

# О ПРОБЛЕМЕ СОЗДАНИЯ БЕЗРАСХОДНОЙ ПОРШНЕВОЙ ПАРЫ ГРУЗОПОРШНЕВОГО МАНОМЕТРА С ПРОФИЛИРОВАННЫМ ЗАЗОРОМ И ВИБРАЦИЕЙ

*С.Г. Некрасов, А.С. Филимонов*

Рассмотрена работа поршневой пары грузопоршневого манометра, работающего в области малых давлений. Цилиндр поршневой пары выполнен из пьезоактивного материала, что обеспечивает создание колебаний в направлении зазора и реализацию так называемого вибронесущего смазочного слоя газа. Проведен численный и аналитический анализ характеристик смазочного слоя с целью оценки его метрологических и эксплуатационных характеристик, включая расчет расхода газа, величина которого является одной из основных характеристик, определяющих качество и цену поршневой пары. Показано, что при равномерной вибрации и профилировании зазора в виде малой конусности можно создать противорасход газа, величина которого, уже при степени сдавливания слоя газа 0,2, компенсирует рабочий расход газа грузопоршневого манометра (максимальный перепад 2,5 кПа).

**Введение.** Грузопоршневые манометры (ГПМ) применяются для точного воспроизведения единицы давления в лабораторных условиях при поверке средств измерения давления. Область воспроизведения давления для общепромышленного применения составляет от 600 кПа до 600 МПа. В лабораторной практике в редких случаях применяют ГПМ с верхним пределом измерений (ВПИ) до 2600 МПа. Погрешность воспроизведения давления достигает 0,005%. Конкуренции у ГПМ в сегменте воспроизведения давления от 600 кПа до 600 МПа практически нет. Отчасти этот сегмент с ними разделяют электронные контроллеры давления и калибраторы давления, но их применение не столь широко.

В области малых давлений наибольшим спросом пользуются задатчики давления серии Воздух и Метран-500 Воздух, у которых в диапазоне от 10 кПа до 1 МПа погрешность составляет 0,015%, а цена почти в 2 раза ниже, чем у ГПМ. Ниже давления 10 кПа погрешность различна в каждом поддиапазоне давлений и значительно хуже, чем 0,015%. Этот сегмент рынка является открытым.

Возникает задача использовать ГПМ для воспроизведения избыточных и дифференциальных давлений менее 10 кПа. Снижение цены может быть достигнуто увеличением зазора поршневой пары с 1...2 до 3...5 мкм с обеспечением нулевого расхода газа за счет использования специфических газодинамических эффектов. В частности, предлагается использовать известный эффект сдавливания слоя при колебаниях в направлении зазора и колебаниях типа бегущей волны.

Ниже проводится численный анализ и исследуется задача обеспечения «безрасходности» поршневой пары при колебаниях в направлении зазора, в которой противорасход газа обеспечивается только профилированием зазора в виде малой конусности.

**Функция зазора.** Рассмотрим центральное положение поршня в цилиндре, когда отсутствуют радиальные и угловые смещения. При этом введем в рассмотрение профилирование поверхностей поршня и цилиндра.

На рис. 1, а представлена схема поршневой пары с вибрирующими опорными поверхностями, в которой вибрация одной из поверхностей достигается использованием в конструкции пьезоактивного материала. Если использовать терминологию гидродинамической теории смазки, то такую поршневую пару можно классифицировать также как вибронесущий цилиндрический газовый подвес поршня.

Поршень здесь может не совершать вращательного движения, а устранение контактного трения между поршнем и цилиндром реализуется за счет создания вибронесущего газового слоя, возникающего вследствие вибрации стенки цилиндра с амплитудой  $h_{1v}$  в направлении зазора.

# Расчет и конструирование

Номинальный радиальный зазор  $\delta$  определяется разностью радиусов цилиндра  $R_{Ц}$  и поршня  $R_{П}$  ( $\delta = R_{Ц} - R_{П}$ ). В рассмотрение введена цилиндрическая система координат  $\bar{z}$ ,  $\bar{r}$ ,  $\theta$  с началом в геометрическом центре, делящем длину поршня  $L$  пополам.

На рис. 1, б представлен профилированный, в виде малой конусности, зазор между поршнем и цилиндром, где  $\bar{\varphi}_{П}/\bar{\varphi}_{Ц}$  - угол между образующими цилиндрической (до профилирования) и конической (после профилирования) поверхностями поршня/цилиндра,  $\bar{z}_{П}/\bar{z}_{Ц}$  - расстояние от начала координат до линии пересечения образующих поверхностей поршня/цилиндра. В общем случае, когда поршень и цилиндр изготовлены из разных материалов, угол поворота поршня  $\bar{\varphi}_{П}$  не равен углу поворота цилиндра  $\bar{\varphi}_{Ц}$ . Их можно найти, например, из решения соответствующей задачи теории упругости. При реализации низких перепадов давлений профилирование необходимо выполнять при изготовлении пары.

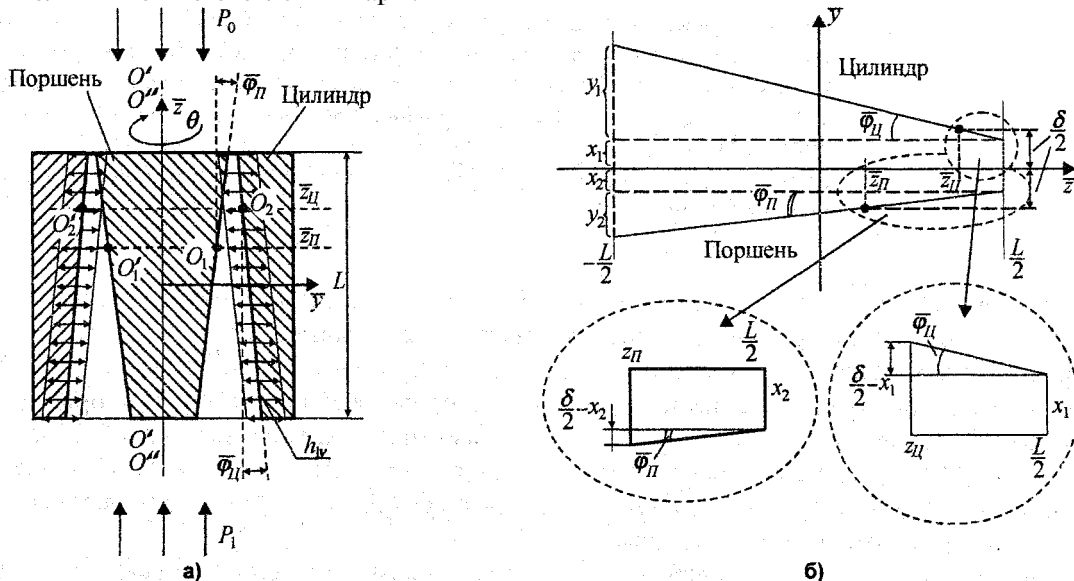


Рис. 1. Схема вибронесущего подвеса

Разделим номинальный радиальный зазор  $\delta$  пополам так, что в точках  $\bar{z} = \bar{z}_{Ц}$ ,  $\bar{z} = \bar{z}_{П}$  зазор составляет  $\delta/2$ . Получим выражения для зазора каждой из половин (см. рис. 1, б).

Рассмотрим часть зазора «со стороны цилиндра». При выводе используем линейность конического профиля и полагаем также, что известны значения зазора на краях: при  $\bar{z} = L/2$  получаем  $h = x_1$ , при  $\bar{z} = -L/2$  получаем  $h = x_1 + y_1$ . Тогда  $x_1 = \delta/2 - (L/2 - \bar{z}_{Ц}) \cdot \text{tg } \bar{\varphi}_{Ц}$  и  $y_1 = L \cdot \text{tg } \bar{\varphi}_{Ц}$ . В результате находим формулу для зазора со стороны цилиндра:

$$h_{Ц}(\bar{z}) = \delta/2 + (\bar{z}_{Ц} - \bar{z}) \cdot \text{tg } \bar{\varphi}_{Ц}. \quad (1)$$

Аналогично можно найти формулу для зазора «со стороны поршня»:

$$h_{П}(\bar{z}) = \delta/2 + (\bar{z}_{П} - \bar{z}) \cdot \text{tg } \bar{\varphi}_{П}. \quad (2)$$

Сумма выражений (1) и (2) дает полную функцию зазора, которая с учетом малости углов  $\bar{\varphi}_{П}$  и  $\bar{\varphi}_{Ц}$  может быть представлена в виде

$$h(\bar{z}) = \delta + (\bar{z}_{Ц} - \bar{z}) \cdot \bar{\varphi}_{Ц} + (\bar{z}_{П} - \bar{z}) \cdot \bar{\varphi}_{П}. \quad (3)$$

Очевидно, что влияние углов  $\bar{\varphi}_{Ц}$  и  $\bar{\varphi}_{П}$  на гидродинамические характеристики однотипно, поэтому положим для простоты, что  $\bar{z}_{П} = \bar{z}_{Ц}$  и  $\bar{\varphi}_{Ц} = \bar{\varphi}_{П}$ . Тогда (3) можно представить еще в более простом виде:

$$h(\bar{z}) = \delta + (\bar{z}_0 - \bar{z}) \cdot \bar{\gamma}_1, \quad (4)$$

где введены следующие обозначения:  $\bar{z}_0 = \bar{z}_{П}$ ,  $\bar{\gamma}_1 = 2 \cdot \bar{\varphi}_{П}$ .

С учетом вибрации стенок цилиндра запишем выражение для зазора (4) в безразмерном виде [1]:

$$H(z, \tau) = [1 + (z_0 - z) \cdot \gamma_1] + H_{1v} \cdot \cos(\tau), \tag{5}$$

где  $H = h/\delta$ ;  $z = \bar{z}/L$  ( $z \in [-B, B]$ ,  $B=1/2$ );  $H_{1v} = h_{1v}/\delta$ ;  $\tau = \nu \cdot t$ ;  $z_0 = \bar{z}_0/L$ ;  $\gamma_1 = \bar{\gamma}_1 \cdot L/\delta$ ;  $\nu$  – круговая частота вибрации цилиндра вдоль оси  $\bar{r}$ ;  $t$  – время.

Разработанная Пэнном [2] и развитая в ряде работ российских и зарубежных ученых асимптотическая теория вибронесущих газовых опор (ВНГО) позволяет достаточно точно для инженерных расчетов определять интегральные характеристики смазывающего слоя. Ранее получено решение для рассматриваемой задачи при больших перепадах давлений (до 6 МПа) [1, 3-5]. В данной работе приводятся результаты численного анализа (при конечном значении частоты сдвигивающего движения) и сравнение с аналитическими расчетами.

**Математическая модель. Для описания ламинарного изотермического осесимметричного течения газа в зазоре воспользуемся нестационарным уравнением Рейнольдса, полученным для вспомогательной функции  $\Psi = P \cdot H$  [5]:**

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{H(z, \theta, \tau)}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Psi^2(z, \theta, \tau) - \Psi^2(z, \theta, \tau) \cdot \frac{\partial}{\partial z} H(z, \theta, \tau) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{H(z, \theta, \tau)}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi^2(z, \theta, \tau) - \Psi^2(z, \theta, \tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} H(z, \theta, \tau) \right] = \Lambda_\omega \cdot \frac{\partial \Psi(z, \theta, \tau)}{\partial \tau}, \tag{6}$$

где  $P$  – давление в газовом слое, отнесенное к окружающему давлению  $P_0$ ;  $\tau = \omega \cdot t$  – безразмерное время;  $\omega$  – линейная частота;  $\Lambda_\omega = \frac{12 \cdot \mu \cdot \omega \cdot l^2}{P_0 \cdot \delta^2}$  – безразмерный частотный параметр;

$H(z, \theta, \tau)$  – безразмерная функция зазора по формуле (5).

Решение краевой задачи будем искать *методом возмущений*, поскольку краевая задача (6) является нелинейной:

$$\Psi^2(z, \theta, \tau) = \Psi_0^2(z, \tau) \Big|_{\chi=0} + \chi \cdot \Psi_\chi(z, \theta, \tau) \Big|_{\gamma=0} + \gamma \cdot \Psi_\gamma(z, \theta, \tau) \Big|_{\chi=0}, \tag{7}$$

где  $\chi$  – радиальное смещение поршня,  $\gamma$  – угловое смещение поршня.

Ограничиваясь первыми членами разложения полученного выражения в ряд Маклорена по параметрам  $\chi, \gamma$ , получаем:

$$\Psi(z, \theta, \tau) = \Psi_0(z, \tau) + \chi \cdot \frac{1}{2 \cdot \Psi_0(z, \tau)} \cdot \Psi_\chi(z, \theta, \tau) + \gamma \cdot \frac{1}{2 \cdot \Psi_0(z, \tau)} \cdot \Psi_\gamma(z, \theta, \tau). \tag{8}$$

Краевые условия для функции  $\Psi(z, \theta, \tau)$  как естественные границы области определения задачи представим в виде:

- со стороны подпоршневого давления:

$$\Psi(-B, \theta, \tau) = K_{cp1} \cdot H(-B, \theta, \tau); \tag{9}$$

- со стороны надпоршневого (окружающего) давления:

$$\Psi(B, \theta, \tau) = K_{cp2} \cdot H(B, \theta, \tau). \tag{10}$$

Для рассматриваемой конфигурации опоры справедливо условие периодичности по угловой координате  $\Psi(z, \theta + 2\pi, \tau) = \Psi(z, \theta, \tau)$ . В качестве начального условия (в нулевой момент времени) примем произведение распределения давления на часть зазора, не зависящую от времени:  $\Psi(z, \theta, \tau = 0) = P(z) \cdot H(z, \theta, \tau = 0)$ . Примем, что распределение давления  $P(z)$  в зазоре в начальный момент является л(от  $p_1$  до  $p_0$ ), тогда начальное условие примет вид

$$\Psi(z, \theta, \tau = 0) = \left( (K_{cp2} - K_{cp1}) \cdot z + \frac{K_{cp2} + K_{cp1}}{2} \right) \cdot ([1 + (z_0 - z) \cdot \gamma_1] + \chi \cdot \cos(\theta) + z \cdot \gamma \cdot \cos(\theta)), \tag{11}$$

где  $K_{cp1} = p_1 / p_0$ ;  $K_{cp2} = p_0 / p_0$ ,  $p_1$  – подпоршневое давление (рис. 1, а).

Для установившегося во времени процесса течения газа справедливо также условие периодичности во времени  $\Psi(z, \theta, \tau + 1) = \Psi(z, \theta, \tau)$ .

Как видим, полученная смешанная краевая задача является нелинейной, что вообще характерно для задач газовой смазки. Подставляя (7), (8), (5) в уравнение (6), получаем расширенное выражение для краевой задачи:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{[1 + (z_0 - z) \cdot \gamma_1] + \chi \cdot \cos(\theta) + z \cdot \gamma \cdot \cos(\theta) + H_{lv} \cdot \cos(\tau)}{2} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial z} \Psi_0^2(z, \tau) + \chi \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Psi_x(z, \theta, \tau) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Psi_y(z, \theta, \tau) \right) - \left( \Psi_0^2(z, \tau) + \chi \cdot \Psi_x(z, \theta, \tau) + \gamma \cdot \Psi_y(z, \theta, \tau) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( [1 + (z_0 - z) \cdot \gamma_1] + \chi \cdot \cos(\theta) + \right. \right. \\ & \left. \left. + z \cdot \gamma \cdot \cos(\theta) + H_{lv} \cdot \cos(\tau) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{[1 + (z_0 - z) \cdot \gamma_1] + \chi \cdot \cos(\theta) + z \cdot \gamma \cdot \cos(\theta) + H_{lv} \cdot \cos(\tau)}{2} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Psi_0^2(z, \tau) + \chi \cdot \Psi_x(z, \theta, \tau) + \gamma \cdot \Psi_y(z, \theta, \tau) \right) - \left( \Psi_0^2(z, \tau) + \chi \cdot \Psi_x(z, \theta, \tau) + \gamma \cdot \Psi_y(z, \theta, \tau) \right) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( [1 + (z_0 - z) \cdot \gamma_1] + \chi \cdot \cos(\theta) + z \cdot \gamma \cdot \cos(\theta) + H_{lv} \cdot \cos(\tau) \right) \right] = \Lambda_\omega \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} [\Psi_0(z, \tau) + \\ & \left. + \chi \cdot \frac{1}{2 \cdot \Psi_0(z, \tau)} \cdot \Psi_x(z, \theta, \tau) + \gamma \cdot \frac{1}{2 \cdot \Psi_0(z, \tau)} \cdot \Psi_y(z, \theta, \tau) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Собрав в уравнениях (12), (9), (10), (11) члены, содержащие нулевую составляющую разложения, получим краевую задачу для концентричного положения поршня в цилиндре:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{H_0(z, \tau)}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Psi_0^2(z, \tau) - \Psi_0^2(z, \tau) \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0(z, \tau) \right] = \Lambda_\omega \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_0(z, \tau), \quad (13)$$

где  $H_0$  – определяется выражением (5);

$$\Psi_0(z = -B, \tau) = K_{cp1} \cdot [1 + (z_0 + B) \cdot \gamma_1 + H_{lv} \cdot \cos(\tau)]; \quad (14)$$

$$\Psi_0(z = B, \tau) = K_{cp2} \cdot [1 + (z_0 - B) \cdot \gamma_1 + H_{lv} \cdot \cos(\tau)]. \quad (15)$$

$$\Psi_0(z, \tau = 0) = \left( (K_{cp2} - K_{cp1}) \cdot z + \frac{K_{cp2} + K_{cp1}}{2} \right) \cdot (1 + (z_0 - z) \cdot \gamma_1). \quad (16)$$

**Численная модель.** Для решения нелинейной смешанной краевой задачи (13)–(16) воспользуемся итерационной схемой с линеаризацией по методу Ньютона-Канторовича [6]:

$$L'_{\Psi_0}(\Psi_{n+1}) = L'_{\Psi_0}(\Psi_n) - L(\Psi_n), \quad (17)$$

где  $L'$  – производная пространственно-временного дифференциального оператора, определяемого уравнением (13);  $\Psi_0$  – начальное приближение для искомой функции давлений, определяемое уравнением (16);  $\Psi_n$  и  $\Psi_{n+1}$  – соответственно  $n$ -е и  $(n+1)$ -е итерационные приближения.

По определению [6], имеем:

$$L'_{\Psi_0}(\Psi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{L(\Psi_0 + \lambda \cdot \Psi) - L(\Psi_0)}{\lambda}. \quad (18)$$

Основываясь на (13), положим, что  $H_0(z, \tau) = H_0$ ;  $\Psi_0^2(z, \tau) = \Psi_0^2$ ;  $\Psi_0(z, \tau) = \Psi_0$ , тогда:

$$L(\Psi_0) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{H_0}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Psi_0^2 - \Psi_0^2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0 \right] - \Lambda_\omega \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_0. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), получим:

$$L'_{\Psi_0}(\Psi) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ H_0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_0 \cdot \Psi) - (2 \cdot \Psi_0 \cdot \Psi) \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0 \right] - \Lambda_\omega \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi. \quad (20)$$

Основываясь на (20), найдем выражения для  $L'_{\Psi_0}(\Psi_n)$ ,  $L'_{\Psi_0}(\Psi_{n+1})$  (см. формулу (17)):

$$L'_{\Psi_0}(\Psi_n) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ H_0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_0 \cdot \Psi_n) - (2 \cdot \Psi_0 \cdot \Psi_n) \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0 \right] - \Lambda_\omega \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_n; \quad (21)$$

$$L'_{\Psi_0}(\Psi_{n+1}) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ H_0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_0 \cdot \Psi_{n+1}) - (2 \cdot \Psi_0 \cdot \Psi_{n+1}) \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0 \right] - \Lambda_\omega \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_{n+1}. \quad (22)$$

Следуя выражению (19), найдем выражение для  $L(\Psi_n)$ :

$$L(\Psi_n) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{H_0}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Psi_n^2 - \Psi_n^2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0 \right] - \Lambda_\omega \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_n. \quad (23)$$

Подставляя (21)–(23) в (17) и приводя подобные слагаемые, получим развернутое итерационное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left[ H_0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_0 \cdot \Psi_{n+1}) - (2 \cdot \Psi_0 \cdot \Psi_{n+1}) \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0 \right] - \frac{\partial}{\partial \tau} (\Lambda_\omega \cdot \Psi_{n+1}) = \\ & = \frac{\partial}{\partial z} \left[ H_0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_0 \cdot \Psi_n) - (2 \cdot \Psi_0 \cdot \Psi_n) \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0 - \frac{H_0}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Psi_n^2 + \Psi_n^2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0 \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Дивергентная форма записи уравнения (24) позволяет переписать его в интегральной форме, воспользовавшись формулой Грина:

$$\begin{aligned} & \int_{(\Gamma)} \left( H_0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_0 \cdot \Psi_{n+1}) - (2 \cdot \Psi_0 \cdot \Psi_{n+1}) \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0 \right) \cdot d\tau - (\Lambda_\omega \cdot \Psi_{n+1}) \cdot dz = \\ & = \iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ H_0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_0 \cdot \Psi_n) - (2 \cdot \Psi_0 \cdot \Psi_n) \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0 - \frac{H_0}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Psi_n^2 + \Psi_n^2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0 \right] \cdot dz \cdot d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\Gamma$  - замкнутый кусочно-гладкий положительно ориентированный контур, ограничивающий в плоскости  $(z, \tau)$  область  $D$ .

В соответствии с идеей интегро-интерполяционного метода [7], используем интегральное уравнение (25) для построения консервативной разностной схемы. Введем в рассматриваемой части плоскости  $(z, \tau)$  сетку:

$$\omega = \left\{ (z_i, \tau_j), (z_{i+\frac{1}{2}}, \tau_{j+\frac{1}{2}}); z_{i+1} = z_i + \Delta z; z_{i+\frac{1}{2}} = z_i + \frac{1}{2} \cdot \Delta z; i = 0, 1, \dots, N-1; \right. \\ \left. \tau_{j+1} = \tau_j + \Delta \tau; \tau_{j+\frac{1}{2}} = \tau_j + \frac{1}{2} \cdot \Delta \tau; j = 0, 1, \dots, M-1 \right\}. \quad (26)$$

Линейное уравнение (24) является уравнением параболического типа. По аналогии с уравнением теплопроводности введем в рассмотрение аналог:

функции источника

$$\Phi = H_0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_0 \cdot \Psi_n) - (2 \cdot \Psi_0 \cdot \Psi_n) \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0 - \frac{H_0}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Psi_n^2 + \Psi_n^2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0; \quad (27)$$

функции потока

$$W = H_0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_0 \cdot \Psi_{n+1}) - (2 \cdot \Psi_0 \cdot \Psi_{n+1}) \cdot \frac{\partial}{\partial z} H_0; \quad (28)$$

функции энергии

$$E = \Lambda_\omega \cdot \Psi_{n+1}. \quad (29)$$

Сеточные функции источника  $\Phi$  и потока  $W$  будем относить к полупелым точкам  $(z_{i\pm\frac{1}{2}}, \tau_{j\pm\frac{1}{2}})$ , а функции энергии  $E$ , давлений  $P$  и зазора  $H$  - к целым узлам сетки  $(z_i, \tau_j)$ .

Применим интегральное уравнение (25) к контуру  $\Gamma$ , охватывающему элементарную ячейку разностной сетки (рис. 2). В результате получим:

$$\Delta z \cdot (E_i^{j+1} - E_i^j) - \Delta \tau \cdot \left( W_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \right) = -\Delta \tau \cdot \left( \Phi_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \right), \quad (30)$$

где  $W_{i\pm\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \bar{\Xi} \cdot W_{i\pm\frac{1}{2}}^{j+1} + (1 - \bar{\Xi}) \cdot W_{i\pm\frac{1}{2}}^j,$  (31)

$$\Phi_{i\pm\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \bar{\Xi} \cdot \Phi_{i\pm\frac{1}{2}}^{j+1} + (1 - \bar{\Xi}) \cdot \Phi_{i\pm\frac{1}{2}}^j, \quad (32)$$

$\bar{\Xi}$  – параметр, позволяющий варьировать интерполяцию сеточных функций ( $0 \leq \bar{\Xi} \leq 1$ ).

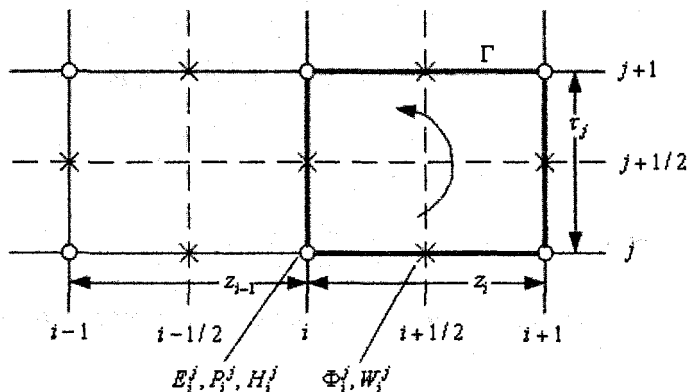


Рис. 2. Элементарная ячейка разностной сетки

Построим разностное уравнение для функции потока  $W$ . Проинтегрируем для этого обе части уравнения (28) по переменной  $z$  на отрезке  $z_{i-1} \leq z \leq z_i$ . Применяя «теорему о среднем» [8], получаем:

$$W_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta z} \left( \frac{(H_0)_{i-1} + (H_0)_i}{2} \cdot [(\Psi_0 \cdot \Psi_{n+1})_i - (\Psi_0 \cdot \Psi_{n+1})_{i-1}] - [(\Psi_0 \cdot \Psi_{n+1})_{i-1} + (\Psi_0 \cdot \Psi_{n+1})_i] \cdot [(H_0)_i - (H_0)_{i-1}] \right), \quad (33)$$

где  $\Delta z = z_i - z_{i-1}$ .

Производя аналогичные операции на отрезке  $z_i \leq z \leq z_{i+1}$  запишем выражение для  $W_{i+\frac{1}{2}}$ :

$$W_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta z} \left( \frac{(H_0)_i + (H_0)_{i+1}}{2} \cdot [(\Psi_0 \cdot \Psi_{n+1})_{i+1} - (\Psi_0 \cdot \Psi_{n+1})_i] - [(\Psi_0 \cdot \Psi_{n+1})_i + (\Psi_0 \cdot \Psi_{n+1})_{i+1}] \cdot [(H_0)_{i+1} - (H_0)_i] \right); \quad (34)$$

где  $\Delta z = z_{i+1} - z_i$ .

Аналогично находим разностную аппроксимацию функции источника  $\Phi$  (27) на выбранной сетке:

$$\Phi_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta z} \left( \frac{(H_0)_{i-1} + (H_0)_i}{2} \cdot [(\Psi_0 \cdot \Psi_n)_i - (\Psi_0 \cdot \Psi_n)_{i-1}] - [(\Psi_0 \cdot \Psi_n)_{i-1} + (\Psi_0 \cdot \Psi_n)_i] \cdot [(H_0)_i - (H_0)_{i-1}] - \frac{1}{4} \cdot [(H_0)_{i-1} + (H_0)_i] \cdot [(\Psi_n)_i^2 - (\Psi_n)_{i-1}^2] + \frac{(\Psi_n)_{i-1}^2 + (\Psi_n)_i^2}{2} \cdot [(H_0)_i - (H_0)_{i-1}] \right); \quad (35)$$

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta z} \left( \frac{(H_0)_i + (H_0)_{i+1}}{2} \cdot [(\Psi_0 \cdot \Psi_n)_{i+1} - (\Psi_0 \cdot \Psi_n)_i] - [(\Psi_0 \cdot \Psi_n)_i + (\Psi_0 \cdot \Psi_n)_{i+1}] \cdot [(H_0)_{i+1} - (H_0)_i] - \frac{1}{4} \cdot [(H_0)_i + (H_0)_{i+1}] \cdot [(\Psi_n)_{i+1}^2 - (\Psi_n)_i^2] + \frac{(\Psi_n)_i^2 + (\Psi_n)_{i+1}^2}{2} \cdot [(H_0)_{i+1} - (H_0)_i] \right). \quad (36)$$

Разностная аппроксимация функции энергии  $E$  (29) на выбранной сетке принимает вид:

$$E_i = \Lambda_\omega \cdot (\Psi_{n+1})_i. \quad (37)$$

Определим разности  $W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}$ ,  $\Phi_{i+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}}$ , на основании выражений (33), (34) и (35),

(36) соответственно. Подставляя полученные выражения в (30) и учитывая (31), (32), получаем развернутый конечно-разностный аналог дифференциального уравнения (13):

$$-(\Psi_{n+1})_{i-1}^{j+1} \cdot \bar{\Xi} \cdot A_{i-1}^{j+1} + (\Psi_{n+1})_i^{j+1} \cdot [\Delta z \cdot \Lambda_\omega - \bar{\Xi} \cdot C_i^{j+1}] - (\Psi_{n+1})_{i+1}^{j+1} \cdot \bar{\Xi} \cdot A_{i+1}^{j+1} = (\Psi_{n+1})_{i-1}^j \cdot (1 - \bar{\Xi}) \cdot A_{i-1}^j + (\Psi_{n+1})_i^j \cdot [\Delta z \cdot \Lambda_\omega + (1 - \bar{\Xi}) \cdot C_i^j] + (\Psi_{n+1})_{i+1}^j \cdot (1 - \bar{\Xi}) \cdot A_{i+1}^j -$$

$$-\Delta\tau \cdot \left[ \bar{\Xi} \cdot \left[ \Phi_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} - \Phi_{i-\frac{1}{2}}^{j+1} \right] + (1 - \bar{\Xi}) \cdot \left[ \Phi_{i+\frac{1}{2}}^j - \Phi_{i-\frac{1}{2}}^j \right] \right], \quad (38)$$

где  $A_{i-1} = \frac{\Delta\tau}{\Delta z} \cdot (\Psi_0)_{i-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot [-(H_0)_{i-1} + 3 \cdot (H_0)_i]$ ;  $A_{i+1} = \frac{\Delta\tau}{\Delta z} \cdot (\Psi_0)_{i+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot [3 \cdot (H_0)_i - (H_0)_{i+1}]$ ;

$$C_i = \frac{\Delta\tau}{\Delta z} \cdot (\Psi_0)_i \cdot \frac{1}{2} \cdot [-3 \cdot (H_0)_{i-1} + 2 \cdot (H_0)_i - 3 \cdot (H_0)_{i+1}] \quad (39)$$

Краевые условия, аналогично уравнению (38), приведем к 3-точечному виду [9]. Первое граничное условие реализуем на нижнем пространственном и  $(j+1)$ -м временном слое:

$$(\Psi_{n+1})_i^{j+1} = K_{cp1} \cdot (H_0)_i^{j+1}, \text{ при } i=1 \quad (40)$$

Второе граничное условие реализуется на верхнем пространственном и  $(j+1)$ -м временном слое:

$$(\Psi_{n+1})_i^{j+1} = K_{cp2} \cdot (H_0)_i^{j+1}, \text{ при } i=M \quad (41)$$

Начальное приближение, согласно (16), принимает вид

$$(\Psi_0)_i^0 = \left( (K_{cp2} - K_{cp1}) \cdot z_i + \frac{K_{cp2} + K_{cp1}}{2} \right) \cdot [1 + (z_0 - z_i) \cdot \gamma_1]. \quad (42)$$

Таким образом, для нелинейной смешанной краевой задачи (13)–(16) получен конечно-разностный аналог в виде основного уравнения (38), краевых условий (40), (41) и начального приближения (42).

**Решение задачи.** Суть решения конечно-разностного уравнения (38) состоит в нахождении установившегося во времени массива значений вспомогательной функции давлений  $\Psi_{n+1} = P \cdot H$ . Относительная погрешность установления процесса составляет  $10^{-8}$ . Далее находится массив мгновенных значений давлений по формуле:

$$P = \frac{\Psi_{n+1}}{H} - 1, \text{ где } P = P(\tau), H = H(\tau). \quad (43)$$

На основании выражения (43) ищется среднее за период колебаний цилиндра распределение давлений по длине слоя:

$$\bar{P}(z) = \int_0^1 P(z, \tau) \cdot d\tau. \quad (44)$$

Массовый расход газа ищем на основании полученной в [5] аналитической формулы с учетом установившегося массива значений вспомогательной функции давлений  $\Psi_{n+1}$ :

$$M_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = -\pi \cdot \left( \bar{\Xi} \cdot \left[ ((\Psi_{n+1})_i^{j+1})^2 \cdot B_i^{j+1} + ((\Psi_{n+1})_{i+1}^{j+1})^2 \cdot B_{i+1}^{j+1} \right] + (1 - \bar{\Xi}) \cdot \left[ ((\Psi_{n+1})_i^j)^2 \cdot B_i^j + ((\Psi_{n+1})_{i+1}^j)^2 \cdot B_{i+1}^j \right] \right), \quad (45)$$

где  $B_i = \frac{1}{\Delta z} \cdot [(H_0)_i - 3 \cdot (H_0)_{i+1}]$ ,  $B_{i+1} = \frac{1}{\Delta z} \cdot [3 \cdot (H_0)_i - (H_0)_{i+1}]$ .

Средний за период колебаний расход равен

$$\bar{M}(z) = \int_0^1 M(z, \tau) \cdot d\tau. \quad (46)$$

Выталкивающую поршень силу ищем на основе закона трения Ньютона с помощью аналитической формулы [5]:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \bar{\Xi} \cdot \left[ (\Psi_{n+1})_i^{j+1} \cdot D_i^{j+1} + (\Psi_{n+1})_{i+1}^{j+1} \cdot D_{i+1}^{j+1} \right] + (1 - \bar{\Xi}) \cdot \left[ (\Psi_{n+1})_i^j \cdot D_i^j + (\Psi_{n+1})_{i+1}^j \cdot D_{i+1}^j \right], \quad (47)$$

где  $D_i = \frac{1}{\Delta z} \cdot \frac{(H_0)_i + (H_0)_{i+1}}{2 \cdot (H_0)_i}$ ,  $D_{i+1} = \frac{1}{\Delta z} \cdot \frac{-(H_0)_i - (H_0)_{i+1}}{2 \cdot (H_0)_{i+1}}$ .

Далее производится интегрирование по времени  $\tau$ , координате  $z$  и координате  $\theta$ .

$$\bar{F} = K_\tau \cdot \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2} \tau_{MIN}}^{\frac{1}{2} \tau_{MAX}} \int F(z, \tau) \cdot d\tau \cdot dz \cdot d\theta, \quad (48)$$

где  $K_\tau = \delta / L$ .

**Некоторые результаты расчетов.** Результаты численного решения представлены на графиках (рис. 3-6). На этих же графиках приведены результаты расчета по асимптотической теории [5] (обозначены знаком «\*»). При построении графиков по численной модели использовались следующие параметры сетки: безразмерный частотный параметр  $\Lambda_\omega = 100$ , число точек по пространственной координате  $N_z = 120$ , число точек по временной координате  $N_t = 266$ , шаг по времени  $\Delta t = 0,001$  с, позволяющий варьировать интерполяцию сеточных функций  $\bar{\Xi} = 0,5$ .

**Распределение давлений.** На рис. 3 представлены зависимости распределений по длине поршня средних за период колебаний цилиндра давлений при нулевом угле конусности.

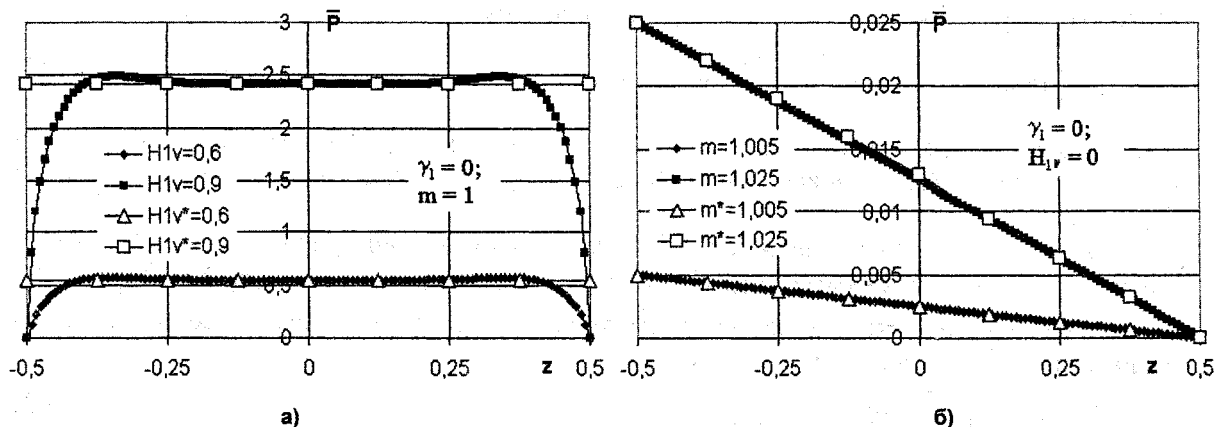


Рис. 3. Распределение давлений по длине поршня при нулевом угле конусности

В случае создания давлений за счет колебаний стенок цилиндра (см. рис. 3, а) происходит рост давления при увеличении амплитуды колебаний: от  $\bar{P} = 0,5$  при  $H_{1v} = 0,6$  до  $\bar{P} = 2,5$  при  $H_{1v} = 0,9$ . При отсутствии колебаний цилиндра (см. рис. 3, б) распределение давлений линейно. Известно [10], что в случае, когда рабочей средой является газ, распределение давлений должно быть нелинейным. Объяснением расхождения поведения графиков является то, что в данной работе речь идет о весьма малых давлениях (менее 2,5 кПа). При малых давлениях поведения газа становится аналогичным поведению жидкости, т. е. распределение давлений начинает линейно зависеть от координаты  $z$ . При больших перепадах давлений [5] (до 6 МПа) расчетные кривые хорошо согласуются с результатами работы [10].

На рис. 4 представлены зависимости распределений по длине поршня средних за период колебаний цилиндра давлений при наличии угла конусности.

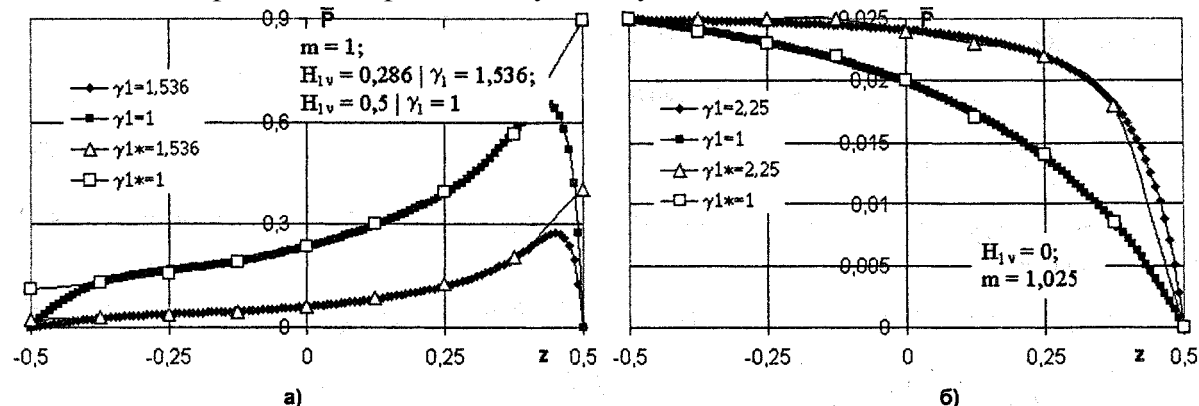


Рис. 4. Распределение давлений по длине поршня при ненулевом угле конусности



В случае созданий давлений за счет колебаний стенок цилиндра (см. рис. 4, а) замечен рост давления по мере приближения к выходу из зазора (точка  $z = 0,5$ ) и падения давления на входе в зазор (точка  $z = -0,5$ ). Это явилось результатом влияния профилирования в виде малой конусности. При построении этих зависимостей использовано условие физической реализуемости колебаний при наличии угла конусности: отсутствие соприкосновения колеблющейся поверхности цилиндра и неподвижной поверхности поршня. Так, при амплитуде колебаний цилиндра 0,286 безразмерный угол конусности равен 1,536, а при безразмерной амплитуде 0,5 угол конусности уменьшен до 1. Расстояние от начала координат до линии пересечения образующих поверхностей поршня (цилиндр:  $z_0$  зафиксирован в точке  $z = 0,2$ ).

При отсутствии колебаний цилиндра и действии на краях перепада давлений в условиях профилирования в виде малой конусности (см. рис. 4, б) распределение давлений уже не подчиняется линейному закону, как это было для случая, рассмотренного на рис. 3, б. Степень крутизны кривых зависит от угла конусности - чем больше угол конусности, тем более выпуклой является кривая.

Комбинация вибрации и профилирования в виде малой конусности приводит к неравномерности распределения давлений, определяющей направленный расход газа. Создание безрасходной поршневой пары может быть обеспечено направлением расхода газа, встречным основному, при автоматическом выборе амплитуды колебаний в согласованном с параметрами профиля диапазоне.

**Массовый расход газа.** На рис. 5, а представлены зависимости массового расхода газа от амплитуды колебаний цилиндра при нулевом угле конусности и при различных перепадах давлений:  $m = 1$  (отсутствие перепада давления),  $m = 1,025$  (максимальный в данной задаче перепад давлений).

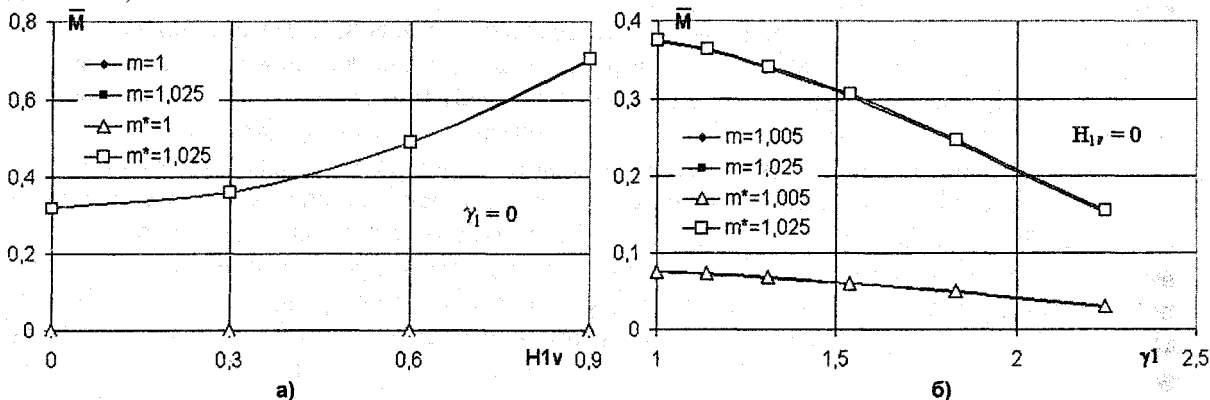


Рис. 5. Зависимости массового расхода газа: а – от амплитуды колебаний цилиндра; б – от угла конусности при отсутствии колебаний цилиндра

Видно, что при отсутствии перепада давлений массовый расход газа равен нулю. При максимальном перепаде давлений наблюдается увеличение массового расхода газа с увеличением амплитуды колебаний, что свидетельствует, по сути, об увеличении эффективной площади зазора. Однако, данный отрицательный факт надо соотносить с существенным увеличением радиальной жесткости слоя, положительный эффект от которой на метрологические характеристики намного больше.

На рис. 5, б и 6, а представлены зависимости массового расхода газа от угла конусности.

При отсутствии колебаний цилиндра (см. рис. 5, б) наблюдается уменьшение массового расхода газа по мере увеличения угла конусности. Поток газа направлен из области больших давлений (под поршнем) в область малых давлений (над поршнем). Это направление потока назовем «положительным», тогда «отрицательное» - это направление из области малых давлений (над поршнем) в область больших давлений (под поршнем).

При совместном воздействии перепада давлений и амплитуды колебаний стенок цилиндра (см. рис. 6, а) массовый расход газа имеет различные направления своих составляющих, вес которых меняется по мере увеличения угла конусности. Первая (и основная) составляющая определяется реализуемым перепадом давлений в грузопоршневом манометре, а вторая - генераторными свойствами вибронесущего слоя газа, которые, как было обнаружено ранее [5], существенно

усиливаются в присутствии реализуемого устройством перепада давлений. Так в диапазоне  $1 \leq \gamma_1 < 2,2$  суммарный поток газа имеет «отрицательное направление», при  $\gamma_1 = 2,2$  расход газа равен нулю, в диапазоне  $2,2 < \gamma_1 \leq 2,25$  поток газа имеет «положительное направление». Следовательно, для обеспечения нулевого расхода газа необходимо выбирать значение угла конусности из диапазона  $1 \leq \gamma_1 \leq 2,2$ .

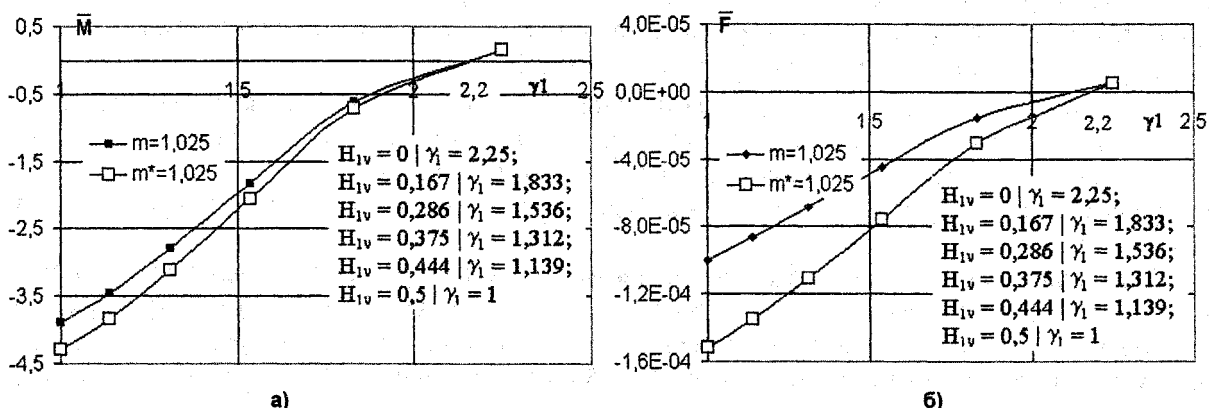


Рис. 6. Зависимости: а – массового расхода газа от угла конусности при совместном воздействии перепада давлений и колебаний цилиндра; б – выталкивающей силы от угла конусности при совместном воздействии перепада давлений и колебаний цилиндра

**Выталкивающая поршень сила.** На рис. 6, б представлены зависимости выталкивающей поршень силы от угла конусности при совместном воздействии перепада давлений и амплитуды колебаний стенок цилиндра. Видно, что характер поведения выталкивающей поршень силы полностью аналогичен массовому расходу газа (см. рис. 6, а). Отличие состоит в порядке величин.

**Заключение.** Проведен численный и аналитический анализ характеристик смазочного слоя с целью оценки его метрологических и эксплуатационных характеристик, включая расчет расхода газа, величина которого является одной из основных характеристик, определяющих качество и цену поршневой пары. Показано, что при равномерной вибрации и варьируемом профилировании зазора в виде малой конусности можно создать противорасход газа, величина которого полностью компенсирует рабочий расход грузопоршневого манометра (перепад менее 2,5 кПа). Это приведет к существенному увеличению времени для проведения измерения вплоть до 8 часов (полная рабочая смена) и избавит от необходимости постоянно поддерживать давление в измерительной системе.

## Литература

1. Некрасов С.Т., Филимонов А.С. Некоторые характеристики газового грузопоршневого манометра при центральном положении поршня в вибронесущем подвесе // Сборник научных статей «Приборостроение-2004» (Принята в печать).
2. Pan. C.N.T. An Asymptotic Analysis of Gas Bearings Systems for Stability Dynamics and Fluid Mechanics // Development in Mechanics. - N. Y., 1965. - V. 3, Part 20f. - P. 431-447.
3. Некрасов С.Г., Филимонов А.С. Грузопоршневой манометр с вибронесущим газовым подвесом поршня // XXIII Российская школа по проблемам науки и технологий. Тезисы докладов. - Миасс: МСНТ, 2003. - 126 с.
4. Некрасов С. Г., Филимонов А. С. Использование метода малого параметра при определении эксплуатационных характеристик неуплотненной цилиндрической поршневой пары с газовой смазкой // IX международный научно-технический семинар. Тезисы докладов. - СПб: ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, 2004. - 77 с.
5. Некрасов С.Г., Филимонов А.С. Распределение давлений и эксплуатационные характеристики поршневой пары на вибронесущем газовом подвесе // Сборник «Информационные, измерительные и управляющие системы и устройства» (Принята в печать).
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ: 2-е изд. - М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1977. - 744 с.

7. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. - 351 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. - М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. Том 1. - 456 с.
9. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы (введение в теорию). Учебное пособие. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1977. - 440 с.
10. Жоховский М.К. Теория и расчет приборов с неуплотненным поршнем. - 3-е изд., перераб. и доп. - М: Изд-во стандартов, 1980. - 312 с.