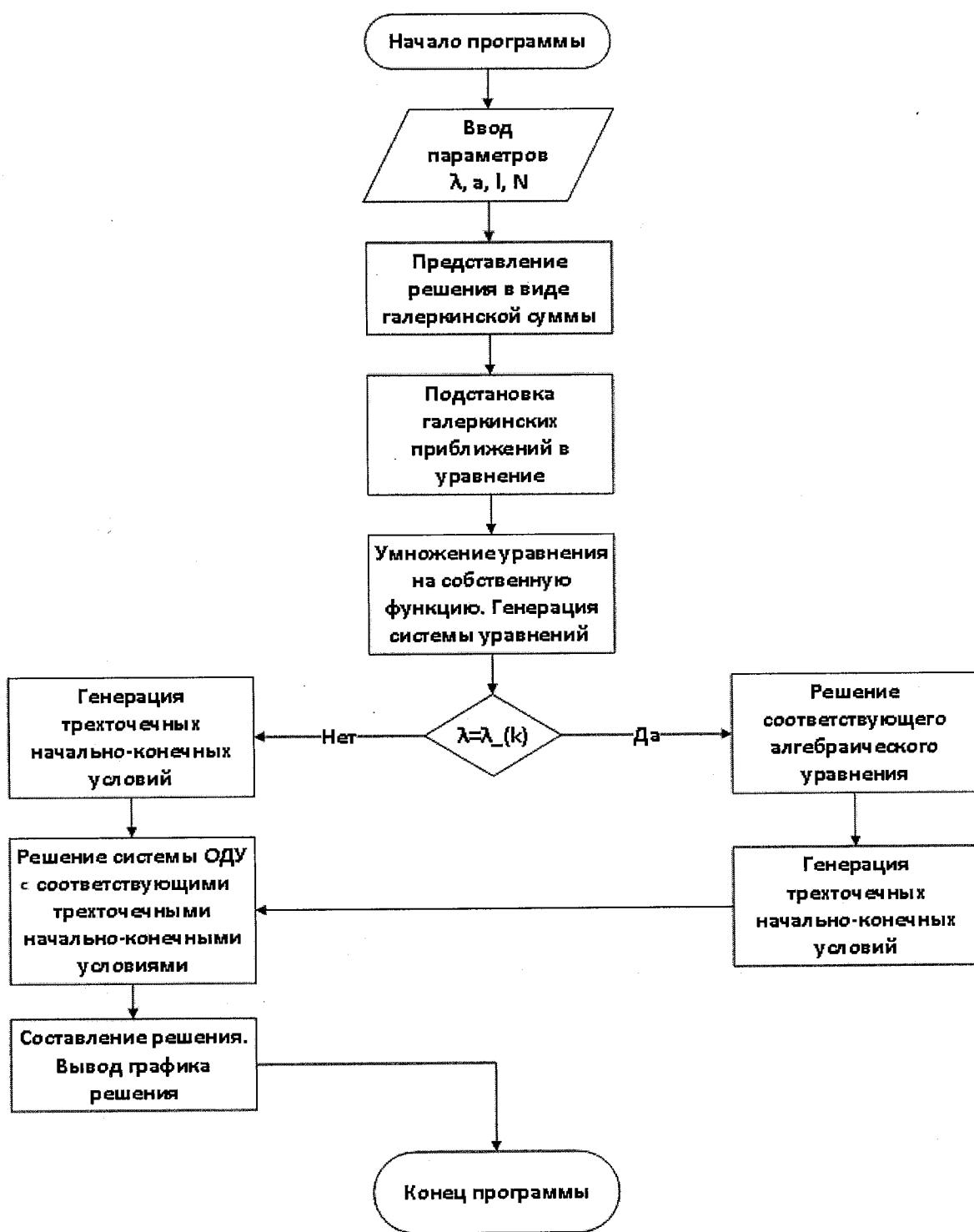
**Шаг 9.** Полученное решение выводим на экран в виде функции и виде графика с помощью Plot3D.

#### **Используемые технические средства**

Для реализации разработанных алгоритмов использовались встроенные функции и стандартные операторы программного пакета Maple 18. С помощью пакета **System** составляется система дифференциальных уравнений. При вычислении интегралов используется пакет **Integration Tools**. Графические изображения получены при помощи пакета **plots**. Программа работает под управление операционной системы Microsoft Windows.

#### **Выходные данные**

- собственные значения;
- собственные функции;
- приближенное решение  $u(s, t)$ ;
- график решения.



## 7. Вычислительные эксперименты

На основе разработанного в п. 6 численного метода решение задачи (0.1) – (0.3) были проведены вычислительные эксперименты с помощью программы разработанной в среде Maple 18.

**Пример 7.1.** Требуется найти численное решение задачи (0.1) – (0.3) при заданных условиях:  $\lambda = 2$ ,  $\alpha = 1$ ,  $f(s, t) = 6t \sin(2s)$ ,  $l = \pi$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \frac{1}{3}$ ,  $t_3 = 1$ ,  $u_1 = \sin(s) + 2 \sin(2s) + 3 \sin(5s)$ ,  $u_2 = 5 \sin(s) + 3 \sin(5s) + 4 \sin(6s)$ ,  $u_3 = 6 \sin(s) + 7 \sin(2s) + 8 \sin(3s)$ ,  $\sigma_1^L(M) = \{\mu_n : n = 1, 2\}$ ,  $\sigma_2^L(M) = \{\mu_n : n = 3, 4\}$ ,  $\sigma_3^L(M) = \{\mu_n : n = 5, 6, \dots\}$ .

Приближенное решение будем искать в виде:

$$u^{10}(s, t) = \sum_{n=1}^{10} u_n(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(ns). \quad (7.1)$$

Так как  $\lambda \neq \lambda_k \forall k \in \mathbb{N}$ , то уравнение (0.1) невырожденное. Подставляем галеркинские приближения (7.1) в уравнение (0.1). Проинтегрировав полученное выражение в интервале от 1 до  $\pi$ , предварительно умножив на  $\varphi_n(s)$  получим систему дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned} 2\dot{u}_1(t) + u_1(t) &= 0, \quad 5\dot{u}_2(t) + 4u_2(t) = 3\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \quad 9\dot{u}_3(t) + 10u_3(t) = 0, \quad 16\dot{u}_4(t) + 17u_4(t) = 0, \\ 25\dot{u}_5(t) + 26\dot{u}_5(t) &= 0, \quad 36\dot{u}_6(t) + 37\dot{u}_6(t) = 0, \quad 49\dot{u}_7(t) + 50\dot{u}_7(t) = 0, \\ 65\dot{u}_8(t) + 64u_8(t) &= 0, \quad 82\dot{u}_9(t) + 81u_9(t) = 0, \quad 101\dot{u}_{10}(t) + 100u_{10}(t) = 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Трехточечное начально-конечное условие принимает вид:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \sqrt{2}, \quad u_2(0) = \sqrt{\pi}, \sqrt{2}, \quad u_3\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \quad u_4\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \quad u_5\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \\ u_6(1) &= 0, \quad u_7(1) = 0, \quad u_8(1) = 0, \quad u_9(1) = 0, \quad u_{10}(1) = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Решение задачи (0.1) – (0.3) примет вид:

$$u(s, t) = \sin(s)e^{-\frac{1}{2}t} + 2 \sin(2s) \left( \frac{3}{4}t - \frac{15}{16} + \frac{31}{16}e^{-\frac{4}{5}t} \right). \quad (7.4)$$

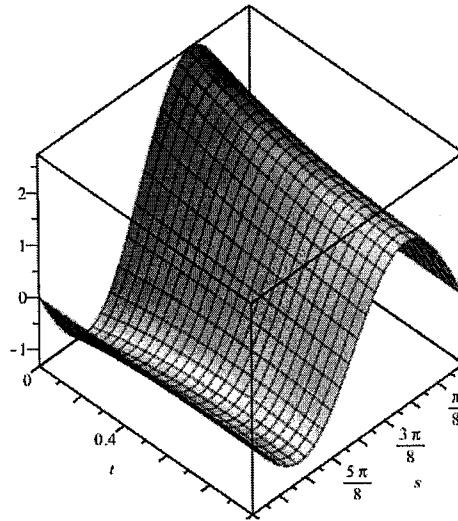


Рис. 3. График приближенного решения задачи (0.1) – (0.3)

**Пример 7.2.** Требуется найти численное решение задачи (5.45) – (5.47) при заданных условиях:  $\lambda = -4$ ,  $\alpha = 2$ ,  $f(s, t) = 2t \sin(s)$ ,  $l = \pi$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$ ,  $t_3 = 1$ ,  $u_1 = 2 \sin(s) + 2 \sin(2s) + 4 \sin(3s)$ ,  $u_2 = 3 \sin(4s) + 6 \sin(5s) + 7 \sin(6s)$ ,  $u_3 = \sin(8s) + 5 \sin(9s) + 9 \sin(10s)$ ,  $\sigma_1^L(M) = \{\mu_n : n = 1, 2, 3, 4\}$ ,  $\sigma_2^L(M) = \{\mu_n : n = 5, 6, 7\}$ ,  $\sigma_3^L(M) = \{\mu_n : n = 8, 9, \dots\}$ .

Приближенное решение будем искать в виде:

$$u^{10}(s, t) = \sum_{n=1}^{10} u_n(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(ns). \quad (7.5)$$

Так как  $\lambda = \lambda_2 = -4$ , то рассмотренный случай будет вырожденным. Подставляем галеркинские приближения (7.5) в уравнение (5.45), проинтегрировав полученное выражение в интервале от 1 до  $\pi$ , предварительно умножив на  $\varphi_n(s)$ , получим систему алгебро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 2u_1(t) - 3\dot{u}_1(t) &= \sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \quad 8u_2(t) = 0, \quad 18u_3(t) + 5\dot{u}_3(t) = 0, \quad 12\dot{u}_4(t) + 32u_4(t) = 0, \\ 50u_5(t) + 21\dot{u}_5(t) &= 0, \quad 32\dot{u}_6(t) + 72u_6(t) = 0, \quad 98u_7(t) + 45\dot{u}_7(t) = 0, \\ 128u_8(t) + 60\dot{u}_8(t) &= 0, \quad 162u_9(t) + 77\dot{u}_9(t) = 0, \quad 96\dot{u}_{10}(t) + 200u_{10}(t) = 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Трехточечное начально-конечное условие принимает вид:

$$u_1(0) = \sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_3(0) = 2\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_4(0) = 0, \quad u_5\left(\frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_6\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2},$$

$$u_7\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad u_8(1) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_9(1) = \frac{5}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_{10}(1) = \frac{9}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}. \quad (7.7)$$

Решаем алгебраическое уравнение  $8u_2(t) = 0$  и получим  $u_2(t) = 0$ . Исключаем алгебраическое уравнение и находим решение системы дифференциального уравнения с начальным условием. Объединяем решение алгебраического уравнения с решением ОДУ.

Решение задачи (5.45) – (5.47) примет вид:

$$\begin{aligned} u(s, t) = & 2 \sin(s) \left( \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{\frac{2}{3}t} \right) + 4 \sin(3s)e^{-\frac{18}{5}} + 6 \sin(5s)e^{-\frac{50}{21}t+\frac{25}{21}} + 7 \sin(6s)e^{-\frac{9}{4}t+\frac{9}{8}} + \\ & + \sin(8s)e^{-\frac{32}{15}t+\frac{32}{15}} + 5 \sin(9s)e^{-\frac{162}{77}t+\frac{162}{77}} + 9 \sin(10s)e^{-\frac{25}{12}t+\frac{25}{12}}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

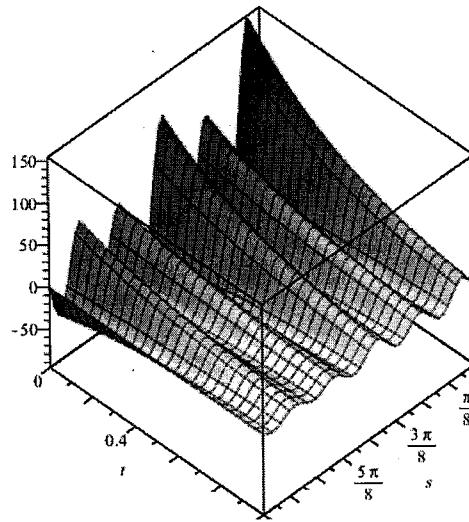


Рис. 4. График приближенного решения задачи (5.45) – (5.47)

**Пример 7.3.** Требуется найти численное решение задачи (5.61) – (5.63) при заданных условиях:  $\lambda = \frac{5}{2}$ ,  $\alpha = 2$ ,  $f(s, t) = 4(t-1)\cos(\frac{3}{2}s)$ ,  $l = \pi$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$ ,  $t_3 = 1$ ,  $u_1 = \cos(\frac{1}{2}s) + 2\cos(\frac{3s}{2}) + 2\cos(\frac{5s}{2})$ ,  $u_2 = 3\cos(\frac{s}{2}) + \sin(\frac{7s}{2}) + \cos(\frac{11s}{2})$ ,  $u_3 = 6\cos(\frac{9s}{2}) + 4\cos(\frac{11s}{2}) + \cos(\frac{13s}{2})$ ,  $\sigma_1^L(M) = \{\mu_n : n = 1, 2\}$ ,  $\sigma_2^L(M) = \{\mu_n : n = 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\sigma_3^L(M) = \{\mu_n : n = 7, 8, \dots\}$ .

Приближенное решение будем искать в виде

$$u^8(s, t) = \sum_{n=0}^8 u_n(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) s. \quad (7.9)$$

Так как  $\lambda \neq \lambda_k \forall k \in \mathbb{N}$ , то уравнение (5.61) невырожденное. Подставляем галеркинские приближения (7.9) в уравнение (5.61). Проинтегрировав полученное выражение в интервале

от 1 до  $\pi$ , предварительно умножив на  $\varphi_n(s)$  получим систему дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{11}{4}\dot{u}_0(t) + \frac{1}{2}u_0(t) = 0, \quad \frac{19}{4}\dot{u}_1(t) + \frac{9}{2}u_1(t) = 2\sqrt{pi}\sqrt{2}t - 2\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad \frac{35}{4}\dot{u}_2(t) + \frac{25}{2}u_2(t) = 0, \\ \frac{49}{2}u_3(t) + \frac{59}{4}\dot{u}_3(t) = 0, \quad \frac{81}{2}u_4(t) + \frac{91}{4}\dot{u}_4(t) = 0, \quad \frac{121}{2}u_5(t) + \frac{131}{4}\dot{u}_5(t) = 0, \\ \frac{169}{2}u_6(t) + \frac{179}{4}\dot{u}_6(t) = 0, \quad \frac{225}{2}u_7(t) + \frac{235}{4}\dot{u}_7(t) = 0, \quad \frac{299}{4}\dot{u}_8(t) + \frac{289}{4}u_8(t) = 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Трехточечное начально-конечное условие принимает вид:

$$\begin{aligned} u_0(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_1(0) = \sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_2(0) = \sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_4\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \\ u_5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_6\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad u_7(0) = 0, \quad u_8(0) = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Решение задачи (5.61) – (5.63) примет вид:

$$\begin{aligned} u(s, t) = \cos\left(\frac{1}{2}s\right)e^{-\frac{2}{11}t} + 2\cos\left(\frac{3}{2}s\right)\left(\frac{4}{9}t - \frac{74}{81} + \frac{155}{81}e^{-\frac{18}{19}t}\right) + \cos\left(\frac{5}{2}s\right)e^{-\frac{10}{7}t} + \\ + \cos\left(\frac{7}{2}s\right)e^{-\frac{98}{59}t+\frac{49}{59}} + \cos\left(\frac{11}{2}s\right)e^{-\frac{242}{131}t+\frac{121}{131}}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

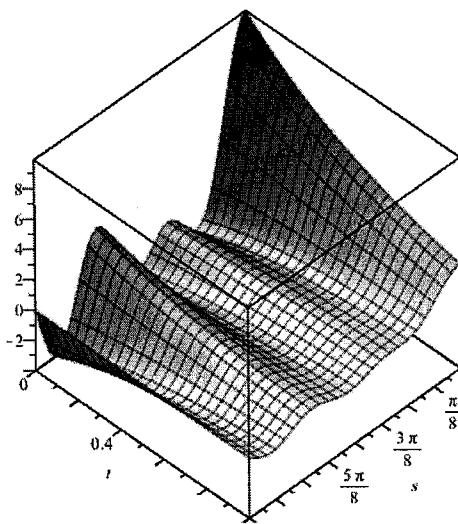


Рис. 5. График приближенного решения задачи (5.61) – (5.63)

**Пример 7.4.** Требуется найти численное решение задачи (5.53) – (5.55) при заданных условиях:  $\lambda = -\frac{9}{4}$ ,  $\alpha = \frac{3}{2}$ ,  $f(s, t) = 3t^2 \sin(\frac{1}{2}s)$ ,  $l = \pi$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$ ,  $t_3 = 1$ ,  $u_1 = \sin(\frac{1}{2}s) + 2 \sin(\frac{3}{2}s) + 7 \sin(\frac{9}{2}s)$ ,  $u_2 = 3 \sin(\frac{5}{2}s) + \sin(\frac{7}{2}s) + \sin(\frac{1}{2}s)$ ,  $u_3 = 6 \sin(\frac{9}{2}s) + 4 \sin(\frac{11}{2}s) + 5 \sin(\frac{15}{2}s)$ ,  $\sigma_1^L(M) = \{\mu_n : n = 1, 2\}$ ,  $\sigma_2^L(M) = \{\mu_n : n = 3, 4, 5\}$ ,  $\sigma_3^L(M) = \{\mu_n : n = 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$ .

Приближенное решение будем искать в виде

$$u^{10}(s, t) = \sum_{n=0}^{10} u_n(t) \sin \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (7.13)$$

Так как  $\lambda = \lambda_1 = -\frac{9}{4}$ , то рассмотренный случай будет вырожденным. Подставляем галеркинские приближения (7.13) в уравнение (5.53). Проинтегрировав полученное выражение в интервале от 1 до  $\pi$ , предварительно умножив на  $\varphi_n(s)$ , получим систему алгебро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}u_0 - 2\dot{u}_0(t) &= \frac{3}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad \frac{27}{8}u_1 = 0, \quad \frac{75}{8}u_2(t) + 4\dot{u}_2 = 0, \quad \frac{147}{8}u_3(t) + 10\dot{u}_3(t) = 0, \\ \frac{243}{8}u_4(t) + 18\dot{u}_4(t) &= 0, \quad \frac{363}{8}u_5(t) + 28\dot{u}_5(t) = 0, \quad \frac{507}{8}u_6(t) + 40\dot{u}_6(t) = 0, \\ \frac{675}{8}u_7(t) + 54\dot{u}_7(t) &= 0, \quad \frac{867}{8}u_8(t) + 70\dot{u}_8(t) = 0. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Трехточечное начально-конечное условие принимает вид:

$$\begin{aligned} u_0(0) &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_2(0) = 0, \quad u_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_4\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad u_5\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \\ u_6(1) &= 0, \quad u_7(1) = \frac{5}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_8(1) = 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Решаем алгебраическое уравнение  $\frac{27}{8}u_1(t) = 0$  и получим  $u_1(t) = 0$ . Исключаем алгебраическое уравнение и находим решение системы дифференциального уравнения с начальным условием. Объединяем решение алгебраического уравнения с решением ОДУ.

Решение задачи (5.53) – (5.55) примет вид:

$$u(s, t) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right) \left( 4t + \frac{64}{3} - \frac{125}{6}e^{-\frac{3}{16}t} \right) + \sin\left(\frac{7}{2}s\right) e^{-\frac{147}{80}t + \frac{147}{60}} + 5 \sin\left(\frac{15}{2}s\right) e^{-\frac{25}{16}t + \frac{25}{16}}. \quad (7.16)$$

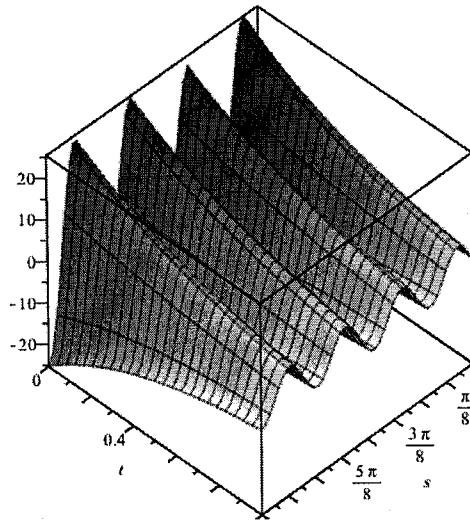


Рис. 6. График приближенного решения задачи (5.53) – (5.55)

**Пример 7.5.** Требуется найти численное решение задачи (5.61) – (5.63) при заданных условиях:  $\lambda = -\frac{121}{4}$ ,  $\alpha = \frac{11}{2}$ ,  $f(s, t) = 0$ ,  $l = \pi$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \frac{1}{5}$ ,  $t_3 = 1$ ,  $u_1 = 5 \cos(\frac{3}{2}s) + 2 \cos(\frac{7}{2}s)$ ,  $u_2 = 2 \cos(\frac{1}{2}s) + 3 \cos(\frac{9}{2}s)$ ,  $u_3 = 8 \cos(\frac{5}{2}s) + 4 \cos(\frac{11}{2}s)$ ,  $\sigma_1^L(M) = \{\mu_n : n = 1, 2, 3, 4\}$ ,  $\sigma_2^L(M) = \{\mu_n : n = 5, 6\}$ ,  $\sigma_3^L(M) = \{\mu_n : n = 7, 8, 9, \dots\}$ .

Приближенное решение будем искать в виде

$$u^9(s, t) = \sum_{n=0}^9 u_n(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) s. \quad (7.17)$$

Так как  $\lambda = \lambda_5 = -\frac{121}{4}$ , то рассмотренный случай будет вырожденным. Подставляем галеркинские приближения (7.17) в уравнение (5.61), проинтегрировав полученное выражение в интервале от 1 до  $\pi$ , предварительно умножив на  $\varphi_n(s)$ , получим систему алгебро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{11}{8}u_0 - 30\dot{u}_0(t) &= 0, \quad \frac{99}{8}u_1 - 28\dot{u}_1(t) = 0, \quad \frac{275}{8}u_2(t) - 24\dot{u}_2 = 0, \quad \frac{539}{8}u_3(t) - 18\dot{u}_3(t) = 0, \\ \frac{891}{8}u_4(t) - 10\dot{u}_4(t) &= 0, \quad \frac{1331}{8}u_5(t) = 0, \quad \frac{1859}{8}u_6(t) + 12\dot{u}_6(t) = 0, \quad \frac{2475}{8}u_7(t) + 26\dot{u}_7(t) = 0, \quad (7.18) \\ \frac{3179}{8}u_8(t) + 42\dot{u}_8(t) &= 0, \quad \frac{3971}{8}u_9(t) + 60\dot{u}_9(t) = 0. \end{aligned}$$

Трехточечное начально-конечное условие принимает вид:

$$u_0(0) = 0, \quad u_1(0) = \frac{5}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_2(0) = 0, \quad u_3(0) = \sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_4(0) = 0, \quad u_6(0) = 0,$$

$$u_7(0) = 0, \quad u_8\left(\frac{1}{5}\right) = 0, \quad u_9(1) = 0. \quad (7.19)$$

Решаем алгебраическое уравнение  $\frac{1331}{8}u_5(t) = 0$  и получим  $u_5(t) = 0$ . Исключаем алгебраическое уравнение и находим решение системы дифференциального уравнения с начальным условием. Объединяя решение алгебраического уравнения с решением ОДУ.

Решение задачи (5.61) – (5.63) примет вид:

$$u(s, t) = 5 \cos\left(\frac{3}{2}s\right) e^{\frac{99}{224}t} + 2 \cos\left(\frac{7}{2}s\right) e^{\frac{539}{144}t}. \quad (7.20)$$

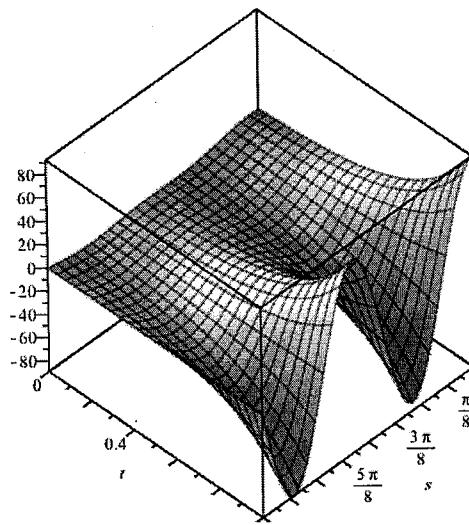


Рис. 7. График приближенного решения задачи (5.61) – (5.63)

**Пример 7.6.** Требуется найти численное решение задачи (5.29) – (5.31) при заданных условиях:  $\lambda = 4$ ,  $\alpha = 2$ ,  $f(s, t) = 4st$ ,  $l = \pi$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$ ,  $t_3 = 1$ ,  $u_1 = s(s - \pi)$ ,  $u_2 = 2s(s - \pi)$ ,  $u_3 = 3s^2(s - \pi)$ ,  $\sigma_1^L(M) = \{\mu_n : n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $\sigma_2^L(M) = \{\mu_n : n = 8, 9, 10, 11, 12\}$ ,  $\sigma_3^L(M) = \{\mu_n : n = 13, 14, 15, \dots\}$ .

Приближенное решение будем искать в виде:

$$u^{15}(s, t) = \sum_{n=1}^{15} u_n(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(ns). \quad (7.21)$$

Так как  $\lambda \neq \lambda_k \forall k \in \mathbb{N}$ , то уравнение (5.29) невырожденное. Подставляем галеркинские приближения (7.21) в уравнение (5.29). Проинтегрировав полученное выражение в интервале от 1 до  $\pi$ , предварительно умножив на  $\varphi_n(s)$  получим систему дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned} 2u_1(t) + 5\dot{u}_1(t) &= 4\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \quad 8\dot{u}_2(t) + 8u_2(t) = -2\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \quad 18u_3(t) + 13\dot{u}_3(t) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \\ 20\dot{u}_4(t) + 32u_4(t) &= -\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \quad 50u_5(t) + 29\dot{u}_5(t) = \frac{4}{5}\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \quad 40\dot{u}_6(t) + 72u_6(t) = -\frac{2}{3}\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \\ 98u_7(t) + 53\dot{u}_7(t) &= \frac{4}{7}\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \quad 128u_8(t) + 68\dot{u}_8(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \quad 162u_9(t) + 85\dot{u}_9(t) = \frac{4}{9}\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \\ 200\dot{u}_{10}(t) + 104u_{10}(t) &= -\frac{2}{5}\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \quad 242\dot{u}_{11}(t) + 125u_{11}(t) = \frac{4}{11}\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \\ 288\dot{u}_{12}(t) + 148u_{12}(t) &= -\frac{1}{3}\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \quad 173\dot{u}_{13}(t) + 338u_{13}(t) = \frac{4}{13}\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \\ 392\dot{u}_{14}(t) + 200u_{14}(t) &= -\frac{2}{7}\sqrt{\pi}t\sqrt{2}, \quad 229\dot{u}_{15}(t) + 450u_{15}(t) = \frac{4}{15}\sqrt{\pi}t\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Трехточечное начально-конечное условие принимает вид:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= -\frac{4\sqrt{2}}{\pi}, \quad u_2(0) = 0, \quad u_3(0) = -\frac{4}{27}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \quad u_4(0) = 0, \quad u_5\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{125}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \\ u_6\left(\frac{1}{2}\right) &= 0, \quad u_7\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{343}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \quad u_8(1) = \frac{4}{27}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \quad u_9(1) = -\frac{2}{243}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \\ u_{10}(1) &= \frac{9}{500}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_{11}(1) = -\frac{6}{1331}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_{12}(1) = \frac{1}{96}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \\ u_{13}(1) &= -\frac{6}{2197}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_{14}(1) = \frac{9}{1372}\sqrt{\pi}\sqrt{2}, \quad u_{15}(1) = -\frac{2}{1125}\sqrt{\pi}\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Решение задачи (5.29) – (5.31) примет вид:

$$u(s, t) = 2 \sin(s) \left( 2t - 5 + e^{-\frac{2}{5}t} (5\pi - 4) \right) + 2 \sin(2s) \left( -\frac{1}{4}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-t} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sin(3s) \left( \frac{2}{27}t - \frac{13}{243} + \frac{1}{243}e^{-\frac{18}{13}t}(13\pi - 36) \right) + \\
& +2 \sin(4s) \left( -\frac{1}{32}t + \frac{5}{256} - \frac{5}{256}e^{-\frac{8}{5}t} \right) + \\
& +2 \sin(5s) \left( \frac{2}{125}t - \frac{29}{3125} + \frac{4}{3125} \frac{e^{-\frac{50}{29}t}(\pi - 50)}{e^{-\frac{25}{29}}} \right) + \\
& +2 \sin(6s) \left( -\frac{1}{108}t + \frac{5}{972} - \frac{1}{1944}e^{-\frac{9}{5}t+\frac{9}{10}} \right) + \\
& +2 \sin(7s) \left( \frac{2}{343}t - \frac{5}{16807} + \frac{4}{16807}e^{-\frac{98}{53}t+\frac{49}{53}}(\pi - 50) \right) + \quad (7.24) \\
& +2 \sin(8s) \left( -\frac{1}{256}t + \frac{17}{8192} + \frac{303}{8192}e^{-\frac{32}{17}t+\frac{32}{17}} \right) + \\
& +2 \sin(10s) \left( -\frac{1}{500}t + \frac{13}{12500} + \frac{237}{12500}e^{-\frac{25}{13}t+\frac{25}{13}} \right) + \\
& +2 \sin(11s) \left( \frac{2}{1331}t - \frac{125}{161051} - \frac{843}{161051}e^{-\frac{242}{125}t+\frac{242}{125}} \right) + \\
& +2 \sin(12s) \left( -\frac{1}{864}t + \frac{37}{62208} + \frac{683}{62208}e^{-\frac{72}{37}t+\frac{72}{37}} \right) + \\
& +2 \sin(13s) \left( \frac{2}{2197}t + \frac{173}{371293} - \frac{1179}{371293}e^{-\frac{338}{173}t+\frac{338}{173}} \right) + \\
& +2 \sin(14s) \left( -\frac{1}{1372}t + \frac{25}{67228} + \frac{465}{67228}e^{-\frac{49}{25}t+\frac{49}{25}} \right) + \\
& +2 \sin(15s) \left( \frac{2}{3375}t - \frac{229}{759375} - \frac{1571}{759375}e^{-\frac{450}{229}t+\frac{450}{229}} \right).
\end{aligned}$$

Результат вычислительной точности задачи (5.29) – (5.31) с учетом начальных и краевых условий предоставлен в таблице, график решения изображен на рис. 8.

Для вычислительной точности применили формулу

$$\delta_{N_1, N_2} = \left( \int_0^T \left( \int_0^l |(u^{N_1}(s, t) - u^{N_2}(s, t))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.25)$$

где  $N_1, N_2$  – количество галеркинских приближений,  $T = 1, l = \pi$ .

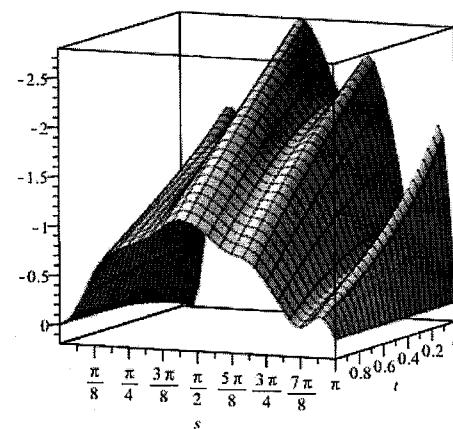


Рис. 8. График приближенного решения задачи (5.29) – (5.31)

Таблица

$N_1, N_2$	$\delta_{N_1, N_2}$
10, 11	0,000100825218
11, 12	0,000107554710
12, 13	0,000260326931
13, 14	0,000792472796
14, 15	0,001320147903

## Заключение

В квалификационной работе были решены все поставленные задачи:

- исследована разрешимость трехточечной начально-конечной задачи для линейного уравнения Баренблатта – Желтова – Кошиной на отрезке;
- построен алгоритм нахождения приближенного решения на основе модифицированного проекционного метода Галеркина;
- реализован алгоритм численного метода решения в виде программы для ЭВМ;
- проведены вычислительные эксперименты.

## Библиографический список

1. *Баренблatt, Г.И.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, №5. – С. 852 – 864.
2. *Баренблatt, Г.И.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, №5. – С. 58 – 73.
3. *Баренблatt, Г.И.* Теория нестандартной фильтрации жидкости и газа / Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. – М.: Наука, 1972.
4. *Загребина, С.А.* Начально-конечная задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 5 – 24.
5. *Загребина, С.А.* Об одной новой задаче для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной / С.А. Загребина, А.С. Конкина // Вестн. МаГУ. Серия: "Математика". — Магнитогорск, 2012. – Вып. 14. – С. 67 – 77.
6. *Замышляева, А.А.* Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка: моногр. / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.
7. *Каракич, В.В.* Ряды Фурье / В.В. Каракич. — М.: Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ 2013.
8. *Кочина, П.Я.* Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967) / П. Я. Кочина. — М.: Наука, 1969.
9. *Мизохата, С.* Теория уравнений с частными производными / С. Мизохата — М.: Наука, 1977.
10. Свешников, А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: Физматлит, 2007.
11. *Свиридов, Г.А.* Задача Шоултера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридов, С.А. Загребина // Известия Иркутск. гос. ун-та. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104 – 125.
12. *Свиридов, Г.А.* Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно  $\rho$ -секториальными операторами / Г.А. Свиридов, С.А. Загребина // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 12. – С. 1646 – 1652.
13. *Sviridyuk, G.A.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators /

- G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003.
14. Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физике / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР, серия: Математика. – 1954. – Т. 18, вып. 1. – С. 3 – 50.
15. Толстов, Г.П. Ряды Фурье / Толстов Г.П. — 3-е изд. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
16. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галёркина / К. Флетчер — М.: Мир, 1988.