Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра прикладной математики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, доцент кафедры ПРИМА,
к.ф.-м.н.
_____ О.Л.Ибряева
«28» мая 2016г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н.,
доцент
_____ Л.А.Прокудина
«28» мая 2016 г.

Приближенные формулы для вычисления эллиптического интеграла I рода

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–231300.2016.073.ПЗ ВКР

Руководитель работы, к.ф-м.н,
доцент кафедры ПРИМА
_____/Ю.С.Васильев
«28» мая 2016 г.
Автор работы
Студент группы ММиКН-473
_____/ Р.Ф.Ханнанова
«28» мая 2016 г.
Нормоконтролер, к.ф-м.н, доцент
кафедры ПРИМА
_____/С.У.Турлакова
«03» июня 2016 г.

Челябинск 2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра прикладной математики
Направление подготовки Прикладная математика

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ / Л.А.Прокудина
28 мая 2016 г.

З А Д А Н И Е

на выпускную квалификационную работу студента
Ханнановой Розалии Фаниловной
Группа ММиКН-473

1. **Тема работы** Приближенные формулы для вычисления эллиптического интеграла I рода
   утверждена приказом по университету от «15» апреля 2016 г. № 661
2. **Срок сдачи студентом законченной работы** « 6» **июня 2016 г.**
3. **Исходные данные к работе**
   3.1. Учебные пособия по теории приближения функции.
   3.2. Среда программирования – приложения Maple, Matlab, Mathematica.
4. **Перечень вопросов, подлежащих разработке**
   4.1. Основные понятия теории приближения функций.
   4.2. Описание алгоритма Ремеза.
   4.3. Составление программы для нахождения многочленов наилучшего приближения (МНП) и коэффициентов выражения по алгоритму Ремеза.
   4.4. Разработка программной документации.
5. **Иллюстративный материал** (плакаты, альбомы, раздаточный материал, макеты, электронные носители и др.)
   5.1. Схема модифицированного генетического алгоритма. Решение квадратичной задачи о назначениях. Демонстрационный плакат – 2 л.
   5.2. Мультимедийная презентация – 14 слайдов.
   Общее количество иллюстраций – 14.
6. **Дата выдачи задания** «1» октября 2016 г.

Руководитель_____ /Ю.С. Васильев/
(подпись)

Задание принял к исполнению_____ /Р.Ф. Ханнанова/
(подпись)

7. Календарный план

Наименование этапов дипломной работы	Срок выполнения этапов работы	Отметка о выполнении
1. Ознакомление с понятиями теории приближения функции	15.10.15 – 01.11.15	выполн
2. Изучение алгоритмов Ремеза для нахождения МНП.	03.11.15 – 15.11.15	выпл
3. Составление программы для нахождения МНП по алгоритму Ремеза.	17.11.15 – 01.12.15	выпл
4. Отладка и испытание программы на показательных примерах.	02.12.15 – 15.12.15	выпл
5. Ознакомление с алгоритмами Ремеза для приближения дробно – рациональными функциями.	15.12.15 – 30.12.15	выпл
6. Составление программы для нахождения коэффициентов дробно – рационального выражения по алгоритму Ремеза.	01.01.16 – 17.01.16	выпл
7. Отладка и испытание программы на показательных примерах.	20.01.16 – 15.02.16	выпл
8. Подготовка пояснительной записки дипломной работы	15.02.16 – 25.03.16	выпл
9. Разработка программной документации	25.03.16 – 30.04.16	выпл
10. Проверка работы руководителем, исправление замечаний	01.05.16 – 10.05.16	выпл
11. Нормоконтроль	10.05.16 – 25.05.16	
12. Подготовка графического материала и доклада	15.05.16 – 25.05.16	выпл
13. Рецензирование, представление зав. кафедрой	27.05.16 – 05.06.16	выпл

Заведующий кафедрой _____ /Л.А. Прокудина
(подпись)

Руководитель работы _____ /Ю.С. Васильев
(подпись)

Студент _____ /Р.Ф. Ханнанова
(подпись)

АННОТАЦИЯ

Ханнанова Р.Ф. Приближенные формулы для вычисления эллиптического интеграла Ірода. – Челябинск: ЮУрГУ, ММиКН-473, 45 с., 16 ил., библиогр. список – 18 наим., 2 л. плакатов ф. А1.

В работе рассмотрены свойства эллиптических интегралов, их методы вычисления и виды аппроксимации функций.

Применен алгоритм Ремеза для приближения эллиптического интеграла первого рода. Функция приближена линейной комбинацией многочлена и логарифма умноженного на степенные функции. К такому виду приближающих функций тоже применима идея алгоритма Ремеза. Но стандартных функций для этого нет. Поэтому для данного приближения метод Ремеза был запрограммирован напрямую. При этом получились формулы такие же, какие приведены в справочнике Стигана, но более с точными коэффициентами.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 6
1 ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ 8
1.1 Определение эллиптического интеграла 8
1.2 Эллиптический интеграл 1-го рода в канонической форме Лежандра 8
1.3 Эллиптический интеграл 2-го рода в канонической форме Лежандра 10
1.4 Эллиптический интеграл 3-го рода 10
1.5Полный эллиптический интеграл 1-го рода 11
1.6 Полный эллиптический интеграл 2-го рода 12
1.7 Полный эллиптический интеграл 3-го рода 14
Выводы по разделу 15
2 АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ 16
2.1Постановка задачи аппроксимации 16
2.2 Виды аппроксимации 17
2.2.1 Полиномиальное приближение функций 17
2.2.2 Формула Тейлора 19
2.2.3 Приближение функций тригонометрическими многочленами 20
2.3 Алгоритм Ремеза 21
Выводы по разделу 26
3 ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА I РОДА 26
3.1 Введение 26
3.2 Случайn=1 28
3.3 Случай n=2 33
3.4 Случай n=3 41
Выводы по разделу 44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 45
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 46

ВВЕДЕНИЕ

Современная теория эллиптических функций создалась в результате совместной работы выдающихся математиковXIX в. Систематическоеисследование эллиптических интегралов было начато Лежандром еще в конце XVIII в. Полученные результаты были им объединены в замечательной работе “TraitedesfonctionselliptiquesetdesintegratesEulegriens". Здесь мы находим как полную теорию эллиптических интегралов, так и практические методы их вычисления. Здесь же содержатся и таблицы интегралов 1-го и 2-го рода, которые являются основными для вычислений и в настоящее время.

Работы Лежандра послужили отправным пунктом исследований Абеля и Якоби (Abel, Jacobi). Их идея рассматривать вместо эллиптического интеграла обратную функцию привела к открытию эллиптических функцийи их двоякой периодичности. Абель рассматривает область эллиптических интегралов и задачу их обращения как частный случай аналогичной задачи для любой алгебраической функции. Говоря о первых исследованиях по теории эллиптических функций, нельзя умолчать о Гауссе (Gauss). Гаусс был первым математиком, рассматривавшим эллиптические функции. Однако своих исследований он не опубликовывал при жизни, и лишь много лет спустя после смертиего исследования увидели свет. Развитие теории функций комплексного переменного заставило в дальнейшем пересмотреть построения Абеля и Якоби. Громадная роль выпала в этом деле Вейерштрассу. В его работах теория эллиптических функций принимает ту законченную и совершенную форму, в какой мы ее видим сейчас.

Вместе с ростом теории росла и расширялась область приложений. Первоначальные приложения эллиптических функций к задаче колебаний маятника распространились затем на задачи динамики твердого тела, закрепленного в неподвижной точке, нашли себе место в теории гироскопа и других задачах механики. С развитием теории упругости эллиптические функции нашли себе применение к ее задачам. Максвелл использовал эллиптические интегралы в своих работах по электричеству и магнетизму. Изучение электрических плоских полей, встречающихся в ряде задач электротехники, например в расчете электромашин, вопросы плоского движения жидкости, ряд задач аэродинамики при их решении нуждаются теперь в теории эллиптических функций. В настоящее время теория эллиптических функций крепко внедрилась, в практику, и поле ее приложений все расширяется.

Задачи приближения, аппроксимации и интерполяции математических функций и сигналов занимают важное место в решении практических задач. Области, где применимы те или иные методы решения задач приближения весьма широки и разнообразны. Они используются как при выполнении математических расчетов и математического моделирования различных систем и устройств, так и при проектировании коммуникационного оборудования, систем технического зрения, высококачественного звуковоспроизводящего оборудования.

Примером необходимости проведения процедур приближения могут служить расчеты с использованием специальных математических функций. На практике они часто заменяются приближенными аналитическими выражениями. Так, ранее применялись методы табуляции значений наиболее часто используемых специальных функций. В настоящее время эффективными средствами для вычисления специальных функций являются системы компьютерной математики. Но ввиду сложности вычислений специальных функций их реализация в данных пакетах имеет непростые алгоритмы, что приводит к существенным затратам времени вычисления и препятствует применению таких систем в практике математического моделирования систем и устройств. Кроме того, задачи интерполяции и аппроксимации имеют большое значение в образовании. Они занимают определенное место в научной литературе и в программах курсов по математике и информатике.

Цель дипломной работы – вывести приближенные формулы для вычисления эллиптического интеграла I рода с помощью многочленов наилучшего приближения по алгоритму Ремеза.

Для достижения этой цели решаются следующие задачи:

1. Ознакомление с понятиями теории эллиптических интегралов.
2. Изучение алгоритмов Ремеза.
3. Составление программы для нахождения многочлена наилучшего приближения и коэффициентов выражения по алгоритму Ремеза.

1ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1 Определение эллиптического интеграла

Эллиптическим интегралом называется интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})dx, \tag{1.1}$$

где $R(x, y)$есть рациональная функция от x иy, а $P(x)$— многочлен третьей или четвертой степени.

Интегралы такого вида не могут быть, за исключением отдельных случаев, выражены через элементарные функции.

Для вычисления отдельных значений интеграла

$$\int_a^b R(x, \sqrt{P(x)})dx \tag{1.2}$$

приходится пользоваться таблицами, произведя предварительно преобразование эллиптического интеграла к канонической форме [9].

1.2Эллиптический интеграл 1-го рода в канонической форме Лежандра

Эллиптическим интегралом 1-го рода в канонической форме Лежандра называется интеграл

(1.3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Величина k называется модулем интеграла.

Вычисление интеграла (1.3) не может быть произведено путем приведения его к простейшим функциям, так как он через них не выражается.

Определение значения интеграла

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{1.4}$$

приводится к вычислению интеграла

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{1.5}$$

так как

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \tag{1.6}$$

$$-\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Подстановкой

$$x = \sin\varphi$$

интеграл (1.5) приводится к виду

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2 sin^2\varphi)}}. \tag{1.7}$$

Верхний предел φ носит название амплитуды интеграла.

Интеграл

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2 sin^2\varphi)}}. \tag{1.8}$$

называется полным эллиптическим интегралом 1-го рода.

Для краткости письма принято обозначение

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Для различных значений амплитуды от 0 до 90° и для значений модуля $k < 1$ составлены таблицы. В этих таблицах модуль k представляется в виде

$$k = \sin a \tag{1.9}$$

(угол a называют модулярным углом) и значения

$$F(\varphi, a) = \int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{(1-sin^2 a sin^2\varphi)}}. \tag{1.10}$$

даются для ряда значений a и φ в пределах от 0 до 90°.

Первые таблицы функции$F(\varphi, a)$были составлены Лежандром[9]. В них даются значения $F(\varphi, a)$с десятью знаками после запятой для a идля φ через 1°. Пользуясь таблицами, легко вычислить значение эллиптического интеграла для данных значений a иφ. При этом, если значение φ или a не содержится в таблице, приходится прибегать к интерполированию. Для различных таблиц это интерполирование приходитсяпроизводить с тем или иным количеством разностей в зависимости от характератаблиц.

1.3Эллиптический интеграл 2-го рода в канонической форме Лежандра

Эллиптическим интегралом 2-го рода в канонической форме Лежандра называется интеграл

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx \tag{1.11}$$

Этот интеграл, как и интеграл 1-го рода, не выражается в общем виде через простейшие функции.

Вычисление интеграла

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx \tag{1.12}$$

подстановкой

$$x = \sin\varphi$$

приводится к вычислению интеграла

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}\,d\varphi. \tag{1.13}$$

Величина k называется модулем эллиптического интеграла,аφ–егоамплитудой. Для положительных значений модуля, меньших единицы, и для амплитуды в пределах от 0 до 90° Лежандр построил таблицы, где даютсязначения интеграла 2-го рода с 10 знаками после запятой. Модуль представлен в тригонометрической форме

$$k = \sin a.$$

Значения

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-sin^2 a sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{1.14}$$

даются для значений a иφчерез 1°.

1.4Эллиптический интеграл 3-го рода

Эллиптическим интегралом 3-го рода в канонической форме Лежандра называется интеграл

(1.15)

$$\int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Этот интеграл, подобно интегралам 1-го и 2-го рода, не выражается в общем виде через элементарные функции.

Вычисление интеграла

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{1.16}$$

подстановкой

$$x = \sin\varphi$$

приводится к вычислениюинтеграла

$$\Pi(n,k,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+nsin^2\varphi)\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}}. \tag{1.17}$$

В настоящее время мы не имеем таблиц для вычисления интегралов 3-го рода, подобных таблицам Лежандра. По этой причине для вычисления интегралов 3-го рода приходится пользоваться разложением в ряд.

1.5Полный эллиптический интеграл 1-го рода

Если рассматривать полный эллиптический интеграл 1-го рода

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2sin^2\varphi)}}$$

как функцию модуля $k^2 = \lambda_1 + \lambda_2 i$то для изображения будет служить поверхность, представленная на рисунке 1.1.

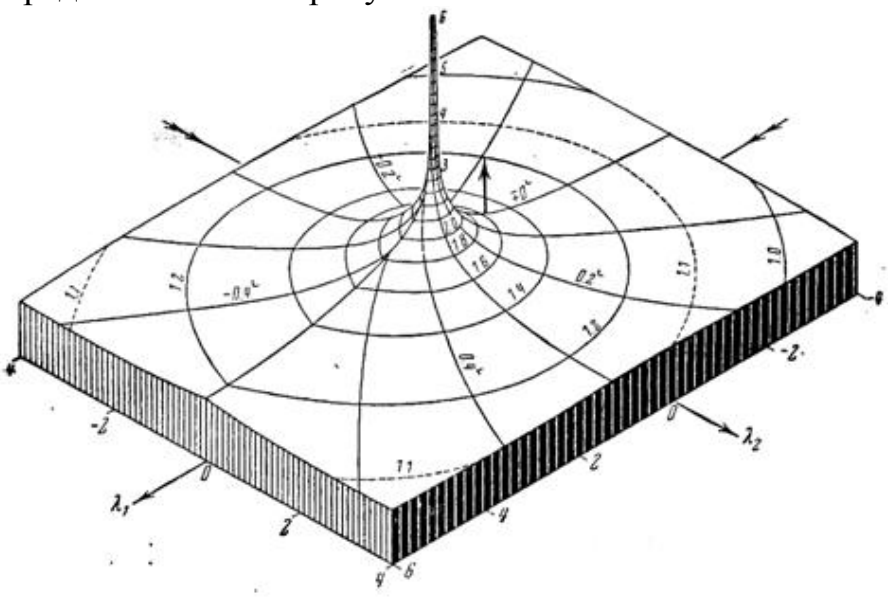

Рисунок 1.1

Ординаты этой поверхности равны значениям модуляфункции$|k|$ в соответствующих точках. Изображение полного эллиптического интеграла на рисунке 1.1 показывает, что Kобращается в бесконечность при$k^2 = 1$. Вертикальной стрелкой на фигуре отмечено положение начала координат.Рисунок 1.1 изображает ту ветвь функции, которая при $k^2 = 0$ обращается в $\frac{\pi}{2}$.Разрез плоскости $k^2 = \lambda_1 + \lambda_2 i$произведен вдоль вещественной оси от точки1 до ∞. Отметки линии равного аргумента даны в сотых долях прямого угла. Если линии одинаковой высоты и линии наибольшего ската на поверхности рисунка 1.1спроектировать на плоскость, то мы получим серию изолиний модуля и аргумента функции K.Последние изображены на рисунке 1.2.

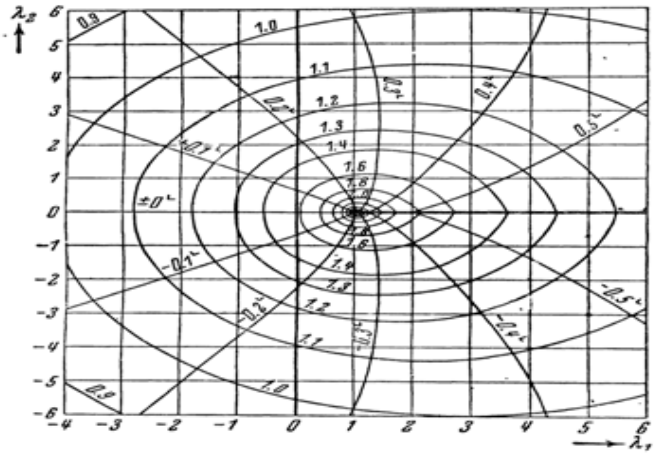

Рисунок 1.2

Для вычисления полного эллиптического интеграла 1-го рода можно пользоваться таблицами Лежандра [9]. Отметим, что на ряду с таблицами, дающими значения $K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, Лежандром были составлены таблицы значений $\lg K$ для различныхзначений

$$k = \sin a,$$

через 0.1° с четырнадцатью десятичными знаками после запятой. Этими таблицами удобно пользоваться в тех случаях, когда вычисления производятся с помощью логарифмов. Для вычисления полного эллиптического интеграла можно также пользоваться разложениями в ряды и т.д.

1.6 Полный эллиптический интеграл 2-го рода

Полный эллиптический интеграл 2-го рода

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

как функция модуля k обозначается знаком $E(k)$. Изображение $E(k)$какфункции комплексной переменной $k^2 = \lambda_1 + i\lambda_2$ дано на рисунке 1.3.

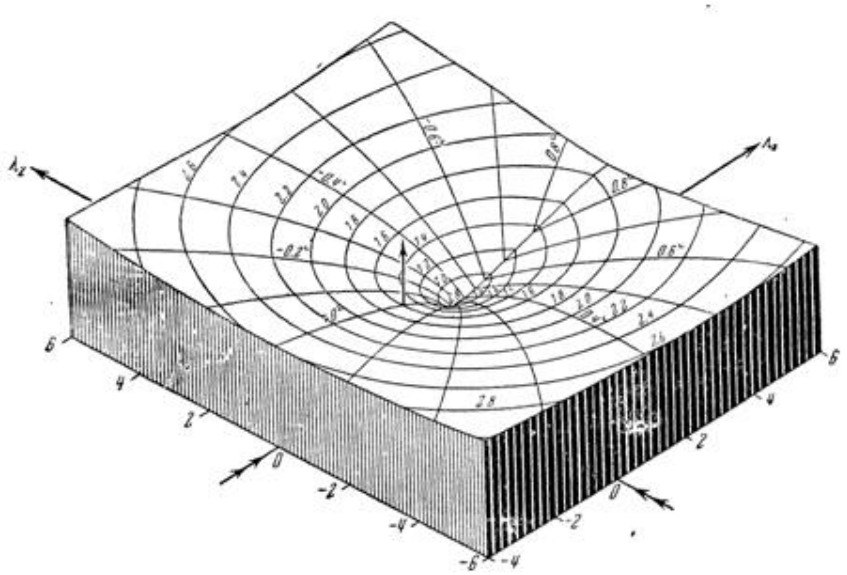

Рисунок 1.3

На этом рисунке, как и на рисунке 1.1, стрелкой отмечено положение $k^2 = 0$. Апликаты поверхности изображают модули значений функции. На поверхности отмечены изолинии уровня и линии наибольшего ската. На рисунке 1.4 изображены изолинии модулей значений функции $E(k)$и ортогональные к ним изолинии аргументов.

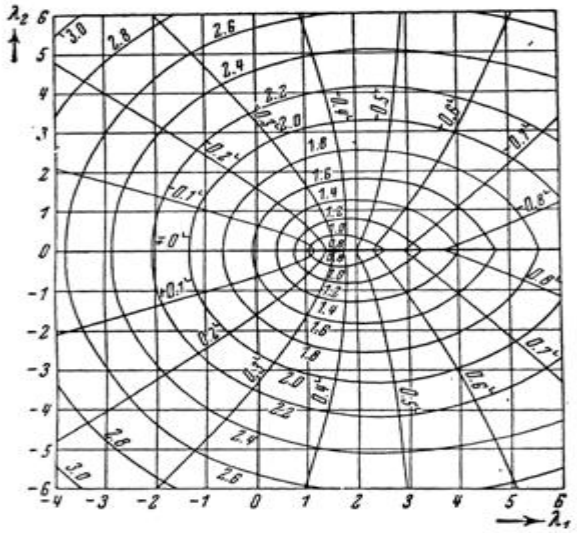

Рисунок 1.4

Вычисление значений $E(k)$можно производить по таблицам значений эллиптического интеграла 2-го рода. На ряду с этими таблицами вычислены таблицы значений $\lg E(k)$ четырнадцатью знаками после запятой. Значения $\lg E(\sin a)$ даются через 1° по a в промежутке от 0 до 90°. Эти таблицы удобны при вычислениях с логарифмами. При отсутствии таблиц полный эллиптический интеграл 2-го рода можно вычислять с помощью ряда

$$E=\frac{\pi}{2}\left\{\begin{matrix}1-\frac{k^2}{2^2}-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{k^6}{5}\cdots \\ -\left(\frac{1\cdot 3..(2n-1)}{2\cdot 4..2n}\right)^2\frac{k^{2^n}}{2n-1}-\cdots\end{matrix}\right\}. \qquad (1.18)$$

Если значение k близко к единице, то выгоднее пользоваться разложением E в ряд по степеням k`:

$$E=1+\frac{1}{2}\beta_1 k`^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4}\beta_2 k`^4+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{5}{6}\beta_3 k`^6+\cdots, \qquad (1.19)$$

причем $k`=\sqrt{1-k^2}$,

$$\beta_1=\ln\frac{4}{k`}-\frac{1}{1\cdot 2},\beta_2=\beta_1-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4},\dots,\beta_n= \qquad (1.20)$$

$$=\beta_{n-1}-\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{(2s-1)2s}.$$

Будем обозначать

$$E(k`)=E`(k).$$

В том случае, когда $|k|>1$, вычисление $E(k)$ с помощью равенства

$$kE(k)=k^2E\left(\frac{1}{k}\right)+k`^2K\left(\frac{1}{k}\right)\pm i\left\{K`\left(\frac{1}{k}\right)-k^2E`\left(\frac{1}{k}\right)\right\} \qquad (1.21)$$

приводится к вычислению полных эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода при условии, что$|k|<1$.

В этом случае, можно пользоваться разложением

$$E(k)=\left(\frac{\pi}{4k}\right)\left\{1+\frac{1}{8k^2}+\frac{3}{64}\frac{1}{k^4}+\cdots\right\} \qquad (1.22)$$

$$\pm i\left\{-k+\frac{1}{2}\left(\ln 4k+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k}+\frac{1}{16}\left(\ln 4k-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{k^3}+\frac{3}{128}(\ln 4k-1)\frac{1}{k^5}+\cdots\right\}$$

1.7Полный эллиптический интеграл 3-го рода

Полный эллиптический интеграл 3-го рода

$$\Pi(n,k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+nsin^2\varphi)\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}} \qquad (1.23)$$

есть функция двух величин: n и k.

Вычисление полного эллиптического интеграла 3-го рода приводится к вычислению эллиптических интегралов 1-то и 2-го рода согласно равенству

$$\Pi(n,k) = \frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2\varphi d\varphi}{(1+nsin^2\varphi)\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}} + \tag{1.24}$$

$$+\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}},$$

причем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2\varphi d\varphi}{(1+nsin^2\varphi)\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}} = \tag{1.25}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\pi - K(k)E(\omega,k`) - E(k)F(\omega,k`) + K(k)F(\omega,k`)}{sin\omega cos\omega\sqrt{1-k`^2sin^2\omega}}$$

где

$$ctg^2\omega = n$$

Интегралы 3-го рода можно также вычислять при помощи разложения в ряд.

Выводы по разделу

Рассмотрены свойства эллиптических интегралов и их методы вычисления.Для эллиптических интегралов 1-го и 2-го родаимеются таблицы, вычисленные Лежандром и опубликованные в его труде[18]. При этом, если значение не содержится в таблице, приходится прибегать к интерполированию. В настоящее время мы не имеем таблиц для вычисления интегралов 3-го рода, подобных таблицам Лежандра. По этой причине приходится пользоваться разложением в ряд. Также разложением в ряд можно вычислить полные эллиптические интегралы 1-го, 2-го, 3-го рода.Однако использование описанных методов приводит к большим затратам машинного времени, поэтому нам необходимо разработать алгоритм приближения. Данный вопрос мы рассмотрим в третьей главе.

2 АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

2.1Постановка задачи аппроксимации

Аппроксимацией в системах компьютерной математики обычно называют получение приближенных значений какого-либо выражения. Однако под аппроксимацией функциональных зависимостей подразумевается получение некоторой конкретной функции, вычисленные значения которой с некоторой точностью аналогичны аппроксимируемой зависимости. Обычно предпочитают найти одну зависимость, приближающую заданный ряд узловых точек. Часто для этого используют полиномы.

Основную задачу теории аппроксимации можно сформулировать следующим образом: на некотором точечном множестве β в пространстве произвольного числа измерений заданы 2 функции $f(P)$ и $F(P, A_1, A_2, \dots, A_n)$ от точки $P \in \beta$, из которых вторая зависит еще от некоторого числа параметров $A_1, A_2, \dots, A_n$, эти параметры требуется определить так, чтобы уклонение в β функции $F(P, A_1, A_2, \dots, A_n)$ от функции $f(P)$ было наименьшим. При этом, конечно, должно быть указано, что понимают под уклонением F отf или, как еще принято говорить, под расстоянием между F и f.

Если, например, рассматриваются ограниченные функции, то в качестве расстояния между двумя функциями можно взять верхнюю грань в β модуля их разности. При таком определении расстояния для совокупности всех ограниченных в β функций оказываются справедливыми многие соотношения, которые мы имеем для точек обычного 3х-мерного пространства.

Эллиптические интегралы не выражаются через элементарные функции. По определению, элементарные функции — функции, определяемые формулами, содержащими конечное число алгебраических или тригонометрических операций, производимых над аргументом, функцией и некоторыми постоянными.

Эллиптические интегралы в лежандровой форме 1-го, 2-го и 3-го родов, а также интегралы, сходные с ними (с заменой знаков плюс на минус и/или с заменой cos на sin или наоборот) точно представимы функциональным рядом. Такое представление не является элементарной функцией ввиду бесконечного числа членов этого ряда.

Руководствуясь соображениями достижения необходимой точности и, взяв в расчет n начальных членов ряда и пренебрегая остатком, то есть суммой остальных членов ряда от n+1 до ∞, получим аппроксимацию эллиптического интеграла в виде элементарной функции. Аппроксимации эллиптических интегралов применяются аналогично обычным интегралам.

Определенный интеграл 1-го рода можно представить в виде:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{1 + E}\left(\varphi - \frac{E \sin 2\varphi}{4} + \cdots\right)\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2};$$

$$(\varepsilon \approx 4.2 \cdot 10^{-6}).$$

Определенный интеграл 2-го рода представим в виде:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+E}}\left(\varphi + \frac{E\sin 2\varphi}{4} + \cdots\right)\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2};$$
$$(\varepsilon \approx 1.4\cdot 10^{-6}).$$

Длина дуги эллипса с единичной большой полуосью:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+E}}\left(\varphi - \frac{E\sin 2\varphi}{4} + \cdots\right)\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2};$$
$$(\varepsilon \approx 1.4\cdot 10^{-6}).$$

Определенный интеграл 3-го рода можно записать в виде:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1+h\cdot\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1+E}}{2+h}\Big[\frac{2+\mathrm{h}}{\sqrt{1+\mathrm{h}}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1+\mathrm{h}}\,\mathrm{tg}\varphi\right)$$
$$\frac{2+\mathrm{h}}{\sqrt{1+\mathrm{h}}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1+\mathrm{h}}\,\mathrm{tg}\varphi\right)\left(1-\frac{\mathrm{E}}{2\mathrm{N}}+\cdots\right)+\varphi\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{N}}+\cdots\right)+\cdots\Big]\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2};$$
$$(\varepsilon \approx 4.2\cdot 10^{-6}).$$

В справочнике [2, с. 405] приводится логарифмическая аппроксимация определенного интеграла первого и второго рода.

Определенный интеграл 1-го рода:

$$K(m) = [a_0 + a_1\mathrm{m} + a_2\mathrm{m}^2] + [b_0 + b_1\mathrm{m} + b_2\mathrm{m}^2]\ln\left(\frac{1}{\mathrm{m}}\right) + \varepsilon(m),$$

где $|\varepsilon(m)| \le 3 * 10^{-5}, a_0 = 1.3862944, a_1 = 0.1119723, a_2 = 0.0725296,$

$$b_0 = 0.5, b_1 = 0.1213478, b_2 = 0.0288729.$$

Определенный интеграл 2-го рода:

$$E(m) = [a_0 + a_1\mathrm{m} + a_2\mathrm{m}^2] + [b_0 + b_1\mathrm{m} + b_2\mathrm{m}^2]\ln\left(\frac{1}{\mathrm{m}}\right) + \varepsilon(m),$$

где $|\varepsilon(m)| \le 4 * 10^{-5}, a_0 = 1, a_1 = 0.4630151, a_2 = 0.1077812, b_0 = 0,$

$$b_1 = 0.2542727, b_2 = 0.0412496.$$

2.2 Виды аппроксимации

2.2.1 Полиномиальное приближение функций

Пусть даны замкнутый (конечный или бесконечный) интервал [a,b] числовой оси и две вещественные непрерывные в [a,b] функции $f(x)$ и $S(x)$. Составим выражение:$Q(x) = S(x) + \frac{q_0x^n + q_1x^{n-1} + \cdots + q_n}{p_0x^m + p_1x^{m-1} + \cdots + p_m}$,где mи nзаданы и поставим задачу найти вещественные параметры $p_0, p_1, \dots, p_m$; $q_0, q_1, \dots, q_n$ так, чтобы абсолютная максимальная погрешность $\max_{a\le x\le b}|f(x) - Q(x)|$ была наименьшей.

В частном случае, когда S(x)=1, m=0 и интервал [a,b] конечен, поставленная задача переходит в задачу о наилучшем приближении в пространстве C заданной функции с помощью многочлена степени n. В этом случае мы получаем теорему: многочлен n-й степени P(x), который наименее уклоняется (в метрике пространства C) от заданной непрерывной функции f(x), единственен и вполне характеризуется тем, что число последовательных точек интервала [a,b], в которых разность f(x)-P(x) принимает с чередующимися знаками значение $\max_{a\le x\le b}|f(x)-P(x)|$ не меньше, чем n+2 раза. Алгебраическим многочленом степени n называется функция$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$, где$a_k$ – действительные числа, называемые коэффициентами.

Алгебраические многочлены являются простейшими функциями. Они непрерывны при любом x. Производная многочлена - так же многочлен, степень которого на единицу меньше степени исходного. Так, если степень n, то

$$P_n^{'(x)}=na_nx^{n-1}+(n-a)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1.$$

В школьном курсе математики рассматриваются функции $f(x)=a^x, f(x)=\log_a x, f(x)=sin(x)$ и др., изучаются их свойства, строятся графики. Однако вопрос о методах вычисления значений названных функций при заданных значениях аргумента не рассматривается. Вместе с тем, он очень важен. Познакомимся с методами приближения функций, или методами аппроксимации.

Большую точность приближения по сравнению полиномиальным приближением можно получить, если исходную функцию заменить, используя рациональную интерполяцию при которой аппроксимирующая функция ищется как отношение двух полиномов. Наиболее важным свойством рациональных функций является то, что ими можно приближать такие функции, которые принимают бесконечные значения для конечных значений аргумента и даже внутри интервала его изменения.

При заданных $f(x_1)$, …, $f(x_n)$ приближение к f(x) ищется в виде:

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_px^p}{b_0+b_1x+\cdots+b_qx^q}, \text{где}\, p+q+1=n.$$

Коэффициенты a_i, b_i находятся из совокупности соотношений $R(x_i)=f(x_i)(j=1,\dots,n)$, которые можно записать в виде:

$$\sum_{j=0}^{p} a_j\, x_i^j-f(x_i)\sum_{j=0}^{q} b_j\, x_i^j=0, j=1,\dots,n \qquad (2.1)$$

Уравнение (2.1) образует систему n линейных уравнений относительно $n+1$ неизвестных. Такая система всегда имеет нетривиальное решение. Функция R(x) может быть записана в явном виде в случае n нечетное, если $\mathrm{p}=q$ иn четное, если $\mathrm{p}-n=1$. Для записи функции R(x) в явном виде следует вычислять так называемые обратные разделенные разности, определяемые условием

$$f^{-}(x_l,x_k)=\frac{x_l-x_k}{f(x_l)-f(x_k)}$$

и рекуррентным соотношением

$$f^{-}(x_k, \dots, x_l) = \frac{x_l - x_k}{f(x_{k+1}, \dots, x_l) - f^{-}(x_k, \dots, x_{l-1})}.$$

Интерполирование функций рациональными выражениями обычно рассматривают на основе аппарата цепных дробей. Тогда интерполирующая рациональная функция записывается в виде цепной дроби:

$$f(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{f^{-}(x_1, x_2) + \frac{x - x_2}{f^{-}(x_1, x_2, x_3) + \dots + \frac{x - x_{n-1}}{f^{-}(x_1, \dots, x_n)}}}.$$

2.2.2Формула Тейлора

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенной на некотором промежутке, содержащим точку а. Предположим, что эта функция имеет производные до (n+1)-го порядка

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)', \quad f'''(x) = \left(f''(x)\right)' \dots f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'.$$

Уравнение касательной к графику функции в точке $x = a$ имеет вид:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad или \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Многочлен 1-й степени: $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ в точке $x = a$ совпадает со значением $f(x)$ в этой точке: $P_1(a) = f(a)$. Многочлен в точке $x = a$ имеет то же значение производной, что и функция. Действительно, $P_1`(x) = f`(a)$, следовательно, $P_1`(a) = f`(a)$. График многочлена $P_1(x)$ касается графика функции $y = f(x)$ в точке $M_0(a, f'(a))$.

Можно найти многочлен 2-й степени, а именно:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2,$$

который в точке $x = a$ будет иметь с функцией $y = f(x)$ общее значение и одинаковые значения как первых, так и вторых производных. График многочлена $P_2(x)$ вблизи точке $x = a$ еще теснее будет прилегать к графику функции $y = f(x)$ по сравнению с графиком многочлена $P_1(x)$.

Многочлен, имеющий при $x = a$ первыеn производных, одинаковых с соответствующими производными функции $f(x)$ в той же точке, при x, близких к a, будет хорошо приближать $f(x)$. В этом случае вместо $f(x)$ можно рассматривать указанный многочлен, а для приближенного вычисления $f(x)$ при заданном x достаточно вычислить его значения при том же x.

Таким образом получим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a).$$

где $r_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))$ – остаточный член формулы в форме Лагранжа.

Если $a=0$, то

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1$$

Разность между функцией f(x) и ее многочленом в правой части называют отклонением, которое выражается остаточным членом $r_n(x)$. Если рассматривать все больше и больше членов, то может оказаться, что отклонение стремится к нулю, но не для всякой функции и не для любого значения x.

Однако существует широкий класс функций, для которых остаточный член действительно стремится к нулю при $n\to\infty$, по крайней мере для значений, заполняющих некоторый промежуток, содержащий точку a. Именно для таких функций формула Тейлора позволяет вычислить f(x) с любой степенью точности.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$, то из формулы Тейлора следует:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right]$$

Число слагаемых является неограниченным. Выражение в правой части формулы называют рядом Тейлора, а функцию f(x) – суммой этого ряда.

2.2.3 Приближение функций тригонометрическими многочленами

Тригонометрическими многочленами n-го порядка называют функцию вида:

$$u_n(x)=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+...+a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Рассмотрим сумму первых n членов ряда Фурье:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Эта сумма является тригонометрическим многочленом n-го порядка, начальный член которого представлен в виде $a_0/2$. В качестве приближения функции f(x) с периодом 2π тригонометрическим многочленом берут указанную сумму $S_n(x)$, точке $f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$.

Естественно, при этом возникает вопрос об ошибке приближения. Если функция с периодом 2π имеет при всех x производную $f^{(r)}(x)$порядка r, удовлетворяющая неравенству $\left|f^{(r)}(x)\right|\le\alpha$, то можно доказать, что ошибка приближения выражается следующим неравенством:

$$0 \le \left| f(x) - S_n(x) \right| \le C_r L \ln \frac{r}{n}; \lim_{n \to \infty} \frac{r}{n} = 0,$$

где C_r– постоянная, зависящая только от r. Отсюда видно, что ошибка стремится к нулю при n стремящемуся к бесконечности. Причем тем быстрее, чем больше производных имеет функция.

Для аналитических функций оценка будет еще лучше. Аналитической в области определения называют функцию, которая разлагается в сходящейся к ней степенной ряд в области определения. Для функция, аналитических на всей действительной оси, оценка приближения выражается неравенством: $\left| f(x) - S_n(x) \right| < Cg^n$.C и g- положительные постоянные, связанные с f(x), q<1.

И обратно, если для функции f(x) выполняется это неравенство, то она является аналитической. Можно утверждать: если функция разлагается в сходящийся к ней ряд Фурье, то отсюда еще не следует, что она аналитическая. Однако f(x) будет аналитической, если уклонение от суммы первых n членов ее ряда Фурье имеет оценку, точкее. убывает быстрее члена убывающей геометрической прогрессии.

Чтобы обеспечить приближение произвольных непрерывных периодических функций тригонометрическими многочленами, пользуются так называемыми методами суммирования рядов Фурье. В качестве тригонометрических многочленов, приближающих функцию, вместо сумм Фурье рассматривают некоторые их видоизменения. Один из таких методов состоит в следующем: для непрерывной периодической функции находят ее ряд Фурье, который может быть и не сходящимся, а затем составляется среднее арифметическое первых частичных сумм этого ряда:

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1}, \text{где } S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Среднее арифметическое $\sigma_n(x)$ называют суммой Фейерan-го порядка, соответствующей данной функции f(x). Название этих сумм дано в честь венгерского математика ЛипотаФейера (1880-1959), который первым предложил указанный метод. Он доказал, что $\sigma_n(x) \to f(x)$ $при$ $n \to \infty$, если f(x) – непрерывная функция.

2.3Алгоритм Ремеза

В подавляющем большинстве случаев задача о точном разыскании для заданной непрерывной функции $f(x)$ полинома$P_n^*(f;x)$ ее наилучшего приближения вида

$$P_n^*(x) = \sum_{0}^{n} c_k \varphi_k(x) \tag{2.2}$$

является неразрешимой, это представляет большой практический и теоретический интерес в задачах построения алгоритмов, которые дают возможность строить для

заданной функции $f(x) \in C$ полиномы$P_n(f;x)$, которые сколь угодно мало отличаются от полинома ее наилучшего приближения $P_n^*(f;x)$.
Одним из таких алгоритмов является алгоритм Е. Я. Ремеза, который во многих отношениях является наиболее удачным. Он получил всеобщее признание и повсеместно используется на практике для приближенного представления непрерывных функций многочленами. При этом мы основное внимание уделяем теоретической стороне этого алгоритма, отсылая читателя, интересующегося практической стороной, к монографии [3].

В случае приближения непрерывной на [a,b] функции $f(x)$ при помощи полиномов вида (2.2), образованных, отправляясь от чебышевской системы функций $\{\varphi_k(x)\}_0^n$, этот алгоритм состоит из следующей последовательности операций.
1-й шаг. Возьмем на [a, b] произвольную систему из n + 2 различных точек

$$a \le x_0^1 < x_1^1 < \cdots < x_n^1 < x_{n+1}^1 \le b, \qquad (2.3)$$

построим полином $\mathrm{P}_n^1(\mathrm{x})$ наилучшего приближения функции $f(x)$ на точках системы $\{x_k^1\}_0^{n+1}$ и, учитывая, что $f(x_k^1) - \mathrm{P}_n^1(x_k^1)$ =const, k = 0,1,…,n+1, положим

$$f(x) - \mathrm{P}_n^1(x) = r_n^1(x), \left|r_n^1(x_k^1)\right| = \underline{E_n^1}, \qquad (2.4)$$
$$\|r_n^1(x)\| = \max_{a \le x \le b} |f(x) - P_n^1(x)| = \overline{E_n^1}.$$

2-й шаг. Заметим сначала, что так как величина $E_n(f)$ наилучшего приближения функции f(x) на всем сегменте всегда не меньше наилучшего приближения $\underline{E_n^1}$ этой функции на системе точек $\{x_k^1\}_0^{n+1}$ то $\underline{E_n^1} \le E_n(f)$. С другой стороны, если бы оказалось, что $\overline{E_n^1} = E_n(f)$ то отсюда следовало бы, что уже полином P_n(x) является полиномом наилучшего приближения функции f(x), и наш процесс был бы окончен. Поэтому мы будем считать, что $\underline{E_n^1} \le E_n(f)$, так что

$$\underline{E_n^1} \le E_n(f) < \overline{E_n^1}. \qquad (2.5)$$

По теореме Вейерштрасса существует точка x*∈ [a, b] такая, что

$$\left|r_n^1(x_k^1)\right| = \overline{E_n^1}$$

После сделанных замечаний заменим систему точек (2) системой $\{x_k^2\}_0^{n+1}$, где

$$a \le x_0^1 < x_1^1 < \cdots < x_n^1 < x_{n+1}^1 \le b\ , \qquad (2.3')$$

так, чтобы при этом при всех k = 0, 1, ..., n + 1 выполнялись следующие три условия:

$$signr_n^1(x_{k+1}^2) = signr_n^1(x_k^2),$$
$$\left|r_n^1(x_k^2)\right| \ge \underline{E_n^1}, \qquad \max_k \left|r_n^1(x_k^2)\right| = \overline{E_n^1}. \qquad (2.6)$$

Чтобы удовлетворить всем этим условиям, достаточно в системе (2.3) заменить одну точку точкой x*, а все остальные оставить неизмененными и полученную систему принять за систему $\{x_k^2\}_0^{n+1}$. Сам процесс замены можно осуществить, например, следующим образом. Если точка x* находится между двумя точками

x_k^1иx_{k+1}^1 системы (2.3), то через x* следует заменить ту из этих точек, в которой разность r_n^1(x) имеет тот же знак, что и в точке x*. Есчи же точка x* находится левее всех точек системы (2.3) и $signr_n^1(x^*) = signr_n^1(x_0^1)$, то мы точку x_0^1 заменим на x*; если же при этом $signr_n^1(x^*) = -signr_n^1(x_0^1)$, то мы в качестве системы $\{x_k^2\}_0^{n+1}$ возьмем систему точек $x^*, x_0^1, x_1^1, \dots, x_n^1$. В случае, когда точка x* расположена правее всех точек системы (2.3), поступаем аналогично.

Заметим после этого, что на практике желательно побольше точек $\{x_k^1\}_0^{n+1}$ заменить новыми точками (одной из которых является точка x*) так, чтобы при этом, во-первых, выполнялись все условия и, во-вторых, чтобы значения $\left|r_n^1(x_k^2)\right|$ были по возможности большими.

После получения системы (2.3') строим полином π_n^1(x) наилучшего приближения функции $r_n^1(x) = f(x) - P_n^1(x)$ на этой системе и полагаем

$$P_n^2(x) = P_n^1(x) + \pi_n^1(x),$$
$$f(x) = P_n^2(x) = r_n^1(x) - \pi_n^1(x) = r_n^2(x), \qquad (2.4')$$
$$\left|r_n^2(x_k^2)\right| = \underline{E_n^2}, \qquad \|r_n^2(x)\| = \overline{E_n^2}.$$

3-й шаг. Полагая, как и при втором шаге, что $E_n(f) < \overline{E_n^2}$ так, что

$$\underline{E_n^2} \le E_n(f) < \overline{E_n^2}. \qquad (2.5')$$

мы совершенно так же, как и при втором шаге, заменим систему (2.3') системой $\{x_k^3\}_0^{n+1}$, где

$$a \le x_0^3 < x_1^3 < \dots < x_n^3 < x_{n+1}^3 \le b \qquad (2.3'')$$

так, чтобы при всех допустимых k = 0, 1, 2, ..., n+1 вышолнялись условия

$$signr_n^2(x_{k+1}^3) = -signr_n^2(x_k^3)$$
$$\left|r_n^2(x_k^3)\right| = \underline{E_n^2} \qquad (2.6')$$
$$\max_k \left|r_n^2(x_k^3)\right| = \overline{E_n^2}$$

После этого строим полином π_n^2 (x) наилучшего приближения функции r_n^2(x) на системе (2.5) и полагаем

$$P_n^3(x) = P_n^2(x) + \pi_n^2(x),$$
$$f(x) = P_n^3(x) = r_n^2(x) - \pi_n^2(x) = r_n^2(x), \qquad (2.4'')$$
$$\left|r_n^3(x_k^3)\right| = \underline{E_n^3}, \qquad \|r_n^3(x)\| = \overline{E_n^3}$$

и так далее.

Теорема 1. Алгоритм Ремеза сходится со скоростью геометрической прогрессии в том смысле, что для любой непрерывной на [a, b] функции $f(x)$ найдутся числа $A > 0$ и $0 < q < 1$ такие, что уклонения $\overline{E_n^k}$ от функции $f(x)$ полиномов $P_n^k(x)$, построенных по этому алгоритму, будут удовлетворять неравенствам

$$\overline{E_n^k} - E_n(f) = \left\|f(x) - P_n^k(x)\right\| - E_n(f) \le Aq^k, \qquad k = 1,2,\dots, \qquad (2.7)$$

где через $E_n(f)$ обозначена величина наилучшего приближения на [a, b] функции $f(x)$ при помощи полиномов P_n(x) вида (2.2).

Для доказательства теоремы 1 потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $f(x) \in C[a,b]$ и$\{x_i\}_0^{n+1}$ — некоторая система точек на [a, b]. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется$\delta > 0$ такое, что как только наименьшее из расстояний между точками системы $\{x_i\}_0^{n+1}$ будет меньше δ, наилучшее приближение функции $f(x)$ на этой системе при помощи полиномов вида (2.2) будет меньше ε.

Доказательство леммы 1. Действительно, предположим от противного, что лемма 1 не верна. Тогда найдется последовательность систем $\left\{x_i^k\right\}_0^{n+1}, k = 1, 2, \ldots$, в которых наименьшее из расстояний между точками стремится к нулю при $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty} \min_{i\neq j}\left\{\left|x_i^k - x_j^k\right|\right\} = 0, \tag{2.8}$$

и в то же время наилучшее приближение функции $f(x)$ на каждой из этих систем является большим ε. Выберем из последовательности $\left\{x_i^k\right\}_0^{n+1}$ подпоследовательность систем $\left\{x_i^{kj}\right\}_0^{n+1}$ так, чтобы в них каждая из n+2 компонент x_i^{kj} при$j \to \infty$ стремилась к некоторой точке x_i^0 предельной системы

$$x_0^0 \leq x_1^0 \leq x - 2^0 \leq \cdots \leq x_{n+1}^0,$$

В силу условия (2.8) полученная система необходимо состоит меньше чем из n+2 различных точек $\overline{x_i^0}$

$$\overline{x_0^0} < \overline{x_1^0} < \cdots < \overline{x_{m+1}^0}, \quad m < n. \tag{2.9}$$

Но в таком случае существует полином $\overline{P_n^0}$ вида (2.2), который интерполирует функцию $f(x)$ во всех $m + 2 \leq n + 1$ точках системы (2.9). В силу непрерывности этот полином будет отличаться от $f(x)$ во всех точках системы $\left\{x_i^{kj}\right\}_0^{n+1}$ при достаточно больших j меньше чем на ε, ибо каждая из точек x_i при достаточно больших j отстоит от одной из точек системы (2.9) сколь угодно близко. Из полученного противоречия следует справедливость леммы 1.

Доказательство теоремы 1.

Так как из равенств (2.6), (2.6') и т. д.

$$\underline{E_n^l} = \frac{1}{\sum_0^{n+1}\left|D_l^v\right|}\left|\sum_{j=v}^{n+1}(-1)^j\right| D_l^j \left|r_n^{l-1}\left(x_j^l\right)\right| = \tag{2.10}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\left|D_l^j\right|}{\sum_0^{n+1}\left|D_l^j\right|}\left|r_n^{l-1}(x_j^l)\right|, \qquad l = 2,3, \ldots,$$

где

$$D_l^j = D\begin{pmatrix} \varphi_0 \varphi_1 \cdots \ \varphi_j \ \ \varphi_{j+1} \cdots \ \varphi_n \\ x_0^l \, x_1^l \ldots x_{j-1}^l \, x_{j+1}^l \ldots x_{n+1}^l \end{pmatrix} \neq 0 \tag{2.11}$$

при $x_{k+1}^l = x_k^l, \ k = 0,1, \ldots, n$, то, учитывая, что в силу (2.6), (2.6'), … и (2.5), (2.5'), и так далее,

$$\max_j \left|r_n^l\left(x_j^{l+1}\right)\right| = \overline{E_n^l} > E_n(f) \geq \underline{E_n^l},$$

получим

$$\underline{E_n^{l+1}} - \underline{E_n^l} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\left|D_l^j\right|}{\sum_{v=0}^{n+1}\left|D_{l+1}^v\right|}\left(\left|r_n^l\left(x_j^{l+1}\right)\right| - \underline{E_n^l}\right) \geq$$

$$\geq \frac{\min_j\left|D_{l+1}^j\right|}{\sum_{v=0}^{n+1}\left|D_{l+1}^j\right|}\left(\overline{E_n^l} - \underline{E_n^l}\right) > 0 \qquad (2.12)$$

и, значит,

$$0 \leq \underline{E_n^1} < \underline{E_n^2} < \cdots < E_n(f). \qquad (2.13)$$

Из этих неравенств на основании леммы 1 следует, что существует число $c > 0$ такое, что при всех $l \geq 2$ будут иметь место неравенства

$$x_{k+1}^l - x_k^l > c,\ k = 0,1,\dots,n,\ l = 2,3,\dots \qquad (2.14)$$

Поскольку точки x_k^1 системы (2.3) являются все различными, то число $c > 0$ можно взять таким, чтобы неравенства (2.14) были справедливы также при $l = 1$. Благодаря этим неравенствам мы, учитывая непрерывность функций $\varphi_k(x)$, заключаем, что найдутся положительные числа m и M такие, что при всех j и l будет

$$m < \left|D_l^j\right| = \left|D\begin{pmatrix}\varphi_0\varphi_1\cdots\ \varphi_j\ \ \varphi_{j+1}\cdots\ \varphi_n \\ x_0^l\ x_1^l\ \dots x_{j-1}^l\ x_{j+1}^l\ \dots x_{n+1}^l\end{pmatrix}\right| < M, \qquad (2.15)$$

$$j = 0,1,\dots,n+1, \qquad l = 1,2,\dots$$

Из неравенств (2.12) и (2.15) следует, что

$$E_n(f) - \underline{E_n^l} - \left(E_n(f) - \underline{E_n^{l+1}}\right) = \underline{E_n^{l+1}} - \underline{E_n^l} \geq \frac{m}{(n+1)M}\left(\overline{E_n^l} - \underline{E_n^l}\right) \qquad (2.16)$$

и значит, что

$$E_n(f) - \underline{E_n^{l+1}} \leq E_n(f) - \underline{E_n^l} - \frac{m}{(n+1)M}\left(\overline{E_n^l} - \underline{E_n^l}\right) = q\left(E_n(f) - \underline{E_n^l}\right), \qquad (2.17)$$

где

$$q = 1 - \frac{m}{(n+1)M},\ 0 < q < 1. \qquad (2.18)$$

На основании (2.17) последовательно находим

$$E_n(f) - \underline{E_n^l} \leq q\left(E_n(f) - \underline{E_n^{l-1}}\right) \leq \cdots \leq q^{l-1}\left(E_n(f) - \underline{E_n^1}\right) = aq^l, \qquad (2.19)$$

где

$$a = \frac{1}{q}\left(E_n(f) - \underline{E_n^1}\right). \qquad (2.20)$$

Подставив оценку (2.19) в (2.20), получаем

$$\overline{E_n^l} - \underline{E_n^l} \leq \frac{(n+2)M}{m} cq^l = Aq^l, \qquad (2.21)$$

$$A = \frac{(n+2)M}{m} c, \qquad l = 1,2,\dots$$

Из этого неравенства в качестве следствия вытекает неравенство (2.7). Этим теорема 1 доказана.

Следствие. Так как в силу (2.21) $\left\|f(x)-P_n^l(x)\right\| = \overline{E_n^l} \to E_n(f)$ при$l \to \infty$, то вследствие единственности полинома $P_n^*(f;x)$ наилучшего приближения функции $f(x)$ видим, что $P_k^l(x) \to P_n^*(f;x)$ при $l \to \infty$.

Выводы по разделу

Рассмотрены виды аппроксимации функцийи изучили алгоритм Ремеза для нахождения многочлена наилучшего приближения.

Одним из важных методов приближения является формула Тейлора. С помощью нее можно приблизить функцию, если она удовлетворяет определенным условиям, другой функцией вида $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, называемой алгебраическим многочленом, где $a_k -$ постоянные числа, не зависящие от x. Алгебраический многочлен – просто устроенная функция, для вычисления которой по данным коэффициентам a_k и данному значению x требуется применение только трех арифметических действий (сложения, вычитания и умножения). Простота вычисления на практике чрезвычайно важна. Современные машины работают весьма быстро, но могут делать лишь сравнительно простые операции. Они могут производить арифметические действия с весьма большими числами, но не могут до конца осуществить бесконечный процесс перехода переменной величины к пределу. Например, машина не может точно вычислить lgx, но можно ее приблизить с помощью многочлена $P(x)$ с необходимой степенью точности, а затем вычислить многочлен.

Теорией приближения функций многочленами занимались такие математики, как Лаплас, Фурье, Эйлер, Понселе иЧебышев. Созданная Чебышевым теория приближения функций интенсивно развивалась и развивается сейчас в трудах российских и иностранных учёных. В терминах этой теории отражена одна из фундаментальных идей математики– приближение (замена) сложных объектов более простыми и удобными. Эта идея является основной в вопросах взаимосвязей математики и практики, что стимулировало развитие теории приближения функций в прошлом и, надо полагать, обеспечит к ней интерес в будущем.

3 ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА IРОДА

3.1 Введение

Эллиптическим интегралом первого рода называется функция

$$K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}dx$$

Аргумент kэтой функции называется модулем эллиптического интеграла и обычно принимает значенияk:$0 \le k < 1$.Поскольку во многих выражениях

модульk встречается какk^2, то есть ещё определение эллиптического интеграла через модуль$m = k^2$:

$$K(m) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-mx^2}}dx, \quad m: 0 \le m < 1.$$

Число$m_1 = 1 - m$ называется дополнительным модулем.

При $m \to 1$ функция $K(m)$ имеет логарифмическую особенность, то есть

$$K(m) \sim \frac{\ln\left(\frac{16}{m_1}\right)}{2}.$$

Для наглядности построимприближаемую функцию и её приближение в пакете Maple.Для построения двумерных графиков служит функция plot.На рисунке 3.1 видим,что асимптотическое приближение довольно похоже и неплохо отражает свойства приближаемой функции.

>plot([EllipticK(sqrt(m)),log(16/(1-m))/2],m=0..0.99999,titlefont=[COURIER, 14],labels=[m, F],color=[red,blue],linestyle=[1,3],thickness=2,legend=["Полный эллиптический интеграл 1 рода","асимптотическое приближение"], title="Полный эллиптический интеграл 1 рода \n и его асимптотическое приближение");

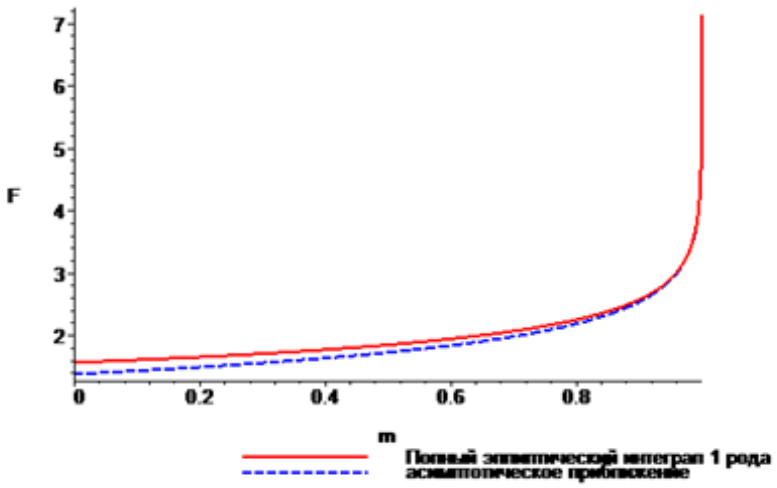

Рисунок 3.1– Полный эллиптический интеграл 1 рода и его асимптотическое приближение

Возникает мысль, что при приближении функции $K(m)$ во всей области определения одними многочленами не обойтись, и надо привлекать логарифмическую функцию.

Будем приближать функцию $K(m)$ выражением

$$L(m_1) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k m_1^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k m_1^k\right) \ln\frac{1}{m_1}.$$

Здесь n – степень многочленов$P_n(m_1)$ и $O_n(m_1)$ в выражении

$$L(m_1) = P_n(m_1) + O_n(m_1)\ln\frac{1}{m_1}.$$

Желательно также отразить в выражении $L(m_1)$ простейшие свойства приближаемой функции.

1. $K(0) = \frac{\pi}{2}$,,то есть $L(1) = \frac{\pi}{2}$.Отсюда должно выполняться равенство $\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{\pi}{2}$.
2. $K(m) \sim \frac{\ln\left(\frac{16}{m_1}\right)}{2} = 2\ln 2 + \frac{\ln\left(\frac{1}{m_1}\right)}{2}$. Чтобы удовлетворить этому соотношению, следует положить$b_0 = \frac{1}{2}$и $a_0 = 2\ln(2)$.

Чтобы удовлетворить первому равенству, выразим коэффициент a_n через остальные коэффициенты многочлена $P_n(m_1)$ с учётом равенства $a_0 = 2\ln(2)$ и представим $P_n(m_1)$ в виде

$$P_n(m_1) = 2\ln(2) + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(m_1^k - m_1^n)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)m_1^n.$$

Запишем искомое приближение в виде

$$K(m) = 2\ln(2) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\left(m_1^k - m_1^n\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)m_1^n + \frac{1\ln\left(\frac{1}{m_1}\right)}{2}$$
$$+ \left(\sum_{k=1}^{n} b_k m_1^k \ln\left(\frac{1}{m_1}\right)\right) + \varepsilon(m).$$

и перенесём неизвестные коэффициенты налево, а известные функции направо:

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\left(m_1^k - m_1^n\right)\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k m_1^k \ln\left(\frac{1}{m_1}\right)\right)$$
$$= -2\ln(2) - \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)m_1^n - \frac{\ln\left(\frac{1}{m_1}\right)}{2} + K(m) - \varepsilon(m).$$

Таким образом, исходная задача эквивалентна следующей: найти $2n-1$ коэффициентовa_k и b_k в выражении $\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\left(m_1^k - m_1^n\right)\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k m_1^k \ln\left(\frac{1}{m_1}\right)\right)$для приближения функции$F(m) = -2\ln(2) - \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)m_1^n - \frac{\ln\left(\frac{1}{m_1}\right)}{2} + K(m)$.

3.2 Случай**n**=1

Рассмотрим случай степени многочленов n=1. Заведём численные процедуры и построим график промежуточной функции$F(m)$.

```
>n:=1;
```

$$n := 1$$

```
>K:=m->EllipticK(sqrt(m)); # процедура для  функции K(m)
```

$$K := m \to \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m})$$

*>F:=m->-2*ln(2)-(Pi/2-2*ln(2))*(1-m)^n-ln(1/(1-m))/2+K(m); # промежуточная приближаемая функция*

$$F := m \to -2\ln(2) - \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m)^n - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + \mathrm{K}(m)$$

>leftside:=add(a[k]((1-m)^k-(1-m)^n),k = 1 .. n-1)+add(b[k]*(1-m)^k*ln(1/(1-m)),k = 1 .. n); # выражениедлялевойчасти*

$$leftside := b_1\,(1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right)$$

*>errf:=(-2*ln(2)-(Pi/2-2*ln(2))*(1-m)^n-ln(1/(1-m))/2+K(m))-leftside; # функцияошибок. Точноеминусприближённое*

$$errf := -2\ln(2) - \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m}) - b_1\,(1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right)$$

>plot(F,0.. 1,title="промежуточнаяфункция F(m), n=1", labels=[m,F],titlefont=[COURIER, 14], color=[red],thickness=2);

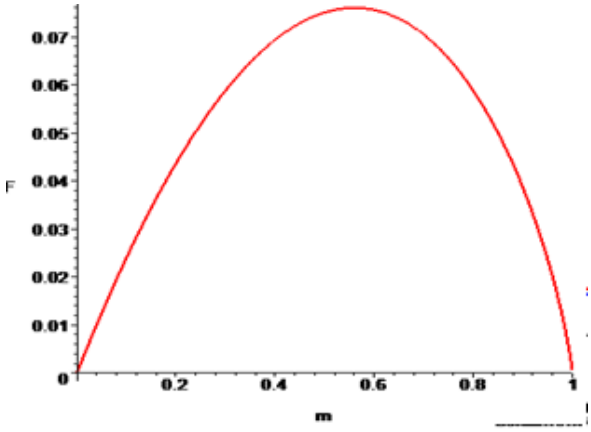

Рисунок 3.2 – Промежуточная функция F(m)

Чтобы приблизительно определить искомый коэффициент b_1, построим графикфункции при этом коэффициенте

*>plot(((1-m)*ln(1/(1-m)),m=0..1),color=[red],titlefont=[COURIER, 14],labels=[m, F], thickness=2,*
*title=typeset("множитель", "(1-m)*ln(1/(1-m))", "прикоэффициенте ", b[1]));*

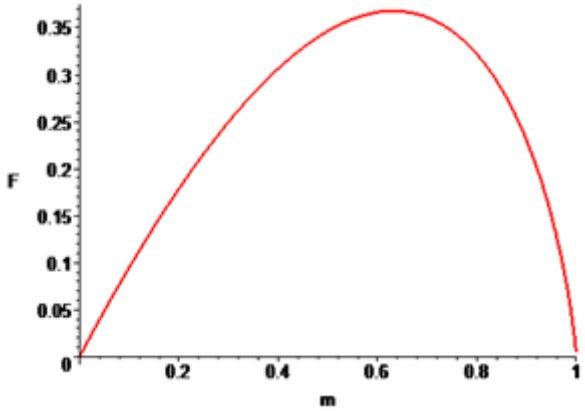

Рисунок 3.3 – Множитель (1-m)*ln(1/(1-m)) при коэффициенте b[1]

Чтобы функция $(1-m)\ln\left(\frac{1}{m_1}\right)$ была как можно больше похожа на$F(m)$, её надо уменьшить приближительно в 10 раз. Возьмём коэффициент 0.09.

>plot([F(m)- 0.09(1-m)*ln(1/(1-m))],m=0..1, color=[red] ,titlefont=[COURIER, 14],labels=[m, F],thickness=2, title="начальнаяфункцияошибок");*

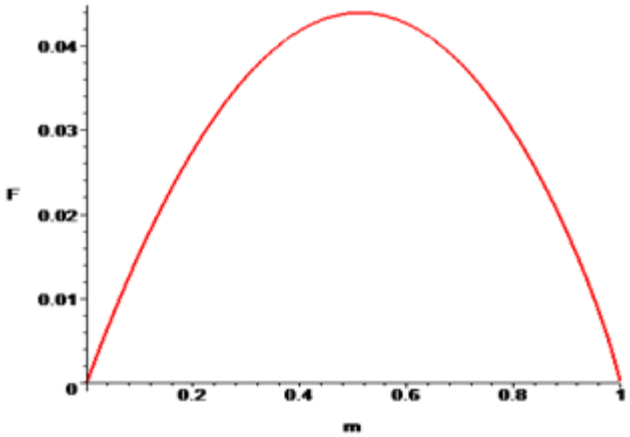

Рисунок 3.4 – Начальная функция ошибок

Берём из графика первоначальный набор критических точек: c[1]=0.38 и c[2]=0.94.

>c:=[0.38, 0.94];

$$c := [0.38, 0.94]$$

Чтобы уравнять отклонения в этих критических точках, решаем систему линейного уравнения

>sys:={b[1](1-c[1])*ln(1/(1-c[1])) -d = F(c[1]),*
b[1](1-c[2])*ln(1/(1-c[2])) +d = F(c[2])};*

$$sys := \{0.1688046430\ b_1 + d = -1.88\ \ln(2) - 0.03000000000\ \pi + 1.414047139,$$
$$0.2963821967\ b_1 - d = -0.76\ \ln(2) - 0.3100000000\ \pi + 1.524880488\}$$

относительно b[1] и d:

>solb1d:=solve(sys,{b[1],d});

$$solb1d := \{d = 0.001849215179, b_1 = 0.08787344055\}$$

Строимкривуюошибок

>errf;

$$-2\ln(2) - \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m}) - b_1(1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right)$$

>plot(subs(solb1d, errf) ,m=0..1,color=[red] ,thickness=2,titlefont=[COURIER, 14],labels=[m, F], title="функцияошибокпослепервогошага");

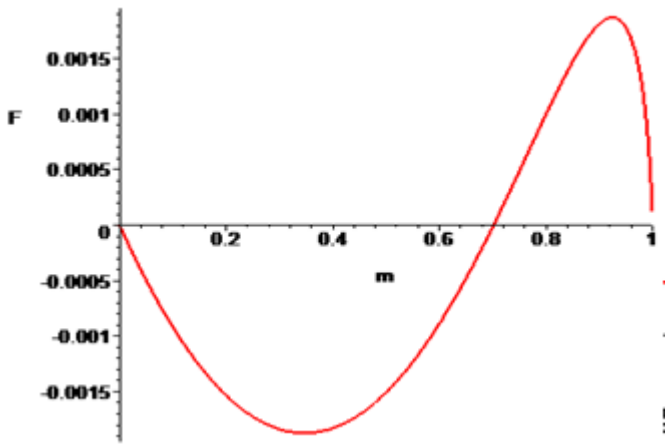

Рисунок 3.5 – функция ошибок после первого шага

Для следующих шагов надо находить экстремумы кривой ошибок.

>with(Optimization); # подключили процедуры для поиска экстремума

$$[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPSolve, QPSolve]$$

>errf1:=subs(solb1d,eval(errf)); # выражение для ошибки после первого шага

$$errf1 := -2\ln(2) - \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m}) - 0.08787344055(1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right)$$

>del:=0.05; #половина длины отрезка для поиска экстремума, около имеющейся критической точки.
ncrit:=nops(c); # количество критических точек

$$del := 0.05$$

$$ncrit := 2$$

>c;

$$[0.38, 0.94]$$

>min1:=Minimize(errf1, m= c[1]-del .. c[1]+del); # в левойточке

$$min1 := [-0.00186706012438000004, [m = 0.346298017440362594]]$$

>max2:=Maximize(errf1, m= c[2]-del .. c[2]+del);

$$max2 := [0.00187937747150000008, [m = 0.924653202325161238]]$$

Проведём ещё несколько итераций. Новые критические точки:

>c:=[rhs(min1[2][1]), rhs(max2[2][1])];

$$c := [0.346298017440362594, 0.924653202325161238]$$

>sys:={b[1](1-c[1])*ln(1/(1-c[1])) -d = F(c[1]),*
b[1](1-c[2])*ln(1/(1-c[2])) +d = F(c[2])};*

$$sys := \{0.1948207379\ b_1 + d = -1.849306405\ \ln(2) - 0.03767339885\ \pi + 1.419194939,\ 0.2778911416\ b_1 - d = -0.692596035\ \ln(2) - 0.3268509913\ \pi + 1.529455852\}$$

>solb1d:=solve(sys,{b[1],d}); # новыекоэффициенты

$$solb1d := \{d = 0.00187430091, b_1 = 0.0878994946\}$$

>errf2:=subs(solb1d,eval(errf)); # функция ошибок после второй итерации

$$errf2 := -2\ln(2) - \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m}) - 0.08789949461(1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right)$$

>min1:=Minimize(errf2, m= c[1]-del .. c[1]+del); max2:=Maximize(errf2, m=c[2]-del .. c[2]+del);

$$min1 := [-0.00187430388227000002, [m = 0.346774036561923460]]$$
$$max2 := [0.00187430536793000000, [m = 0.924835399257894708]]$$

Следующая итерация:

>c:=[rhs(min1[2][1]), rhs(max2[2][1])];

$$c := [0.346774036561923460, 0.924835399257894708]$$

>sys:={b[1](1-c[1])*ln(1/(1-c[1])) -d = F(c[1]),*
b[1](1-c[2])*ln(1/(1-c[2])) +d = F(c[2])};*

$$sys := \{0.1945316160\ b_1 + d = -1.849670799\ \ln(2) - 0.03758230035\ \pi + 1.419135913,\ 0.2781646301\ b_1 - d = -0.693548073\ \ln(2) - 0.3266129817\ \pi + 1.529392062\}$$

>solb1d:=solve(sys,{b[1],d}); # новыекоэффициенты

$$solb1d := \{d = 0.00187430403, b_1 = 0.08789949594\}$$

>errf3:= subs(solb1d,eval(errf));

$$errf3 := -2\ln(2) - \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m}) - 0.08789949594(1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right)$$

>min1:=Minimize(errf3, m= c[1]-del .. c[1]+del); max2:=Maximize(errf3, m=c[2]-del .. c[2]+del);

$$min1 := [-0.00187430425221000010, [m = 0.346774779556783596]]$$
$$max2 := [0.00187430510920999992, [m = 0.924835460866417546]]$$

Ещеоднаитерация:

>c:=[rhs(min1[2][1]), rhs(max2[2][1])]:
>sys:={b[1](1-c[1])*ln(1/(1-c[1])) -d = F(c[1]),*
b[1](1-c[2])*ln(1/(1-c[2])) +d = F(c[2])}:*
>solb1d:=solve(sys,{b[1],d}); # новыекоэффиенты

$$solb1d := \{d = 0.00187430484, b_1 = 0.08789949743\}$$

>errf4:= subs(solb1d,eval(errf)):

>min1:=Minimize(errf4, m= c[1]-del .. c[1]+del); max2:=Maximize(errf4, m=c[2]-del .. c[2]+del);

$$min1 := [-0.00187430466668000008, [m = 0.346773578381379400]]$$
$$max2 := [0.00187430481933999996, [m = 0.924835683393024022]]$$

Остановимся на данной итерации, из-за незначительных колебаний коэффициентов.

Вывод.При степени многочленов n=1 приближение к эллиптическому интегралу первого рода такое:

$$K(m) = 2\ln(2) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right) m_1 + \ln\left(\frac{1}{m_1}\right)\left(\frac{1}{2} + .87899497e\text{-}1\ \ m_1\right) + \varepsilon(m).$$

При этом $|\varepsilon(m)| < 0.0019$. Для проверки построим функцию ошибок.

*> erfun1:= K(m) - (2*ln(2)+(Pi/2-2*ln(2))*(1-m)+ ln(1/(1-m))*(1/2.+.8789949700e-1*(1-m)));*

$$erfun1 := \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m}) - 2\ln(2) - \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m) - \ln\left(\frac{1}{1-m}\right)(0.5878994970 - 0.08789949700m)$$

>plot([erfun1,-0.0019,0.0019], m=0..1,titlefont=[COURIER, 14], linestyle=[1,3,3],title="Функцияошибок K(m)-L(m1)\nпристепенимногочленов n=1", color=[red,blue,green],thickness=2);

На рисунке 3.6 хорошо видно, что мы действительно нашли наилучшее приближение.

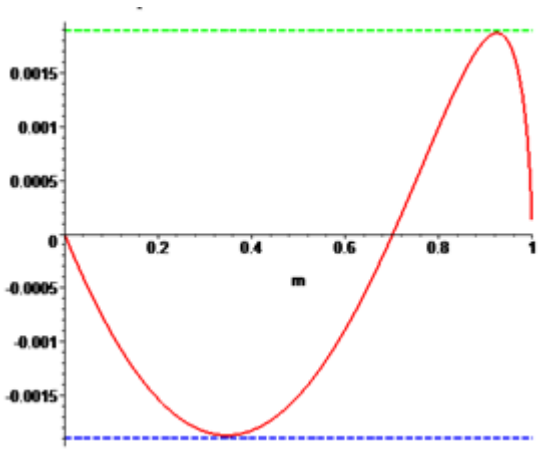

Рисунок 3.6 – Функция ошибок K(m)-L(m1) при степени многочленов n=1

3.3Случай n=2

>n:=2:

Рассмотрим приближаемую функцию.

> F2:=F(m); # выражение промежуточной функции с подстановкой степени многочленов

$$F2 := -2\ln(2) - \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m)^2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m})$$

>plot(F2,m=0..1,color=[red],titlefont=[COURIER, 14],labels=[m, F],thickness=2, title="промежуточная функция F(m), n=2");

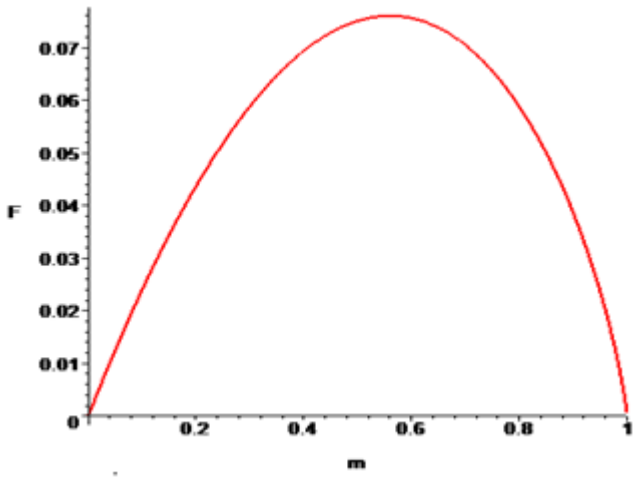

Рисунок 3.7 –Промежуточная функция F(m), n=2

Приближающее выражение.

>a:='a'; # почистили переменную a с коэффициентами

$a := a$

>leftside2:=add(a[k]((1-m)^k-(1-m)^n),k = 1 .. n-1)+add(b[k]*(1-m)^k*ln(1/(1-m)),k = 1 .. n); # выражениедлялевойчасти с подстановкой n*

$$leftside2 := a_1\,(1-m-(1-m)^2) + b_1\,(1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + b_2\,(1-m)^2\ln\left(\frac{1}{1-m}\right)$$

Здесь искомых коэффициентов три. Подобрать начальное приближение, глядя на график, уже не получится.Применим метод наименьших квадратов для первоначального приближения коэффициентов.Для этого составим переопределённую систему относительно искомых коэффициентов.

>nn:=50; # количество промежутков на [0,1]. Несколько десятков достаточно.

$$nn := 50$$

>k:='k': # почистили, так как эта буква уже использовалась

*>mm:=[1/nn*k $ k=1..nn-1]: # сетка аргументов. Нуль и единицу не включили. Нуль ничего не даёт, а F2(1) не вычисляется*

Команда LSSolve требует, чтобы система уравнений была представлена в виде списка невязок. Подготавливаем систему.

>eq:=[0 $ nn-1]: # поэтому завели место в виде списка

записываем систему в список eq

>for k to nn-1 do

eq[k]:=eval(leftside2-F2,m=mm[k]);

od:

>lssol2:=LSSolve(eq); # и теперь решили систему

$$lssol2 := [0.686209797322096104\ \ 10^{-8}, [a_1 = 0.114648069435042410\ ,$$

$$b_1 = 0.120387613397896248\ , b_2 = 0.0270052536021773634\ ]]$$

Строим график кривой ошибок для начального приближения.

>errf0:=eval(leftside2,lssol2[2])- F2 ;

$$errf0 := 0.114648069435042410 - 0.114648069435042410\,m - 0.114648069435042410\,(1-m)^2 + 0.120387613397896248\,(1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 0.027005253602177363\,(1-m)^2\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 2\ln(2) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m)^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) - \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m})$$

>plot(errf0 ,m=0..1, color=[red],thickness=2, titlefont=[COURIER, 14],labels=[m, F], title="функция ошибок для начального приближения");

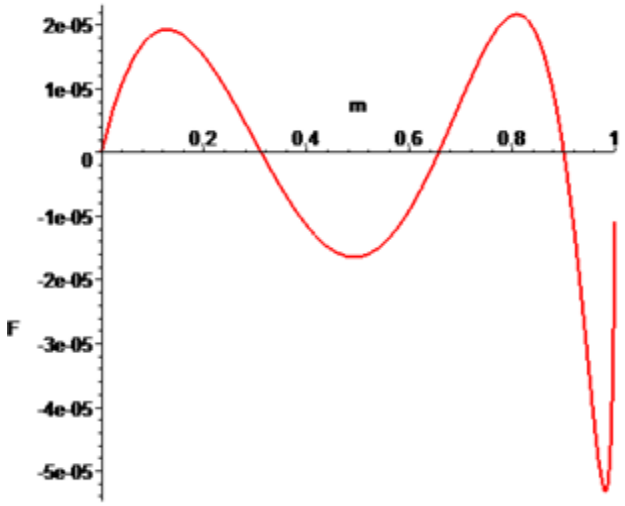

Рисунок 3.8– функция ошибок для начального приближения

Как и ожидалось, экстремальных точек на единицу больше числа параметров, то есть 4. Глядя на график, определяем промежутки, в которых будем искать экстремумы.

>diaps:=[0.05 .. 0.2, 0.4 .. 0.55, 0.65 .. 0.88, 0.9 .. 0.99];

$$diaps := [0.05 .. 0.2, 0.4 .. 0.55, 0.65 .. 0.88, 0.9 .. 0.99]$$

Получаем критические точки.

*>c:=[0$2*n]; # здесь будет список крит точек*

$$c := [0, 0, 0, 0]$$

>extr:=Maximize(errf0,m=diaps[1]); c[1]:=rhs(extr[2][1]);

$$extr := [0.000019285356379999998, [m = 0.127113273634704622]]$$

$$c_1 := 0.12711327363470462$$

>extr:=Minimize(errf0,m=diaps[2]); c[2]:=rhs(extr[2][1]);

$$extr := [-0.000016436996005999996, [m = 0.491955197508517572]]$$

$$c_2 := 0.49195519750851757$$

>extr:=Maximize(errf0,m=diaps[3]); c[3]:=rhs(extr[2][1]);

$$extr := [0.000021697438750599984, [m = 0.808496565129265378]]$$

$$c_3 := 0.80849656512926537$$

>extr:=Minimize(errf0,m=diaps[4]); c[4]:=rhs(extr[2][1]);

$$extr := [-0.0000532599489626940014\ ,\ [m = 0.980717819419178127\ ]]$$

$$c_4 := 0.980717819419178127$$

Составляем систему относительно новых коэффициентов

>k:='k';

$k := k$

>sys:={eval(leftside2 = F2+d(-1)^k,m=c[k]) $ k=1.. 2*n};*

$$sys := \{0.01891037811\ a_1 + 0.07613711496\ b_1 + 0.001468089601\ b_2 = -1.999256395\ \ln(2) - 0.0001859012444\ \pi + 1.397789867 + d,$$
$$0.1109554893\ a_1 + 0.1186684994\ b_1 + 0.1035841580\ b_2 = -0.476137526\ \ln(2) - 0.3809656186\ \pi + 1.556657253 - d,$$
$$0.1548298693\ a_1 + 0.3165263631\ b_1 + 0.06061588578\ b_2 = -1.926652869\ \ln(2) - 0.01833678279\ \pi + 1.450532755 - d,$$
$$0.2499352812\ a_1 + 0.3440406454\ b_1 + 0.1747880617\ b_2 = -1.483780957\ \ln(2) - 0.1290547606\ \pi + 1.508725538 + d\}$$

>sol21:=solve(sys); #решили

$$sol21 := \{d = -0.00002785976072, a_1 = 0.1120916574, b_1 = 0.1213223884, b_2 = 0.02875545817\}$$

строим новый график ошибок

>errf1:=eval(leftside2,sol21)- F2 ;

$$errf1 := 0.1120916574 - 0.1120916574\ m - 0.1120916574\ (1-m)^2 + 0.1213223884\ (1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 0.02875545817\ (1-m)^2 \ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 2\ln(2) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m)^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) - \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m})$$

>plot(errf1,m=0..1,titlefont=[COURIER, 14],labels=[m, F],title="Функцияошибокпослепервойитерации. n=2", color=[red],thickness=2);

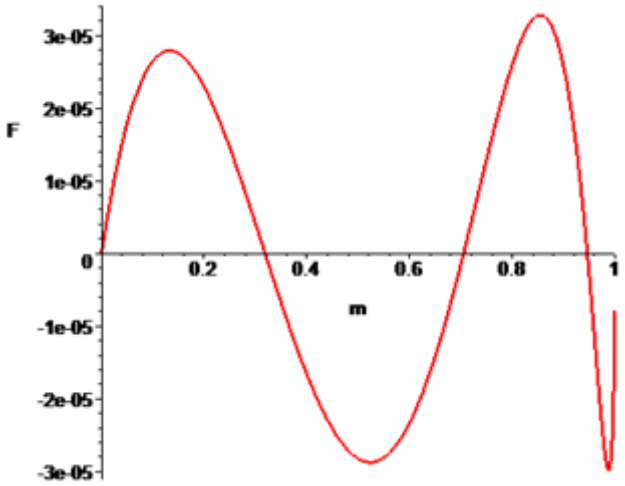

Рисунок 3.9 –Функция ошибок после первой итерации. n=2

Следующая итерация. Получаем критические точки.

>extr:=Maximize(errf1,m=diaps[1]); c[1]:=rhs(extr[2][1]);

$$extr := [0.0000278949450600000016 \quad , [m = 0.132421775295995581 \quad]]$$

$$c_1 := 0.13242177529599558$$

>extr:=Minimize(errf1,m=diaps[2]); c[2]:=rhs(extr[2][1]);

$$extr := [-0.000028727455460000014 \quad , [m = 0.523426828393763532 \quad]]$$

$$c_2 := 0.52342682839376353$$

>extr:=Maximize(errf1,m=diaps[3]); c[3]:=rhs(extr[2][1]);

$$extr := [0.000032802354966399984 \quad , [m = 0.854346449533757268 \quad]]$$

$$c_3 := 0.85434644953375726$$

>extr:=Minimize(errf1,m=diaps[4]); c[4]:=rhs(extr[2][1]);

$$extr := [-0.000029884351276507001 4 \quad , [m = 0.987371602895023570 \quad]]$$

$$c_4 := 0.98737160289502357$$

Составляем систему относительно новых коэффициентов

>sys:={eval(leftside2 = F2+d(-1)^k,m=c[k]) $ k=1.. 2*n};*

$$sys := \{ 0.01246892069 \ a_1 + 0.05520891816 \ b_1 + 0.0006972001419 \ b_2 = -1.999681047 \ \ln(2) - 0.00007973820665 \ \pi + 1.394469455 + d,$$
$$0.1148862487 \ a_1 + 0.1232391385 \ b_1 + 0.1069195930 \ b_2 = -0.494616048 \ \ln(2) - 0.3763459880 \ \pi + 1.556043594 - d,$$
$$0.1244385937 \ a_1 + 0.2806051218 \ b_1 + 0.04087113227 \ b_2 = -1.957570086 \ \ln(2) - 0.01060747838 \ \pi + 1.439343240 - d,$$
$$0.2494511837 \ a_1 + 0.3532045842 \ b_1 + 0.1683278289 \ b_2 = -1.545756024 \ \ln(2) - 0.1135609940 \ \pi + 1.503880907 + d \}$$

>sol22:=solve(sys); # решили

$$sol22 := \{ d = -0.00002985671594, a_1 = 0.1119675957, b_1 = 0.1213493462, b_2 = 0.02887604099 \}$$

>errf2:=eval(leftside2,sol22)- F2 ;

$$errf2 := 0.1119675957 - 0.1119675957 \ m - 0.1119675957 \ (1-m)^2 + 0.1213493462 \ (1-m) \ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 0.02887604099 \ (1-m)^2 \ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 2\ln(2) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m)^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) - \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m})$$

>plot(errf2,m=0..1,titlefont=[COURIER, 14],labels=[m, F],title="Функцияошибокпослевторойитерации. n=2",color=[red],thickness=2);

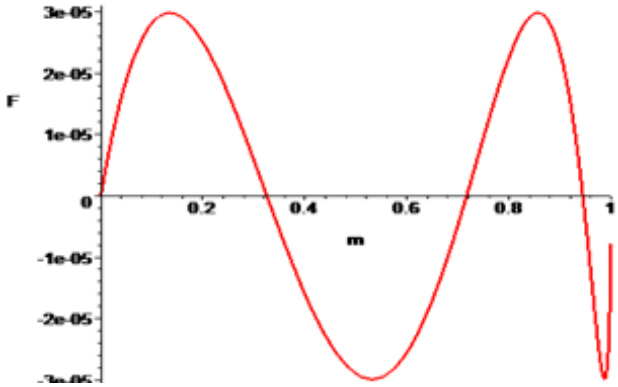

Рисунок 3.10 – Функция ошибок после второй итерации. n=2

Новая итерация. Получаем критические точки.

```
>extr:=Maximize(errf2,m=diaps[1]); c[1]:=rhs(extr[2][1]);
```

$$extr := [0.0000298658028499999988 \ , [m = 0.135042472147030496 \ ]]$$

$$c_1 := 0.13504247214703049$$

```
>extr:=Minimize(errf2,m=diaps[2]); c[2]:=rhs(extr[2][1]);
```

$$extr := [-0.00002991722154400000016 \ , [m = 0.531646402379063243 \ ]]$$

$$c_2 := 0.53164640237906324$$

```
>extr:=Maximize(errf2,m=diaps[3]); c[3]:=rhs(extr[2][1]);
```

$$extr := [0.00002987187230210000006 \ , [m = 0.856631024978671274 \ ]]$$

$$c_3 := 0.85663102497867127$$

```
>extr:=Minimize(errf2,m=diaps[4]); c[4]:=rhs(extr[2][1]);
```

$$extr := [-0.00002986028265674200018 \ , [m = 0.987218112687710980 \ ]]$$

$$c_4 := 0.98721811268771098$$

```
>sys:={eval(leftside2 = F2+d*(-1)^k,m=c[k]) $ k=1.. 2*n}:
>sol23:=solve(sys); # решили
```

$$sol23 := \{d = -0.00002987522792, a_1 = 0.1119696500, b_1 = 0.1213486401, b_2 = 0.02887472709\}$$

```
>errf3:=eval(leftside2,sol23)- F2 ;
```

$$errf3 := 0.1119696500 - 0.1119696500\ m - 0.1119696500\ (1-m)^2 + 0.1213486401\ (1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 0.02887472709\ (1-m)^2 \ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 2\ln(2) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m)^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) - \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m})$$

Ещё итерация, чтобы экстремумы совпали с тремя знаками.

```
>extr:=Maximize(errf3,m=diaps[1]); c[1]:=rhs(extr[2][1]);
```

$$extr := [0.0000298745471399999996 \ , [m = 0.135079224118089646 \ ]]$$

$$c_1 := 0.13507922411808964$$

```
>extr:=Minimize(errf3,m=diaps[2]); c[2]:=rhs(extr[2][1]);
```

$$extr := [-0.00002987517075300000008 \ , [m = 0.531636467965753701 \ ]]$$

$$c_2 := 0.53163646796575370$$

```
>extr:=Maximize(errf3,m=diaps[3]); c[3]:=rhs(extr[2][1]);
```

$$extr := [0.00002987509160630000004 \ , [m = 0.856584802329369398 \ ]]$$

$$c_3 := 0.85658480232936939$$

```
>extr:=Minimize(errf3,m=diaps[4]); c[4]:=rhs(extr[2][1]);
```

$$extr := [-0.00002987464532892999986 \ , [m = 0.987213473741810232 \ ]]$$

$$c_4 := 0.98721347374181023$$

Совпали с 4 знаками.

```
>sys:={eval(leftside2 = F2+d*(-1)^k,m=c[k]) $ k=1.. 2*n}:
>sol24:=solve(sys); # решили
```

$$sol24 := \{d = -0.00002987422478, a_1 = 0.1119699203, b_1 = 0.1213485471, b_2 = 0.02887452875\}$$

```
>errf4:=eval(leftside2,sol24)- F2 ;
```

$$errf4 := 0.1119699203 - 0.1119699203\ m - 0.1119699203\ (1-m)^2 + 0.1213485471\ (1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 0.02887452875\ (1-m)^2\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 2\ln(2) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m)^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) - \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m})$$

В справочнике Стигана [1, с.405] $a := [1.3862944, .1119723, .725296e\text{-}1]$ и b=[0.5,0.1213478, 0.0288729].

Выполним еще несколько итераций.

```
>extr:=Maximize(errf4,m=diaps[1]): c[1]:=rhs(extr[2][1]):
>extr:=Minimize(errf4,m=diaps[2]): c[2]:=rhs(extr[2][1]):
>extr:=Maximize(errf4,m=diaps[3]): c[3]:=rhs(extr[2][1]):
>extr:=Minimize(errf4,m=diaps[4]): c[4]:=rhs(extr[2][1]):
>sys:={eval(leftside2 = F2+d*(-1)^k,m=c[k]) $ k=1.. 2*n}:
>sol25:=solve(sys); # решили
```

$$sol25 := \{d = -0.00002987622586, a_1 = 0.1119693849, b_1 = 0.1213487328, b_2 = 0.02887491674\}$$

```
>errf5:=eval(leftside2,sol25)- F2 ;
```

$$errf5 := 0.1119693849 - 0.1119693849\ m - 0.1119693849\ (1-m)^2 + 0.1213487328\ (1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 0.02887491674\ (1-m)^2\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 2\ln(2) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m)^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) - \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m})$$

```
>sol24-~sol25;
```

$$\{0 = -0.38799\ 10^{-6}, 0 = -0.1857\ 10^{-6}, 0 = 0.200108\ 10^{-8}, 0 = 0.5354\ 10^{-6}\}$$

```
>extr:=Maximize(errf5,m=diaps[1]): c[1]:=rhs(extr[2][1]):
>extr:=Minimize(errf5,m=diaps[2]): c[2]:=rhs(extr[2][1]):
>extr:=Maximize(errf5,m=diaps[3]): c[3]:=rhs(extr[2][1]):
>extr:=Minimize(errf5,m=diaps[4]): c[4]:=rhs(extr[2][1]):
>sys:={eval(leftside2 = F2+d*(-1)^k,m=c[k]) $ k=1.. 2*n}:
>c;
```

$$[0.135079399986960392, 0.531640648476487065, 0.856589012638370728, 0.987214812472514192]$$

```
>sol26:=solve(sys); # решили
```

$$sol26 := \{d = -0.00002987616525, a_1 = 0.1119693033, b_1 = 0.1213487649, b_2 = 0.02887497432\}$$

```
>errf6:=eval(leftside2,sol26)- F2 ;
```

$$errf6 := 0.1119693033 - 0.1119693033\ m - 0.1119693033\ (1-m)^2 + 0.1213487649\ (1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 0.02887497432\ (1-m)^2\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 2\ln(2) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m)^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) - \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m})$$

```
>sol25-~sol26;
```

$$\{0 = -0.5758\ 10^{-7}, 0 = -0.321\ 10^{-7}, 0 = -0.6061\ 10^{-10}, 0 = 0.816\ 10^{-7}\}$$

Ещёоднаитерация:

```
>extr:=Maximize(errf6,m=diaps[1]): c[1]:=rhs(extr[2][1]):
>extr:=Minimize(errf6,m=diaps[2]): c[2]:=rhs(extr[2][1]):
>extr:=Maximize(errf6,m=diaps[3]): c[3]:=rhs(extr[2][1]):
>extr:=Minimize(errf6,m=diaps[4]): c[4]:=rhs(extr[2][1]):
>c;
```

$$[0.135081501758788136\ ,\ 0.531641549062762064\ ,\ 0.856589660609938574\ ,\ 0.987215092945118666\ ]$$

```
>sys:={eval(leftside2 = F2+d*(-1)^k,m=c[k]) $ k=1.. 2*n}:
>sol27:=solve(sys); # решили
```

$$sol27 := \{d = -0.00002987622389, a_1 = 0.1119693756, b_1 = 0.1213487348, b_2 = 0.02887493051\}$$

```
>errf7:=eval(leftside2,sol27)- F2 ;
```

$$errf7 := 0.1119693756 - 0.1119693756\ m - 0.1119693756\ (1-m)^2 + 0.1213487348\ (1-m)\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 0.02887493051\ (1-m)^2 \ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + 2\ln(2) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln(2)\right)(1-m)^2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) - \mathrm{EllipticK}(\sqrt{m})$$

```
>sol26-~sol27;
```

$$\{0 = -0.723\ 10^{-7}, 0 = 0.5864\ 10^{-10}, 0 = 0.301\ 10^{-7}, 0 = 0.4381\ 10^{-7}\}$$

Различия в восьмом знаке между последними приближениями.
Недостающие a0,a2,b0 для последующей подстановки.

```
>a0a2b0:={a[0]=evalf( 2*ln(2)) , a[2]=evalf(eval(Pi/2-2*ln(2)-a[1], sol27)), b[0]=1/2     };
```

$$a0a2b0 := \{a_0 = 1.386294361\ ,\ a_2 = 0.0725325904\ ,\ b_0 = \frac{1}{2}\}$$

Выражениедляприближения

```
>approx2:=eval(     sum(a[k]*m[1]^k,k = 0 .. n)+sum(b[k]*m[1]^k,k = 0 .. n)*ln(1/m[1]),
a0a2b0 union sol27);
```

$$approx2 := 1.386294361 + 0.1119693756\, m_1 + 0.0725325904\, m_1^{\ 2} + \left(\frac{1}{2} + 0.1213487348\, m_1 + 0.02887493051\, m_1^{\ 2}\right)\ln\left(\frac{1}{m_1}\right)$$

У Стигана $a := [1.3862944, .1119723, .725296e\text{-}1]$ иb=[0.5,0.1213478, 0.0288729].
Различие в пятом знаке.
Строим кривую ошибок.

```
>plot([K(m)-eval(approx2,m[1]=1-m),3e-5,-3e-5],m=0..1,titlefont=[COURIER,    14],labels=[m,
F],linestyle=[1,3,3],title="Функцияошибокпристепенимногочленовn=2",color=[red,     blue,
green],thickness=2);
```

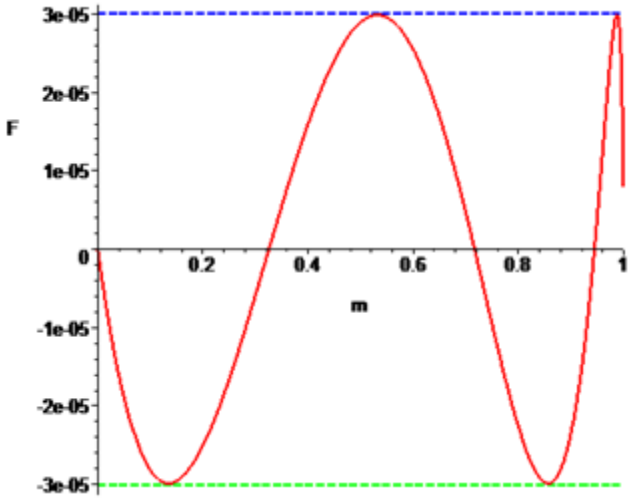

Рисунок 3.11 – Функция ошибок при степени многочленов n=2

Вывод.При степени многочленов n=2 приближение к эллиптическому интегралу первого рода такое:

$$K(m) = 1.386294361 + 0.1119696467m_1 + 0.0725323193m_1^2 - 1m_1^2 + \left(\frac{1}{2} + 0.1213486392m_1 + 0.02887473678m_1^2\right) * \ln\frac{1}{m_1} + \varepsilon(m).$$

При этом $|\varepsilon(m)| < 3 * 10^{-5}$.Подсчитанные коэффициенты отличаются от коэффициентов,полученных в справочнике Стигана начиная с 5-го знака.

3.4Случайn=3

>with(numapprox, infnorm);
>Digits:=30; # 10 не хватает, для уверенности

$$Digits := 30$$

>K:=m->EllipticK(sqrt(m)): # процедура для функции K(m)
*>F:=m->-2*ln(2)-(Pi/2-2*ln(2))*(1-m)^n-ln(1/(1-m))/2+K(m): # промежуточная приближаемая функция при n в виде переменной*
>n:=3; # назначилистепеньмногочленов

$$n := 3$$

Подготовка к вычислениям:

*>crit:=evalf([seq(cos(Pi/(4*n)*(2*n-k+1/2)), k=1..2*n)]): # начальный список критических точек, их 2*n штук. Преобразовали формулу, чтобы точки были в возрастающем порядке*

Места для списков:

*>bnd:=[0$2*n,1]: # здесь будут границы промежуточнойзнакоопределённости. Левая граница непременно нуль, правая - один.*
*>newcrit:=[0$ 2*n]: # для новых крит точек*
*>devs:=[0$ 2*n]: # для отклонений в крит точках*
*>sollistnew:=[0 $ 2*n]: # Здесь будет решение системы: d,a[1..n-1], b[1..n].*
>leftside:=add(a[k]((1-m)^k-(1-m)^n),k = 1 .. n-1)+add(b[k]*(1-m)^k*ln(1/(1-m)),k = 1 .. n): # выражение для левой части с подставленной данной степени n с участием пока неизвестных коэффициентов a[k] и b[k]*

*>errf:=(-2*ln(2)-(Pi/2-2*ln(2))*(1-m)^n-ln(1/(1-m))/2+K(m))-leftside: # Функция ошибок при подставленном данном n. Точная минус приближённая. Содержит неизвестные коэффициенты*

>maxiter:=10: # максимальное количество итераций

Итерации:

>foritertomaxiterdo # цикл по итерациям
k:='k': # почистили, а то вредничает
sollistold:=sollistnew; # последний список решения сделали предыдущим
sys:=[eval(errf+d(-1)^k,m=crit[k]) $ k=1.. 2*n]; # система относительно свободных коэффициентов и отклонения*
sol:=fsolve(sys); # решили систему
sollistnew:= eval([d,seq(a[k],k=1..n-1),seq(b[k],k=1..n)], sol); # новое решение в виде списка
errfiter:=eval(errf,sol); # выражение для функции ошибок для найденных коэффициентов на текущей итерации
dd:=eval(d,sol);
*# plot([errfiter, dd,-dd, [seq([crit[k],(-1)^(k+1)*dd], k=1..2*n)]] ,m=0..1, style=[line,line,line,point],symbol=circle,symbolsize=15, title=typeset("Функция ошибок после итерации ", iter, ",\n степень многочленов ", n));*
*forkto 2*n-1 dobnd[k+1]:=fsolve(errfiter,m=crit[k] .. crit[k+1]); od; # Границы промежутков знакоопределённости. Самая левая и самая правая уже назначены на 0 и 1.*
*forkto 2*ndo # определяем новые критические точки и соответствующие отклонения*
devs[k]:=infnorm(errfiter,m=bnd[k] .. bnd[k+1], 'r'); # в r находится абсцисса точки, в котором достигается максимальное отклонение на k-м промежутке
newcrit[k]:=r;
od;
VallePussenEst:=(max-min)(devs)/max(devs); # Оценка относительно погрешности наилучшего приближения по Валле-Пуссену
crit:=newcrit; # новые критические точки сделали текущими
print("итерация ", iter, "Оценка относительно погрешности наилучшего приближения по Валле-Пуссену ", evalf(VallePussenEst,3));
difoldnew:=sollistold-sollistnew;
print("разность решений предыдущенное - полученное ", evalf(difoldnew,3));
enddo:

"итерация·", 1, "Оценка·относ·погр·наил·прибл·по·Валле-Пуссену·", 0.336¶

"разность·решений·пред·-·полученное·", [0.465 10^{-6}, -0.0980, -0.0546, -0.125, -0.0600, -0.0109]¶

"итерация·", 2, "Оценка·относ·погр·наил·прибл·по·Валле-Пуссену·", 0.00907¶

"разность·решений·пред·-·полученное·", [0.134 10^{-6}, 0.0000373, 0.000104, -0.756 10^{-5}, -0.000113, -0.0000570]¶

"итерация·", 3, "Оценка·относ·погр·наил·прибл·по·Валле-Пуссену·", 0.493 10^{-5}¶

"разность·решений·пред·-·полученное·", [0.208 10^{-8}, -0.143 10^{-5}, -0.294 10^{-5}, 0.342 10^{-6}, 0.359 10^{-5}, 0.186 10^{-5}]¶

"итерация·", 4, "Оценка·относ·погр·наил·прибл·по·Валле-Пуссену·", 0.520 10^{-11}¶

"разность·решений·пред·-·полученное·", [0.913 10^{-12}, 0.700 10^{-9}, 0.341 10^{-8}, -0.132 10^{-9}, -0.273 10^{-8}, -0.197 10^{-8}]¶

"итерация·", 5, "Оценка·относ·погр·наил·прибл·по·Валле-Пуссену·", 0.656 10^{-17}¶

"разность·решений·пред·-·полученное·", [0.608 10^{-18}, -0.527 10^{-15}, 0.199 10^{-15}, 0.142 10^{-15}, 0.735 10^{-15}, -0.386 10^{-16}]¶

"итерация·", 6, "Оценка·относ·погр·наил·прибл·по·Валле-Пуссену·", 0.997 10^{-22}¶

"разность·решений·пред·-·полученное·", [-0.122 10^{-23}, -0.203 10^{-20}, -0.646 10^{-20}, 0.456 10^{-21}, 0.619 10^{-20}, 0.390 10^{-20}]¶

"итерация·", 7, "Оценка·относ·погр·наил·прибл·по·Валле-Пуссену·", 0.831 10^{-22}¶

"разность·решений·пред·-·полученное·", [0.576 10^{-29}, 0.250 10^{-25}, 0.650 10^{-25}, -0.593 10^{-26}, -0.689 10^{-25}, -0.403 10^{-25}]¶

"итерация·", 8, "Оценка·относ·погр·наил·прибл·по·Валле-Пуссену·", 0.316 10^{-21}¶

"разность·решений·пред·-·полученное·", [-0.110 10^{-28}, -0.212 10^{-25}, -0.616 10^{-25}, 0.487 10^{-26}, 0.620 10^{-25}, 0.375 10^{-25}]¶

"итерация·", 9, "Оценка·относ·погр·наил·прибл·по·Валле-Пуссену·", 0.316 10^{-21}¶

"разность·решений·пред·-·полученное·", [-0.473 10^{-28}, -0.104 10^{-24}, -0.310 10^{-24}, 0.242 10^{-25}, 0.306 10^{-24}, 0.190 10^{-24}]¶

"итерация·", 10, "Оценка·относ·погр·наил·прибл·по·Валле-Пуссену·", 0.216 10^{-21}¶

"разность·решений·пред·-·полученное·", [0.525 10^{-28}, 0.104 10^{-24}, 0.310 10^{-24}, -0.240 10^{-25}, -0.306 10^{-24}, -0.190 10^{-24}]¶

Получаем приближающую функцию.

Коэффициенты многочленов aa и bb. Оставшиеся коэффициенты получим по формулам $a_0 = 2\ln(2)$,a[n] = Pi/2-sum(a[k],k = 0 .. n-1) , b[0] = 1/2

```
>k:='k':
>aa[0]:= evalf(2*ln(2)):
>for k to n-1 do aa[k]:=subs(sol,a[k]); od:
>aa[n] := evalf(Pi/2-add(aa[k],k = 0 .. n-1)):
>bb[0]:=1/2:
>for k to n do bb[k]:=subs(sol,b[k]); od:
```

Вараженидляприближающейфункции

```
>approxfun:=add(aa[k]*m[1]^k, k=0..n) + add(bb[k]*m[1]^k, k=0..n) * ln(1/m[1]) :
>evalf(approxfun,8);
```

$$1.3862944 + 0.097932462\ m_1 + 0.054543307\ m_1^2 + 0.032026196\ m_1^3 + (0.50000000 + 0.12475084\ m_1 + 0.060119706\ m_1^2 + 0.010945576\ m_1^3)\ \ln\left(\frac{1}{m_1}\right)$$

```
>evalf(eval(d,sol), 3); # отклонение, быть может, со знаком
```

$$-0.602\ 10^{-6}$$

Строим кривую ошибок.

```
>plot([K(m)-eval(approxfun,m[1]=1-m),dd,-dd],m=0..1,title="Функция ошибок при степени многочленов n=3");
```

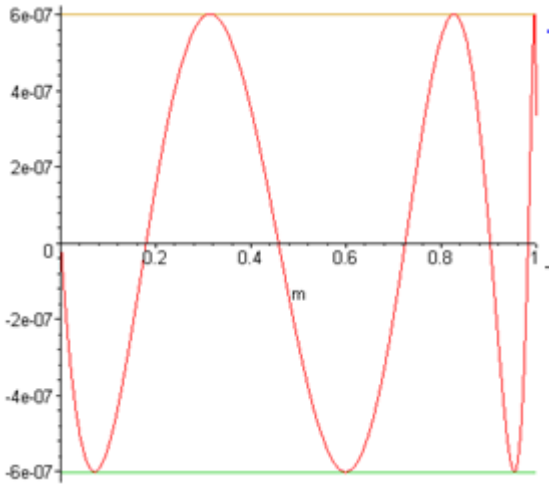

Рисунок 3.12 – Функция ошибок при степени многочленов n=3

Вывод.При степени многочленов n=3 приближение к эллиптическому интегралу первого рода такое:

$$K(m) = 1.3862944 + .97932462e\text{-}1\, m_1 + .54543307e\text{-}1\, m_1^{\,2}$$

$$+ .32026196e\text{-}1\, m_1^{\,3} + (.50000000 + .12475084\, m_1$$

$$+ .60119706e\text{-}1\, m_1^{\,2} + .10945576e\text{-}1\, m_1^{\,3})\, \ln\left(\frac{1}{m_1}\right) + \varepsilon(m)$$

При этом $|\varepsilon(m)| < .61\ 10^{(-6)}$.

В справочнике Стигана коэффициентов для многочлена при степени n=3нет, но такое приближение тоже может быть полезным.

Выводы по разделу

В данной главе были получены приближения эллиптического интеграла первого рода в виде $P_n(m_1) + O_n(m_1)\ln\frac{1}{m_1}$. При степенях n=1, n=2, n=3. Полученные коэффициенты совпали с коэффициентами из справочникаСтигана[2] с точностью до пяти значащих цифр.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой и во второй главе данной дипломной работы рассмотрены свойства эллиптических интегралов, их методы вычисления ивиды аппроксимации функций.

В третьей главе применили алгоритм Ремеза для приближения эллиптического интеграла первого рода в виде $P_n(m_1) + O_n(m_1)\ln\frac{1}{m_1}$.Получены приближающие формулы для степеней многочленов P_n и$O_n n = 1,\ n = 2,\ n = 3$. Алгоритм Ремеза хорошо разработан для приближения функции многочленом. В нашем случае нужно было приближать функцию линейной комбинацией многочлена и логарифма умноженного на степенные функции. К такому виду приближающих функций тоже применима идея алгоритма Ремеза. Но стандартных функций для этого нет. Поэтому нам пришлось напрямую программировать метод Ремеза для данного приближения. При этом получились формулы такие же, какие приведены в справочнике Стигана, но более с точными коэффициентами. Различие полученных коэффициентов начинается с 5- го знака.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

2 Амосов, А.А. Вычислительные методы для инженеров: учебное пособие / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. – М.: Высш. шк., 1994. – 544с.

3 Бахвалов, Н.С. Численные методы: учебное пособие для вузов / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М:Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 632 с.

4 Вержбицкий, В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.

5 Воеводин, В.В. Численные методы алгебры; теория и алгоритмы / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1966. – 512 с.

6 Гаврилюк, В.Т. Обобщение первого полиномиального алгоритма Е.Я. Ремеза для задач построения дробно-рациональных чебышевских приближений // Укр. мат. журн., 1964. –585 с.

7 Дьяконов, В. Maple 7: Учебный курс. – СПб.: Питер, 2002. – 672 с.

8 Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва Наука, 1977. – 366 с.

9 Журавский, А. Справочник по эллиптическим функциям / А. Журавский. –М: АН СССР, 1941. – 233 с.

10 Порханова, А.А. Чебышевская аппроксимация дробно-рациональными выражениями // Вычисл. математика в соврем, науч.-техн. прогрессе. Киев: Знание, 1974. –308с.

11 Ремез, Е.Я. К вопросу построения чебышевских приближений дробно-рационального и некоторых других типов // Укр. мат. журн., 1963. –411с.

12 Ремез, Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наукова думка, 1969. –624 с.

13 Роженко, А.И. Реализация некоторых алгоритмов теории приближения функций: Отчет / ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1982. – 327 с.

14 Самарский, А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 271 с.

15 Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004. – 798 с.

16 Хемминг, Р.В. Численные методы. Для научных работников и инженеров / Р.В. Хемминг. – М.: Наука, 1972. – 399 с.

17 Baker, G.A. Pade Approximants / G.A. Baker, P. Graves-Morris. – University Press.– 1996. – P. 538.

18 Legendre, A.M. Exercices du calcul integral / A.M. Legendre. – Courcier.– 1811. – P.384.