МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Южно-Уральский государственный университет"
(национальный исследовательский университет)
Высшая школа электроники и компьютерных наук
Кафедра вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений

РАБОТА ПРОВЕРЕНА:	ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ:
Рецензент	
_____________	_____________
"___"______________2017г.	"___"______________2017г.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ЮУрГУ-01.04.02.2017.115-058.ВКР

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
____________ А.И. Сидикова

Автор работы:
магистр группы КЭ-215
____________С.Н. Зырянов

Нормоконтролер:
к.п.н., доцент
____________М.Е. Коржова
"___"______________2017г.

Челябинск 2017

Оглавление

Введение.

Современная вычислительная математика ориентирована на использование компьютеров для прикладных расчетов. Любые математические приложения начинаются с построения модели явления (изделия, действия, ситуации или другого объекта), к которому относится изучаемый вопрос. Классическими примерами математических моделей могут служить определенный интеграл, уравнение колебаний маятника, уравнение теплообмена, уравнения упругости, уравнения электромагнитных волн и другие уравнения математической физики. Назовем еще для контраста модель формальных рассуждений – алгебру Буля.

Основополагающими средствами использования математических моделей являются аналитические методы: получение точных решений в частных случаях (например, табличные интегралы), разложения в ряды. Определенную роль издавна играли приближенные вычисления. Например, для вычисления определенного интеграла использовались квадратурные формулы.

Появления в начале XX века электронных вычислительных машин (компьютеров) радикально расширило возможности приложения математических методов в традиционных областях (механике, физике, технике) и вызвало бурное проникновение математических методов в нетрадиционные области (управление, экономику, химию, биологию, психологию, лингвистику, экологию и т.п.).

Компьютер дает возможность запоминать большие (но конечные) массивы чисел и производить над ними арифметические операции и сравнения с большой (но конечной) скоростью по заданной вычислителем программе. Поэтому на компьютере можно изучать только те математические модели, которые описываются конечными наборами чисел, и использовать конечные последовательности арифметических действий, а также сравнений чисел по величине (для автоматического управления дальнейшими вычислениями).

В традиционных областях математическими моделями служат функции, производные, интегралы, дифференциальные уравнения. Для использования компьютеров эти исходные модели надо приближенно заменить такими, которые описываются конечными наборами чисел с указанием конечных последовательностей действий (конечных алгоритмов) для их обработки.

Например, функцию следует заменить таблицей; производную определенный интеграл - суммой; краевую задачу для дифференциального уравнения - задачей об отыскании таблицы значений решения в узлах некоторой сетки, причем так, чтобы выбор шага сетки позволял достигать любой требуемой точности. Оказывается, из двух, на первый взгляд равноценных способов один может оказаться принципиально непригодным из-за того, что доставляемое им приближенное решение не стремится к искомому при измельчении шага сетки, или из-за катастрофически сильной чувствительности к погрешностям округления.

Теория таких моделей и алгоритмов составляет предмет вычислительной математики. Эта теория тесно связана с теориями приближения и интерполяции функций, уравнений с частными производными, интегральных уравнений, информационной сложности функциональных классов, алгоритмов, а также с языками программирования для расчетов на компьютере и т. д. Современные вычислительные методы позволяют, например, рассчитать характеристики обтекания газом тела заданной формы, что недоступно аналитическим методам (подобно нетабличному интегралу).

С использованием компьютера стал возможен вычислительный эксперимент, т. е. расчет в целях проверки гипотез, а также в целях наблюдения за поведением модели, когда заранее не известно, что именно заинтересует исследователя. В процессе численного эксперимента происходит по существу уточнение исходной математической постановки задачи. В процессе расчетов на компьютере происходит накопление информации, что дает возможность в конечном счете произвести отбор наиболее интересных ситуаций. На этом пути сделано много наблюдений и открытий, стимулирующих развитие теории и имеющих важные практические применения.

Глава 1. НЕКОТОРЫЕ

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Здесь и в дальнейшем изложении будем предполагать известными понятиями линейного нормированного и банахова пространства, которые мы будем обозначать буквами *X, Y, Z;* линейного непрерывного, ограниченного оператора, который будем обозначать буквами *A,B,C,* а также пространство $B[X,Y]$ линейных ограниченных операторов, отображающих X в Y, причем $\| A\| = \sup\{\| Ax\| : x \in X, \| x\| \le 1]$.

Буквами X^*, Y^*, Z^*,будем обозначать пространства, сопряженные *X,*

X и *Z* соответственно. Все пространства, рассматриваемые в настоящем пособии, будут действительные, т.е. над полем действительных чисел $X = < X, R >$.

Теперь сформулируем без доказательства ряд основных фактов функционального анализа, составляющих его основу, так называемые три принципа анализа. Доказательства приводимых теорем легко найти в любом из учебников по функциональному анализу.

Теорема 1.1 (Банаха-Хана). Всякий линейный функционал *f(x),* определенный на линейном многообразии *L* линейного нормированного пространства *X,* можно продолжить на все пространство с сохранением нормы, т.е. можно построить линейный функционал *F(x),* определенный на *X* и такой, что:

1) $F(x) = f(x)$ для $x \in L$;
2) $\| F\|_x = \| f\|_L$

(см. [4, с. 173]).

Следствие 1.1 Пусть X – линейное нормированное пространство и $x_0 \neq 0$ - любой фиксированный элемент из *X*. Тогда существует линейный функционал *f(x),* определенный на всем *X* и такой, что:

1) $\| f \| = 1$;
2) $f(x_0) = \| x_0 \|$

(см. [3, с. 176]).

Следствие 1.2 Пусть в линейном нормированном пространстве X заданы линейное многообразие L и элемент $x_0 \notin \overline{L}$, находящийся на расстоянии $d > 0$ от $(d = \inf\{\| x_0 - x \| : x \in L\}$.

Тогда существует функционал $f(x)$, определенный всюду на X и такой, что:

1) $f(x) = 0$ для $x \in L$;
2) $f(x_0) = 1$;
3) $\| f \| = 1/d$

(см. [3, с. 177]

Теорема 1.2 (Банаха – Штейнхауса). Если последовательность линейных ограниченных операторов сходится в себе в каждой точке *x* банахова пространства *X*, то последовательность норм $\{\| A_n \|\}$ этих операторов ограничена (см. [4, с. 149]).

Теорема 1.3. Для того, чтобы последовательность $\{A_n\}$ операторов точечно сходилась к оператору A_0, необходимо и достаточно, чтобы:

1) последовательность $\{\| A_n \|\}$ была ограничена;

2) $A_n x \to A_0 x$ для любого x из некоторого множества M, линейные комбинации элементов которого лежат всюду плотно в X (см. [4, с. 151]).

Теорема 1.4 (Банаха). Если линейный ограниченный оператор A отображает все банахово пространство X на все банахово пространство Y взаимно однозначно, то существует линейный ограниченный оператор A^{-1} обратный оператору A, отображающий Y на X (см. [4, с. 159]).

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ.

Определение 2.1. Пусть H – множество некоторых элементов, обладающее следующими свойствами:

1) H – действительное линейное пространство;
2) каждой паре x и y из H поставлено в соответствие действительное число (x, y), называемое скалярным произведением этих элементов, удовлетворяющее условиям:

а) $(x,y)=(y,x)$;

б) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$;

в) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$;

г) $(x,x)\geq 0,$ причем $(x,x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;

число $\| x\|=\sqrt{(x,x)}$ назовем нормой элемента x;

3) H полно в смысле метрики $\rho(x,y)=\| x-y\|$;
4) H – бесконечномерно.

При выполнении этих аксиом пространство H называют гильбертовым.

(см. [3, с. 83]).

Примеры гильбертовых пространств:

1. $l_2:\overline{x}\in l_2 \Leftrightarrow \overline{x}=\{x_n\}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty,$ если $\overline{x}$ и $\overline{y}\in l_2$, то $(\overline{x},\overline{y})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n y_n.$

2. $L_2[0,1]$. Это пространство измеримых на отрезке функций, таких, что

$\int\limits_0^1 x^2(t)dt<\infty.$

Причем если x и $y \in L_2[0,1]$, то $(x,y)=\int_0^1 x(t)y(t)dt.$

Ортогональность. Два элемента x и y $\in H$ называются ортогональными (в этом случае записывают $x \perp y$), если $(x,y)=0$. Элемент x называется ортогональным подпространству $L \subset H$, если x ортогонален любому элементу $y \in L$. В этом случае записывают $x \perp L$. Имеет место следующая важная теорема.

Теорема 2.1. Если $x \in H$ и L – некоторое подпространство пространства H, то

$$x = y + z, \tag{2.1}$$

где $y \in L$ и $z \perp L$. Указанное разложение единственно (см. [4, с. 86]).

Доказательство. Если $x \in L$, то очевидно, что $y=x$, $z=0$ т.е.

$d = \inf\{\| x - y \|^2 : y \in L\}$

и $\{y_n\}$ - последовательность из L такая, что

$d_n = \| x - y_n \|^2 \to d$ при $n \to \infty$.

Пусть, далее, h – любой элемент L, отличный от нуля. Тогда $y_n + \varepsilon h \in L$ для любого числа ε, и потому

$\| x - (y_n + \varepsilon h \|^2 \geq d,$

т.е.

$\| x - y_n \|^2 - 2\varepsilon(x - y_n, h) + \varepsilon^2 \| h \|^2 \geq d.$

Полагая

$$\varepsilon = \frac{x - y_n, h}{\| h \|^2},$$

Получаем, что

$$\| x - y_n \|^2 - \frac{| x - y_n, h |^2}{\| h \|^2} \geq d,$$

откуда

$$| x - y_n, h |^2 \leq \| h \|^2 \, (d_n - d)$$

или

$$| x - y_n, h | \leq \| h \| \sqrt{d_n - d}. \tag{2.2}$$

При h=0 неравенство (2.2) также очевидно выполняется. Из этого неравенства для любого $h \in L$ следует

$$| y_n - y_m, h | \leq | y_n - x, h | + | x - y_m, h | \leq$$

$$\leq (\sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d} \, \| h \|,$$

и, полагая $h = y_n - y_m$, получаем

$$\| y_n - y_m \| \leq \sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d}.$$

Поэтому последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна, а значит, в силу полноты H сходится к некоторому элементу $y \in H$. Так как L замкнуто, то $y \in L$.

Переходя к пределу в неравенстве (2.2), получаем, что $x - y, h$=0, и так как h - любой элемент подпространства L, то $x - y \perp L$. Полагая $x - y = z$, получаем требуемое равенство

$$x = y + z.$$

Остается доказать единственность этого представления.

Пусть $x = y + z$, $x = y' + z'$, где $y, y' \in L, z, z' \perp L$. Тогда $y - y' = z' - z$

$$\| y - y' \|^2 = (z' - z, y - y') = 0, \qquad (2.3)$$

ибо $y - y' \in L$, а $z' - z \perp L$. Но (2.3) означает, $y = y'$, следовательно, и $z = z'$. Теорема полностью доказана.

Теорема 2.2. Пусть H - гильбертово пространство. Тогда для любого функционала $f \in H^*$ найдется элемент $u \in H$ такой, что для любого $x \in H$

$f(x) = (u, x)$

и

$\| f \|_{H^*} = \| u \|_H$.

Доказательство. 1-й случай: $f = 0$, т.е. для любого $x \in H$ $f(x) = 0$.

Тогда полагаем $u = 0$ и для любого $x \in H$

$f(x) = (\Theta, x)$ и $\| f \| = \| \Theta \| = 0.$

2-й случай: $f \neq 0$, т.е. существует элемент $x_0 \in H$ такой, что $f(x_0) = \alpha \neq 0$.

Рассмотрим ядро L функционала f:

$L = \{x : x \in H$ и $f(x_0) = 0\}.$

Покажем, что L является подпространством в H. Пусть x и $y \in L$, тогда $f(x) = f(y) = 0$ и $f(\beta x + \gamma y) = \beta f(x) + \gamma f(y) = 0$, т.е.

$\beta x + \gamma y \in L.$

Пусть $\hat{x}$ - предельная точка L. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset L$ такая, что $x_n \to \hat{x}$.

Так как функционал f непрерывен, то

$$f(x_n) \to f(\hat{x}) = 0 \Rightarrow \hat{x} \in L.$$

Таким образом, L - подпространство H.

По теореме 1 гильбертово пространство H можно разложить в ортогональную сумму

$$H = L + L^{\perp}.$$

Пусть $x_1 = pr(x_0, L^{\perp})$, т.е. x_1 - ортогональная проекция элемента x_0 на подпространство $L^{\perp}$. Тогда $x_0 = x_1 + x_1'$,

где $x_1' \in L$, а следовательно,

$$f(x_1) = f(x_0) = \alpha.$$

Обозначим через $x_2 = x_1 / \alpha$. Тогда $f(x_2) = 1$ и для любого $x \in H$

$$f(x) = \beta = \beta f(x_2) = f(\beta x_2), \text{т.е.}$$

$$f(x) - \beta f(x_2) = f(x - \beta x_2) = 0$$

и

$$x - \beta x_2 = z \in L.$$

Таким образом,

$$x = z + \beta x_2.$$

Следовательно, $L^{\perp}$ одномерно и порождено элементом x_2.

Таким образом,

$$\beta = f(x) = (x, x_2 / \|x_2\|^2) = (z + \beta x_2, x_2 / \|x_2\|^2) = \beta \frac{\|x_2\|^2}{\|x_2\|^2} = \beta,$$

т.е. $u = x_2 / \|x_2\|^2$.

$|f(x)| = |(u,x)| \le \|x\| \cdot \|x\|$ и $\|f\| \le \|u\|$.

Пусть $x = u,$ тогда $f(u) = (u,u) = \|u\|^2 \Rightarrow \|f\| \ge \|u\|,$ а следовательно,

$\|f\| = \|u\|$.

Из этой теоремы, в частности, следует, что пространство H^* изометрично и изоморфно H.

Пусть X – линейное нормированное пространство, а X^* - пространство, сопряженное X.

Определение 2.2 Будем говорить, что последовательность элементов $\{x_n\} \subset X$ слабо сходится к элементу $x \in X$, если для любого функционала $f \in X^*$.

$f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

Этот факт будем обозначать

$x_n \xrightarrow{сл} x$ при $n \to \infty$.

Так как пространство X^* всегда банахово, то из теоремы 1.2 следует, что слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ всегда ограничена, а из теоремы 1.3 следует, что для того, чтобы $x_n \xrightarrow{сл} x$ при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\|\{x_n\}\|$ была ограничена и для любого функционала $f \in M$ имело место соотношение

$f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$,

где линейная оболочка $\mathcal{L}(M)$ множества M всюду плотна в X^*.

Теорема 2.3. Пусть X - линейное нормированное пространство, а $\{x_n\} \subset X$ и $x_n \xrightarrow{сл} x$ при $n \to \infty$, а $x \in X$. Тогда

$$\|x\| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Доказательство. Так как последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится, то она ограничена, а, следовательно, существует $\underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n\|$ и равен числу a. По определению нижнего предела найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что

$$\|x_{n_k}\| \to a. \quad (2.4)$$

Предположим противное, т.е. что

$$a < \|x\|. \quad (2.5)$$

Тогда из следствия 1.1 существует линейный функционал $f \in X^*$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$.

Так как $x_{n_k} \xrightarrow{сл} x$ при $k \to \infty$, то

$$f(x_{n_k}) \to f(x) = \|x\|. \quad (2.6)$$

С другой стороны,

$$f(x_{n_k}) \le \|f\| \, \|x_{n_k}\| = \|x_{n_k}\|. \quad (2.7)$$

Из (2.1), (2.2) и (2.4)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) \le a < \|x\|,$$

что, в свою очередь, противоречит (2.3).

Тем самым теорема доказана.

Пусть X и Y - линейные нормированные пространства, а $A \in B[X,Y]$.

Теорема 2.4. Пусть A - линейный непрерывный оператор, отображающий X в Y.

Тогда из того, что $x_n \xrightarrow{сл} x$ при $n \to \infty$, следует

$Ax_n \xrightarrow{сл} Ax.$

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow{сл} x$ при $n \to \infty$. Тогда для любого $f \in X^*$ имеет место

$f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$. (2.8)

Пусть g - произвольный функционал из Y^*. Тогда $g\ \ Ax_n\ \ = f\ \ x_n$, где $f \in X^*$ как суперпозиция двух линейных непрерывных отображений $A: X \to Y$ и $g: Y \to R$, т.е. $f = g \circ A: X \to R$.

Таким образом, из (2.1) следует

$g\ \ Ax_n\ \ = f\ \ x_n\ \ \to f\ \ x\ \ = g\ \ Ax$,

что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим слабую сходимость в гильбертовом пространстве H. Из теоремы 2.2 об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве мы видим, что все многообразие функционалов исчерпывается элементами самого гильбертова пространства H. Поэтому слабую сходимость в гильбертовом пространстве H можем определить следующим образом.

Будем говорить, что $x_n \xrightarrow{сл} x$ при $n \to \infty$, если для любого элемента $u \in H$: $u_n, u \to x, u$ при $n \to \infty$.

Как следствие из теорем 2.2 и 2.3 докажем еще одну полезную теорему.

Теорема 2.5. Пусть H - гильбертово пространство, $\{x_n\} \subset H$ и $x_n \xrightarrow{сл} x$; а $\|x_n\| \to \|x\|$ при $n \to \infty$.

Тогда $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

Доказательство.

$\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x) = \|x_n\|^2 - 2(x_n, x) + \|x\|^2$.

Так как $x_n \xrightarrow{сл} x$ при $n \to \infty$, то $(x_n, x) \to (x, x) = \|x\|^2$ при $n \to \infty$.

Кроме того, $\|x_n\|^2 \to \|x\|^2$.

Таким образом,

$\|x_n\|^2 - 2(x_n, x) + \|x\|^2 \to 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0,$

а, следовательно, $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

Определение 2.3. Множество M и H назовем слабо компактным, если из любой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\left(x_{n_k}\right)$ такую, что $x_{n_k} \xrightarrow{сл} x$, где $x \in H$.

Теорема 2.6. Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство. Тогда ограниченное в нем множество M слабо компактно.

Доказательство. Пусть $\{x_n \subset M\}$. Тогда существует число r такое, что для любого $n \Rightarrow \|x_n\| \le r$.

Так как H сепарабельно, то существует счетное всюду плотное множество H_1. Запишем это множество в виде последовательности $\{v_k\}$, т.е. замыкание $\{\bar{v}_k\}$ этой последовательности совпадает с H.

Рассмотрим числовую последовательность $\{(x_n, v_1)\}$ в виду ее ограниченности из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{(x_{n_1}, v_1)\}$.

Далее рассмотрим числовую посдпоследовательность $\{(x_{n_1}, v_2)\}$ и точно также из нее выделим сходящуюся подпоследовательность $\{(x_{n_2}, v_2)\}$.

Итак, далее продолжая этот процесс мы выделим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. При этом $\{x_n\} \supset \{x_{n_1}\} \supset \{x_{n_2}\} \supset ... \supset (x_{n_k}) \supset ...$. Затем, окончательно, выделим подпоследовательность $\{x_{k_k}\}$, которая, с одной стороны, ограничена, с другой стороны, для любого k числовая последовательность (x_{k_k}, v_k) сходится в себе. По теореме 1.3. последовательность $\{x_{k_k}\}$ будет слабо сходиться к элементу $x \in H$. Тем самым теорема доказана.

Глава 3. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства, A – линейный ограниченный оператор, отображающий X в Y.

Обозначим через X^* и Y^* пространства, сопряженные X и Y соответственно.

Определение 3.1. Оператор A^*, действующий из X^* в Y^*, называют сопряженным оператору *A,* если для любых $x \in X$ и $g \in Y^*$ выполняется соотношение

$$[A^* g](x) = g(Ax).$$

Теорема 3.1. Сопряженный оператор A^* является линейным ограниченным оператором, отображающим Y^* в X^*, таким, что $\| A^* \| = \| A \|$.

Доказательство. Пусть g_1 и $g_2 \in Y^*$, а $g = g_1 + g_2$. Тогда для любого $x \in X$

$$[A^* g](x) = [A^*(g_1 + g_2)](x) = (g_1 + g_2)(Ax),$$

т.е.

$$[A^* g](x) = g_1(Ax) + g_2(Ax) = A^* g_1(x) + A^* g_2(x) = [A^* g_1 + A^* g_2](x).$$

Пусть $g = \leftthreetimes_1$, тогда для любого $x \in X$.

$$A^* g(x) = (A^* \leftthreetimes g_1)(x) = \leftthreetimes g_1(Ax) = \varrho\big(g_1(Ax)\big) = \leftthreetimes A^* g_1(x),$$

т.е.

$$A^* \leftthreetimes g_1 = \leftthreetimes A^* g_1.$$

Теперь докажем , что $\| A^* \| = \| A \|$:

$$\| A^* g \| = \sup_{\|x\|\le 1} \left| A^* g(x) \right| = \sup_{\|x\|\le 1} \left| g(Ax) \right| \le \| g \| \cdot \| A \| \Rightarrow \| A^* \| \le \| A \|.$$

(3.1)

В обратную сторону. Из определения $\| A \|$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x_\varepsilon \in X$, $\| x_\varepsilon \| = 1$, такой, что

$$\| Ax_\varepsilon \| \ge \| A \| - \varepsilon.$$

Пусть $y_\varepsilon = Ax_\varepsilon$. Тогда согласно следствию 1.1 существует функционал $g \in Y^*$ такой, что $\| g \| = 1$ и $g(y_\varepsilon) = \| y_\varepsilon \|$.

Таким образом,

$$\| A^* \| = \sup_{\|g\|\le 1} \| A^* g \| \ge \| A^* g \|,$$

а

$$\| A^* g \| \ge \left| A^* g(x_\varepsilon) \right| = \left| (g(Ax_\varepsilon) \right| = \left| g(y_\varepsilon) \right| = \| y_\varepsilon \| \ge \| A \| - \varepsilon,$$

т.е.

$$\| A^* \| \ge \| A \| - \varepsilon,$$

а ввиду производительности ε

$$\| A^* \| \ge \| A \|.$$

Таким образом, $\| A^* \| = \| A \|$ и теорема полностью доказана.

Свойства сопряженных операторов

Пусть X, Y, Z - линейные нормированные пространства, а X^*, Y^*, Z^* - их сопряженные. Обозначим через $B[X,Y]$ пространство линейных ограниченных операторов, отображающих X в Y.

1. Сопряженный сумме операторов равен сумме сопряженных, т.е. если $A_1, A_2 \in B[X,Y],$ то

$$(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*.$$

Действительно, по определению сопряженного оператора для любых $x \in X$ и $g \in Y^*$

$$[(A_1 + A_2)^* g](x) = g[(A_1 + A_2)(x)] = g(A_1x) + g(A_2x) =$$

$$= [A_1^* g](x) + [A_2^* g](x) = [(A_1^* + A_2^*)g](x),$$

т.е.

$$(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*.$$

Совершенно аналогично доказывается, что

2. $(\lambda A)^* = \lambda A^*.$
3. Пусть $A_1 \in B[X,Y],$ а $A_2 \in B[Y,Z].$

Тогда

$$(A_2 A_1)^* = A_1^* \cdot A_2^*.$$

Так как $A_2 A_1 \in B[X,Z],$ то для любых $x \in X$ и $h \in Z^*$

$$[(A_2 A_1)^* h](x) = h[A_2(A_1 x)] = h[A_2 y],$$

где $y = A_1 x.$

То есть

$$h[A_2 y] = [A_2^* h](y).$$

Так как $A_2^* h = g,$ где $g \in Y^*$, то

$$[A_2^*h](y) = g(y) = g(A_1x) = [A_1^*g](x).$$

Таким образом,

$$[A_1^*A_2^*h](x) = [(A_2A_1)^*h](x),$$

т.е.

$$(A_2A_1)^* = A_1^*A_2^*.$$

4. Пусть $A \in B[X,Y]$ и существует оператор A^{-1}, принадлежащий $B[Y,X]$, то $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Обозначим через E тождественный оператор, отображающий X в X, т.е. для любого $x \in X$

$$Ex = x$$

Тогда сопряженным ему будет тождественный оператор E^*, отображающий X^* в X^*.

Используя свойство 3, получаем

$$E^* = (A^{-1}A)^* = A^*(A^{-1})^*,$$

т.е.

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Используя теорему 1.4 (Банаха) об обратном операторе, можем к пункту 4 дать следующее уточнение: если X и Y – банаховы пространства, а A взаимно однозначно отображает пространство X на все Y, то существует ограниченный обратный оператор A^{-1}, отображающий Y на X, т.е. $A^{-1} \in B[X^*,Y^*]$ и $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Теорема 3.2. Пусть $A \in B[X,Y]$. Тогда для того, чтобы оператор $A^* \in B[Y^*,X^*]$ был инъективен (взаимно однозначен), необходимо и достаточно, чтобы область значений *R(A)* оператора *A* была всюду полна в *Y*.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\overline{R(A)} \neq Y$. Тогда найдется $y_0 \in Y \setminus \overline{R(A)},$ где $\overline{R(A)}$ - замыкание множества *R(A).* По следствию 1.2 существует функционал $g_0 \in Y^*$ такой, что $g_0(y_0)=1,$ а для любого $x \in X$, $g_0(Ax)=0$ и при этом $\| g_0 \| = 1/d,$ где $d=\rho\left(y_0, R(A)\right)=\inf\limits_{x\in X}\{\| y_0 - Ax \|\}.$

Таким образом, $g_0 \neq 0,$ но для любого $x \in X$

$[A^* g_0](x) = g_0(Ax) = 0,$

т.е. A^* не инъективен.

Достаточность. Пусть $A^* g = 0,$ тогда для любого $x \in X$

$[A^* g](x) = g(Ax) = 0.$

Так как множество *R(A)*=$\{y : y = Ax, x \in X\}$ всюду плотно в Y, то для любого $y \in Y$ $g(y) = 0.$ То есть $g = 0.$ Тем самым теорема доказана.

Теорема 3.3. Пусть X и Y - гильбертовы пространства, а $A \in B[X,Y].$ Тогда

$A^{**} = A.$

Доказательство. Так как X и Y - гильбертовы пространства, то по теореме 2.2 об общем виде линейного функционала в гильбртовом пространстве для любых функционалов $f \in X^*$ и $g \in Y^*$ найдутся элементы $u \in X$ и $v \in Y$ такие, что для всех $x \in X$ и $y \in Y$

$f(x) = (u, x)$, а $g(y) = (v, y),$

причем $\| f \| = \| u \|,$ а $\| g \| = \| v \|$.

Таким образом, определение сопряженного оператора в гильбертовых пространствах примет следующую форму.

Таким образом, определение сопряженного оператора в гильбертовых пространствах примет следующую форму.

Оператор $A^* \in B[Y, X]$ является сопряженным оператору $A \in B[X,Y],$ если для любых $x \in X$ и $v \in Y$

$$(v, Ax) = (A^* , x) \,. \qquad (3.2)$$

Из соотношения (3.2) следует, что для оператора $A^{**} = (A^*)^*$, сопряженного оператору A^*, будет выполняться следующее соотношение $A^{**} \in B[X,Y]$ и для любых $x \in X$ и $v \in Y$ следует, что

$$(x, A^* v) = (A^{**} x, v). \qquad (3.3)$$

Ввиду производительности x и v и симметричности скалярного произведения из (3.2) и (3.3) будет следовать, что

$A^{**} = A.$

Тем самым теорема доказана.

Обозначим через kern (A) ядро оператора A, т.е.

kern (A) = $\{x : x \in X \, , Ax = \Theta\}$,

через R(A) – область значений A, а через $M^{\perp}$- ортогональное дополнение множества M, т.е.

$M^{\perp} = \{x : x \in X, (u, x) = 0, x \in M\}.$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, а $A \in B[X,Y]$. Тогда

kern (A) = $[R(A^*)]^{\perp}$,

а

kern(A^*) = $[R(A)]^{\perp}$.

Доказательство. Сначала докажем первую из двух формул, т.е.

kern (A)$\subset [R(A^*)]^{\perp}$.

Пусть $x \in$ kern (A), тогда $Ax = \Theta$ и для любого $v \in Y$

$$(A^* v, x) = (v, Ax) = (v, \Theta) = 0,$$

следовательно, $x \perp R(A^*)$.

Теперь докажем в другую сторону.

kern $(A) \supset [R(A)]^{\perp}$.

Пусть $x \perp R(A^*)$, тогда для любого $v \in Y$

$(x, A^* v) = 0.$

По определению сопряженного оператора

$(Ax, v) = (x, A^* v) = 0$

для любого $v \in Y$, что, в свою очередь, влечет $Ax = \Theta$ или $x \in$ kern (A).

Вторая формула является следствием теоремы 3.3 и только что доказанной. Тем самым теорема доказана.

Примеры

1. Пусть $X = Y = R^n$, а оператор $A \in B[X, Y]$ задан матрицей (a_{ij})

$$A\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = y_j, \quad \overline{x} \in R^n.$$

Используя скалярное произведение R^n, получаем

$$(\overline{y}, \overline{z}) = \sum_{j=1}^{n} y_j z_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i z_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_j x_i.$$

Таким образом,

$$A^* \overline{z} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j,$$

т.е. если $A \simeq (a_{ij})$, то $A^* \simeq (a_{ij})^T = (a_{ji})$.

2. Пусть $X = Y = L_2[0,1], A$- интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром, т.е. для любого $u \in L_2[0,1]$

$$Au = \int_0^1 K(s,t) u(s) ds,$$

где $K \in C\{[0,1] \mathrm{x} [0,1]\}$.

По теореме Фуббини

$$(Au, v) = \int_0^1 [\int_0^1 K(s,t) u(s) ds] v(t) dt =$$

$$= \int\limits_{[0,1]\times[0,1]}\int K(s,t)u(s)v(t)ds\,dt = \int\limits_0^1 [\int\limits_0^1 K(s,t)v(t)dt]u(s)ds,$$

т.е.

$$A^* v = \int\limits_0^1 K(s,t)v(t)dt.$$

Пусть $X = Y = H,$ где H - гильбертово пространство, $A \in B[H,H]$.

Определение 3.2. Оператор $A \in B[H,H]$ будем называть самосопряженным, если для любых $x, y \in H$ имеет место соотношение

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

или, другими словами, $A^* = A.$

Определение 3.3. Оператор $A \in B[H,H]$ будем называть неотрицательным, если для любого $x \in H$ имеет место соотношение

$$(Ax, x) \geq 0.$$

Определение 3.4. Оператор $A \in B[H,H]$ называют положительным, если он неотрицателен и

$$(Ax, x) = 0$$

выполняется лишь в том случае, когда $x = \Theta.$

Часто для обозначения положительности и неотрицательности оператора A используют обозначение $A > 0$ и $A \geq 0.$

Теорема 3.5. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, $A \in B[X,Y]$, тогда операторы $A^* A \in B[X,X]$ и $AA^* \in B[Y,Y]$ является неотрицательными и самосопряженными.

Теорема 3.6. Пусть $X = L_2[0,1].$ Тогда для того, чтобы ограниченная последовательность $\{u_n\} \subset X$ слабо сходилась к $u \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\tau, 0 \leq \tau \leq 1,$ выполнялось соотношение

$$\int\limits_0^\tau u_n(t)dt \to \int\limits_0^\tau u(t)dt \text{ при } n \to \infty.$$

Пусть X и Y – сепарабельные гильбертовы пространства, $A \in B[X,Y]$, $\{A_n\} \in B[X,Y]$.

Определение 3.5. Последовательность операторов $\{A_n\}$ слабо равномерно сходится к оператору A, если

$\sup\{|(v, A_n u) - (v, Au)| : \| u \| \le 1\} \to 0$

при $n \to \infty$ для любого элемента $v \in Y$ (см. [2, с. 170]).

Теорема 3.7. (см. [6]). Для того, чтобы последовательность $\{A_n\}$ слабо равномерно сходилась к A, необходимо и достаточно, чтобы из $x_n \xrightarrow{сл} x$ следовала сходимость $A_n x_n \xrightarrow{сл} Ax.$

Доказательство. Необходимость. Предположим противное, т.е. пусть $x_n \xrightarrow{сл} x$, а $A_n x_n \overset{сл}{\not\to} Ax.$ Тогда существует подпоследовательность $\left\{x_{n_k}\right\}$ такая, что

$$\{x_{n_k}\} \to a \ne 0, \tag{3.4}$$

$$A_{n_k} x_{n_k} \xrightarrow{сл} \bar{y} \ne Ax. \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует существование элемента $\bar{v} \in Y$ такого, что $\| \bar{v} \| = 1$ и

$$(\bar{v}, \bar{y} - Ax) = \| \bar{y} - Ax \|, \tag{3.6}$$

а из (3.4)-(3.6) следует, что

$$|(\bar{v}, A_{n_k} \bar{x}_k) - (\bar{v}, A\bar{x}_k)| \not\to 0, \tag{3.7}$$

где $\bar{x}_k = x_{n_k} / \| x_{n_k} \|$.

Соотношение (3.7) противоречит слабой равномерной сходимости A_n к A.

Достаточность .Предположим противное, т.е. пусть найдется элемент $\bar{v} \in Y$ такой, что

$\sup\{|\bar{v}, A_n x) - (\bar{v}, Ax)| : \| x \| \le 1\} \not\to 0.$

Тогда найдутся число $d > 0$ и последовательность $\{x_{n_k}\}$ такие, что

$$\| x_{n_k} \| \le 1 \tag{3.8}$$

и

$$|(\bar{v}, A_{n_k} x_{n_k}) - (\bar{v}, Ax)| : \| x \| \leq 1\} \not\to 0. \tag{3.9}$$

для любого *k*.

Из (3.8) без ограничения общности следует, что

$$x_{n_k} \xrightarrow{сл} x. \tag{3.10}$$

Построим последовательность $\{x_n\}$, полагая

$$x_n = \begin{cases} x_{n_k} & при \quad n = n_k, \\ x & при \quad n \neq n_k. \end{cases} \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) следует, что $x_n \xrightarrow{сл} x$, а $A_{n_k} x_n \xrightarrow{сл} A\hat{x}$, значит, и

$$A_{n_k} x_{n_\kappa} \xrightarrow{сл} A\hat{x}. \tag{3.12}$$

Так как *A* – линейный ограниченный оператор, то из (3.10) и теоремы 2.4 следует, что

$$Ax_{n_\kappa} \xrightarrow{сл} A\hat{x}. \tag{3.13}$$

Таким образом, из (3.12), (3.13) и соотношения

$|(\bar{v}, A_{n_k} x_{n_k}) - (\bar{v}, Ax_{n_k})| \leq |\bar{v}, A_{n_k} x_{n_k}) - (\bar{v}, A\hat{x})| + |(\bar{v}, A\hat{x}) - (\bar{v}, Ax_{n_k})|$

следует сходимость

$|(\bar{v}, A_{n_k} x_{n_k}) - (\bar{v}, Ax_{n_k})| \to 0,$

что противоречит (3,9).

Теорема 3.8. (см. [6]). Для того, чтобы последовательность операторов $\{A_n\}$ слабо равномерно сходилась к оператору *A*, необходимо и достаточно, чтобы последовательность сопряженных операторов $\{A_n^*\}$ поточечно сходилась к A^* на пространстве *X*.

Доказательство. Необходимость. Предположим противное. Тогда найдутся число $d > 0,$ элемент $v_0 \in Y$ и подпоследовательность $\{A_{n_k}^*\}$ такие, что для любого *k* имеет место соотношение

$$\| A_{n_k}^* v_0 - A^* v_0 \| \geq d. \tag{3.14}$$

Так как $A_{n_k}x \xrightarrow{сл} Ax$ для любого $x \in X$, то

$$A_{n_k}^* v_0 \xrightarrow{сл} A^* v_0. \tag{3.15}$$

$$\| \bar{x}_k \| = 1 \tag{3.16}$$

и

$$(A_{n_k}^* v_0, \bar{x}_k) = \| A_{n_k}^* v_0 \|. \tag{3.17}$$

Из (3.16) без ограничения общности имеем

$$\bar{x}_k \xrightarrow{сл} \hat{x}. \tag{3.18}$$

По свойству нормы слабого предела (теорема 2.3) из соотношений (3.16) и (3.18) следует, что

$$A_{n_k}\bar{x}_k \xrightarrow{сл} A\hat{x}, \tag{3.20}$$

а из (3.20) – что

$$(A_{n_k}^* v_0, \bar{x}_k) \to (A^* v_0, \hat{x}). \tag{3.21}$$

Таким образом, учитывая (3.17), (3.19) и (3.21), получаем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \| A_{n_k}^* v_0 \| \le \| A^* v_0 \|. \tag{3.22}$$

По свойству нормы слабого предела (теорема 2.3) из соотношения (3.15) следует, что

$$\underset{k\to 0}{\overset{\lim}{-}} \| A_{n_k}^* v_0 \| \ge \| A^* v_0 \|. \tag{3.23}$$

Из (3.22) и (3.23) имеем

$$\lim_{k\to\infty} \| A_{n_k}^* v_0 \| = \| A^* v_0 \|. \tag{3.24}$$

Из (3.15) и (3.24) по теореме 2.5 получаем

$A_{n_k}^* v_0 \to A^* v_0,$

что, в свою очередь, противоречит (3.14).

Достаточность. Пусть

$$x_k \xrightarrow{сл} \hat{x}, \tag{3.25}$$

$$A_{n_k} x_k \xrightarrow{сл} \bar{y}. \tag{3.26}$$

Тогда, учитывая, что $A_{n_k}^{*}v \to A^{*}v$ для любого $v \in Y$, из соотношения (3.25) получаем

$$\left(A_{n_n}^{*}v, x_k\right) \to \left(A^{*}v, x\right)$$

или

$$\left(v, A_{n_k}x_k\right) \to \left(v, Ax\right). \tag{3.27}$$

Из (3.26) и (3.27) следует, что $Au = \overline{f}$. Тем самым теорема доказана.

Глава 4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – линейный ограниченный оператор, отображающий H в H, т.е. $A \in B[H, H]$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = \overline{f}, \tag{4.1}$$

где $u, \overline{f} \in H,$ причем относительно $\overline{f}$ мы не будем предполагать, что $\overline{f} \in R(A)$.

Таким образом, уравнение (4.1), вообще говоря, не разрешимо.

Метод регуляризации приближенного решения уравнения (4.1), согласно [2, с. 70], заключается в сведении уравнения (4.1) к вариационной задаче

$$\inf\{\| Au - \overline{f} \|^2 + \alpha \| u \|^2 : u \in H\},\ \alpha > 0. \tag{4.2}$$

Теорема 4.1. При любых значениях $\alpha > 0$ и $\overline{f} \in H$ вариационная задача (4.2) разрешима.

Доказательство. Так как при любых значениях $\alpha > 0$, $\overline{f} \in H$ и $u \in H$

$\| Au - \overline{f} \|^2 + \alpha \| u \|^2 \geq 0,$

то $\inf\{\| Au - \overline{f} \|^2 + \alpha \| u \|^2 : u \in H\}$ существует. Обозначим его через M_0.
Из определения нижней грани M_0 следует существование минимизирующей последовательности $\{u_n\} \subset H$ такой, что

$$\lim_{n \to \infty} (\| Au_n - \overline{f} \|^2 + \alpha \| u_n \|^2) = M_0. \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует ограниченность последовательности $\{u_n\}$, а из теоремы 2.6 – ее слабая компактность.

Таким образом, из последовательности $\{u_n\}$ может быть выделена слабо сходящаяся подпоследовательность $\{u_{n_к}\}$, т.е.

$$u_{n_к} \xrightarrow{сл} \hat{u} \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{4.4}$$

Из соотношения (4.4) на основании теоремы 2.4 следует, что

$$Au_{n_\kappa} \xrightarrow{сл} A\hat{u} \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

а следовательно,

$$Au_{n_\kappa} - \overline{f} \xrightarrow{сл} A\hat{u} - \overline{f} \quad \text{при} \quad k \to \infty. \qquad (4.5)$$

По свойству нормы слабого предела (теорема 2.3) из соотношений (4.4) и (4.5) вытекает, что

$$\| \hat{u} \| \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \| u_{n_\kappa} \|$$

и

$$\| Au - \overline{f} \| \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \| Au_{n_\kappa} - \overline{f} \|,$$

а следовательно, и

$$\| Au - \overline{f} \|^2 + \alpha \| u \|^2 = M_0,$$

а элемент $\hat{u}$ является решением вариационной задачи (2). Тем самым теорема доказана.

Определение 1.1. (см. [4, с. 69]). Банахово пространство *X* называется строго нормированным, если при $x \neq 0$, $y \neq 0$ равенство $\| x+y \| = \| x \| + \| y \|$ возможно лишь при $y = \lambda x$, где $\lambda > 0$.

Лемма 1.1. Гильбертово пространство *H* строго нормировано.

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$ и $y = \lambda x$. Тогда $x + y = (1+\lambda)x$ и

$$\| x+y \| = (1+\lambda)\| x \| = \| x \| + \lambda \| x \| = \| x \| + \| y \|.$$

В обратную сторону. Пусть $x \neq 0$, $y \neq 0$ и для них выполнено равенство

$\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + 2\| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2$ и, следовательно,

$$(x+y, x+y) = \| x \|^2 + 2(x,y) + \| y \|^2 = \| x \|^2 + 2\| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2,$$

т.е.

$$(x,y) = \| x \| \cdot \| y \|.$$

Таким образом, косинус угла между векторами *x* и *y* равен единице, а следовательно, угол между ними равен нулю, т.е. существует положительное число λ такое, что $y = \lambda x$.

Теорема 4.2. Решение вариационной задачи (4.2) единственно.

Доказательство. Пусть $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$ - решения вариационной задачи (4.2), т.е.

$$\| A\hat{u}_1 - \overline{f} \|^2 + \alpha \| \hat{u}_1 \|^2 = \inf\{\| Au - \overline{f} \|^2 + \alpha \| u \|^2 : u \in H\} \tag{4.6}$$

и

$$\| A\hat{u}_2 - \overline{f} \|^2 + \alpha \| \hat{u}_2 \|^2 = \inf\{\| Au - \overline{f} \|^2 + \alpha \| u \|^2 : u \in H\}. \tag{4.7}$$

Рассмотрим элемент $\hat{u} \in H$ такой, что $\hat{u} = (\hat{u}_1 + \hat{u}_2)/2$. Из (4.6) и (4.7) следует, что

$$\| A\hat{u} - \overline{f} \|^2 + \alpha \| \hat{u} \|^2 = \inf\{\| Au - \overline{f} \|^2 + \alpha \| u \|^2 : u \in H\}, \tag{4.8}$$

а из (4.5)-(4.8) – что

$$\| \hat{u}_1 + \hat{u}_2 \|^2 = \| \hat{u}_1 \| + \| \hat{u}_2 \|. \tag{4.9}$$

Так как из леммы 4.1 следует строгая нормированность гильбертова пространства *H*, то из (4.9) вытекает существование числа $\lambda > 0$ такого, что $\hat{u}_2 = \lambda \hat{u}_1$.

Подставляя выражение $\hat{u}_2$ через $\hat{u}_1$ в функционал вариационной задачи (4.2), получаем

$$\varphi(\lambda) = \| A\lambda \hat{u}_1 - \overline{f} \|^2 + \alpha \lambda^2 \| \hat{u}_1 \|^2 . \tag{4.10}$$

Из (4.6) и (4.10) следует, что парабола, определяемая формулой (4.10), достигает своего минимального значения при $\lambda = 1$. Таким образом, $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$.

В дальнейшем решение вариационной задачи (4.2) обозначим через $\overline{u}_\alpha$.

Теорема 4.3. Решение $\overline{u}_\alpha$ вариационной задачи (4.2) непрерывно зависит от $\overline{f}$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\overline{f}_n\} \subset H$ такую, что $\overline{f}_n \to \overline{f}$ при $n \to \infty$, и для любого n через $\overline{u}_\alpha(n)$ обозначим решение вариационной задачи (2) при $\overline{f} \to \overline{f}_n$.

Предположим противное, т.е. что сходимость $\bar{u}_\alpha(n)$ к $\bar{u}_\alpha$ не имеет места. Тогда найдутся число $d_1 > 0$ и подпоследовательность номеров $\{n_k\}$ такие, что для любого k выполняется соотношение

$$\| \bar{u}_\alpha(n_k) - \bar{u}_\alpha \| \geq d_1. \qquad (4.11)$$

Так как для любого k

$$\| A\bar{u}_\alpha(n_k) - \bar{f}_{n_k} \|^2 + \alpha \| \bar{u}_\alpha(n_k) \|^2 \leq \| A\bar{u}_\alpha - \bar{f}_{n_k} \|^2 + \alpha \| \bar{u}_\alpha \|^2,$$

то

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} (A\bar{u}_\alpha(n_k) - \bar{f}_{n_k} \|^2 + \alpha \| \bar{u}_\alpha(n_k) \|^2 \leq \| A\bar{u}_\alpha - \bar{f}_{n_k} \|^2 + \alpha \| \bar{u}_\alpha \|^2 .$$

Отсюда следует, что последовательность $\{\bar{u}_\alpha(n_k)\}$ ограничена, а в силу теоремы 2.6 слабо компактна.

Без ограничения общности можем считать, что

$$\bar{u}_\alpha(n_k) \xrightarrow{сл} \hat{u} \quad \text{при} \quad k \to \infty. \qquad (4.12)$$

Из соотношения (4.12) на основании теоремы 2.4 следует, что

$$A\bar{u}_\alpha(n_k) \xrightarrow{сл} A\hat{u} \quad \text{при } k \to \infty,$$

а следовательно, и

$$A\bar{u}_\alpha(n_k) - \bar{f}_{n_k} \xrightarrow{сл} A\hat{u} - \bar{f}. \qquad (4.13)$$

По свойству нормы слабого предела (теорема 2.3) из соотношений (4.12) и (4.13) следует, что

$$\| \hat{u} \| \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \| \bar{u}_\alpha(n_k) \| \qquad (4.14)$$

и

$$\| \hat{u} \| \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \| A\bar{u}_\alpha(n_k) - \bar{f}_{n_k} \|, \qquad (4.15)$$

а следовательно, и

$$\| A\hat{u} - \bar{f} \|^2 + \alpha \| \hat{u} \|^2 \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \| A\bar{u}_\alpha(n_k) - \bar{f}_{n_k} \|^2 + \alpha \| \bar{u}_\alpha(n_k) \|^2). \qquad (4.16)$$

Так как $\bar{u}_\alpha$ - единственное решение вариационной задачи (4.2) при $\bar{f}$, то из (4.16) следует, что

$$\hat{u} = \bar{u}_\alpha \qquad (4.17)$$

и

$$\| A\bar{u}_\alpha - \bar{f} \|^2 + \alpha \| \bar{u}_\alpha \|^2 = \lim_{k\to 0}(\| A\bar{u}_\alpha(n_k) - \bar{f}_{n_k} \|^2 + \alpha \| \bar{u}_\alpha(n_k) \|^2). \qquad (4.18)$$

Таким образом,

$$\bar{u}_\alpha(n_k) \xrightarrow{сл} \bar{u}_\alpha \quad \text{при } k \to \infty. \qquad (4.19)$$

Из соотношений (4.14), (4.15), (4.17) и (4.18) следует, что

$$\| A\bar{u}_\alpha(n_k) \| \to \| \bar{u}_\alpha \|. \qquad (4.20)$$

Тогда на основании теоремы 2.5 из (4.19) и (4.20) следует сильная сходимость последовательности элементов $\{\bar{u}_\alpha(n_k)\}$ к $\bar{u}_\alpha$, что, в свою очередь, противоречит (4.11). Тем самым теорема доказана.

Обозначим через $R(A)$ множество значений оператора A.

Элемент $\bar{u}_0 \in H$ будем называть нормальным решением уравнения (4.1) при $f = f_0 R(A),$ если $A\bar{u}_0 = f_0$ и

$\| \bar{u}_0 \|^2 = \inf\{\| u \|^2 : Au = f_0\}.$

Так как H – гильбертово пространство, а A – линейный ограниченный оператор, отображающий H в H, то для любого $f_0 \in R(A)$ существует единственное нормальное решение уравнения (4.1) (см. [2, с. 71]).

Теорема 4.4. Пусть $\bar{f} \in R(A),$ а $\bar{u}$ - нормальное решение уравнения (4.1) при $f = \bar{f}$. Тогда имеет место сходимость решений $\bar{u}_\alpha$ вариационной задачи (4.2) к $\bar{u}$ при $\alpha \to 0$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $d_2 > 0$ и последовательность $\{\alpha_n\}$ такие, что $\alpha_n \to +0$ при $n \to \infty$ и для любого n

$$\| \bar{u}_{\alpha_n} - \bar{u} \| \geq d_2. \qquad (4.21)$$

Так как для любого n элемент $\bar{u}_{\alpha_n}$ является решением вариационной задачи (4.2) при $\alpha = \alpha_n$, то

$$\| A\bar{u}_{\alpha_n} - \bar{f} \|^2 + \alpha_n \| \bar{u}_{\alpha_n} \|^2 \leq \alpha_n \| u \|^2 . \qquad (4.22)$$

Из (4.22) следует, что для любого n

$$\| \bar{u}_{\alpha_n} \| \le \| u \| \qquad (4.23)$$

и

$$A\bar{u}_{\alpha_n} \to \bar{f} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \qquad (4.24)$$

Из (4.23) следует ограниченность последовательности $\{\bar{u}_{\alpha_n}\}$, а в силу теоремы 2.6 – ее слабая компактность. Без ограничения общности можем считать, что

$$\bar{u}_{\alpha_n} \xrightarrow{сл} \hat{u} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \qquad (4.25)$$

Из соотношения (4.25) на основании теоремы 2.4 вытекает, что

$$A\bar{u}_{\alpha_n} \xrightarrow{сл} A\hat{u} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \qquad (4.26)$$

Из (4.24) и (4.26) следует, что

$$\bar{f} \to A\hat{u}.$$

(4.27)

На основании теоремы 2.3 и соотношения (4.25)

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \| \bar{u}_{\alpha_n} \| \ge \| \hat{u} \|. \qquad (4.28)$$

Из (4.23), (4.27) и (4.28) следует, что

$$\hat{u} = \bar{u}, \qquad (4.29)$$

а из (4.23), (4.25), (4.28) и (4.29) – что

$$\| \bar{u}_{\alpha_n} \| \to \| \bar{u} \| \quad \text{при} \quad n \to \infty. \qquad (4.30)$$

Таким образом, на основании теоремы 2.5 и соотношений (4.29), (4.30) следует сильная сходимость последовательности $\{\bar{u}_{\alpha_n}\}$ к $\bar{u}$, что противоречит (4.21). Тем самым теорема доказана.

Теорема 4.5. Вариационная задача (4.2) эквивалентна операторному уравнению

$A^* A u + \alpha u = A^* \bar{f}$.

Доказательство. Запишем уравнение Эйлера для вариационной задачи (4.2). Для этого предположим, что $\hat{u} \in H$ - решение этой задачи, а $\hat{u} + \Delta u$ - некоторая вариация. Обозначим через $F(u, \alpha)$ функционал задачи (4.2), т.е.

$F(u,\alpha) = \| Au - \overline{f} \|^2 + \alpha \| u \|^2$.

Тогда

$\Delta F(\hat{u},\alpha) = F(\hat{u}+\Delta u,\alpha) - F(\hat{u},\alpha),$

где

$F(\hat{u}+\Delta u,\alpha) = \left(A(\hat{u}+\Delta u) - \overline{f}, A(\hat{u}+\Delta u) - \overline{f} \right) + \alpha(\hat{u}+\Delta u, \hat{u}+\Delta u) =$

$= \| Au - \overline{f} \|^2 + 2(A\hat{u} - \overline{f}, A\Delta u) + \| A\Delta u \|^2 + \alpha \| \hat{u} \|^2 + 2\alpha(\hat{u},\Delta u) + \alpha \| \Delta u \|^2$.

Таким образом,

$\Delta F(\hat{u},\alpha) = 2(A^*A\hat{u} + \alpha\hat{u} - A^*\overline{f}, \Delta u) + \| A\Delta u \|^2 + \alpha \| \Delta u \|^2,$

а главная линейная часть приращения равна

$2(A^*A\hat{u} + \alpha\hat{u} - A^*\overline{f}, \Delta u)$.

Из условия экстремума и произвольности $\Delta u \in H$ получаем

$A^*A\hat{u} + \alpha\hat{u} = A^*\overline{f}$.

Учитывая единственность точки, подозрительной на экстремум у функционала $F(u,\alpha),$ получаем эквивалентность задач. Тем самым теорема доказана.

Заключение.

С помощью компьютера возможно применение математических методов и в нетрадиционных областях, где не удается построить компактные математические модели вроде дифференциальных уравнений, но удается построить модели, доступные запоминанию и изучению на компьютере. Модели для компьютеров в этих случаях представляют собой цифровое кодирование схемы, изучаемого объекта (например, языка) и отношений между его элементами (словами, фразами). Сама возможность изучения таких моделей на компьютере стимулирует появление этих моделей, а для создания обозримой модели необходимо выявление законов, действующих в исходных объектах. С другой стороны, получаемые на компьютере результаты (например, машинный перевод упрощенных текстов с одного языка на другой) вносят критерий практики в оценку теорий (например, лингвистических теорий), положенных в основу математической модели.

Благодаря компьютерам стало возможным рассматривать вероятностные модели, требующие большого числа пробных расчетов, имитационные модели, которые отражают моделируемые свойства объекта без упрощений (например, функциональные свойства телефонной сети).

Разнообразие задач, где могут быть использованы компьютеры, очень велико. Для решения каждой задачи нужно знать многое, связанное именно с этой задачей. Естественно, этому нельзя научиться впрок.

Целью работы являлось сообщение тех основных понятий, идей и методов, владение которыми позволяет сравнительно быстро научиться работать в конкретных областях. Это реализуется на материале вычислительных задач алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений, поскольку здесь методы хорошо развиты и применяются в далеких друг от друга областях.

Некоторые общие понятия и идеи, которые требуют внимания и наполняются конкретным содержанием в зависимости от задачи, которую предстоит решать с помощью компьютера. Это - дискретизация задачи; обусловленность задачи; погрешность численного метода; вычислительная устойчивость алгоритма; сравнение алгоритмов по полноте используемой ими входной информации, по используемой памяти и числу арифметических действий. Алгоритмы могут отличаться возможностью распараллеливания для одновременного проведения вычислений на многопроцессорном компьютере. Одним из плодотворных и основных методов вычислительной математики является комбинированное использование аналитических и компьютерных средств.

Список литературы.

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. Н. Кобельков. М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2003. 632 с.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. М.: Высш. шк., 2000. 192 с.
3. Вержбицкий, В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. М.: Высш.шк., 2000. 268 с.
4. Вержбицкий, В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высш.шк., 2001. 383 с.
5. Волков, Е. А. Численные методы. СПб.: Лань, 2004. 248 с.
6. Мудров, А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск: МП "РАСКО", 1991. 272 с.
7. Шуп, Т. Е. Прикладные численные методы в физике и технике. М.: Высш. шк., 1990. 255 с.