


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

РАБОТА ПРОВЕРЕНА


Рецензент, к.ф.-м.н.,

доцент кафедры математического анализа ЧелГУ

 /А.В.Нагуманова/
«07» июня 2016 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

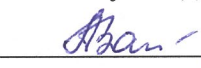
Заведующий кафедрой, д.ф. -м.н., доцент

 /В.Л. Дильман/
«07» 06 2016 г.


**Исследование уравнения Буссинеска – Лява на
геометрическом графе**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ – 010100.62. 2016. 12-031-1881. ВКР

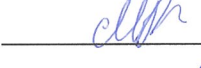
Руководитель, д.ф. -м.н., доцент

 /А.А. Замышляева/
«06» 06 2016 г.

Автор, студент группы ММиКН-471

 /М.Ф. Шияпова/
«06» 06 2016 г.

Нормоконтролер, к. ф.-м.н., доцент

 /М.А. Коротова/
«06» 06 2016 г.

Челябинск 2016

УДК 517.9

Шияпова М. Ф.

Исследование уравнения Буссинеска – Лява на геометрическом графе/ М.Ф. Шияпова.
– Челябинск, 2016. – 57с.

Работа посвящена исследованию уравнения Буссинеска – Лява на геометрическом графе. В работе изучается задача Штурма - Лиувилля для геометрического графа, применяется метод Фурье и приводится его обоснование для математической модели Буссинеска – Лява на геометрическом графе.

Список лит. – 12 назв., рисунков – 7

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Задание

студенту группы ММиКН-471
Шияповой Маргарите Фанисовне
на выполнение выпускной квалификационной работы
по направлению 010100.62 - МАТЕМАТИКА

1. Тема выпускной квалификационной работы

Исследование уравнения Буссинеска-Лява на геометрическом графе
(Утверждена приказом по университету от «15» апреля 2016 г. № 661)

2. Перечень подлежащих исследованию вопросов

- 2.1 Введение
- 2.2 Абстрактная задача Штурма – Лиувилля
- 2.3 Задача Штурма – Лиувилля для некоторых геометрических графов
- 2.4 Метод Фурье для математической модели Буссинеска – Лява на геометрическом графе
- 2.5 Обоснование метода Фурье для математической модели Буссинеска – Лява на геометрическом графе

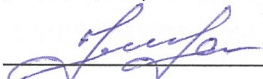
3. Календарный план подготовки выпускной квалификационной работы

Наименование этапов-дипломной работы	Срок выполнения этапов работы	Отметка о выполнении руководителя
1. Обзор литературы	22.10.2015-7.01.2016	
2. Выбор и разработка методов исследования	16.03.2016-15.04.2016	
3. Получение результатов, формулировка выводов, структурирование текста. Подготовка текста выпускной квалифицированной работы	16.04.2016-15.05.2016	

4. Проверка и рецензирование работы руководителем, исправление замечаний	16.05.2016-21.05.2016	
5. Подготовка доклада и текста выступления	25.05.2016-1.06.2016	
6. Внешнее рецензирование	25.05.2016-1.06.2016	
7. Защита выпускной квалификационной работы	1.06.2016-20.06.2016	

4. Дата выдачи задания «___» _____ 2016 г.

Руководитель работы (д. ф.-м. наук, доцент)  /А.А.Замышляева

Задание приняла к исполнению  /М.Ф.Шияпова

Содержание

Введение	6
1. Абстрактная задача Штурма – Лиувилля на геометрическом графе	8
2. Задача Штурма – Лиувилля для некоторых геометрических графов	10
3. Метод Фурье для математической модели Буссинеска – Лява на геометрическом графе	29
4. Обоснование метода Фурье для математической модели Буссинеска – Лява на геометрическом графе	34
Заключение	55
Литература	56

Введение

Пусть $G = G(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ – множество ребер. Каждому ребру поставим в соответствие два числа $l_j, d_j \in \mathbb{R}_+$, обозначающие длину и площадь поперечного сечения ребра E_j соответственно. На графе G рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для уравнения

$$a_j u_j - (c_j(x) u_{jx})_x = f_j, \quad u_j = u_j(x), \quad (0.1)$$
$$x \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}$$

Для уравнений (0.1) в каждой вершине графа зададим условия

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j c_j(0) u_{jx}(0, t) - \sum_{E_m \in E^\omega(V_i)} d_m c_m(l_m) u_{mx}(l_m, t) = 0, \quad (0.2)$$

$$u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \quad (0.3)$$

где $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i), t \in \mathbb{R}$. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i . Условие (0.2) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а условие (0.3) – что решение $u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$ в каждой вершине должно быть непрерывным. В частном случае, когда граф G состоит из одного ребра и двух вершин, условие (0.3) исчезает, а условие (0.2) превращается в условие Неймана. Дифференциальные уравнения на графах – сравнительно новая часть математического знания. Первые публикации в этой области появились в последнее десятилетие прошлого века, первая монография вышла в 2004 г. [5] и была посвящена изучению качественных свойств дифференциальных уравнений на многообразиях типа сети. В [12] на графе G рассмотрены уравнения реакции-диффузии

$$u_{jt} = u_{jxx} + f(u_j), x \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}_{++}, \quad (0.4)$$

где f – гладкая функция, с условиями типа Кирхгоффа. Между тем было замечено, что в ряде случаев уравнения соболевского типа описывают процессы реакции-диффузии лучше, чем полулинейные уравнения вида (0.4).

Уравнения соболевского типа на графах впервые были рассмотрены в 2002 г. [6]; первое диссертационное исследование в этом направлении было выполнено в 2002 – 2005 гг. [11] и содержало результаты [7] – [9]. В работах [2, 3, 5-9, 11] возникла задача Штурма – Лиувилля (0.1) – (0.3), правда, в частном случае ($c_j x \equiv 1, a_j(x) \equiv a = const$), причем предложенный подход имел мало общего с результатами [4]. Дальнейшее исследование [10] привело к новой задаче Штурма – Лиувилля вида (0.1) – (0.3), теперь уже в случае $c_j(x) \equiv 1, a_j(x) \equiv a_j$. Это обстоятельство побудило рассмотреть задачу (0.1) – (0.3), которая является естественным обобщением рассмотренных ранее задач. Полученные результаты носят окончательный и исчерпывающий характер.

В работе методом Фурье исследуется задача (0.1) - (0.3) на геометрическом графе. Цель данной работы – найти решения уравнения Буссинеска – Лява для некоторых конечных, связных ориентированных графов. Работа, кроме вводной части, заключения и списка литературы содержит четыре параграфа. В первом параграфе приведены свойства собственных значений и собственных функций задачи, взятые в [1]. Второй параграф посвящен конкретным примерам решений задач Штурма – Лиувилля. В третьем параграфе, применяя метод Фурье, находятся решения задачи Буссинеска – Лява. В последнем параграфе, сделано обоснование применения метода Фурье для задачи Буссинеска – Лява для некоторых конечных связных ориентированных графов.

1. Абстрактная задача Штурма – Лиувилля на геометрическом графе

Следуя [11], введем в рассмотрение гильбертово пространство

$$L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots), g_j \in L_2(0, l_j)\}$$

со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_j d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx.$$

И банахово пространство $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0, l_j)$
и выполнено (0.2)} с нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_j d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

Определение 1. Не равная тождественно нулю функция

$u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$ называется собственной функцией задачи (0.1) – (0.3) для оператора

$$A = \left(\frac{\partial}{\partial x} (-c_1(x) \frac{\partial}{\partial x}) + a_1(x), \frac{\partial}{\partial x} (-c_2(x) \frac{\partial}{\partial x}) + a_2(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x} (-c_j(x) \frac{\partial}{\partial x}) + a_j(x), \dots \right),$$

если существует такое число λ , что функция u является классическим решением следующей задачи:

$$a_j(x)u_j - (c_j(x)u_{jx})_x = \lambda u_j, \quad (1.1)$$

$$u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \quad (1.2)$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j c_j(0) u_{jx}(0, t) - \sum_{E_m \in E^\omega(V_i)} d_m c_m(l_m) u_{mx}(l_m, t) = 0. \quad (1.3)$$

Число λ называется собственным значением (соответствующим собственной функции u).

В дальнейшем мы будем рассматривать только собственные функции, нормированные условием $\|u\|_{L_2(\mathbf{G})} = 1$ и соответствующие им собственные значения.

Теорема 1. [1] *Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ задачи (0.1) – (0.3) для оператора*

$$A = \left(\frac{\partial}{\partial x} (-c_1(x) \frac{\partial}{\partial x}) + a_1(x), \frac{\partial}{\partial x} (-c_2(x) \frac{\partial}{\partial x}) + a_2(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x} (-c_j(x) \frac{\partial}{\partial x}) + a_j(x), \dots \right),$$

вещественны и $\lambda_s \rightarrow +\infty$ при $s \rightarrow \infty$. Собственные значения удовлетворяют неравенству $\lambda_s > m = \min_j (\min_{x \in (0, l_j)} a_j(x))$ во всех случаях, кроме $a_j(x) = a_i(x) = \text{const}$ для всех i, j .

Если же $a_j(x) = a_i(x) = \text{const}$ для всех i, j , то собственные значения удовлетворяют неравенству $\lambda_s \geq m$, $s = 1, 2, \dots$, причем существует однократное собственное значение, равное m , с собственной функцией

$$\left(\sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} u_j v_j dx \right)^{-1} (1, 1, \dots, 1, \dots).$$

В данной работе мы рассматриваем частный случай, когда $a_j \equiv 0, c_j \equiv 1$.

Теорема 2. [1] *Собственные функции $u_1(x), u_2(x), \dots$ задачи (0.1) – (0.3) образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbf{G})$, т.е. любая функция $f \in L_2(\mathbf{G})$ разлагается в ряд Фурье*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k, \quad f_k = \langle f, u_k \rangle, \quad (1.4)$$

сходящийся в $L_2(\mathbf{G})$. Для функции $f \in \mathfrak{U}$ ряд (1.5) по собственным функциям задачи (0.1) – (0.3) сходится в \mathfrak{U} и имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| |f_k|^2 \leq C \|f\|_{\mathfrak{U}}^2, \quad (1.5)$$

где постоянная C не зависит от f .

2. Задача Штурма – Лиувилля для некоторых геометрических графов.

Задача Штурма – Лиувилля возникает при решении уравнений в частных производных методом Фурье. Мы применим этот метод для решения уравнения Буссинеска – Лява. Для удобства собственные функции будем обозначать через $X(x)$.

Пример 1.

Пусть граф G_1 состоит из одного ребра длины l , соединяющего две вершины (рис. 1):



Рис.1 Граф G_1

Тогда задача Штурма – Лиувилля примет вид:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Найдем ненулевые решения $X(x)$ задачи (2.1). Рассмотрим все случаи при разных значениях λ .

1) При $\lambda < 0$ решение уравнения $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$\begin{cases} X'(0) = C_1 \sqrt{\lambda} - C_2 \sqrt{\lambda} = 0, \\ X'(l) = \sqrt{\lambda}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем, что $C_1 = C_2$

Подставляем значения во второе уравнение и находим C_1 :

$$C_1\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0, C_1 = 0, \text{ тогда } C_2 = 0.$$

2) При $\lambda > 0$ решение уравнения из системы (2.1) имеет вид:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

$$X'(x) = -C_1 \sin \sqrt{\lambda}x \sqrt{\lambda} + C_2 \cos \sqrt{\lambda}x \sqrt{\lambda}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} X'(0) = C_2\sqrt{\lambda} = 0, \\ X'(l) = -\sqrt{\lambda}C_1 \sin \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получим, что $C_2 = 0$.

Собственные значения получаем из второго уравнения:

$$\sqrt{\lambda}l = \pi k,$$

Следовательно,

$$\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2},$$

$$X_k = C_1 \cos \frac{\pi k}{l}x, k = 1, 2, \dots$$

3) При $\lambda = 0$ решение уравнения из системы (2.1) имеет вид:

$$X(x) = C_1x + C_2.$$

Так как

$$\begin{cases} X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $C_1 = 0$, а $X_0(x) = C_2$. Объединим случаи 1) и 2), обозначив собственные функции $X_k = C_1 \cos \frac{\pi k}{l}x, k = 0, 1, \dots$

Для того, чтобы найти C_1 найдем норму X_k и воспользуемся условием нормировки:

$$\|X_k\| = 1, \text{ где } \|X_k\|^2 = \int_0^l X_k^2(x)dx = 1.$$

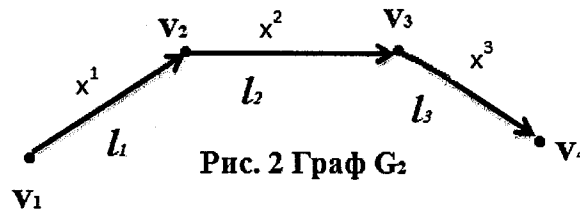
$$\|X_k\|^2 = C_1^2 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi k}{l} x dx = \frac{C_1^2}{2} \int_0^l (1 + \cos \frac{2\pi k}{l} x) dx = x \frac{C_1^2}{2} \Big|_0^l + \sin \frac{2\pi k}{l} x \frac{l}{2\pi k} \frac{C_1^2}{2} \Big|_0^l =$$

$$= \frac{C_1^2 l}{2} + \sin 2\pi k \frac{C_1^2 l}{4\pi k} = \frac{C_1^2 l}{2} = 1. \text{ Следовательно, } C_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}, \text{ а собственные функции:}$$

$$X_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, k = 0, 1, \dots$$

Пример 2.

Рассмотрим граф, состоящий из трех ребер, соединяющих четыре вершины (рис.2).



Задача Штурма – Лиувилля примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (X^1)'' + \lambda X = 0, \\ (X^2)'' + \lambda X = 0, \\ (X^3)'' + \lambda X = 0, \\ (X^1)'(0) = 0, \\ (X^2)'(0) - (X^1)'(l_1) = 0, \\ (X^3)(0) - (X^2)'(l_2) = 0, \\ (X^3)'(l_3) = 0, \\ X^1(l_1) = X^2(0), \\ X^2(l_2) = X^3(0). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Для случая $\lambda > 0$ общее решение уравнений из системы (2.2) имеет вид:

$$\begin{cases} X_k^1(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_k^2(x) = C_3 \cos \sqrt{\lambda}x + C_4 \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_k^3(x) = C_5 \cos \sqrt{\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{\lambda}x. \end{cases}$$

Подставим его в граничные условия в системы (2.2):

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_4 + C_1 \sin \sqrt{\lambda}l_1 = 0, \\ C_6 + C_3 \sin \sqrt{\lambda}l_2 - C_4 \cos \sqrt{\lambda}l_2 = 0, \\ -C_5 \sin \sqrt{\lambda}l_3 + C_6 \cos \sqrt{\lambda}l_3 = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda}l_1 = C_3, \\ C_3 \cos \sqrt{\lambda}l_2 + C_4 \sin \sqrt{\lambda}l_2 = C_5. \end{cases}$$

Выразим все константы через константу C_1 :

$$C_4 = -C_1 \sin \sqrt{\lambda}l_1,$$

$$C_3 = C_1 \cos \sqrt{\lambda}l_1,$$

$$C_5 = C_1 \cos \sqrt{\lambda}l_2 \cos \sqrt{\lambda}l_1 - C_1 \sin \sqrt{\lambda}l_2 \sin \sqrt{\lambda}l_1 = C_1 \cos(l_1 + l_2)\sqrt{\lambda},$$

$$C_6 = -C_1 \sin(l_1 + l_2)\sqrt{\lambda}.$$

Подставим константы C_6, C_5 в четвертое уравнение системы:

$$-C_1 \sin(l_1 + l_2)\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}l_3 - C_1 \sin(l_1 + l_2)\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l_3 = 0.$$

Следовательно, $C_1 \sin(l_1 + l_2 + l_3)\sqrt{\lambda} = 0$.

Так как $C_1 \neq 0$, находим значение λ :

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + l_3}. \text{ Следовательно,}$$

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l_1 + l_2 + l_3} \right)^2.$$

Подставим значение λ_k в систему общих решений (2.2) X^1, X^2, X^3 .

$$\begin{cases} X_k^1 = C_1 \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + l_3}x, \\ X_k^2 = C_1 \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + l_3}l_1 \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + l_3}x - C_1 \sin \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + l_3}l_1 \sin \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + l_3}x, \\ X_k^3 = C_1 \cos(l_1 + l_2) \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + l_3} \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + l_3}x - C_1 \sin(l_1 + l_2) \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + l_3} \sin \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + l_3}x. \end{cases}$$

Свернем по формулам синус разности, косинус разности:

$$\begin{cases} X_k^1 = C_1 \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+l_3} x, \\ X_k^2 = C_1 \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+l_3} (l_1 + x), \\ X_k^3 = C_1 \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+l_3} (l_1 + l_2 + x). \end{cases}$$

Для того, чтобы найти C_1 найдем норму X_k .

$$\|X_k\|^2 = \int_0^{l_1} (X^1)^2 dx + \int_0^{l_2} (X^2)^2 dx + \int_0^{l_3} (X^3)^2 dx = 1$$

$$\begin{aligned} \|X_k\|^2 &= \frac{C_1^2}{2} \int_0^{l_1} (1 + \cos \frac{2\pi k}{l_1+l_2+l_3} x) dx + \frac{C_1^2}{2} \int_0^{l_2} (1 + \cos \frac{2\pi k}{l_1+l_2+l_3} (l_1 + x)) dx + \frac{C_1^2}{2} \int_0^{l_3} (1 + \\ &+ \cos \frac{2\pi k}{l_1+l_2+l_3} (l_1 + l_2 + x)) dx = \frac{C_1^2}{2} [l_1 + \sin \frac{2\pi k}{l_1+l_2+l_3} x \frac{l_1+l_2+l_3}{2\pi k} \Big|_0^{l_1} + l_2 + \sin \frac{2\pi k}{l_1+l_2+l_3} (l_1 + \\ &x) \frac{l_1+l_2+l_3}{2\pi k} \Big|_0^{l_2} + l_3 + \sin \frac{2\pi k}{l_1+l_2+l_3} (l_1 + l_2 + x) \frac{l_1+l_2+l_3}{2\pi k} \Big|_0^{l_3}] = \frac{C_1^2}{2} [(l_1 + l_2 + l_3) + \\ &+ \frac{(l_1+l_2+l_3)}{2\pi k} (\sin \frac{2\pi k}{l_1+l_2+l_3} l_1 + \sin \frac{2\pi k}{l_1+l_2+l_3} (l_1+l_2) - \sin \frac{2\pi k}{l_1+l_2+l_3} l_1 + \sin 2\pi k - \sin \frac{2\pi k}{l_1+l_2+l_3} (l_1 + \\ &l_3))] = \frac{C_1^2}{2} (l_1 + l_2 + l_3) = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $C_1^2 = \frac{2}{l_1+l_2+l_3}$.

Откуда $C_1 = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+l_3}}$.

Подставим значение C_1 в общее решение уравнений:

$$\begin{aligned} X_k^1(x) &= \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+l_3}} \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+l_3} x, \\ X_k^2(x) &= \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+l_3}} \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+l_3} (l_1 + x), \\ X_k^3(x) &= \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+l_3}} \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+l_3} (l_1 + l_2 + x). \end{aligned}$$

Пример 3.

Рассмотрим граф, состоящий из двух ребер, соединяющих три вершины (рис.3).

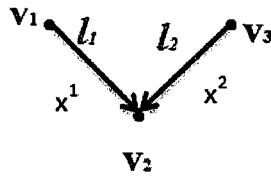


Рис. 3 Граф G_3

Задача Штурма – Лиувилля примет вид:

$$\begin{cases} (X^1)'' + \lambda X = 0, \\ (X^2)'' + \lambda X = 0, \\ (X^1)'(0) = 0, \\ (X^2)'(0) = 0, \\ (X^1)'(l_1) + (X^2)'(l_2) = 0, \\ X^1(l_1) = X^2(0). \end{cases} \quad (2.3)$$

Общее решение уравнений:

$$\begin{cases} X_k^1(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_k^2(x) = C_3 \cos \sqrt{\lambda}x + C_4 \sin \sqrt{\lambda}x. \end{cases}$$

Найдем производные:

$$(X_k^1(x))' = -C_1 \sin \sqrt{\lambda}x \sqrt{\lambda} + C_2 \cos \sqrt{\lambda}x \sqrt{\lambda}$$

$$(X_k^2(x))' = -C_3 \sin \sqrt{\lambda}x \sqrt{\lambda} + C_4 \cos \sqrt{\lambda}x \sqrt{\lambda}$$

Подставим их в граничные условия системы (2.3):

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_4 = 0, \\ -C_1 \sin \sqrt{\lambda}l_1 - C_3 \sin \sqrt{\lambda}l_2 = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda}l_1 - C_3 \cos \sqrt{\lambda}l_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} -C_1 \sin \sqrt{\lambda}l_1 - C_3 \sin \sqrt{\lambda}l_2 = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda}l_1 - C_3 \cos \sqrt{\lambda}l_2 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение домножим на $\cos \sqrt{\lambda} l_1$, второе на $\sin \sqrt{\lambda} l_1$, затем суммируем оба уравнения:

$$-C_1 \sin \sqrt{\lambda} l_1 \cos \sqrt{\lambda} l_1 - C_3 \sin \sqrt{\lambda} l_2 \cos \sqrt{\lambda} l_1 = 0$$

$$C_1 \cos \sqrt{\lambda} l_1 \sin \sqrt{\lambda} l_1 - C_3 \cos \sqrt{\lambda} l_2 \sin \sqrt{\lambda} l_1 = 0.$$

Получим:

$$-C_3(\cos \sqrt{\lambda} l_2 \sin \sqrt{\lambda} l_1 + \sin \sqrt{\lambda} l_2 \cos \sqrt{\lambda} l_1) = 0.$$

Сворачиваем по тригонометрической формуле синуса суммы:

$$-C_3 \sin(l_1 + l_2) \sqrt{\lambda} l_1 = 0.$$

Так как $C_3 \neq 0$, находим значение λ_k :

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l_1 + l_2}\right)^2.$$

Полученное значение λ_k подставляем в общее решение уравнений:

$$X_k^1(x) = C_1 \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2} x, \quad X_k^2(x) = C_3 \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2} x$$

Так как $C_3 = C_1 \frac{\cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2} l_1}{\cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2} l_2}$, то

$$X_k^1 = C_1 \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2} x, \quad X_k^2 = C_1 \frac{\cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2} l_1}{\cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2} l_2} \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2} x.$$

Для того, чтобы найти C_1 найдем норму $X_k = (X_k^1, X_k^2)$.

$$\|X_k\|^2 = \int_0^{l_1} (X_k^1(x))^2 dx + \int_0^{l_2} (X_k^2(x))^2 dx = 1.$$

$$\begin{aligned} \|X_k\|^2 &= C_1^2 \int_0^{l_1} \cos^2 \frac{\pi k}{l_1 + l_2} x dx + C_1^2 \int_0^{l_2} \frac{\cos^2 \frac{\pi k}{l_1 + l_2} l_1}{\cos^2 \frac{\pi k}{l_1 + l_2} l_2} \cos^2 \frac{\pi k}{l_1 + l_2} x dx = \frac{C_1^2}{2} (x|_0^{l_1} + \\ &+ \sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2} x \frac{l_1 + l_2}{2\pi k} |_0^{l_1} + \frac{\cos^2 \frac{\pi k}{l_1 + l_2} l_1}{\cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2} l_2} [x|_0^{l_2} + \sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2} x \frac{l_1 + l_2}{2\pi k} |_0^{l_2}]) = \frac{C_1^2}{2} (l_1 + \frac{l_1 + l_2}{2\pi k} \sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2} l_1 + \\ &+ \frac{\cos^2 \frac{\pi k}{l_1 + l_2} l_1}{\cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2} l_2} [l_2 + \frac{l_1 + l_2}{2\pi k} \sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2} l_2]) = 1. \end{aligned}$$

Получаем, что:

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{(l_1 + \frac{l_1 + l_2}{2\pi k} \sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2} l_1 + \frac{\cos^2 \frac{\pi k}{l_1 + l_2} l_1}{\cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2} l_2} [l_2 + \frac{l_1 + l_2}{2\pi k} \sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2} l_2])}}.$$

В частном случае, когда $l_1 = l_2 = l$

$$\frac{C_1^2}{2} \left(l + \frac{1}{\pi k} \sin \pi k + \left(l + \frac{1}{\pi k} \sin \pi k \right) \right) = C_1^2 l = 1,$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{1}{l}}.$$

Подставим C_1 в $X_k^1(x)$, $X_k^2(x)$, получим собственные функции:

$$X_k^1(x) = \sqrt{\frac{1}{l}} \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2} x, \quad X_k^2(x) = \sqrt{\frac{1}{l}} \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2} x.$$

Пример 4.

Рассмотрим граф, состоящий из двух ребер, соединяющих три вершины (рис.4).

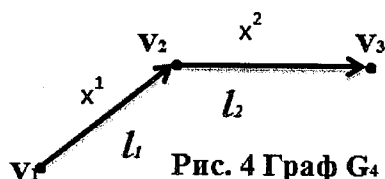


Рис. 4 Граф G_4

Задача Штурма – Лиувилля примет вид:

$$\begin{cases} (X^1)'' + \lambda X = 0, \\ (X^2)'' + \lambda X = 0, \\ (X^1)'(0) = 0, \\ (X^2)'(0) - (X^1)'(l_1) = 0, \\ X^1(l_1) = X^2(0), \\ (X^2)'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Для случая $\lambda > 0$ общее решение уравнений из системы (2.4) имеет вид:

$$\begin{cases} X^1 = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x, \\ X^2 = C_3 \cos \sqrt{\lambda} x + C_4 \sin \sqrt{\lambda} x. \end{cases}$$

Подставим его в граничные условия системы (2.4):

$$\begin{cases} C_4 + C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l_1 - C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l_1 = 0, \\ C_2 = 0, \\ -C_3\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l_2 + C_4\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l_2 = 0, \\ C_1\cos\sqrt{\lambda}l_1 = C_3. \end{cases}$$

Так как $C_2 = 0$, общее решение системы (2.4) имеет вид:

$$\begin{cases} C_4 + C_1\sin\sqrt{\lambda}l_1 = 0, \\ C_1\cos\sqrt{\lambda}l_1 = C_3, \\ C_4\cos\sqrt{\lambda}l_2 = C_3\sin\sqrt{\lambda}l_2. \end{cases}$$

Выразим константы C_3, C_4 через константу C_1 :

$$C_4 = -C_1\sin\sqrt{\lambda}l_1,$$

$$C_3 = C_1\cos\sqrt{\lambda}l_1.$$

Следовательно,

$$-C_1\sin\sqrt{\lambda}l_1\cos\sqrt{\lambda}l_2 - C_1\cos\sqrt{\lambda}l_1\sin\sqrt{\lambda}l_2 = 0,$$

$$C_1(\sin(l_1 + l_2)) = 0.$$

Так как $C_1 \neq 0$, найдем значение λ_k . Следовательно,

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l_1 + l_2}\right)^2,$$

$$C_4 = -C_1\sin\left(\frac{\pi k l_1}{l_1 + l_2}\right),$$

$$C_3 = C_1\cos\left(\frac{\pi k l_1}{l_1 + l_2}\right).$$

Общее решение уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} X_k^1(x) = C_1\cos\left(\frac{\pi k}{l_1 + l_2}\right)x, \\ X_k^2(x) = C_1\cos\left(\frac{\pi k l_1}{l_1 + l_2}\right)\cos\left(\frac{\pi k}{l_1 + l_2}\right)x - C_1\sin\left(\frac{\pi k l_1}{l_1 + l_2}\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l_1 + l_2}\right)x = C_1\cos(l_1 + x)\left(\frac{\pi k}{l_1 + l_2}\right). \end{cases}$$

Для того, чтобы найти C_1 найдем норму X_k .

$$\|X_k\|^2 = \int_0^{l_1} (X_k^1(x))^2 dx + \int_0^{l_2} (X_k^2(x))^2 dx = 1$$

$$\|X_k\|^2 = C_1^2 \int_0^{l_1} \cos^2\left(\frac{\pi k}{l_1 + l_2}\right)x dx + C_1^2 \int_0^{l_2} \cos^2(l_1 + x)\left(\frac{\pi k}{l_1 + l_2}\right) dx = \frac{C_1^2}{2} \left(\int_0^{l_1} (1 + \cos \frac{2\pi k}{l_1 + l_2} x) dx + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{l_2} (1 + \cos \frac{2\pi k}{l_1+l_2} (l_1 + x)) dx = \frac{C_1^2}{2} (x|_0^{l_1} + \sin \frac{2\pi k}{l_1+l_2} x \frac{l_1+l_2}{2\pi k} |_0^{l_1} + \\
& + x|_0^{l_2} + \sin \frac{2\pi k}{l_1+l_2} (l_1 + x) \frac{l_1+l_2}{2\pi k} |_0^{l_2}) = \frac{C_1^2}{2} l_1 + \frac{C_1^2}{2} \frac{l_1+l_2}{2\pi k} \sin l_1 + \frac{C_1^2}{2} l_2 - \frac{C_1^2}{2} \frac{l_1+l_2}{2\pi k} \sin l_1 = 1
\end{aligned}$$

Получаем, что:

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2}}.$$

Подставим значение C_1 в общее решение уравнений:

$$\begin{cases} X_k^1(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2}} \cos(\frac{\pi k}{l_1+l_2})x, \\ X_k^2(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2}} \cos(l_1 + x) (\frac{\pi k}{l_1+l_2}). \end{cases}$$

Пример 5.

Рассмотрим граф, состоящий из трех ребер длины l , соединяющих четыре вершины (рис.5):

Задача Штурма – Лиувилля примет вид:

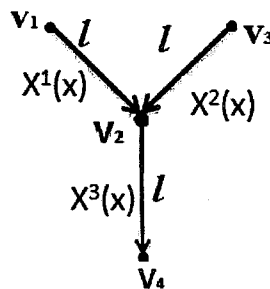


Рис. 5 Граф G_5

$$\left\{ \begin{array}{l} (X^1)'' + \lambda X = 0, \\ (X^2)'' + \lambda X = 0, \\ (X^3)'' + \lambda X = 0, \\ (X^1)'(0) = 0, \\ (X^2)'(0) + (X^3)'(0) - (X^1)'(l) = 0, \\ (X^2)'(l) = 0, \\ (X^3)'(l) = 0, \\ X^1(l) = X^2(0) = X^3(0). \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Для случая $\lambda > 0$ общее решение уравнений из системы (2.5) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_k^1(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_k^2(x) = C_3 \cos \sqrt{\lambda}x + C_4 \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_k^3(x) = C_5 \cos \sqrt{\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{\lambda}x. \end{array} \right.$$

Подставим его в граничные условия системы (2.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0, \\ C_4 + C_6 + C_1 \sin \sqrt{\lambda}l = 0, \\ -C_3 \sin \sqrt{\lambda}l + C_4 \cos \sqrt{\lambda}l = 0, \\ -C_5 \sin \sqrt{\lambda}l + C_6 \cos \sqrt{\lambda}l = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda}l = C_3 = C_5. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Так как $C_2 = 0$ и $C_1 \cos \sqrt{\lambda}l = C_3 = C_5$, система (2.6) принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_4 + C_6 + C_1 \sin \sqrt{\lambda}l = 0, \\ -C_1 \cos \sqrt{\lambda}l \sin \sqrt{\lambda}l + C_4 \cos \sqrt{\lambda}l = 0, \\ -C_1 \cos \sqrt{\lambda}l \sin \sqrt{\lambda}l + C_6 \cos \sqrt{\lambda}l = 0. \end{array} \right.$$

Из первой строчки системы видно, что $C_4 + C_6 = -C_1 \sin \sqrt{\lambda}l$, тогда:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \sqrt{\lambda}l(C_4 + C_6 + C_4) = 0, \\ \cos \sqrt{\lambda}l(C_4 + C_6 + C_4) = 0. \end{array} \right.$$

Рассмотрим два случая:

1 случай:

$\cos \sqrt{\lambda}l = 0$, тогда $\lambda_k = \left(\frac{\pi + \pi k}{l}\right)^2$. Система примет вид:

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_3 = 0, \\ C_5 = 0, \\ C_1 + C_4 + C_5 = 0. \end{cases}$$

Пусть $C_4 = -C_1$, $C_6 = 0$, тогда все функции выразим через константу C_1 :

$$X_k^1(x) = C_1 \cos \frac{\pi + \pi k}{l} x,$$

$$X_k^2(x) = -C_1 \sin \frac{\pi + \pi k}{l} x,$$

$$X_k^3(x) = 0.$$

Найдем норму собственной функции:

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l (X_k^1(x))^2 dx + \int_0^l (X_k^2(x))^2 dx = 1$$

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l (C_1 \cos \frac{\pi + \pi k}{l} x)^2 dx + \int_0^l (-C_1 \sin \frac{\pi + \pi k}{l} x)^2 dx = \frac{C_1^2}{2} \left(\int_0^l (1 + \cos \frac{2\pi + 2\pi k}{l} x) dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^l (1 - \cos \frac{2\pi + 2\pi k}{l} x) dx \right) = \frac{C_1^2}{2} \left(l + \sin \frac{2\pi + 2\pi k}{l} x \frac{l}{2\pi + 2\pi k} \Big|_0^l + l + \right.$$

$$\left. - \sin \frac{2\pi + 2\pi k}{l} x \frac{l}{2\pi + 2\pi k} \Big|_0^l \right) = \frac{(C_1)^2}{2} 2l = 1$$

Следовательно, $C_1 = \sqrt{\frac{1}{l}}$.

Тогда общее решение системы (2.5) имеет вид:

$$X_k^1(x) = \sqrt{\frac{1}{l}} \cos \frac{\pi + \pi k}{l} x,$$

$$X_k^2(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi + \pi k}{l} x,$$

$$X_k^3(x) = 0.$$

2 случай:

$\cos \lambda l \neq 0$

$$\begin{cases} 2C_4 + C_6 = 0, \\ 2C_6 + C_4 = 0. \end{cases}$$

Из системы следует, что $C_4 = C_6 = 0$

Так как $C_1 \cos \sqrt{\lambda}l = C_3 = C_5$, подставим константы C_3, C_5 в систему (2.6).

$$\begin{cases} C_1 \sin \sqrt{\lambda}l = 0, \\ -C_1 \cos \sqrt{\lambda}l \sin \sqrt{\lambda}l = 0, \\ -C_1 \cos \sqrt{\lambda}l \sin \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

Т.к. $C_1 \neq 0$, находим λ_k :

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2.$$

Пусть $C_1 = C_3 = C_5$, а $C_4 = C_6 = 0$, тогда:

$$X_k^1(x) = C_1 \cos \frac{\pi k}{l}x, \quad X_k^2(x) = C_1 \cos \frac{\pi k}{l}x, \quad X_k^3(x) = C_1 \cos \frac{\pi k}{l}x.$$

Найдем норму X_k :

$$\|X_k\|^2 = 3 \int_0^l (C_1 \cos \frac{\pi k}{l}x)^2 dx = 1$$

$$\|X_k\|^2 = \frac{3C_1^2}{2} \int_0^l (1 + \cos \frac{2\pi k}{l}x) dx = \frac{3C_1^2}{2} (l + \sin \frac{2\pi k}{l}x \frac{l}{2\pi k} \Big|_0^l) = 1, \text{ следовательно}$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{3l}}.$$

Общее решение системы (2.6) имеет вид:

$$X_k^1(x) = \sqrt{\frac{2}{3l}} \cos \frac{\pi k}{l}x, \quad X_k^2(x) = \sqrt{\frac{2}{3l}} \cos \frac{\pi k}{l}x, \quad X_k^3(x) = \sqrt{\frac{2}{3l}} \cos \frac{\pi k}{l}x.$$

Пример 6.

Рассмотрим граф, имеющий одно циклическое ребро длины l (рис.6):

Задача Штурма – Лиувилля для данного графа.

$$\begin{cases} (X)'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l), \\ X'(0) - X'(l) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

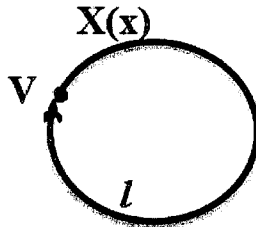


Рис. 6 Граф G_6

Для случая $\lambda > 0$ Общее решение уравнения системы (2.7) имеет вид:

$$X_k(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Подставим его в граничные условия в системы (2.7):

$$\begin{cases} -C_1 \sin \sqrt{\lambda}0 + C_2 \cos \sqrt{\lambda}0 + C_1 \sin \sqrt{\lambda}l - C_2 \cos \sqrt{\lambda}l = 0, \\ C_1 = C_1 \cos \sqrt{\lambda}l + C_2 \sin \sqrt{\lambda}l. \end{cases}$$

После преобразования получаем:

$$\begin{cases} C_2 + C_1 \sin \sqrt{\lambda}l - C_2 \cos \sqrt{\lambda}l = 0, \\ C_1 = C_1 \cos \sqrt{\lambda}l + C_2 \sin \sqrt{\lambda}l. \end{cases}$$

Домножим первое уравнение на $\cos \sqrt{\lambda}l$, а второе на $\sin \sqrt{\lambda}l$ и сложим:

$$2C_2 \cos \sqrt{\lambda}l = 2C_2$$

$$2C_2(\cos \sqrt{\lambda}l - 1) = 0, \text{ т.к. } C_2 \neq 0, \text{ тогда } \cos \sqrt{\lambda}l = 1.$$

$$\text{Следовательно, } \lambda_k = \left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2,$$

$$X_k(x) = C_1 \cos \frac{2\pi k}{l}x + C_2 \sin \frac{2\pi k}{l}x.$$

Допустим, что $C_2 = \alpha$, тогда $X_k = C_1 \cos \frac{2\pi k}{l}x + \alpha \sin \frac{2\pi k}{l}x$.

Для того, чтобы найти C_1 , посчитаем норму.

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l (C_1 \cos \frac{2\pi k}{l}x + \alpha \sin \frac{2\pi k}{l}x)^2 dx = 1$$

$$\begin{aligned}
\|X_k\|^2 &= \int_0^l (C_1^2 \cos^2 \frac{2\pi k}{l}x + 2C_1\alpha \cos \frac{2\pi k}{l}x \sin \frac{2\pi k}{l}x + \alpha^2 \sin^2 \frac{2\pi k}{l}x) dx = \\
&= \frac{C_1^2}{2} \int_0^l (1 + \cos \frac{4\pi k}{l}x) dx + C_1\alpha \int_0^l \sin \frac{4\pi k}{l}x dx + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^l (1 - \sin \frac{4\pi k}{l}x) dx = \\
&= \frac{C_1^2}{2} (l + \sin \frac{4\pi k}{l}x \frac{l}{4\pi k} \Big|_0^l) + C_1\alpha (-\cos \frac{4\pi k}{l}x \frac{l}{4\pi k} \Big|_0^l) + \frac{\alpha^2}{2} (l + \cos \frac{4\pi k}{l}x \frac{l}{4\pi k} \Big|_0^l) = 1 \\
\frac{C_1^2}{2}l + C_1\alpha(-\frac{l}{4\pi k} + \frac{l}{4\pi k}) + \frac{\alpha^2}{2}(l + \frac{l}{4\pi k} - \frac{l}{4\pi k}) &= 1 \\
\frac{C_1^2}{2}l + \frac{\alpha^2}{2}l &= 1, \text{ следовательно} \\
C_1 &= \sqrt{\frac{2}{l} - \alpha^2}.
\end{aligned}$$

Подставим значение C_1 в общее решение системы (2.7):

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l} - \alpha^2} \cos \frac{2\pi k}{l}x + \sqrt{\frac{2}{l} - \alpha^2} \sin \frac{2\pi k}{l}x.$$

Пример 7.

Рассмотрим граф, состоящий из n ребер, соединяющий $n + 1$ вершину (рис.7)

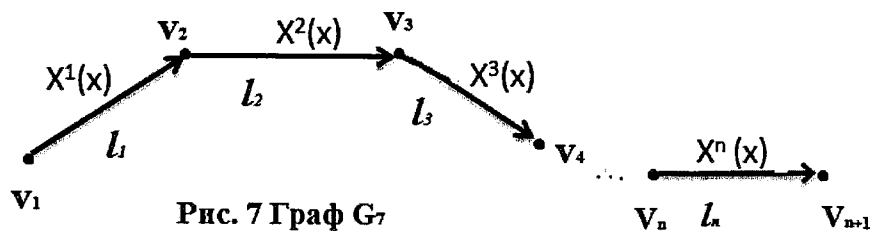


Рис. 7 Граф G_7

Задача Штурма – Лиувилля для данного графа:

$$\left\{ \begin{array}{l} (X^1)'' + \lambda X = 0, \\ (X^2)'' + \lambda X = 0, \\ \dots \\ (X^n)'' + \lambda X = 0, \\ (X^1)'(0) = 0, \\ (X^2)'(0) - (X^1)'(l_1) = 0, \\ (X^3)'(0) - (X^2)'(l_2) = 0, \\ \dots \\ (X^n)'(0) - (X^{n-1})'(l_{n-1}) = 0, \\ (X^n)'(l_n) = 0, \\ X^1(l_1) = X^2(0), \\ X^2(l_2) = X^3(0), \\ \dots \\ X^{n-1}(l_{n-1}) = X^n(0). \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Для случая $\lambda > 0$ общее решение уравнений из системы (2.8) имеет вид:

$$X_k^1(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

$$X_k^2(x) = C_3 \cos \sqrt{\lambda}x + C_4 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

$$X_k^3(x) = C_5 \cos \sqrt{\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

...

$$X_k^{n-1}(x) = C_{n-3} \cos \sqrt{\lambda}x + C_{n-4} \sin \sqrt{\lambda}x,$$

$$X_k^n(x) = C_{n-6} \cos \sqrt{\lambda}x + C_{n-7} \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Подставим его в граничные условия системы (2.8):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0, \\ C_4 + C_1 \sin \sqrt{\lambda} l_1 = 0, \\ C_6 + C_3 \sin \sqrt{\lambda} l_2 - C_4 \cos \sqrt{\lambda} l_2 = 0, \\ -C_5 \sin \sqrt{\lambda} l_3 + C_6 \cos \sqrt{\lambda} l_3 = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda} l_1 = C_3, \\ C_3 \cos \sqrt{\lambda} l_2 + C_4 \sin \sqrt{\lambda} l_2 = C_5, \\ \dots \\ C_{n-5} + C_{n-3} \sin \sqrt{\lambda} l_{n-1} - C_{n-4} \cos \sqrt{\lambda} l_{n-1} = 0, \\ -C_{n-5} \sin \sqrt{\lambda} l_n + C_{n-6} \cos \sqrt{\lambda} l_n = 0, \\ C_{n-3} \cos \sqrt{\lambda} l_{n-1} + C_{n-6} \sin \sqrt{\lambda} l_{n-1} = C_{n-5}. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Выразим решения системы (2.9) через константу C_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0, \\ C_3 = C_1 \cos \sqrt{\lambda} l_1, \\ C_4 = -C_1 \sin \sqrt{\lambda} l_1, \\ C_5 = C_1 \cos \sqrt{\lambda} (l_1 + l_2), \\ C_6 = -C_1 \sin \sqrt{\lambda} (l_1 + l_2), \\ \dots \\ C_{2n} = -C_1 \sin \sqrt{\lambda} (l_1 + \dots + l_{n-1}), \\ C_{2n-1} = C_1 \cos \sqrt{\lambda} (l_1 + \dots + l_{n-1}). \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Можно сделать вывод, что:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{4n} = -C_1 \sin \sqrt{\lambda} (l_1 + \dots + l_{n-1}), \\ C_{4n+1} = C_1 \cos \sqrt{\lambda} (l_1 + \dots + l_{n-1}), \\ C_{4n+2} = -C_1 \sin \sqrt{\lambda} (l_1 + \dots + l_{n-2}), \\ C_{4n+3} = C_1 \cos \sqrt{\lambda} (l_1 + \dots + l_{n-1}). \end{array} \right.$$

Найдем собственные значения λ_k :

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} \right)^2.$$

Подставим собственные значения в общее решение уравнений:

$$X_k^1(x) = C_1 \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x,$$

$$X_k^2(x) = C_1 \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + x),$$

$$X_k^3(x) = C_1 \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + x),$$

...

$$X_k^{n-1}(x) = C_1 \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-2} + x),$$

$$X_k^n(x) = C_1 \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-2} + x).$$

Для того, чтобы найти константу C_1 , посчитаем норму $\|X_k\| = \|(X_k^1, X_k^2, \dots, X_k^n)\|$

и воспользуемся условием нормировки:

$$\|X_k\|^2 = \int_0^{l_1} (X_k^1(x))^2 dx + \int_0^{l_2} (X_k^2(x))^2 dx + \int_0^{l_{n-1}} (X_k^{n-1}(x))^2 dx + \int_0^{l_n} (X_k^n(x))^2 dx = 1$$

Получим

$$\begin{aligned} \|X_k\|^2 &= \frac{C_1^2}{2} \left(\int_0^{l_1} \left(1 + \cos \frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x\right) dx + \int_0^{l_2} \left(1 + \cos \frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + x)\right) dx + \dots + \right. \\ &+ \int_0^{l_{n-1}} \left(1 + \cos \frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-2} + x)\right) dx + \left. \int_0^{l_n} \left(1 + \cos \frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + \right. \right. \\ &\left. \left. l_2 + \dots + l_{n-1} + x)\right) dx \right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \frac{C_1^2}{2} &\left(l_1 + \sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{2\pi k} \Big|_0^{l_1} + l_2 + \sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + x) \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{2\pi k} \Big|_0^{l_2} + \dots + \right. \\ &\dots + l_{n-1} + \sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + \dots + l_{n-1} + x) \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{2\pi k} \Big|_0^{l_{n-1}} + l_n + \sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + \\ &\left. \dots + l_{n-1} + x) \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{2\pi k} \Big|_0^{l_n} \right) = 1 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{C_1^2}{2} &\left(l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{2\pi k} \left(\sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x \Big|_0^{l_1} + \sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + x) \Big|_0^{l_2} + \dots + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-2} + x) \Big|_0^{l_{n-1}} + \sin \frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + \dots + l_{n-1} + x) \Big|_0^{l_n} \right) \right) = 1 \end{aligned}$$

Так как $\frac{C_1^2}{2} (l_1 + l_2 + \dots + l_n) \left(1 + \frac{1}{2\pi k} 0\right) = 1$, то

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}}.$$

Подставим C_1 в общее решение уравнений:

$$X_k^1(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x,$$

$$X_k^2(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + x),$$

$$X_k^3(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + x),$$

...

$$X_k^{n-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-2} + x),$$

$$X_k^n(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-2} + x).$$

3. Метод Фурье для математической модели Буссинеска – Лява на геометрическом графе

Поставим основную задачу.

Найти решение уравнения

$$(\lambda - \Delta)u_{jtt} = \alpha(\Delta - \lambda')u_{jt} + \beta(\Delta - \lambda'')u_j \quad (3.1)$$

$$\Delta u = u_{xx}$$

$$\lambda u_{jtt} - u_{jxxtt} = \alpha u_{jxxt} - \alpha \lambda' u_{jt} + \beta u_{jxx} - \beta \lambda'' u_j$$

на геометрическом графе G , не равное тождественно нулю, удовлетворяющее условиям

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_m \in E^\omega(V_i)} d_m u_{mx}(l_m, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \quad (3.3)$$

и начальными условиями

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (3.4)$$

Будем искать решение (3.1) – (3.4) в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T^k(t) X^k(x), \quad (3.5)$$

где $X^k(x)$ – ортонормированные собственные функции оператора $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, то есть удовлетворяют уравнению $(X^k)'' + \lambda_k X^k = 0$ и условиям (3.2), (3.3), а $T^k(t)$ – функции только переменной t . Уравнение (3.1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения.

Подставляя предполагаемую форму решения (3.5) в уравнение (3.1), получим

$$\begin{aligned} & \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (T^k)''(t) X^k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (T^k)''(t) \lambda_k X_k(x) = -\alpha \sum_{k=1}^{\infty} (T^k)'(t) \lambda_k X^k(x) - \\ & - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (T^k)'(t) \lambda' X^k(x) - \beta \sum_{k=1}^{\infty} T^k(t) \lambda_k X^k(x) - \beta \sum_{k=1}^{\infty} T^k(t) \lambda'' X^k(x) \\ & \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (T^k)''(t) X^k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (T^k)''(t) \lambda_k X_k(x) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (T^k)'(t) \lambda_k X^k(x) + \\ & + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (T^k)'(t) \lambda' X^k(x) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} T^k(t) \lambda_k X^k(x) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} T^k(t) \lambda'' X^k(x) = 0 \\ & \sum_{k=1}^{\infty} X^k(x) (\lambda (T^k)''(t) + (T^k)''(t) \lambda_k + \alpha (T^k)'(t) \lambda_k + \alpha (T^k)'(t) \lambda' + \beta T^k(t) \lambda_k + \\ & + \beta T^k(t) \lambda'') = 0 \end{aligned}$$

Умножим получившееся уравнение на $X^k(x)$, $k = 0, 1, \dots$ скалярно в $L_2(G)$ и получим

$$\lambda (T^k)''(t) + (T^k)''(t) \lambda_k + \alpha (T^k)'(t) \lambda_k + \alpha (T^k)'(t) \lambda' + \beta T^k(t) \lambda_k + \beta T^k(t) \lambda'' = 0$$

или

$$(\lambda + \lambda_k) (T^k)''(t) + \alpha (\lambda_k + \lambda') (T^k)'(t) + \beta (\lambda_k + \lambda'') T^k(t) = 0. \quad (3.6)$$

Составим характеристическое уравнение для этого дифференциального уравнения

$$(\lambda + \lambda_k) \mu_k^2 + \alpha (\lambda_k + \lambda') \mu_k + \beta (\lambda_k + \lambda'') = 0.$$

Найдем дискриминант характеристического уравнения:

$$D = \alpha^2 (\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta (\lambda + \lambda_k) (\lambda_k + \lambda'')$$

Рассмотрим два случая:

1) Если $(\lambda + \lambda_k) \neq 0$. Найдем нетривиальные решения при разных значениях дискриминанта.

а) Пусть $D = 0$. $\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') = 0$. Тогда $\mu_k^{1,2} = \frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)}$.
Корень кратности 2. Таким образом

$$T^k = A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}.$$

б) Пусть $D > 0$. Тогда

$$\mu_k^{1,2} = \frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') \pm \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)}.$$

Таким образом

$$T^k = A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}.$$

в) Пусть $D < 0$. Тогда

$$\mu_k^{1,2} = \frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') \pm i\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)}$$

корни комплексно сопряженные. Таким образом

$$T^k = \left(A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} \right) e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}.$$

2) Если $(\lambda + \lambda_k) = 0$, тогда $\lambda_k = -\lambda$.

Рассмотрим два случая:

а) Если $\lambda_k + \lambda' = 0$, тогда $\lambda_k = -\lambda' \Rightarrow \lambda = \lambda'$, следовательно решений нет.

T_k - отсутствует.

б) Если $\lambda_k + \lambda' \neq 0 \Rightarrow \lambda_k \neq -\lambda'$. Следовательно, характеристический многочлен:

$$\begin{aligned} \mu_k \alpha(\lambda_k + \lambda') + \beta(\lambda_k + \lambda'') &= 0, \\ \mu_k &= \frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$T^k = A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t}$$

Возвращаясь к задаче (3.1) – (3.3), получаем что функции:

$$\begin{aligned} u_k(x, t) &= (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X^k, \\ u_k(x, t) &= (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X^k, \\ u_k(x, t) &= (A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)}) \times \\ &\times e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} X^k, \\ u_k(x, t) &= A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t} X^k. \end{aligned}$$

являются частными решениями (3.1), которые удовлетворяют граничным условиям (3.2), (3.3). Эти решения могут удовлетворять начальным условиям (3.4) исходной задачи только для частных случаев начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

В силу линейности и однородности уравнения (3.1) сумма частных решений

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X^k + \\ &+ \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X^k \\ &+ \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)}) \times \\ &\times e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} X^k + \sum_{k:\lambda_k = -\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} (A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t}) X^k. \end{aligned} \quad (3.7)$$

также удовлетворяет данному уравнению и граничным условиям (3.2), (3.3).

Начальные условия позволяют определить константы A_k, B_k . Нужно, чтобы функция (3.7) удовлетворяла условиям (3.4):

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, 0) = \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} A_k X^k + \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k + B_k) X^k + \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} A_k X^k +$$

$$\sum_{k:\lambda_k=-\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} A_k X^k = \varphi(x),$$

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t}(x, 0) = \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (-A_k \frac{\alpha(\lambda_k+\lambda')}{2(\lambda+\lambda_k)} + B_k) X^k + \\ &+ \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k \frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} + B_k (\frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')}{2(\lambda+\lambda_k)} - \\ &- \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)}) X_k + \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} (B_k \frac{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'') - \alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}}{2(\lambda+\lambda_k)} + \\ &A_k \frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')}{2(\lambda_k+\lambda)}) X^k + \sum_{k:\lambda_k=-\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} (-A_k \frac{\beta(\lambda_k+\lambda'')}{\alpha(\lambda_k+\lambda')}) X^k = \psi(x). \end{aligned}$$

С другой стороны разложим функции $\varphi(x), \psi(x)$ в ряды по собственным функциям $X^k(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s X^s, \varphi_s = \langle \varphi, X^s \rangle_{L_2(G)},$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) X^k, \psi_k = \langle \psi, X^k \rangle_{L_2(G)}.$$

Рассмотрим 5 случаев:

1) $k : \lambda_k \neq -\lambda, D = 0$, тогда

$$\begin{cases} A_k = \varphi_k, \\ A_k \frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')}{2(\lambda_k+\lambda)} + B_k = \psi_k. \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} A_k = \varphi_k, \\ B_k = \psi_k - \varphi_k \frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')}{2(\lambda_k+\lambda)}. \end{cases}$$

2) $k : \lambda_k \neq -\lambda, D > 0$, тогда

$$\begin{cases} A_k + B_k = \varphi_k, \\ A_k \frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} + B_k \frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} = \psi_k. \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} A_k = \varphi_k - \left(\frac{\varphi_k (-\alpha(\lambda_k+\lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}) - 2(\lambda_k)\psi_k}{2\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}} \right), \\ B_k = \left(\frac{\varphi_k (-\alpha(\lambda_k+\lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}) - 2(\lambda_k)\psi_k}{2\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}} \right). \end{cases}$$

3) $k : \lambda_k \neq -\lambda, D < 0$, тогда

$$\begin{cases} A_k = \varphi_k, \\ B_k \frac{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}}{2(\lambda+\lambda_k)} + A_k \frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')}{2(\lambda_k+\lambda)} = \psi_k. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} A_k = \varphi_k, \\ B_k = \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda_k+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}}. \end{cases}$$

4) $k : \lambda_k = -\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'$, тогда

$$\begin{cases} A_k = \varphi_k, \\ A_k \frac{-\beta(\lambda_k+\lambda'')}{\alpha(\lambda_k+\lambda')} = \psi_k, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} A_k = \varphi_k, \\ A_k = \frac{-\alpha\psi_k(\lambda_k+\lambda')}{\beta(\lambda_k+\lambda'')}. \end{cases}$$

То есть для существования решения необходимо, чтобы $\varphi_k = \frac{-\alpha\psi_k(\lambda_k+\lambda')}{\beta(\lambda_k+\lambda'')}$.

5) $k : \lambda_k = -\lambda = -\lambda'$, тогда $\varphi_k = \psi_k = 0$.

4. Обоснование метода Фурье для математической модели

Буссинеска – Лява на геометрическом графе

Для начала нужно убедиться в непрерывности функции

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')}{2(\lambda+\lambda_k)}t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')}{2(\lambda+\lambda_k)}t}) X^k + \\ & + \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')+\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)}t} + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')-\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)}t}) X^k \\ & + \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)}) \times \\ & \times e^{\frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')}{2(\lambda+\lambda_k)}t} X^k + \sum_{k:\lambda_k=-\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k+\lambda'')}{\alpha(\lambda_k+\lambda')}t} X^k. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Так как первая, вторая и четвертая суммы представляют собой конечное число слагаемых, то для исследования непрерывности $u(x, t)$ достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$v(x, t) = \sum_{k: D < 0, \lambda_k \neq -\lambda} \left((A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t + \right. \\ \left. + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t \right) e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} X^k, \quad (4.2)$$

из чего будет следовать, что $u(x, t)$ непрерывно примыкает к своим начальным и граничным условиям. Так как члены ряда (3.7) – непрерывные функции, то из равномерной сходимости ряда следует его непрерывность. Пользуясь неравенством

$$|u_k(x, t)| \leq |A_k| + |B_k|,$$

закключаем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(|\varphi_k| + \frac{2|\psi_k|(\lambda + \lambda_k) + \alpha|\varphi_k|(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \right) \quad (4.3)$$

является мажорантным для ряда (4.2). Если мажорантный ряд (4.3) сходится, то ряд (4.2) сходится равномерно, т.е. функция $u(x, t)$ непрерывна. Чтобы убедиться в том, что $u_t(x, t)$ непрерывно примыкает к своим начальным значениям, надо доказать непрерывность этой функции, для чего достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$u_t(x, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\varphi_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t + \right. \\ \left. + \left(\frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \right) \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t \right) \times \\ \times \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} X^k \quad (4.4)$$

или сходимость мажорантного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(|\varphi_k| + \frac{2|\psi_k|(\lambda + \lambda_k) + \alpha|\varphi_k|(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \right) \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} \quad (4.5)$$

Наконец, чтобы убедиться в том, что функция $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению, т.е. применим обобщенный принцип суперпозиции, достаточно доказать возможность двукратного почленного дифференцирования ряда для $v(x, t)$, для чего, в свою очередь достаточно показать равномерную сходимость рядов

$$v_{tt}(x, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}, \quad (4.6)$$

$$v_{xx}(x, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}, \quad (4.7)$$

$$v_{xxtt}(x, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^4 v_k}{\partial x^2 \partial t^2}. \quad (4.8)$$

Исследуем равномерную сходимость рядов (4.6) – (4.7) для одностороннего графа из примера 1 параграфа 2. В этом случае

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t + \right. \\ &+ \left. \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t \right) \cos \frac{\pi k}{l} x, \\ v_{tt}(x, t) &\sim -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t + \right. \\ &+ \left. \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t \right) \times \\ &\times \cos \frac{\pi k}{l} x \frac{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}{4(\lambda + \lambda_k)}, \\ v_{xx}(x, t) &\sim -\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{(\pi k)^2}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x, \\
v_{xxtt} \sim & \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{(\pi k)^2}{l^2} \frac{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}{4(\lambda+\lambda_k)} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t + \\
& + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x,
\end{aligned}$$

которым с точностью до множителей пропорциональности соответствует мажорантный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|). \quad (4.9)$$

Наша задача сводится к доказательству сходимости рядов

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} k^n |\varphi_k| (n = 0, 1, 2), \\
& \sum_{k=1}^{\infty} k^n |\psi_k| (n = 0, 1, 2). \quad (4.10)
\end{aligned}$$

С этой целью мы используем известные свойства рядов Фурье. Если периодическая с периодом $2l$ функция $F(x)$ имеет n непрерывных производных, а $(n+1)$ -я производная ее кусочно непрерывна, то числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n (|A_k| + |B_k|), \quad (4.11)$$

где A_k и B_k – коэффициенты Фурье, сходится. Если речь идет о разложении в ряд по $\cos \frac{\pi k}{l} x$ функции $f(x)$, заданной только в промежутке $(0, l)$, то надо, чтобы предшествующие требования были выполнены для функции $F(x)$, получающейся при четном продолжении $f(x)$. Непрерывность функции при $x = 0, x = l$ получается автоматически при четном продолжении. Для непрерывности $F'(x)$ необходимо, чтобы $f'(0) = 0$, так как в противном случае при четном продолжении получится разрыв в точке $x = 0$; аналогично этому в точке $x = l$ должно быть $f'(l) = 0$, так как продолженная функция непрерывна и периодична с периодом $2l$. Вообще

для непрерывности нечетных производных продолженной функции надо потребовать, чтобы

$$f^{(2n+1)}(0) = f^{(2n+1)}(l) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.12)$$

Непрерывность четных производных имеет место без дополнительных требований. Итак, для сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n |\varphi_k|, \quad (n = 0, 1, 2).$$

достаточно потребовать, чтобы начальное отклонение φ_k удовлетворяло следующим требованиям: Производные функции φ_k до 2-го порядка включительно непрерывны, третья производная функции φ_k кусочно-непрерывна и, кроме того,

$$\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0. \quad (4.13)$$

Для сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n |\psi_k|, \quad (n = 0, 1, 2).$$

на $\psi(x)$ необходимо наложить следующие требования:

Производные функции ψ_k до 2-го порядка включительно непрерывны, третья производная функция ψ_k кусочно-непрерывна и, кроме того,

$$\psi'(0) = \psi'(l) = 0. \quad (4.14)$$

Таким образом, доказана, следующая теорема.

Теорема 3. Пусть производные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ до 2-го порядка включительно непрерывны, а третьи производные функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ кусочно-непрерывны и, кроме того,

$$\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(l) = 0,$$

$$\langle \varphi, X^k \rangle = \langle \psi, X^k \rangle = 0, \text{ если } \lambda_k = -\lambda = -\lambda',$$

$$\langle \varphi, X^k \rangle = \frac{-\alpha \langle \psi, X^k \rangle (\lambda_k + \lambda')}{\beta(\lambda_k + \lambda'')}, \text{ если } \lambda_k = -\lambda \neq -\lambda'.$$

Тогда существует единственное решение задачи (3.1) – (3.4) для одностороннего графа G_1 из примера 1 параграфа 2 представимое в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_1^k +$$

$$+ \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_1^k +$$

$$+ \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} ((A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)}) \times$$

$$\times e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_1^k + \sum_{k:\lambda_k = -\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} (A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t}) X_1^k,$$

$$\text{где } X_1^k = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi k}{l} x,$$

$$\lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2.$$

Теперь исследуем равномерную сходимость рядов (4.6) – (4.8) для одноциклического графа G_6 из примера 6 параграфа 2. В этом случае

$$v_t(x, t) = \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (-\sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) +$$

$$+ \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) (\sqrt{\frac{2}{l}} - \alpha^2 \cos \frac{2\pi k}{l} x +$$

$$\alpha \sin \frac{2\pi k}{l} x),$$

продифференцируем дважды по t

$$v_{tt}(x, t) = -(\frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)})^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) +$$

$$+ \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) (\sqrt{\frac{2}{l}} - \alpha^2 \cos \frac{2\pi k}{l} x +$$

$$\alpha \sin \frac{2\pi k}{l} x),$$

продифференцируем по x

$$v_x(x, t) = (\frac{2\pi k}{l}) \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) +$$

$$+ \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) (\sqrt{\frac{2}{l}} - \alpha^2 (-\sin \frac{2\pi k}{l} x) +$$

$$\alpha \cos \frac{2\pi k}{l} x),$$

продифференцируем дважды по x

$$v_{xx}(x, t) = -\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \left(\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t \right) \left(\sqrt{\frac{2}{l}} - \alpha^2 \left(\cos \frac{2\pi k}{l} x \right) + \right. \\ \left. \alpha \sin \frac{2\pi k}{l} x \right),$$

найдем смешанную производную

$$v_{xxtt}(x, t) = \left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2 \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \left(\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t \right) \left(\sqrt{\frac{2}{l}} - \alpha^2 \left(\cos \frac{2\pi k}{l} x \right) + \right. \\ \left. \alpha \sin \frac{2\pi k}{l} x \right).$$

Полученные ряды мажорируются, с точностью до константы, рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Для сходимости этого ряда $|\varphi_k|$ и $|\psi_k|$ должны вести себя, по меньшей мере, как $k^{-(3+\gamma)}$, где $\gamma > 0$. Следовательно, выполнения соотношений $|\varphi_k| \sim k^{-(3+\gamma)}$ и $|\psi_k| \sim k^{-(3+\gamma)}$ надо добиться за счет условий на функции φ_k и ψ_k .

Рассмотрим

$$\varphi_k = \langle \varphi, X^k \rangle = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x) X^k(x) dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x) \left(\sqrt{\frac{2}{l}} - \alpha^2 \cos \frac{2\pi k}{l} x + \alpha \sin \frac{2\pi k}{l} x \right) dx = \\ = \int_0^l \varphi(x) \sqrt{\frac{2}{l}} - \alpha^2 \cos \frac{2\pi k}{l} x dx + \int_0^l \alpha \sin \frac{2\pi k}{l} x dx = \sqrt{\frac{2}{l}} - \alpha^2 \varphi(x) \sin \frac{2\pi k}{l} x \Big|_0^l - \\ - \sqrt{\frac{2}{l}} - \alpha^2 \frac{l}{2\pi k} \int_0^l \varphi'(x) \sin \frac{2\pi k}{l} x dx - \cos \frac{2\pi k}{l} x \frac{l}{2\pi k} \varphi(x) \alpha \Big|_0^l + \alpha \frac{l}{2\pi k} \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{2\pi k}{l} x dx.$$

Так как внеинтегральный член мешает получению упомянутых соотношений, то, потребовав от $\varphi(x)$ выполнение условий

$$\varphi(l) = \varphi(0) = 0 \tag{4.15}$$

и производя еще раз интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \sqrt{\frac{2}{l} - \alpha^2} \left(\frac{l}{2\pi k}\right)^2 \varphi'(x) \cos \frac{2\pi k}{l} x \Big|_0^l - \sqrt{\frac{2}{l} - \alpha^2} \left(\frac{l}{2\pi k}\right)^2 \int_0^l \varphi''(x) \cos \frac{2\pi k}{l} x dx + \\ &+ \alpha \left(\frac{l}{2\pi k}\right)^2 \varphi'(x) \sin \frac{2\pi k}{l} x \Big|_0^l - \alpha \left(\frac{l}{2\pi k}\right)^2 \int_0^l \varphi'(x) \sin \frac{2\pi k}{l} x dx = -\left(\frac{l}{2\pi k}\right)^3 \sqrt{\frac{2}{l} - \alpha^2} \varphi''(x) \sin \frac{2\pi k}{l} x \Big|_0^l \\ &+ \left(\frac{l}{2\pi k}\right)^3 \sqrt{\frac{2}{l} - \alpha^2} \int_0^l \varphi'''(x) \sin \frac{2\pi k}{l} x dx + \alpha \left(\frac{l}{2\pi k}\right)^3 \varphi''(x) \cos \frac{2\pi k}{l} x \Big|_0^l - \\ &- \alpha \left(\frac{l}{2\pi k}\right)^3 \int_0^l \varphi'''(x) \cos \frac{2\pi k}{l} x dx = \left(\frac{l}{2\pi k}\right)^3 \varphi_k^{(3)}, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l} - \alpha^2} \int_0^l \varphi'''(x) \sin \frac{2\pi k}{l} x dx - \alpha \int_0^l \varphi'''(x) \cos \frac{2\pi k}{l} x dx.$$

Получаем что

$$\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0, \quad \varphi''(l) = \varphi''(0) = 0. \quad (4.16)$$

Аналогично получается и для ψ_k .

$$\psi_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l} - \alpha^2} \int_0^l \psi'''(x) \sin \frac{2\pi k}{l} x dx - \alpha \int_0^l \psi'''(x) \cos \frac{2\pi k}{l} x dx.$$

Таким образом, при выполнении условий (4.15) и (4.16) на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ мы достигаем поставленной цели. Так как для любых чисел $a > 0$, $k > 0$ справедливо равенство

$$\frac{a}{k} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + a^2 \right), \quad (4.17)$$

то требуя кусочной непрерывности от третьей производной функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а также, используя равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\int_0^l \varphi^2(x) dx \right)$$

для этих функций, можно убедиться в сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(3)}(x)|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(3)}(x)|^2.$$

Отсюда, и из (4.10) следует сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(3)}(x)|^2}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_k^{(3)}(x)|^2}{k},$$

а следовательно, сходимость и ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Таким образом, мы выяснили условия на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, при которых произведенные нами операции при решении задачи методом Фурье являются законными и функция $u(x, t)$, определяемая равенством (3.6), будет решением задачи (3.1) – (3.4).

Теорема 4. Пусть производные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ до 2-го порядка включительно непрерывны, а третьи производные функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ кусочно-непрерывны и, кроме того,

$$\varphi(l) = \varphi(0) = 0,$$

$$\varphi'(l) = \varphi'(0) = 0,$$

$$\varphi''(l) = \varphi''(0) = 0,$$

$$\psi(l) = \psi(0) = 0,$$

$$\psi'(l) = \psi'(0) = 0,$$

$$\psi''(l) = \psi''(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi, X^k \rangle = \langle \psi, X^k \rangle = 0, \text{ если } \lambda_k = -\lambda = -\lambda', \\ \langle \varphi, X^k \rangle = \frac{-\alpha \langle \psi, X^k \rangle (\lambda_k + \lambda')}{\beta(\lambda_k + \lambda'')}, \text{ если } \lambda_k = -\lambda \neq -\lambda'. \end{aligned}$$

Тогда существует единственное решение задачи (3.1) – (3.4) для одноциклического графа, представимое в виде:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X^k + \\
 & + \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X^k + \\
 & + \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} ((A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)}) \times \\
 & \times e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X^k + \sum_{k:\lambda_k = -\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} (A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t}) X^k,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 X^k(x) &= \sqrt{\frac{2}{l} - \alpha^2} \cos \frac{2\pi k}{l} x + \alpha \sin \frac{2\pi k}{l} x, \\
 \lambda_k &= \left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2.
 \end{aligned}$$

А теперь, аналогично исследуем равномерную сходимость рядов (4.6) – (4.8) для трехреберного графа G_5 из примера 5 параграфа 2. В этом случае

$$\begin{aligned}
 v^1(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{3l}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) + \\
 & + \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x, \\
 v^2(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{3l}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) + \\
 & + \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x, \\
 v^3(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{3l}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) + \\
 & + \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x.
 \end{aligned}$$

Продифференцируем дважды по t :

$$\begin{aligned}
 v_{tt}^1(x, t) &= -\left(\frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{3l}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) + \\
 & + \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x,
 \end{aligned}$$

Полученные ряды мажорируются, с точностью до константы, рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Для сходимости этого ряда $|\varphi_k|$ и $|\psi_k|$ должны вести себя, по меньшей мере, как $k^{-(3+\gamma)}$, где $\gamma > 0$. Следовательно, выполнения соотношений $|\varphi_k| \sim k^{-(3+\gamma)}$ и $|\psi_k| \sim k^{-(3+\gamma)}$ надо добиться за счет условий на эти функции.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \varphi_k = \langle \varphi, X^k \rangle &= \sqrt{\frac{2}{3l}} \left(\int_0^l \varphi_1(x) X_1^k(x) dx + \int_0^l \varphi_2(x) X_2^k(x) dx + \int_0^l \varphi_3(x) X_3^k(x) dx \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3l}} \left(\int_0^l \varphi_1(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \varphi_2(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \varphi_3(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3l}} \left(\varphi_1(x) \sin \frac{\pi k}{l} x \frac{l}{\pi k} \Big|_0^l - \frac{l}{\pi k} \int_0^l \varphi_1'(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \varphi_2(x) \sin \frac{\pi k}{l} x \frac{l}{\pi k} \Big|_0^l - \right. \\ &\quad \left. - \frac{l}{\pi k} \int_0^l \varphi_2'(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \varphi_3(x) \sin \frac{\pi k}{l} x \frac{l}{\pi k} \Big|_0^l - \frac{l}{\pi k} \int_0^l \varphi_3'(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx \right). \end{aligned}$$

Производя интегрирование еще раз по частям, получим

$$\begin{aligned} \varphi_k &= -\sqrt{\frac{2}{3l}} \frac{l}{\pi k} \left(\int_0^l \varphi_1'(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \varphi_2'(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \varphi_3'(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx \right) = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{3l}} \left(\frac{l}{\pi k} \right)^2 \left(\varphi_1'(x) (-\cos \frac{\pi k}{l} x) \Big|_0^l + \int_0^l \varphi_1''(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx + \varphi_2'(x) (-\cos \frac{\pi k}{l} x) \Big|_0^l + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^l \varphi_2''(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx + \varphi_3'(x) (-\cos \frac{\pi k}{l} x) \Big|_0^l + \int_0^l \varphi_3''(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx \right) = \\ &= -\frac{2}{3l} \left(\frac{l}{\pi k} \right)^3 \left(\varphi_1''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x \Big|_0^l - \int_0^l \varphi_1'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \varphi_2''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x \Big|_0^l - \right. \end{aligned}$$

$$-\int_0^l \varphi_2'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \varphi_3''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x \Big|_0^l - \int_0^l \varphi_3'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx = \sqrt{\frac{2}{3l}} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \varphi_k^{(3)},$$

где

$$\varphi_k^{(3)} = \int_0^l \varphi_1'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \varphi_2'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \varphi_3'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx.$$

Получаем что

$$\varphi_1'(0) = \varphi_1'(l) = \varphi_2'(0) = \varphi_2'(l) = \varphi_3'(0) = \varphi_3'(l) = 0. \quad (4.18)$$

Аналогично получается и для ψ_k .

$$\psi_k^{(3)} = \int_0^l \psi_1'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \psi_2'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \psi_3'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx.$$

Таким образом, при выполнении условий (4.17) на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ мы достигаем поставленной цели. Так как для любых чисел $a > 0$, $k > 0$ справедливо равенство

$$\frac{a}{k} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + a^2 \right), \quad (4.19)$$

то требуя кусочной непрерывности от третьей производной функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а также, используя равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(x) = \sqrt{\frac{2}{3l}} \left(\int_0^l \varphi_1^2(x) dx + \int_0^l \varphi_2^2(x) dx + \int_0^l \varphi_3^2(x) dx \right)$$

для этих функций, можно убедиться в сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(3)}(x)|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(3)}(x)|^2.$$

Отсюда, следует сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(3)}(x)|^2}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_k^{(3)}(x)|^2}{k},$$

а следовательно, сходимость и ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Таким образом, мы выяснили условия на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, при которых произведенные нами операции при решении задачи методом Фурье являются законными и функция $u(x, t)$, определяемая равенством (3.6), будет решением задачи (3.1) – (3.4)

Теорема 5. Пусть производные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ до 2-го порядка включительно непрерывны, а третьи производные функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ кусочно-непрерывны и, кроме того,

$$\begin{aligned} \varphi_1'(0) = \varphi_1'(l) = \varphi_2'(0) = \varphi_2'(l) = \varphi_3'(0) = \varphi_3'(l) &= 0, \\ \psi_1'(0) = \psi_1'(l) = \psi_2'(0) = \psi_2'(l) = \psi_3'(0) = \psi_3'(l) &= 0, \\ \langle \varphi, X^k \rangle = \langle \psi, X^k \rangle = 0, \text{ если } \lambda_k = -\lambda = -\lambda', \\ \langle \varphi, X^k \rangle = \frac{-\alpha \langle \psi, X^k \rangle (\lambda_k + \lambda')}{\beta(\lambda_k + \lambda'')}, \text{ если } \lambda_k = -\lambda \neq -\lambda'. \end{aligned}$$

Тогда существует единственное решение задачи (3.1) – (3.4) для трехреберного графа G_5 , представимое в виде:

$$\begin{aligned} u^1(x, t) = \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_1^k + \\ + \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} X_1^k + \\
& + \sum_{k:D < 0, \lambda_k \neq -\lambda} \left(A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + \right. \\
& + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} \left. \right) e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} X_1^k + \\
& \sum_{k:\lambda_k = -\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} (A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t}) X_1^k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^2(x, t) = & \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_2^k + \\
& + \sum_{k:D > 0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + \\
& + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_2^k + \\
& + \sum_{k:D < 0, \lambda_k \neq -\lambda} \left(A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + \right. \\
& + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} \left. \right) e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} X_2^k + \\
& \sum_{k:\lambda_k = -\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} (A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t}) X_2^k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^3(x, t) = & \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_3^k + \\
& + \sum_{k:D > 0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + \\
& + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_3^k +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} \left((A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + \right. \\
& + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} \left. \right) e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} X_3^k + \\
& \sum_{k:\lambda_k = -\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} (A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t}) X_3^k,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
X_1^k(x) &= \sqrt{\frac{2}{3l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \\
X_2^k(x) &= \sqrt{\frac{2}{3l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \\
X_3^k(x) &= \sqrt{\frac{2}{3l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \\
\lambda_k &= \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2.
\end{aligned}$$

А теперь, аналогично исследуем равномерную сходимость рядов (4.6) – (4.8) для n – реберного графа G_7 из примера 7 параграфа 2. В этом случае

$$\begin{aligned}
v^1(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t + \right. \\
& + \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t \left. \right) \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x, \\
& \dots \\
v^n(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t + \right. \\
& + \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t \left. \right) \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + x).
\end{aligned}$$

Продифференцируем дважды по t :

$$v_{tt}^1(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \times \\ \times \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \times \\ \times \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x,$$

...

$$v_{tt}^n(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \times \\ \times \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \times \\ \times \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1+l_2+\dots+l_{n-1}+x),$$

продифференцируем дважды по x :

$$v_{xx}^1(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left(\frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \times \\ \times \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \times \\ \times \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x,$$

...

$$v_{xx}^n(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left(\frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \times \\ \times \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \times \\ \times \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1+l_2+\dots+l_{n-1}+x),$$

найдем смешанные производные

$$v_{xxtt}^1(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left(\frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x \right)^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \times \\ \times \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \times \\ \times \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x,$$

...

$$v_{xxtt}^n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left(\frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x\right)^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \times \\ \times \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \times \\ \times \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1+l_2+\dots+l_{n-1}+x).$$

Полученные ряды мажорируются, с точностью до константы, рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Для сходимости этого ряда $|\varphi_k|$ и $|\psi_k|$ должны вести себя, по меньшей мере, как $k^{-(3+\gamma)}$, где $\gamma > 0$. Следовательно, выполнения соотношений $|\varphi_k| \sim k^{-(3+\gamma)}$ и $|\psi_k| \sim k^{-(3+\gamma)}$ надо добиться за счет условий на эти функции.

Рассмотрим

$$\varphi_k = \langle \varphi, X^k \rangle = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left[\int_0^{l_1} \varphi_1(x) X_k^1(x) dx + \dots + \int_0^{l_n} \varphi_n(x) X_k^n(x) dx \right] = \\ = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left[\int_0^{l_1} \varphi_1(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x dx + \dots + \int_0^{l_n} \varphi_n(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1+l_2+\dots+l_{n-1}+x) dx \right] = \\ = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left[\frac{l_1+l_2+\dots+l_n}{\pi k} \varphi_1(x) \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x \Big|_0^{l_1} - \frac{l_1+l_2+\dots+l_n}{\pi k} \int_0^{l_1} \varphi_1'(x) \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x dx + \dots + \frac{l_1+l_2+\dots+l_n}{\pi k} \varphi_n(x) \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1+l_2+\dots+l_{n-1}+x) \Big|_0^{l_n} - \frac{l_1+l_2+\dots+l_n}{\pi k} \int_0^{l_n} \varphi_n'(x) \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1+l_2+\dots+l_{n-1}+x) dx \right].$$

Так как внеинтегральный член мешает получению упомянутых соотношения, то, потребовав от $\varphi(x)$ выполнение условий

$$\varphi_1(l_1) = \dots = \varphi_n(0) = 0 \quad (4.20)$$

и производя еще раз интегрирование по частям, получим

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left(\frac{l_1+l_2+\dots+l_n}{\pi k}\right)^2 \left[\varphi_1'(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x \Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1} \varphi_1''(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x dx + \dots + \varphi_n'(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1+l_2+\dots+l_{n-1}+x) \Big|_0^{l_n} - \int_0^{l_n} \varphi_n''(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1+l_2+\dots+l_{n-1}+x) dx \right]$$

$$\begin{aligned}
& l_2 + \dots + l_{n-1} + x) dx] = \\
& = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \left(\frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{\pi k}\right)^3 \left[-\varphi_1''(x) \sin \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x \Big|_0^{l_1} + \int_0^{l_1} \varphi_1'''(x) \sin \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x dx - \right. \\
& \dots - \varphi_n''(x) \sin \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + x) \Big|_0^{l_n} + \int_0^{l_n} \varphi_n'''(x) \sin \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + \\
& l_2 + \dots + l_{n-1} + x) dx] = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \left(\frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{\pi k}\right)^3 \varphi_k^{(3)},
\end{aligned}$$

где

$$\varphi_k^{(3)} = \int_0^{l_1} \varphi_1'''(x) \sin \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x dx + \dots + \int_0^{l_n} \varphi_n'''(x) \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + x) dx.$$

Получаем что

$$\varphi_1'(l_1) = \varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_n'(l_n) = \varphi_n'(0) = 0,$$

$$\varphi_1''(l_1) = \varphi_n''(0) = 0. \tag{4.21}$$

Аналогично получается и для ψ_k .

$$\psi_k^{(3)} = \int_0^{l_1} \psi_1'''(x) \sin \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x dx + \dots + \int_0^{l_n} \psi_n'''(x) \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + x) dx.$$

Таким образом, при выполнении условий (4.20) и (4.21) на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ мы достигаем поставленной цели. Так как для любых чисел $a > 0$, $k > 0$ справедливо равенство

$$\frac{a}{k} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + a^2 \right), \tag{4.22}$$

то требуя кусочной непрерывности от третьей производной функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а также, используя равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \left(\int_0^{l_1} \varphi_1^2(x) dx + \dots + \int_0^{l_n} \varphi_n^2(x) dx \right).$$

Для этих функций, можно убедиться в сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(3)}(x)|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(3)}(x)|^2.$$

Отсюда, и из (4.10) следует сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(3)}(x)|^2}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_k^{(3)}(x)|^2}{k},$$

а следовательно, сходимость и ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Таким образом, мы выяснили условия на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, при которых произведенные нами операции при решении задачи методом Фурье являются законными и функция $u(x, t)$, определяемая равенством (3.6), будет решением задачи (3.1) – (3.4).

Теорема 6. Пусть производные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ до 2-го порядка включительно непрерывны, а третьи производные функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ кусочно-непрерывны и, кроме того,

$$\varphi_1(l_1) = \dots = \varphi_n(0) = 0,$$

$$\varphi'_1(l_1) = \varphi'_1(0) = 0, \quad \varphi'_n(l_n) = \varphi'_n(0) = 0,$$

$$\varphi''_1(l_1) = \varphi''_n(0) = 0,$$

$$\psi_1(l_1) = \dots = \psi_n(0) = 0,$$

$$\psi'_1(l_1) = \psi'_1(0) = 0, \quad \psi'_n(l_n) = \psi'_n(0) = 0,$$

$$\psi''_1(l_1) = \psi''_n(0) = 0,$$

$$\langle \varphi, X^k \rangle = \langle \psi, X^k \rangle = 0, \quad \text{если } \lambda_k = -\lambda = -\lambda',$$

$$\langle \varphi, X^k \rangle = \frac{-\alpha \langle \psi, X^k \rangle (\lambda_k + \lambda')}{\beta(\lambda_k + \lambda'')}, \quad \text{если } \lambda_k = -\lambda \neq -\lambda'.$$

Тогда существует единственное решение задачи (3.1) – (3.4) для n -реберного графа G_7 , представимое в виде:

$$\begin{aligned}
 u_1(x, t) = & \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_1^k + \\
 & + \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_1^k \\
 & + \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} ((A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)}) \times \\
 & \times e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_1^k + \sum_{k:\lambda_k = -\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t} X_1^k,
 \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}
 u_n(x, t) = & \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_n^k + \\
 & + \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_n^k \\
 & + \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} ((A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)}) \times \\
 & \times e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_n^k + \sum_{k:\lambda_k = -\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t} X_n^k,
 \end{aligned}$$

где

$$X_k^1(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x,$$

...

$$X_k^n(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \cos \frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_n + x).$$

Заключение

В работе найдены решения уравнения Буссинеска – Лява на некоторых геометрических графах.

В ходе выполнения поставленной задачи в первом параграфе были рассмотрены свойства собственных функций и собственных значений вспомогательной задачи. Во втором параграфе решена вспомогательная задача Штурма – Лиувилля для некоторых графов. В третьем параграфе были найдены формулы решения уравнения Буссинеска – Лява на конкретных графах с помощью метода Фурье. В четвертом параграфе дано обоснование применимости метода Фурье для решения задачи на конкретных связных ориентированных графах, то есть даны условия на начальные функции, при которых можно применять данный метод.

Данная задача остается открытой для дальнейшего рассмотрения, так как рассмотрена лишь малая часть графов.

Литература

1. Баязитова, А.А. Задача Штурма – Лиувилля на геометрическом графе / А.А. Баязитова // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование.» – 2010. – №16(192), вып. 5. – С. 7 – 9.
2. Загребина, С.А. Начально-конечная задача на линейных эволюционных уравнениях соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Обзорение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 329 – 330.
3. Замышляева, А.А. Решение однородного уравнения соболевского типа на графе / А.А. Замышляева // Обзорение приклад. и промыш. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 332 – 333.
4. Пивоварова, П.О. О неустойчивости решений эволюционных уравнений соболевского типа на графе / П.О. Пивоварова // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование» – 2008. – №15(115), вып. 1. – С.64 – 68.
5. Дифференциальные уравнения на геометрических графах/ Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М.: Физматлит, 2004. – 272с.
6. Свиридюк, Г.Ф. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. – Новосибирск, 2002ю – С.221 – 225.

7. Свиридюк, Г.А. Уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе / Г.А.Свиридюк, В.В.Шеметова // Вестник МаГУ. Математика. – Магнитогорск. – 2003.-Вып. 4. – С. 129 – 139.

8. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство одной неклассической модели / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Изв. вузов. Математика. – 2005. – №10. – С. 47 – 52.

9. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №1. – С. 126 – 131.

10. Свиридюк, Г.А. О прямой и обратной задачах на уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, А.А. Баязитова // Вестн. Сам. гос. техн. ун – та. Сер.: Физ. – мат. науки. – 2009. – №1 (18). – С. 6 – 17.

11. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах: дис. ... канд. физ. – мат. наук: 01.01.02: защищена 27.12.05: утв. 10.05.06 / Шеметова Вероника Владимировна. – Магнитогорск, 2005. – 109 с. – Библиогр.:с.93 – 109.

12. Kosugi, S.A semilinear elliptic equation in a thin network – shaped domain / S. Kosugi // J. Math. Soc. Jap. – 2000. – Vol. 52, №3. – P. 672 – 697.