ОБЛАСТИ РАВНОМЕРНОГО СУММИРОВАНИЯ И ТЕОРЕМА ОКАДА

Л.В. Матвеева

Пусть однозначная функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности начала координат. Тогда функция $f(z)$ раскладывается в степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Обозначим n-ю частичная сумма этого ряда через $s_m^f = \sum_{k=0}^{m} a^k z^k$, через S_f множество особых точек функции $f(z)$ и через A_f – максимальную область, в которую продолжается $f(z)$. Частичную сумму ряда функции $\frac{1}{1-z}$ обозначим через $\sigma_n(z)$.

Определение. Линейный метод B, определяемый бесконечной матрицей $(b_{m,n})$, суммирует ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ к $f(z)$ равномерно внутри области $D \subset \mathbb{C}$, если существует такой номер m_0, что для любого компакта $Q \subset D$ и для всех $m \geq m_0$ ряды $\sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k} s_k^f(z)$ равномерно сходятся к $f(z)$ на Q.

Определение. Область $U \subset A_f$ назовем -областью функции $f(z)$, аналитичной в некоторой окрестности начала координат, если существует линейный метод, суммирующий последовательность $\{s_m^f(z)\}$ к $f(z)$ равномерно внутри U.

Следующая лемма показывает, что -область не может содержать контур вокруг особой точки $f(z)$.

Лемма 1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности V начала координат, и пусть $\gamma \in V$ простая замкнутая кривая. Если существует линейный метод, суммирующий последовательность $\{s_m^f\}$ к $f(z)$ равномерно внутри некоторой окрестности γ, то $f(z)$ аналитически продолжается в область V_1, ограниченную кривой γ.

Доказательство леммы легко вытекает из равномерной суммируемости и теоремы Вейерштрасса [1].

Лемма 2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности начала координат. Если, начиная с некоторого номера, коэффициенты ее ряда Тейлора $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ отличны от нуля, то для любой односвязной области $U \subset A_f$ существует конечностроочный метод $B = (b_{m,n})$ суммирующий последовательность s_m^f к функции $f(z)$ равномерно внутри U.

Доказательство леммы основано на теореме Рунге о последовательности многочленов, сходящейся равномерно внутри U и позволяющей построить конечностроочный метод, используя коэффициенты этих многочленов и коэффициенты ряда Тейлора функции.

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности начала координат, и пусть коэффициенты ее ряда Тейлора $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ отличны от нуля, начиная с некоторого номера. Тогда для того, чтобы

область $U \subset A_f$ являлась -областью функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы множество $S_f \cup \{\infty\}$ лежало в одной связной компоненте дополнения U относительно расширенной комплексной плоскости.

Доказательство. Пусть U -область функции $f(z)$ и U' – ее дополнение относительно расширенной комплексной плоскости. Предположим, что U' распадается на два замкнутых непересекающихся подмножеств U_1', U_2', что $U' = U_1' \cup U_2'$. Без ограничения общности можно считать, что $\infty \in U_2'$.

Так как множества U_1' и U_2' замкнуты и не пересекаются, то найдется такой контур $\gamma \in U$, что множество U_1' лежит внутри контура γ. Так как $\gamma \in U$, то по определению -области существует метод $B = (b_{m,n})$, суммирующий ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ к $f(z)$ равномерно на γ. По лемме 1 функция $f(z)$ аналитически продолжаема в область, ограниченную контуром γ, что невозможно, поскольку по нашему предположению U_1' содержит особые точки функции $f(z)$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия теоремы на -области.

Доказательство достаточности основано на том, что дополнение к односвязной компоненте U', содержащей множество $S_f \cup \{\infty\}$, является односвязной областью, лежащей в A_f, и, следовательно, является -областью функции f(z) по лемме 1. Так как область U лежит в этом дополнении, то U также является -областью функции $f(z)$. Теорема доказана.

Следствие. Для того, чтобы область U являлась -областью функции $\frac{1}{1-z}$, необходимо и достаточно, чтобы множество $\{1\} \cup \{\infty\}$ лежало в одной связной компоненте дополнения U относительно расширенной комплексной плоскости.

Для доказательства применяем теорему 1 к функции $\frac{1}{1-z}$, для которой множество особых точек состоит из $\{1\} \cup \{\infty\}$.

Если известна звездная область, внутри которой метод равномерно суммирует геометрический ряд $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$, то теорема Окада [2] позволяет описать область, внутри которой этот метод равномерно суммирует последовательность частичных сумм ряда Тейлора для произвольной однозначной аналитической функции. Теорема 2, приведенная ниже, не только обобщает теорему Окада на случай произвольной (не только звездной) области, но и дает оценку скорости сходимости.

Определение. Односвязная область D называется производящей, если выполнены условия:

(1) D содержит начало координат;

(2) D не содержит множества $\{1\} \cup \{\infty\}$.

По лемме 2 любая производящая область всегда является -областью функции $\frac{1}{1-z}$. Поэтому существует линейный метод, суммирующий после-

довательность частичных сумм геометрического ряда $\sigma_n(z)$ к $\frac{1}{1-z}$ равномерно внутри D.

Определение. Частной производящей областью функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, соответствующей производящей области D, назовем множество $D_f = \left\{z: \frac{z}{\xi} \in D \text{ для всех } \xi \in S_f \right\}$.

Лемма 3. Множество D_f открыто.

Доказательство леммы использует тот факт, что множество особых точек любой аналитической функции замкнуто.

Лемма 4. Метод $B = \left(b_{m,n}\right)$ суммирует последовательность $\{\sigma_n(z)\}$ к $\frac{1}{1-z}$ равномерно внутри производящей области D тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(1) ряды $\varphi(1,m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,n}$ сходятся и $\varphi(1,m) \to 1$ при $m \to \infty$;

(2) ряды $\varphi(z,m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k} z^{k+1}$ равномерно сходятся внутри D и $\varphi(z,m) \to 0$ при $m \to \infty$.

Доказательство. Так как $0 \in D$ и $\sigma_n(0) = 1$ для всех n, то ряд $\varphi(1,m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k}\sigma_k(0)$ сходится и $\varphi(1,m)$ стремится к $\frac{1}{1-z}$ при $m \to \infty$. Так как $\sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k}\sigma_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k} \frac{1-z^{k+1}}{1-z} = \frac{\varphi(1,m)-\varphi(z,m)}{1-z}$ для $z \in D$, то $\varphi(z,m) = \varphi(1,m) - \left(1-z\right)\sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k}\sigma_k(z)$. Так как $\varphi(1,m) \to 1$ при $m \to \infty$ и последовательность $\sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k}\sigma_k$ сходится к $\frac{1}{1-z}$ равномерно внутри D, то последовательность $\varphi(z,m) \to 0$ равномерно внутри D.

Если условия (1) и (2) выполнены, то ряды $\sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k}\sigma_k(z) = \frac{\varphi(1,m)-\varphi(z,m)}{1-z}$ равномерно сходятся внутри D к $\frac{1}{1-z}$.

Лемма 5. Пусть Q – замкнутое ограниченное подмножество комплексной плоскости, и пусть T – замкнутое подмножество расширенной комплексной плоскости, не содержащее начала координат. Тогда множество $\frac{Q}{T} = \left\{z: z = \frac{u}{v}, \text{где } u \in Q, v \in T\right\}$ также замкнуто.

Доказательство леммы легко следует из определения замкнутого множества.

Теорема 2. (Обобщение теоремы Окада [2]) Пусть при $m \geq m_0$ все степенные ряды $\varphi(z,m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k} z^{k+1}$ являются целыми функциями, и пусть $\{q_m\}$ – некоторая последовательность. Пусть для любого замкнутого подмножества $Q \subset D$ производящей области D существует такая постоянная C_Q, что выполнены условия:

(1) $\varphi(1,m) \to 1$ при $m \to \infty$;

(2) для всех $z \in Q$ и для всех $m \geq m_0$ справедливо неравенство $|\varphi(z,m)| < C_Q q(m)$.

Тогда для любой функции $f(z)$, аналитической в некоторой окрестности начала координат, и для любого замкнутого множества $G \subset D_f$ найдутся такие постоянные $M_G > 0, N_G > 0$, что для всех $m \geq m_0$ справедливо неравенство $\left|\sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k}\, s_k^f - f(z)\right| < M_G q(m) + N_G |1 - \varphi(1,m)|$.

Если, кроме того, для некоторой последовательности $\{q_1(m)\}$ и для любого замкнутого множества $Q \subset D$ существует такая постоянная $C_Q, > 0$, что для всех $z \in Q$ и всех $m > m_0$ справедливо неравенство

(3) $\left|\varphi(z, m-1) - \varphi(z,m)\right| < C_Q, q_1(m)$,

то существует такая постоянная $R_G > 0$, что для всех $z \in G$ и всех $m > m_0$ справедливо неравенство $\left|\sum_{k=0}^{\infty} b_{m-1,k} s_k^f(z) - \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k} s_k^f(z)\right| < R_G q(m) + N_G q_1(m)$.

Доказательство этой теоремы основано на теореме Коши о представлении аналитической функции в виде интеграла Коши, разложении подынтегральной функции в геометрический ряд и равномерной сходимости рядов.

Следствие 1. Пусть при $m \geq m_0$ все степенные ряды $\varphi(z,m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k} z^{k+1}$ являются целыми функциями, и пусть метод $\left(b_{m,n}\right)$ суммирует последовательность $\{\sigma_n\}$ к $\frac{1}{1-z}$ равномерно внутри производящей области D. Тогда для любой функции $f(z)$, аналитической в некоторой окрестности начала координат, метод $\left(b_{m,n}\right)$ суммирует последовательность $\left\{s_n^f(z)\right\}$ к $f(z)$ равномерно внутри D_f.

Следствие 2. Любая область $U \subset D_f$ является C-областью функции $f(z)$.

Замечание 1. Существуют C-области некоторых функций, не являющиеся подмножествами области D_f ни для какой односвязной производящей области D.

Замечание 2. Ограничения, накладываемые на функцию в теореме 1, существенны. Существуют функции и примеры односвязных областей для них, не являющихся C-областями.

Теорема 3. Если для функции $f(z)$ найдется простой контур γ, содержащий внутри себя хотя бы одну особую точку функции $f(z)$ и не содержащий начало координат, то для любого целого $p > 1$ существует односвязная область U, лежащая в области аналитичности функции $f(z^p)$ и не являющаяся -областью функции $f(z^p)$.

Библиографический список

1. Маркушевич, А.И. Теория аналитических функций: в 2 т. / А.И. Маркушевич. – 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1967. – Т. 1. – 456 с.

2. Кук, Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей / Р. Кук. – М.: Физматгиз, 1960. – 471 с.