МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Южно-Уральский государственный университет"
(национальный исследовательский университет)
Высшая школа электроники и компьютерных наук
Кафедра вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений

РАБОТА ПРОВЕРЕНА:	ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ:
Рецензент	
_____________	_____________
"___"______________2017г.	"___"______________2017г.

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ЮУрГУ-01.04.02.2017.(   ).ВКР

Научный руководитель:
Д.ф.-м.н., профессор
____________В.П. Танана

Автор работы:
магистр группы КЭ-215
____________И.В. Кардополов

Нормоконтролер:
к.ф.-м.н., доцент
____________А.И. Сидикова
"___"______________2017г.

Челябинск 2017

Оглавление

Введение ... 4

1. Исследование сходимости конечномерных аппроксимаций в теории некорректных задач ... 7

1.1. Конечномерная аппроксимация регуляризованного решения ... 7

1.2. Приложение к решению интегральных уравнений ... 14

1.3. Линейные замкнутые операторы и их сопряжнные ... 18

1.4. Конечномерные аппроксимации *l*-регуляризованных решений ... 24

2. Численный метод оценки погрешности приближенного решения обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности ... 36

2.1. Постановка прямой задачи. ... 36

2.2. Постановка обратной задачи ... 38

2.3. Конечномерная аппроксимация оператора C ... 40

2.4. Метод невязки ... 44

2.5. Оценка погрешности приближенного решения $\bar{h}_{\delta,\mu_{n,m}}(t)$ обратной задачи (2.1.2)-(2.1.5), (2.2.1), (2.2.2) ... 49

2.6. Численное решение ... 50

Заключение ... 52

Список литературы ... 53

Введение

Впервые понятие «корректно поставленная задача» было введено Ж. Адамаром в 1923 г. и относилось лишь к краевым задачам математической физики. Корректность постановки задачи обеспечивалась выполнением двух условий: существование решения и его единственность. Требование устойчивости решения было впоследствии присоединено к первым двум. Долгое время по авторитетному мнению Ж. Адамара считалось, что некорректные задачи не могут иметь практического смысла и поэтому нет необходимости в их решении.

Первой работой, в которой это мнение было опровергнуто, считается известная работа академика А.Н. Тихонова 1943 г., в которой он впервые дал постановку условно-корректной задачи и решил одну из актуальных задач разведочной геофизики [31]. В дальнейшем теория некорректных задач заняла свое заслуженное место в научных исследованиях, поскольку было многократно подтверждено, что задачи, возникающие в практике, чаще всего некорректны, и математическим аппаратом их решения как раз и является теория корректных и некорректных задач А.Н. Тихонова.

Приведем определения корректных и некорректных задач, принадлежащие А.Н. Тихонову. Математические задачи чаще всего состоят в том, что по исходным данным u ищется решение z. При этом считается, что u и z связны зависимостью $z=R(u)$. Задача называется корректной или корректно поставленной, если выполнены условия:

1) задача имеет решение при любых допустимых исходных данных u (существование решения);
2) каждым исходным данным u соответствует только одно решение z (единственность решения);
3) решение устойчиво.

Смысл первого условия заключается в том, что среди исходных данных нет противоречащих друг другу условий, что исключало бы возможность решения задачи.

Второе условие означает, что исходных данных достаточно для однозначной разрешимости задачи. Эти два условия обычно называют условиями математической определенности задачи.

Третье условие заключается в следующем. Если u_1 и u_2 – два различных набора исходных данных, мера уклонения которых друг от друга достаточно мала, то мера уклонения решений $z_1 = R(u_1)$ и $z_2 = R(u_2)$ меньше любой наперед заданной точности. При этом предполагается, что в многообразии $U = \{u\}$ допустимых исходных данных и в многообразии возможных решений $Z = \{z\}$ установлено понятие меры уклонения $r_u(u_1, u_2)$ и $r_z(z_1, z_2)$. Третье условие трактуется как физическая определенность задачи. Это объясняется тем, что исходные данные физической задачи, как правило, задаются с некоторой погрешностью; при нарушении третьего условия как угодно малые возмущения исходных данных могут вызвать большие отклонения в решении. Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из условий корректности, называются некорректными или некорректно поставленными. [28]

В вопросах постановки и разработки специальных методов решения некорректных задач основополагающее место занимают работы А.Н. Тихонова [30, 31], М.М. Лаврентьева [13, 14] и В.К. Иванова [10, 11].

В настоящее время теория некорректно поставленных задач является одним из основных направлений прикладной математики, которое, развиваясь, находит новые приложения в естествознании, физике, металлургии и технике.

Состояние теории некорректных задач на сегодняшний день отражено в монографиях М. М. Лаврентьева [14, 16], А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина

[29], Р. Латтеса и Ж.Л. Лионса [17], В.К. Иванова, В.В. Васина, В.П. Тананы [12], В.А. Морозова [20], М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, С.П. Шишатского [15], О.А. Лисковца [18], В.В. Васина, А.Л. Агеева [6], Г.М. Вайникко [4], А.М. Федотова [33], А.Н. Тихонова, А.В. Гончарского, В.В. Степанова и А.Г. Яголы [32], В.К. Иванова, И.В. Мельниковой и А.И. Филинкова [9], В.П. Тананы и А.И. Сидиковой [25] и многих других.

В современной теории некорректных задач можно выделить три основных направления:

1. Теория регуляризуемости, связанная с проблемой существования метода решения той или иной задачи. Решение этой проблемы позволяет отсеять тот класс задач - “абсолютно некорректных” - за решение которых бесполезно браться. В работе В.А. Винокурова [7] было замечено, что далеко не все задачи регуляризуемы, то есть решаемы.
2. Конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов. Основными методами решения некорректных задач на данный момент являются метод регуляризации А.Н. Тихонова [30], метод М.М. Лаврентьева [14], метод квазирешений В.К. Иванова [10] и метод невязки [3]. Практическая реализация этих методов невозможна без использования ЭВМ. При этом требуется замена исходной бесконечномерной задачи некоторой конечномерной. Указанная замена не должна испортить сходимость регуляризованного решения к точному.
3. Построение эффективных методов решения некорректных задач. Основополагающие работы в данном направлении принадлежат Тихонову А.Н. [30], Лаврентьеву М.М. [14] и Иванову В.К. [10]. В них были сформулированы основные принципы регуляризации и предложены некоторые методы, которые исследуются до сих пор.

1. Исследование сходимости конечномерных аппроксимаций в теории некорректных задач.

1.1. Конечномерная аппроксимация регуляризованного решения

Пусть H – гильбертово пространство, A – инъективный линейный ограниченный оператор, отображающий пространство H в H.

Метод конечномерной аппроксимации [12, с. 174] заключается в замене вариационной задачи конечномерной:

$$\inf\left\{\left\|A_n u - \bar{f}_n\right\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in H_n\right\}, \tag{1.1}$$

где $\bar{f}_n \to \bar{f}$ при $\alpha \to \infty$, $\{A_n\}$ - ограниченная последовательность операторов, а $\{H_n\}$ - последовательность конечномерных подпространств пространства H.

Существует и единственное решение $\bar{u}_\alpha(n)$ вариационной задачи (1.1), которое, следуя [12, с. 144], назовем конечномерной аппроксимацией регуляризованного решения $\bar{u}_\alpha$.

Введем вспомогательную вариационную задачу

$$\inf\left\{\left\|A_n P_n u - \bar{f}_n\right\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in H\right\}, \tag{1.2}$$

где P_n - оператор ортогонального проектирования H на H_n.

Лемма 1.1. Вариационные задачи (1.1) и (1.2) эквивалентны.

Лемма 1.2. Пусть $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ - ограниченные последовательности линейных операторов, отображающих H в H, которые поточечно сходятся к операторам A и B соответственно.

Тогда последовательность операторов $\{A_n B_n\}$ поточечно сходится к оператору AB.

Относительно последовательности конечномерных подпространств $\{H_n\}$ предположим, что для любого $u \in H$

$$P_n u \to u \text{ при } n \to \infty \tag{1.3}$$

где P_n - оператор ортогонального проектирования пространства H на H_n.

Теорема 1.1 (см. [24]). Пусть последовательности операторов $\{A_n\}$ и $\{P_n A_n^*\}$ поточечно сходятся к операторам A и A^* соответственно.

Тогда

$$\bar{u}_\alpha(n) \to \bar{u}_\alpha \text{ при n} \to \infty$$

$$A_n \bar{u}_\alpha(n) \to A\bar{u}_\alpha \text{ при n} \to \infty$$

Доказательство. Исходя из леммы 5.1, на элемент $\bar{u}_\alpha(n)$ в дальнейшем будем смотреть как на решение вспомогательной задачи (1.2).

Из (1.3), поточечной сходимости последовательности операторов $\{A_n\}$ и леммы 1.2 будет следовать поточечная сходимость последовательности $\{A_n P_n\}$ к оператору A.

Теперь предположим противное. Тогда найдутся число $d > 0$ и последовательность номеров $\{n_k\}$ такие, что для любого k

$$\left\|\bar{u}_\alpha(n_k) - \bar{u}_\alpha\right\| + \left\|A_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k) - A\bar{u}_\alpha\right\| \geq d \tag{1.4}$$

Так как последовательности операторов $\{P_n\}$ и $\{A_n P_n\}$ поточечно сходятся к операторам E и A соответственно, то

$$P_{n_k}\bar{u}_\alpha \to \bar{u}_\alpha \text{ при k} \to \infty \tag{1.5}$$

и

$$A_{n_k} P_{n_k}\bar{u}_\alpha \to A\bar{u}_\alpha \text{ при k} \to \infty \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) следует, что

$$\left\|A_{n_k} P_{n_k}\bar{u}_\alpha - \bar{f}_{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|P_{n_k}\bar{u}_\alpha\right\|^2 \to \left\|A\bar{u}_\alpha - \bar{f}\right\|^2 + \alpha\left\|\bar{u}_\alpha\right\|^2 \text{ при } k \to \infty \tag{1.7}$$

Из того, что $P_{n_k}\bar{u}_\alpha \in H_{n_k}$, а $P_{n_k}\bar{u}_\alpha = P_{n_k}P_{n_k}\bar{u}_\alpha$, получаем

$$\left\|A_{n_k} P_{n_k} P_{n_k}\bar{u}_\alpha - \bar{f}_{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|P_{n_k}\bar{u}_\alpha\right\|^2 \geq \left\|A_{n_k} P_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k) - \bar{f}_{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|\bar{u}_\alpha(n_k)\right\|^2 \tag{1.8}$$

для любого k. Согласно (1.7), (1.8)

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\{\left\|A_{n_k}P_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)-\bar{f}_{n_k}\right\|^2+\alpha\left\|\bar{u}_\alpha(n_k)\right\|^2\right\}\le\left\|A\bar{u}_\alpha-\bar{f}\right\|^2+\alpha\left\|\bar{u}_\alpha\right\|^2 \qquad (1.9)$$

Из соотношения (1.9) вытекает ограниченность последовательности $\{\bar{u}_\alpha(n_k)\}$, а ввиду гильбертовости H – и слабая компактность. Без ограничения общности можем считать, что

$$\bar{u}_\alpha(n_k)\xrightarrow{сл}\hat{u} \qquad (1.10)$$

Из того, что последовательность операторов $\{P_nA_n^*\}$ поточечно сходится к A^*, следует, что

$$A_{n_k}P_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)\xrightarrow{сл}A\hat{u}\,. \qquad (1.11)$$

Из (1.10) и (1.11) по свойству нормы слабого предела (теорема 2.3) имеем

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\left\{\left\|A_{n_k}P_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)-\bar{f}_{n_k}\right\|^2+\alpha\left\|\bar{u}_\alpha(n_k)\right\|^2\right\}\ge\left\|A\hat{u}-\bar{f}\right\|^2+\alpha\left\|\hat{u}_\alpha\right\|^2 \qquad (1.12)$$

Согласно (1.9), (1.12) $\bar{u}=\hat{u}_\alpha$ и

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\left\|A_{n_k}P_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)-\bar{f}_{n_k}\right\|^2+\alpha\left\|\bar{u}_\alpha(n_k)\right\|^2\right\}=\left\|A\bar{u}_\alpha-\bar{f}\right\|^2+\alpha\left\|\bar{u}_\alpha\right\|^2. \qquad (1.13)$$

Так как из (1.13) следует, что

$$\left\|\bar{u}_\alpha(n_k)\right\|\to\left\|\bar{u}_\alpha\right\| \text{ при } k\to\infty,$$

а

$$\left\|A_{n_k}P_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)-\bar{f}_{n_k}\right\|\to\left\|A\bar{u}_\alpha-\bar{f}\right\| \text{ при } k\to\infty,$$

то из (1.10), (1.11) приходим к тому, что

$$\bar{u}_\alpha(n_k)\to\bar{u}_\alpha, \qquad (1.14)$$

$$A_{n_k}P_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)\to A\bar{u}_\alpha, \qquad (1.15)$$

а ввиду того, что $\bar{u}_\alpha(n_k)\in H_{n_k}$, имеем $P_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)=\bar{u}_\alpha(n_k)$. Это с учетом (1.15) приводит к сходимости

$$A_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)\to A\bar{u}_\alpha\,. \qquad (1.16)$$

Соотношения (1.14) и (1.16) противоречат (1.4). Тем самым теорема доказана.

Лемма 1.3. Пусть $\bar{f} \in R(A)$ и существует последовательность $\{\bar{f}_n\} \subset H$ такая, что $\bar{f}_n \to \bar{f}$,

$$\bar{u}_\alpha(n) \to \bar{u}_\alpha \text{ при } n \to \infty, \qquad (1.17)$$

$$A_n\bar{u}_\alpha(n) \to A\bar{u}_\alpha \text{ при } n \to \infty. \qquad (1.18)$$

Тогда для любой последовательности $\{\hat{f}_n\} \subset H$ такой, что $\hat{f}_n \to \bar{f}$ при $n \to \infty$, имеют место соотношения

$$\hat{u}_\alpha(n) \to \bar{u}_\alpha \text{ при } n \to \infty,$$

$$A_n\hat{u}_\alpha(n) \to A\bar{u}_\alpha \text{ при } n \to \infty,$$

где $\hat{u}_\alpha(n)$ решение задачи (1.1) при $\hat{f}_n$.

Доказательство. Согласно лемме 1.1 $\hat{u}_\alpha(n)$ является также решением задачи (1.2) при $\hat{f}_n$. Тогда

$$\bar{u}_\alpha(n) = (P_nA_n^*A_nP_n + \alpha E)^{-1}P_nA_n^*\bar{f}_n, \qquad (1.19)$$

$$\hat{u}_\alpha(n) = (P_nA_n^*A_nP_n + \alpha E)^{-1}P_nA_n^*\hat{f}_n. \qquad (1.20)$$

Поэтому с учетом (1.19) и (1.20)

$$\|\bar{u}_\alpha(n) - \hat{u}_\alpha(n)\| \le \frac{1}{\alpha}\|A_n\| \cdot \|\bar{f}_n - \hat{f}_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \qquad (1.21)$$

Из (1.17) и (1.21) вытекает, что $\hat{u}_\alpha(n) \to \bar{u}_\alpha$ при $n \to \infty$. Используя (1.18), аналогично можно доказать, что $A_n\hat{u}_\alpha(n) \to A\bar{u}_\alpha$ при $n \to \infty$.

Обозначим через $\bar{A}_n$ сужение оператора A_n на H_n.

Определение 1.1. (см [2]). Последовательность операторов $\{\bar{A}_n\}$ называется A-полной на множестве $M \subset H$, если для любого $u_0 \in M$ найдется последовательность $\{u_n\}$ такая, что $u_n \in H_n$ для любого n и имеют место сходимости $u_n \to u_0$, $A_nu_n \to Au_0$.

Лемма 1.4. Пусть последовательность операторов $\{A_n\}$ ограничена. Тогда для того чтобы последовательность сужений $\{\bar{A}_n\}$ была A-полной на пространстве *H*, необходимо и достаточно, чтобы последовательность операторов $\{A_n\}$ поточечно сходилась к оператору *A*.

Лемма 1.5. Если для любых $\alpha > 0$ и $\overline{f} \in H$ найдется последовательность $\{\overline{f}_n^{'}\} \subset H$ такая, что

$$\overline{f}_n^{'} \to \overline{f} \text{ при } n \to \infty, \tag{1.22}$$

$$\overline{u}_\alpha^{'}(\text{n}) \to \overline{\text{u}}_\alpha \text{ при } n \to \infty, \tag{1.23}$$

$$A_n \overline{u}_\alpha^{'}(\text{n}) \to A\overline{\text{u}}_\alpha \text{ при } n \to \infty, \tag{1.24}$$

то A_n поточечно сходится к *A*.

Доказательство. Согласно лемме 1.3 соотношения (1.23) и (1.24) выполняются для любой последовательности $\{\overline{f}_n\}$, удовлетворяющей (1.22).

Теперь предположим противное. Тогда в силу леммы 1.4 последовательность $\{\overline{A}_n\}$ не является *A*-полной на пространстве *H*. Таким образом найдется элемент $\overline{u} \in H$ такой, что

$$\|u_n - \overline{u}\| + \|A_n u_n - A\overline{u}\| \not\to 0 \text{ при } n \to \infty \tag{1.25}$$

для любой последовательности $\{u_n\}$, $u_n \in H$. Из (1.25) следует существование числа $d > 0$ и подпоследовательности $\{n_k\}$ таких, что

$$\|u_n - \overline{u}\| + \|A_{n_k} u_n - A\overline{u}\| \geq d \tag{1.26}$$

при любых k и $u \in H_{n_k}$.

Для любого натурального *l* существует $\alpha(l) > 0$ такое, что

$$\|\overline{u}_{\alpha(l)} - \overline{u}\| < 1/l \tag{1.27}$$

В силу предположений леммы для любого *l* существует номер $k(l)$ такой, что

$$\|\overline{u}_{\alpha(l)}(n_{k(l)}) - \overline{u}_{\alpha(l)}\| < 1/l, \tag{1.28}$$

а

$$\|A_{n_{k(l)}} \overline{u}_{\alpha(l)}(n_{k(l)}) - A\overline{u}_{\alpha(l)}\| < 1/l. \tag{1.29}$$

Из (1.27)-(1.29) имеем

$$\bar{u}_{\alpha(l)}(n_{k(l)}) \in H_{n_{k(l)}},$$

$$\bar{u}_{\alpha(l)}(n_{k(l)}) \to \bar{u} \text{ при } l \to \infty,$$

$$A_{n_{k(l)}} \bar{u}_{\alpha(l)}(n_{k(l)}) \to A\bar{u} \text{ при } l \to \infty$$

Это противоречит (1.26)

Лемма 1.6. Если для любых $\alpha > 0$ и $\bar{f} \in H$ существует последовательность $\left\{\bar{f}_n'\right\} \subset H$, удовлетворяющая соотношениям (1.22)-(1.24), то $P_n A_n^*$ поточечно сходится к A^*.

Доказательство. В силу леммы 1.3 соотношения (1.23), (1.24) выполняются для любой последовательности $\left\{\bar{f}_n'\right\}$, удовлетворяющей соотношению (1.22).

Предположим противное, т.е. пусть найдутся элементы $\bar{g} \in H$, число $d > 0$ и последовательность $\{n_k\}$ такая, что для любого k

$$\left\| P_{n_k} A_{n_k}^* \bar{g} - A^* \bar{g} \right\| \geq d. \tag{1.30}$$

Обозначим элемент $A^*\bar{g}$ через $\bar{u}$. Тогда на основании леммы 1.5 получаем

$$A_{n_k} P_{n_k} \bar{u} \to A\bar{u} \text{ при } k \to \infty. \tag{1.31}$$

Пусть в дальнейшем $\alpha = 1$, а $\bar{f} = A\bar{u} + \bar{g}$.

Пусть $\bar{f}_{n_k} = A\bar{u} + \bar{g}$. Решение $\bar{u}(n_k)$ задачи (1.2) при $\alpha = 1$ удовлетворяет соотношению

$$P_{n_k} A_{n_k}^* A_{n_k} P_{n_k} \bar{u}(n_k) + \bar{u}(n_k) = P_{n_k} A_{n_k}^* A\bar{u} + P_{n_k} A_{n_k}^* \bar{g}. \tag{1.32}$$

Из предположений леммы выводим, что

$$\bar{u}(n_k) \to \bar{u} \text{ при } k \to \infty, \tag{1.33}$$

$$A_{n_k} P_{n_k} \bar{u}(n_k) \to A\bar{u} \text{ при } k \to \infty. \tag{1.34}$$

Так как

$$\left\| P_{n_k} A_{n_k}^* A_{n_k} P_{n_k} \bar{u}(n_k) - P_{n_k} A_{n_k}^* A\bar{u} \right\| \leq \left\| A_{n_k} \right\| \cdot \left\| A_{n_k} P_{n_k} \bar{u}(n_k) - A\bar{u} \right\|,$$

то из (1.33) и (1.34) следует, что

$$\left\| P_{n_k} A^*_{n_k} A_{n_k} P_{n_k} \bar{u}(n_k) - P_{n_k} A^*_{n_k} A\bar{u} \right\| \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

а значит, учитывая (1.22), $P_{n_k} A^*_{n_k} \bar{g} \to A^* \bar{g}$, что противоречит (1.30).

Теорема 1.2. (см [24]). Для того, чтобы для любых $\alpha > 0$ и $\bar{f} \in H$ существовала последовательность $\{\bar{f}_n\} \subset H$ такая, что $\bar{f}_n \to \bar{f}$, $\bar{u}_\alpha(n) \to \bar{u}_\alpha$, $A_n \bar{u}_\alpha(n) \to A\bar{u}_\alpha$ при $n \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы A_n и $P_n A^*_n$ поточечно сходились к операторам A и A^* соответственно.

Эта теорема является прямым следствием теоремы 1.1 и лемм 1.4 и 1.6.

1.2. Приложение к решению интегральных уравнений

Рассмотрим задачу конечномерной аппроксимации интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^1 K(s,t)u(s)ds = \overline{f}(t) \quad (0 \le t \le 1) \tag{2.1}$$

или

$$Ku = \overline{f}$$

где правая часть $\overline{f}(t)$ и решение $u(s)$ уравнения (2.1) принадлежит пространству $L_2[0,1]$, а ядро $K(s,t)$ непрерывно на квадрате $[0,1]\times[0,1]$ и замкнуто.

Кроме того, будем предполагать, что область значений $R(K)$ оператора K всюду плотна в $L_2[0,1]$.

Методом регуляризации задачу приближенного решения уравнения (6.1) можно свести к вариационной

$$\inf\left\{\int_0^1\left[\int_0^1 K(s,t)u(s)ds - \overline{f}(t)\right]^2 dt + \alpha\int_0^1 u^2(s)ds : u \in L_2[0,1]\right\}. \tag{2.2}$$

Метод конечномерной аппроксимации уравнения (2.1), приведенный в [6], заключается в замене его системой линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\widehat{K}_{ij}u_i = \widehat{f}_j, \quad i,j = 1,2,...,2^n. \tag{2.3}$$

Применяя к системе (2.3) метод регуляризации, сведем ее к вариационной задаче

$$\inf\left\{\frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n}\left[\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\widehat{K}_{ij}u_i - \widehat{f}_j\right]^2 + \frac{\alpha}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}u_i^2 : (u_i) \in R^{2n}\right\}. \tag{2.4}$$

Как отмечалось ранее, задачи (2.2) и (2.4) имеют единственные решения, которые обозначим через $\overline{u}_\alpha$ и $\widehat{u}_\alpha(n)$ соответственно. При этом возникает вопрос о сходимости конечномерных аппроксимаций $\widehat{u}_\alpha(n)$ к решению $\bar{u}_\alpha$ вариационной задачи (2.2) при $n \to \infty$. Ответ на этот вопрос можно дать, используя общую схему и теорему 1.2.

Для этого выполним следующие построения. Пусть

$H = L_2[0,1]$, а $H_n = \left\langle e_1(s), e_2(s), ..., e_{2^n}(s) \right\rangle$ -

линейная оболочка, порожденная элементами

$$e_i(s) = \begin{cases} 0, & 0 \le s < (i-1)/2^n \\ 1, & (i-1)/2^n \le s \le i/2^n \\ 0, & i/2^n < s \le 1 \end{cases}, \qquad (2.5)$$

Оператор $\hat{K}_n$ определим следующим образом:

$$\hat{K}_n u = \int_0^1 \hat{K}_n(s,t) u(s) ds, \qquad (2.6)$$

где u, $\hat{K}_n \in L_2[0,1]$, а

$$\hat{K}_n(s,t) = \hat{K}_{ij} \text{ при } (i-1)/2^n < s \le i/2^n; \quad (j-1)/2^n < t \le j/2^n. \qquad (2.7)$$

Кроме того, положим $\hat{f}_n = pr(\bar{f}, H_n)$, где $pr(\bar{f}, H_n)$ - метрическая (ортогональная) проекция элемента $\bar{f}$ на H_n и $\hat{f}_n(t) = \hat{f}_j$ при $(j-1)/2^n < t \le j/2^n; i, j = 1, 2, ..., 2^n$.

В новых обозначениях задача (2.4) эквивалентна следующей:

$$\inf\left\{ \left\| \hat{K}_n u - \hat{f}_n \right\|^2 + \alpha \|u\|^2 : u \in H_n \right\} \qquad (2.8)$$

Решение задачи (2.8) по аналогии с задачей (2.4) обозначим через $\hat{u}_\alpha(n)$.

Из (2.5)-(2.7) вытекает, что

$$\int_0^r \hat{K}_n(s,t) dt \in H_n$$

для любого r, $0 \le r \le 1$, а тем самым и

$$P_n \hat{K}_n^* g_r = \hat{K}_n^* g_r \qquad (2.9)$$

где P_n - оператор метрического проектирования H на H_n, $\widehat{K}_n^*$ - оператор сопряженный $\widehat{K}_n$, и

$$g_r(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le r \\ 0, & r \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.10}$$

Пусть

$$M = \{ g : g(t) = g_r(t), \ \ 0 \le r \le 1 \} \tag{2.11}$$

где $g_r(t)$ определено формулой (2.10).

Из (2.10) и (2.11) следует, что замыкание линейной оболочки множества M совпадает с $L_2[0,1]$. Для поточечной сходимости $\widehat{K}_n$ к K, а $\widehat{K}_n^*$ к K^* необходимо и достаточно сходимости $\widehat{K}_n$ к K, а $\widehat{K}_n^*$ к K^* на множестве M.

Теорема 2.1. Для того, чтобы имела место сходимость $\widehat{u}_\alpha(n)$ к $\widehat{u}_\alpha$ и $\widehat{K}_n \widehat{u}_\alpha(n)$ к $\widehat{K}_n \widehat{u}_\alpha$ при $n \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $r, \ \ 0 \le r \le 1$, выполнялись соотношения

$$\int_0^r \widehat{K}_n(s,t)ds \to \int_0^r K(s,t)ds, \quad \int_0^r \widehat{K}_n(s,t)dt \to \int_0^r K(s,t)dt$$

при $n \to \infty$.

Доказательство следует из теоремы 1.2 и соотношений (2.9)-(2.11).

Теорема 2.1 о конечномерных аппроксимациях является неулучшаемой и существенно обобщает аналогичный результат работы [26].

В подтверждение последнего высказывания приведем пример, в котором последовательность аппроксимирующих ядер $\widehat{K}_n(s,t)$ не сходится к ядру $K(s,t)$ ни в одной точке и тем не менее имеет место сходимость конечномерных аппроксимаций $\widehat{u}_\alpha(n)$ к $\widehat{u}_\alpha$ при $n \to \infty$.

Пусть $K(s,t)$ - произвольное замкнутое и непрерывное на $[0,1]\times[0,1]$ ядра, а

$$\widehat{K}_n(s,t) - K(\overline{s}_i, \overline{t}_j) = \Big\{ (-1)^{i+j} : (i-1)/2^n \le s \le i/2^n ,$$
$$(j-1)/2^n \le t \le j/2^n , \;\; i, j = 1, 2, ..., 2^n \Big\},$$

где $\overline{s}_i$ и $\overline{t}_j$ - некоторые фиксированные элементы, удовлетворяющие соотношениям $(i-1)/2^n \le s \le i/2^n$, $(j-1)/2^n \le t \le j/2^n$. Легко проверить, что в этом случае будут выполняться условия теоремы 2.1, а следовательно $\widehat{u}_\alpha(n) \to \widehat{u}_\alpha$ при $n \to \infty$.

1.3. Линейные замкнутые операторы и их сопряжнные

Пусть X и Y - банаховы пространства, а X^* и Y^* - простарнства, сопряженные X и Y соответственно.

Определение 3.1. Линейный оператор T с областью определения $D(T) \subset X$ и областью значений $R(T) \subset Y$ будем называть замкнутым, если из того, что $\{x_n\} \subset D(T)$, $x_n \to x_0$ и $Tx_n \to y$, следует, что $x_0 \subset D(T)$ и $y = Tx_0$ (см. [8, с. 263]).

Обозначим через $\Gamma(T) \subset X \times Y$ график оператора T, где

$$\Gamma(T) = \{(x, y) : x \in D(T),\ y = Tx\},$$

а $X \times Y$ - декартово произведение пространств X и Y.

Задача 3.1. Линейный оператор T замкнут тогда и только тогда, когда его график $\Gamma(T)$ замкнут в $X \times Y$.

Определение 3.2. Пусть S - линейный оператор с областью определения $D(S) \subset Y^*$ и областью значений $R(S) \subset X^*$. Тогда операторы T и S будем называть сопряженными друг другу, если

$$(g, Tx) = (Sg, x); \quad x \in D(T) \ \ g \in D(S) \tag{3.1}$$

а (g, y) - симметричная форма записи, т.е. для любых $g \in Y^*$ и $y \in Y$, аналогично и (h, x), $h \in X^*$, $x \in X$.

Определение 3.3. Линейный оператор T^* с областью определения $D(T^*) \subset Y^*$ и областью значений $R(T^*) \subset X^*$ будем называть сопряженным оператору T, если операторы T и T^* сопряжены друг другу и $D(T^*)$ содержит все $g \in Y^*$ такие, что для каждого из них найдется $h \in X^*$, удовлетворяющий соотношению

$$(g, Tx) = (h, x), \quad x \in D(T). \tag{3.2}$$

Таким образом, сопряженный оператор T^* является максимальным среди всех операторов S таких, что T и S сопряжены друг другу. Для оператора T в общем случае найдется много операторов T^*, сопряженных T, но если область определения $D(T)$ оператора T всюду плотна в X, то сопряженный оператор T^* определен однозначно.

Обозначим через $(X \times Y)^*$ пространство, сопряженное декартовому произведению $X \times Y$. Тогда если $\Phi \in (X \times Y)^*$, то, положив $h(x) = \Phi(\{x, \Theta\})$ и $g(y) = \Phi(\{0, y\})$, будем иметь

$$\Phi(\{x, y\}) = h(x) + g(y) \tag{3.3}$$

где $h \in X^*$, $g \in Y^*$, $\{x, y\} \in X \times Y$. Обратно, если $h \in X^*$ и $g \in Y^*$, то, используя (3.3), определим

$$\Phi = \{h, g\} \in (X \times Y)^*.$$

Таким образом, с помощью (3.3) мы определили гомеоморфный изоморфизм между пространствами $(X \times Y)^*$ и $X^* \times Y^*$.

Теорема 3.1. Пусть $\Gamma(T^*)$ и $\Gamma(-T)$ графики операторов T^* и $-T$ соответственно, а $\Phi = \{h, g\} \in (X \times Y)^*$. Тогда соотношение

$$\{h, g\} \in \Gamma(T^*) \tag{3.4}$$

эквивалентно соотношению

$$\Phi(\{x, y\}) = h(x) + g(y) = 0, \quad \{x, y\} \in \Gamma(-T) \tag{3.5}$$

Доказательство. Соотношение (3.4) эквивалентно соотношению $h(x) = g(y)$, где $y = Tx$, $x \in D(T)$, $h \in X^*$, а $g \in Y^*$. То есть для $\Phi = \{h, g\} \in (X \times Y)^*$

$$\Phi(\{x, y\}) = h(x) + g(y) = 0,$$

где $y = -Tx, \quad x \in D(T)$. Тем самым теорема доказана.

Из теоремы 3.1 следует, что сопряженный оператор T^* всегда замкнут.

Лемма 3.1. Пусть X - рефлексивное банахово пространство, а L - линейное подмножество их X^* такое, что для любого $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ найдется $h_0 \in L$ такой, что $h_0(x_0) \neq 0$. Тогда L всюду плотно в X^*.

Доказательство. Предположим, что $\bar{L} \neq X^*$. Тогда найдется функционал $\psi_0 \in X^{**}$ такой, что $\psi_0 \neq 0$ и для любого $h \in L$

$$\psi_0(h) = 0.$$

Так как X рефлексивно, то существует элемент $\widehat{x}_0 \in X$ такой, что для любого $h \in X^*$

$$\psi_0(h) = h(\widehat{x}_0)$$

и

$$\|\widehat{x}_0\| = \|\psi_0\| \neq 0.$$

Но из предположения леммы следует существование $\widehat{h}_0 \in L$ такого, что $\widehat{h}_0(\widehat{x}_0) \neq 0$, то есть $\psi_0(\widehat{h}_0) = \widehat{h}_0(\widehat{x}_0) \neq 0$, что, в свою очередь, противоречит тому, что для любого $h \in L$ $\psi_0(h) = 0$. Тем самым лемма доказана.

Теорема 3.2. Пусть Y - рефлексивное банахово пространство, а T - линейный замкнутый оператор с областью определения $D(T)$, всюду плотный в X, и областью значений $R(T) \subset Y$. Тогда область значений $D(T^*)$ сопряженного оператора T^* всюду плотна в Y^*.

Доказательство. Пусть $y_0 \in Y$ и $y_0 \neq 0$. Тогда, учитывая, что график $\Gamma(-T)$ оператора $-T$ является замкнутым пространством в декартовом произведении $X \times Y$ и $\{0, y_0\} \notin \Gamma(-T)$ получим существование функционала $\Phi_0(\{0, y_0\}) \neq 0$ и $\Phi_0(\{x, y\}) = 0$ для $\{x, y\} \in \Gamma(-T)$. Положив $\Phi_0 = \{h_0, g_0\} \in X^* \times Y^*$ и воспользовавшись теоремой 7.1, получим, что $h_0 = T^* g_0$.

Таким образом, $g_0 \in D(T^*)$ и $g_0(y_0) = \Phi_0(\{0, y_0\})$. Используя лемму 3.1, получаем, что $D(T^*)$ всюду плотна в Y^*. Тем самым теорема доказана.

Теорема 3.3. Пусть Y - рефлексивное банахово пространство, а T - линейный замкнутый оператор с областью определения $D(T)$, всюду плотный в X, и областью значений $R(T) \subset Y$. Тогда $T^{**} = (T^*)^*$ определен однозначно и является расширением оператора T при каноническом вложении X и Y в X^{**} и Y^{**} соответственно.

Доказательство. По теореме 3.2 $D(T^*)$ всюду плотна в Y^*. Поэтому оператор $(T^*)^*$ определен однозначно. Из теоремы 3.1 следует, что уравнение $h = T^* g$ эквивалентно соотношению $\{h, g\}(\{x, -Tx\}) = 0$ для любого $x \in D(T)$ и $g \in D(T^*)$, или, переставляя X и Y, имеем $\{g, -h\}(\{Tx, x\}) = 0$. Так как пространства X и Y канонически вложены в X^{**} и Y^{**}, то для $h = T^* g$ имеем

$$\{\widehat{Tx}, \hat{x}\}(\{g, -h\}) = 0 \quad x \in D(T) \quad g \in D(T^*),$$

где через $\hat{x}$ обозначен элемент пространства X^{**}, соответствующий $x \in X$ при каноническом вложении. Следовательно, оператор T^{**} может быть определен для любого $x \in D(T)$ как $T^{**}(\hat{x}) = \widehat{Tx}$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 3.4. Пусть X и Y - рефлексивные банаховы пространства, а T - линейный замкнутый оператор с областью определения $D(T)$ всюду плотный в X, и областью значений $R(T) \subset Y$. Тогда T^{**} совпадает с T: $T^{**} = T$ при каноническом вложении X и Y в X^{**} и Y^{**} соответственно.

Доказательство. Пусть $x \in X$, а $y \in Y$. Тогда соответствующие им элементы при каноническом вложении X в X^{**} и Y в Y^{**} обозначим через $\hat{x} \in X^{**}$ и $\hat{y} \in Y^{**}$. Таким образом уравнение

$$\hat{y}_1 = (T^*)^* \hat{x}_1, \quad \hat{x}_1 \in D(T^{**}) \tag{3.6}$$

эквивалентно

$$\{\hat{y}_1, \hat{x}_1\}(\{g, -T^* g\}) = 0$$

для любого $g \in D(T^*)$. Учитывая каноническое вложение X в X^{**} и Y в Y^{**}, получаем, что для любого $g \in D(T^*)$

$$\{g, -T^* g\}(\{y_1, x_1\}) = 0. \tag{3.7}$$

Таким образом, можно считать, что $\{y_1, x_1\} \in \Gamma(T)$, так как в противном случае нашелся бы элемент $\{g_1, h_1\} \in Y^* \times X^*$ такой, что

$$\{g_1, h_1\}(\{y_1, x_1\}) \neq 0 \tag{3.8}$$

и для любого $x \in D(T)$

$$\{g_1, h_1\}(\{Tx, x\}) = 0\,. \tag{3.9}$$

Из (3.9) следует, что для любого $x \in D(T)$ $h_1(x) = -g_1(Tx)$. Таким образом $h_1 = -T^* g_1$. Из соотношения (3.8) следует, что

$$\{g_1, -T^* g_1\}(\{y_1, x_1\}) \neq 0\,. \tag{3.10}$$

Соотношение (3.10) противоречит соотношению (3.7). Следовательно,

$$\{x_1, y_1\} \in \Gamma(T)\,.$$

Так как пространства X, Y и X^{**}, Y^{**} связаны, соответственно, каноническими вложениями, то с учетом этих вложений оператор T^{**} является сужением оператора T. Используя теорему 3.3, мы закончим доказательство.

Пусть в дальнейшем $X = Y = H$, где H - гильбертово пространство, T - линейный замкнутый оператор с областью определения $D(T)$, всюду плотный в H и областью значений $R(T) \subset H$. Обозначим через

$$\Gamma(T) = \{(x, y) : x \in D(T), y = Tx\}$$

график оператора T, а через $\Gamma(-T^*)$ - график оператора $-T^*$. Тогда из теоремы 3.1 следует, что подпространства $\Gamma(T)$ и $\Gamma(-T^*)$ ортогональны, а пространство $H \times H$ представимо в виде их ортогональной суммы

$$H \times H = \Gamma(T) + \Gamma(-T^*)\,. \tag{3.11}$$

Теорема 3.5. T - линейный замкнутый оператор с областью определения $D(T)$ всюду плотный в H, и областью значений $R(T) \subset H$. Тогда множество $\Gamma = \{(x, Tx) : x \in D(T), Tx \in D(T^*)\}$ всюду плотно в графике $\Gamma(T)$ оператора T.

Доказательство. Из формулы (3.11) следует, что для любых $x, x' \in H$ найдутся элементы $z \in D(T)$ и $z' \in D(T^*)$ такие, что

$$\{x, x'\} = \{z, Tz\} + \{-T^* z', z'\}. \tag{3.12}$$

В частности, при $x' = 0$ из (3.12) следует, что

$$x = z - T^* z' \tag{3.13}$$

и

$$z' = -Tz. \tag{3.14}$$

Из соотношений (3.13) и (3.14) следует, что

$$Tz = -z' \in D(T^*) \tag{3.15}$$

и

$$x = (E + T^* T)z \tag{3.16}$$

Так как элемент x произволен, то, учитывая (3.15) и (3.16), получаем, что область определения $D(S)$ оператора $S = E + T^* T$ совпадает с множеством

$$\{z : z \in D(T), Tz \in D(T^*)\},$$

а его область значений $R(S)$ совпадает со всем H.

1.4. Конечномерные аппроксимации *l*-регуляризованных решений

1. Основные определения

Пусть U и F - рефлексивные банаховы пространства, B и B_n - операторы, действующие из U в F, вообще говоря, нелинейные $D(B)$ и $D(B_n)$ - области определения этих операторов.

Определение 4.1. Последовательность операторов $\{B_n\}$ будем называть *B*-полной на множестве $M \subset D(B)$, если для любого $u \in M$ найдется последовательность $\{u_n\}$ такая, что $\{u_n\} \in D(B_n)$ при любом n, $u_n \to u$ и $B_n u_n \to Bu$.

В случае, когда $M = D(B)$, будем говорить, что последовательность $\{B_n\}$ является *B*-полной ([1, с. 113]).

Определение 4.2. Пару $\left(B, \{B_n\}\right)$ будем называть слабо замкнутой если из того, что $u_n \xrightarrow{сл} \bar{u}$ и $B_n u_n \xrightarrow{сл} f$, следует, что $\bar{u} \in D(B)$ и $R\bar{u} = f$ ([22, с. 112]).

Пару $\left(B, \{B_n\}\right)$ назовем наследственно слабо замкнутой, если слабо замкнута пара $\left(B, \{B_{n_k}\}\right)$ для любой последовательности номеров $\{n_k\}$.

Пусть B, B_n - линейные замкнутые операторы и $\overline{D(B)} = \overline{D(B_n)} = U$. Через U^* и F^* обозначим пространства, сопряженные к U и F, а через B^*, B_n^* - операторы, сопряженные к B и B_n.

Лемма 4.1. Если последовательность операторов $\{B_n^*\}$ является B^*-полной на плотном в F^* множестве G, то пара $\left(B, \{B_n\}\right)$ наследственно слабо замкнута [1].

Пусть A и L - линейные замкнутые операторы, действующие из U в F, кроме того, область определения $D(L)$ оператора L всюду плотна в U.

Определение 4.3. Линейный оператор A будем называть L-ограниченным, если существует число $c>0$ такое, что для любого $u\in D(L)$ выполняется соотношение $\|Au\|\le c\|Lu\|$.

Лемма 4.2. При сформулированных ранее ограничениях на операторы A и L и пространства U и F для L-ограниченного оператора A необходимо и достаточно, чтобы $D(L)\subseteq D(A)$.

2. **Метод L-регуляризации**

Пусть $U=F=H$, где H - сепарабельное гильбертово пространство. На оператор L дополнительно наложим условие полуграниченности снизу, т.е. существование чиста $d>0$ такого, что для любого $u\in D(L)$

$$\|Lu\|\ge d\|u\|, \tag{4.1}$$

а оператор A будем считать инъективным и L-ограниченным.

Через A^* и L^* в дальнейшем будем обозначать операторы, сопряженные к A и L.

Рассмотрим вариационную задачу

$$\inf\left\{\left\|Au-\overline{f}\right\|^2+\alpha\|Lu\|^2 : u\in D(L)\right\}, \tag{4.2}$$

где $\overline{f}\in H$, а α - положительный числовой параметр.

Лемма 4.3. При любых значениях $\alpha>0$ и $\overline{f}\in H$ вариационная задача (4.2) разрешима единственным образом ([22, с. 104]). Доказать самостоятельно.

Обозначим решение этой задачи через $\overline{u}_\alpha$.

Лемма 4.4. Пусть $\overline{u}\in D(L)$ и $A\overline{u}=\overline{f}$. Тогда при

$$\alpha\to 0 \quad \overline{u}_\alpha\to\overline{u},\quad A\overline{u}_\alpha\to A\overline{u},\quad L\overline{u}_\alpha\to L\overline{u}$$

Лемма 4.5. Область определения $D\left[AL^{-1}\left(AL^{-1}\right)^*\right]$ оператора $AL^{-1}\left(AL^{-1}\right)^*$ всюду плотна в H.

Доказательство. Так как из (4.1) следует ограниченность оператора L^{-1}, то оператор AL^{-1} замкнут, а его область определения совпадает с $D(L)$. Таким образом, из теоремы 3.5 следует утверждение леммы.

Лемма 4.6. Пусть $\bar{g} \in G$, $\bar{f} = A\bar{u} + \bar{g}$, где $\bar{u} = (L^*L)^{-1}A^*\bar{g}$. Тогда $\bar{u}$ является решением вариационной задачи (4.2) при $\alpha = 1$.

Доказательство. Пусть $h \in D(L)$. Рассмотрим величину

$$\Delta(h) = \left\|A(\bar{u}+h) - \bar{f}\right\|^2 + \left\|L(\bar{u}+h)\right\|^2 - \left\|A\bar{u} - \bar{f}\right\|^2 + \left\|L\bar{u}\right\|^2. \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что

$$\Delta(h) = 2(A\bar{u}, Ah) + \left\|Ah\right\|^2 - 2(Ah, \bar{f}) + 2(Lh, L\bar{u}) + \left\|Lh\right\|^2. \tag{4.4}$$

Поскольку $L^*L\bar{u} = A^*\bar{g}$ и $\bar{f} = A\bar{u} + \bar{g}$, то

$$(Ah, \bar{f}) = (A\bar{u}, Ah) + (L\bar{u}, Lh). \tag{4.5}$$

Из (4.4) и (4.5) выводим

$$\Delta(h) = \left\|Lh\right\|^2 + \left\|Ah\right\|^2 \geq 0$$

Лемма 4.7. Пусть A и L - линейные ограниченные операторы. Тогда задача (4.2) эквивалентна уравнению

$$A^*Au + \alpha L^*Lu = A^*\bar{f}.$$

3. Конечномерные аппроксимации метода L-регуляризации

Пусть A_n и L_n - линейные ограниченные операторы, отображающие H в H, такие, что для любых натуральных n и $u \in H$

$$\left\|L_n u\right\| \geq d_1 \left\|u\right\|, \tag{4.6}$$

где d_1 - некоторое положительное число, а $\{H_n\}$ - последовательность конечномерных подпространств из H.

Введем в пространстве H последовательность скалярных произведений, определяемых формулой

$$[u,v]_n = (L_n u, L_n v) : u, v \in H, \tag{4.7}$$

и последовательность $\{P_n\}$ операторов ортогонального проектирования пространства H на H_n относительно скалярного произведения $[u,v]_n$. Обозначим через P_n^* оператор, сопряженный P_n.

Рассмотрим вариационные задачи

$$\inf\left\{\left\|A_n u-\overline{f}_n\right\|^2+\alpha\left\|L_n u\right\|^2 : u\in H_n\right\}, \tag{4.8}$$

$$\inf\left\{\left\|A_n P_n u-\overline{f}_n\right\|^2+\alpha\left\|L_n u\right\|^2 : u\in H\right\}, \tag{4.9}$$

где $\alpha>0$, $\overline{f}_n\in H$.

Лемма 4.8. Вариационная задача (4.8) разрешима единственным образом при любых значениях $\alpha>0$, $\overline{f}_n\in H$.

Обозначим решение задачи через $\overline{u}_\alpha(n)$ и будем называть его конечномерной аппроксимацией L-регуляризованного решения $\overline{u}_\alpha$.

Лемма 4.9. Вариационные задачи (8.8) и (8.9) эквивалентны.

Лемма 4.10. Если операторы B_n и B, действующие из H в H, инъективны и последовательность $\{B_n\}$ является B-полной, то последовательность $\{B_n^{-1}\}$ является B^{-1}-полной.

Обозначим через (L,A) и $(\overline{L}_n,\overline{A}_n)$ векторназначенные операторы, действующие из H в $H\times H$ и определяемые формулами

$$(L,A)u=(Lu,Au),\quad u\in D(L),$$

$$(\overline{L}_n,\overline{A}_n)u=(L_n u,A_n u),\quad u\in H_n,$$

где $\overline{L}_n$ и $\overline{A}_n$ - сужение операторов L_n и A_n с H на H_n.

Лемма 4.11. Вариационная задача (4.9) эквивалентна задаче

$$\inf\left\{\left\|A_n P_n L_n^{-1}v-\overline{f}_n\right\|^2+\alpha\left\|v\right\|^2 : v\in H\right\}, \tag{4.10}$$

где $\overline{v}_\alpha(n)=L_n\overline{u}_\alpha(n)$, а $\overline{u}_\alpha(n)$ - решения задачи (4.9); $\overline{v}_\alpha(n)$ - решение задачи (4.10).

Теорема 4.1. Пусть последовательность операторов $\{(\bar{L}_n, \bar{A}_n)\}$ является (L, A)-полной, а последовательности $\{L_n^*\}$ и $\{(L_n^*)^{-1} P_n^* A_n^*\}$ - соответственно L^* и $(L^*)^{-1} A^*$-полными на всюду плотном множестве $G_1 \subset H$.

Тогда для любых $\bar{f} \in H$, $\alpha > 0$ и $\{\bar{f}_n\} \subset H$ таких, что $\bar{f}_n \to \bar{f}$ выполняются соотношения

$$\bar{u}_\alpha(n) \to \bar{u}_\alpha \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

$$L_n \bar{u}_\alpha(n) \to L\bar{u}_\alpha \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и

$$A_n \bar{u}_\alpha(n) \to A\bar{u}_\alpha \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $d_2 > 0$ и последовательность номеров $\{n_k\}$ такие, что для любого k

$$\left\|\bar{u}_\alpha(n_k) - \bar{u}_\alpha\right\| + \left\|A_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k) - A\bar{u}_\alpha\right\| + \left\|L_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k) - L\bar{u}_\alpha\right\| \ge d_2 . \quad (4.11)$$

Так как $\bar{u}_\alpha \in D(L)$, а последовательность операторов $\{(\bar{L}_n, \bar{A}_n)\}$ является (L, A)-полной на области определения $D[(L, A)]$, совпадающей, на основании леммы 4.2, с $D(L)$, то существует последовательность $\{u_k\}$ такая, что $u_k \in H_{n_k}$ для любого k, $u_k \to \bar{u}_\alpha$,

$$L_{n_k} u_k \to L\bar{u}_\alpha \tag{4.12}$$

и

$$A_{n_k} u_k \to A\bar{u}_\alpha . \tag{4.13}$$

Из (4.12) и (4.13) получаем

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\left\|A_{n_k} P_{n_k} u_k - \bar{f}_{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|L_{n_k} u_k\right\|^2\right\} = \left\|A\bar{u}_\alpha - \bar{f}\right\|^2 + \alpha\left\|L\bar{u}_\alpha\right\|^2, \tag{4.14}$$

а из (4.9) и леммы 4.9 следует, что для любого k

$$\begin{gathered}\left\|A_{n_k} P_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k) - \bar{f}_{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|L_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)\right\|^2 \le \\ \le \left\|A_{n_k} P_{n_k} u_\alpha - \bar{f}_{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|L_{n_k} u_k\right\|^2 .\end{gathered} \tag{4.15}$$

Поэтому из (4.14) и (4.15)

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\{\left\|A_{n_k}P_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)-\bar{f}_{n_k}\right\|^2+\alpha\left\|L_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)\right\|^2\right\}\le$$
$$\le\left\|A\bar{u}_\alpha-\bar{f}\right\|^2+\alpha\left\|L\bar{u}_\alpha\right\|^2, \tag{4.16}$$

а из леммы 4.11 и соотношения (4.16)

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\{\left\|A_{n_k}P_{n_k}L_{n_k}^{-1}\bar{v}_\alpha(n_k)-\bar{f}_{n_k}\right\|^2+\alpha\left\|\bar{v}_\alpha(n_k)\right\|^2\right\}\le$$
$$\le\left\|AL^{-1}v_\alpha-\bar{f}\right\|^2+\alpha\left\|\bar{v}_\alpha\right\|^2, \tag{4.17}$$

где $\bar{v}_\alpha=L\bar{u}_\alpha$, а $\bar{v}_\alpha(n_k)=L_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)$.

Из (4.6), (4.16) и (4.17) следует, что последовательности $\{\bar{u}_\alpha(n_k)\}$, $\{\bar{v}_\alpha(n_k)\}$, $\{L_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)\}$, $\{A_{n_k}P_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)\}$, $\{A_{n_k}P_{n_k}L_{n_k}^{-1}\bar{v}_\alpha(n_k)\}$ ограничены, а следовательно, слабо компактны. Без ограничения общности можем считать, что

$$\bar{u}_\alpha(n_k)\xrightarrow{сл}\hat{u}, \tag{4.18}$$

$$L_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)\xrightarrow{сл}\tilde{g}, \tag{4.19}$$

$$A_{n_k}P_{n_k}\bar{u}_\alpha(n_k)\xrightarrow{сл}\bar{f}, \tag{4.20}$$

$$\bar{v}_\alpha(n_k)\xrightarrow{сл}\bar{\bar{v}}, \tag{4.21}$$

$$A_{n_k}P_{n_k}L_{n_k}^{-1}\bar{v}_\alpha(n_k)\xrightarrow{сл}\bar{f}. \tag{4.22}$$

Из (4.18), (4.19) и (4.21) и леммы 4.1 следует, что $\hat{u}\in D(L)$ и

$$L\hat{u}=\tilde{g}=\bar{\bar{v}}. \tag{4.23}$$

Поскольку последовательность операторов $\left\{(L_n^*)^{-1}P_n^*A_n^*\right\}$ является $(L_n^*)^{-1}A_n^*$-полной на множестве G_1, то из леммы 4.1 следует, что пара $(AL^{-1}\left\{A_nP_nL_n^{-1}\right\})$ является наследственно слабозамкнутой. Тогда из (4.21) и (4.22) выводим

$$\bar{\bar{v}}\in D(AL^{-1}), \tag{4.24}$$

$$AL^{-1}\bar{\bar{v}}=\bar{f}, \tag{4.25}$$

а из леммы 4.2 следует, что

$$\widehat{u} \in D(A). \tag{4.26}$$

Таким образом, из (4.23)-(4.26)

$$A\widehat{u} = \overline{f}\ . \tag{4.27}$$

Из (4.18)-(4.20), (4.23) и (4.27) по свойству нормы слабого предела имеем

$$\begin{gathered}\lim_{k\to\infty}\left\{\left\|A_{n_k}P_{n_k}\overline{u}_\alpha(n_k)-\overline{f}_{n_k}\right\|^2+\alpha\left\|L_{n_k}\overline{u}_\alpha(n_k)\right\|^2\right\}\geq\\ \geq\left\|A\widehat{u}-\overline{f}\right\|^2+\alpha\left\|L\widehat{u}\right\|^2.\end{gathered} \tag{4.28}$$

Далее, из (4.16) и (4.28) выводим $\widehat{u}=\overline{u}_\alpha$ и

$$\begin{gathered}\lim_{k\to\infty}\left\{\left\|A_{n_k}P_{n_k}\overline{u}_\alpha(n_k)-\overline{f}_{n_k}\right\|^2+\alpha\left\|L_{n_k}\overline{u}_\alpha(n_k)\right\|^2\right\}=\\ =\left\|A\overline{u}_\alpha-\overline{f}\right\|^2+\alpha\left\|L\overline{u}_\alpha\right\|^2.\end{gathered} \tag{4.29}$$

Теперь из (4.19), (4.20), (4.29) и свойства нормы слабого предела получаем

$$\left\|A_{n_k}P_{n_k}\overline{u}_\alpha(n_k)\right\|\to\left\|A\overline{u}_\alpha\right\|, \tag{4.30}$$

$$\left\|L_{n_k}\overline{u}_\alpha(n_k)\right\|\to\left\|L\overline{u}_\alpha\right\|, \tag{4.31}$$

а из (4.19), (4.20), (4.30) и (4.31) выводим

$$A_{n_k}P_{n_k}\overline{u}_\alpha(n_k)\to A\overline{u}_\alpha, \tag{4.32}$$

$$L_{n_k}\overline{u}_\alpha(n_k)\to L\overline{u}_\alpha. \tag{4.33}$$

Поскольку $\overline{u}_\alpha(n_k)=P_{n_k}\overline{u}_\alpha(n_k)$ для любого k, то из (4.32)

$$A_{n_k}\overline{u}_\alpha(n_k)\to A\overline{u}_\alpha. \tag{4.34}$$

Из (4.6) и (4.33)

$$u_\alpha(n_k)\to\overline{u}_\alpha, \tag{4.35}$$

а из (4.33)-(4.35)

$$\left\|\overline{u}_\alpha(n_k)-\overline{u}_\alpha\right\|+\left\|A_{n_k}\overline{u}_\alpha(n_k)-A\overline{u}_\alpha\right\|+\left\|L_{n_k}\overline{u}_\alpha(n_k)-L\overline{u}_\alpha\right\|\to 0$$

при $k\to\infty$, что противоречит (4.11).

При дальнейшем изложении будем предполагать, что последовательность операторов $\{L_n^*\}$ является L^*-полной на всюду плотном множестве G.

Лемма 4.12. Если для любых $\bar{f} \in H$, $\alpha > 0$ и $\bar{f}_n \to \bar{f}$ имеет место $u_\alpha(n) \to \bar{u}_\alpha$, $L_n \bar{u}_\alpha(n) \to L\bar{u}_\alpha$ и $A_n \bar{u}_\alpha(n) \to A\bar{u}_\alpha$, то последовательность операторов $\{(\bar{L}_n, \bar{A}_n)\}$ является (L, A)-полной.

Доказательство. Пусть $\bar{u} \in D(L)$, а $\bar{f} = A\bar{u}$. Тогда на основании леммы 4.4 для произвольно взятого $\varepsilon > 0$ найдется значение параметра $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\varepsilon)$ такое, что

$$\|\bar{u}_{\bar{\alpha}} - \bar{u}\| < \varepsilon/6, \tag{4.36}$$

$$\|A\bar{u}_{\bar{\alpha}} - A\bar{u}\| < \varepsilon/6, \tag{4.37}$$

$$\|L\bar{u}_{\bar{\alpha}} - L\bar{u}\| < \varepsilon/6. \tag{4.38}$$

Из условий настоящей леммы следует существование номера $N = N(\varepsilon)$ такого, что для любого $n \geq N$

$$\|\bar{u}_{\bar{\alpha}}(n) - \bar{u}\| < \varepsilon/6, \tag{4.39}$$

$$\|L_n \bar{u}_{\bar{\alpha}}(n) - L\bar{u}_{\bar{\alpha}}\| < \varepsilon/6, \tag{4.40}$$

$$\|A_n \bar{u}_{\bar{\alpha}}(n) - A\bar{u}_{\bar{\alpha}}\| < \varepsilon/6. \tag{4.41}$$

Поскольку при любом значении n

$$\bar{u}_{\bar{\alpha}}(n) \in H_n$$

то из (4.36)-(4.41) следует утверждение леммы.

Лемма 4.13. Пусть выполнены условия леммы 4.12. Тогда последовательность операторов $\{(L_n^*)^{-1} P_n^* A_n^*\}$ является $(L^*)^{-1} A^*$-полной на всюду плотном множестве G.

Доказательство. Пусть $G = D\left[AL^{-1}(AL^{-1})^*\right]$. Тогда из леммы 4.5 следует, что $\bar{G} = H$. Далее будем доказывать от противного, т.е.

предположим существование числа $d_3 > 0$, элемента $\bar{g} \in G$ и последовательности номеров $\{n_k\}$ таких, что для любых значений $g \in H$ и k

$$\left\| (L_{n_k}^*)^{-1} P_{n_k}^* A_{n_k}^* g - (L^*)^{-1} A^* \bar{g} \right\| + \| g - \bar{g} \| \geq d_3. \tag{4.42}$$

Обозначим элемент $(L^* L)^{-1} A^* \bar{g}$ через $\bar{u}$. Из леммы 4.6 следует, что

$$\bar{u} \in D(L) \tag{4.43}$$

И является решением вариационной задачи (4.2) при $\alpha = 1$ и $\bar{f} = A\bar{u} - \bar{g}$. Таким образом,

$$L\bar{u} = (L^*)^{-1} A^* (\bar{f} - A\bar{u}). \tag{4.44}$$

Из леммы 4.12 и (4.43) следует существование последовательности $\{u_k\}$ такой, то для любого k

$$u_k \in H_{n_k}, \tag{4.45}$$

$$u_k \to \bar{u}, \tag{4.46}$$

$$L_{n_k} u_k \to L\bar{u}, \tag{4.47}$$

$$A_{n_k} u_k \to A\bar{u}. \tag{4.48}$$

Обозначим через $\bar{u}(n_k)$ решение задачи (4.9) при $\alpha = 1$ и $\bar{f}_{n_k} = A_{n_k} u_k + \bar{g}$. Тогда из условий леммы и соотношения (4.48) выводим

$$\bar{u}(n_k) \to \bar{u}, \tag{4.49}$$

$$L_{n_k}(n_k) \to L\bar{u}, \tag{4.50}$$

$$A_{n_k}(n_k) \to A\bar{u}. \tag{4.51}$$

Теперь из леммы 4.7 получаем, что $\bar{u}(n_k)$ удовлетворяет соотношению

$$(L_{n_k}^*)^{-1} P_{n_k}^* A_{n_k}^* \bar{u}(n_k) + L_{n_k} \bar{u}(n_k) = (L_{n_k}^*)^{-1} P_{n_k}^* A_{n_k}^* \bar{f}_{n_k}, \tag{4.52}$$

а из (4.52)

$$L_{n_k} \bar{u}(n_k) = (L_{n_k}^*)^{-1} P_{n_k}^* A_{n_k}^* \left(\bar{g} + \left(v_{n_k} - \bar{v}_{n_k} \right) \right), \tag{4.53}$$

где $v_{n_k} = A_{n_k} u_k$, $\bar{v}_{n_k} = A_{n_k} \bar{u}(n_k)$.

Наконец, из (4.45), (4.48) и (4.51) выводим

$$\left(v_{n_k}-\bar{v}_{n_k}\right)\to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty, \tag{4.54}$$

из (4.50) и (4.53) -

$$(L_{n_k}^*)^{-1}P_{n_k}^*A_{n_k}^*\left[\bar{g}+\left(v_{n_k}-\bar{v}_{n_k}\right)\right]\to L\bar{u}, \tag{4.55}$$

и из (4.44) и (4.55)

$$(L_{n_k}^*)^{-1}P_{n_k}^*A_{n_k}^*\left[\bar{g}+\left(v_{n_k}-\bar{v}_{n_k}\right)\right]\to (L^*)^{-1}A^*\bar{g}. \tag{4.56}$$

Соотношения (4.54) и (4.56) противоречат (4.42).

Из теоремы 4.1 и леммы 4.13 следует

Терема 4.2. Чтобы при любых значениях $\alpha>0$, $\bar{f}\in H$ и $\left\{\bar{f}_n\right\}\subset H$ таких, что $\bar{f}_n\to\bar{f}$ выполнялись соотношения

$$\bar{u}_\alpha(n)\to\bar{u}_\alpha, \quad L_n\bar{u}_\alpha(n)\to L\bar{u}_\alpha, \quad A_n\bar{u}_\alpha(n)\to A\bar{u}_\alpha,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность операторов $\left\{(\bar{L}_n,\bar{A}_n)\right\}$ являлась (L,A)-полной, а последовательность $\left\{(L_n^*)^{-1}P_n^*A_n^*\right\}$ являлась $(L^*)^{-1}A^*$-полной на всюду плотном множестве G.

4. Конечно-разностная аппроксимация метода регуляризации А.Н. Тихонова p-го порядка.

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$Ku=\int_0^1 K(s,t)u(t)dt=f(s), \quad 0\le s\le 1, \tag{4.57}$$

где $K(s,t)$ - замкнутое ядро, непрерывное на единичном квадрате, а $u,f\in L_2(0,1)$.

Определим оператор L формулой

$$Lu(t)=\frac{du}{dt}, \tag{4.58}$$

где $D(L)=\left\{u: u,u'\in L_2(0,1),\ u(0)=0\right\}$.

Метод регуляризации p-го порядка при решении интегрального уравнения (4.57) состоит в сведении его к вариационной задаче [2]

$$\inf\left\{\left\|Ku-f_\delta\right\|_{L_2}^2+\alpha\left\|L^p u\right\|_{L_2};\right.$$

$$\left. u,u^{(p)}\in L_2(0,1),\ \ u(0)=u'(0)=...=u^{(p-1)}(0)=0\right\} \tag{4.59}$$

при $\alpha>0,\ \delta>0$. Здесь $\|f_\delta-f_0\|\le\delta$, а f_0 - значение правой части уравнения (8.57), при котором существует единственное, ввиду замкнутости ядра $K(s,t)$, решение u_0, которое будем предполагать достаточно гладким, т.е. $u_0\in D(L^p)$.

Из [2] следует, что вариационная задача (4.59) разрешима единственным образом. Обозначим ее решение через u_δ^α.

При практической реализации метода регуляризации приходится вариационную задачу (4.2) заменять конечномерным аналогом. Рассмотрим разбиение отрезка $[0,1]$ на l_n равных частей, где $\{l_n\}$ - некоторая последовательность натуральных чисел. Обозначим через H_n пространство постоянных на отрезках разбиения функций, через K_n - оператор, действующий по формуле

$$K_n u=\sum_{j=1}^{l_n}K\left(\frac{i}{l_n},\frac{j}{l_n}\right)u_j\cdot\frac{1}{l_n},$$

где $u_j=l_n\int\limits_{(j-1)/l_n}^{j/l_n}u(t)dt$, а L_n - разностный оператор, определяемый формулой

$$L_n u=\begin{cases}0, & 0\le t\le l_n^{-1}\\ \dfrac{u(t)-u(t-l_n^{-1})}{l_n^{-1}}, & t\ge l_n^{-1}.\end{cases}$$

Конечно-разностная аппроксимация задачи (4.59) состоит в сведении ее к задаче

$$\inf\left\{\left\|K_n u-f_\delta^n\right\|^2+\alpha\left\|L_n^p u\right\|^2:u\in H_n,\quad u(0)=0\right\}. \tag{4.60}$$

Обозначим решение задачи (4.60) через $u_{\delta n}^{\alpha}$ и исследуем вопрос сходимости решений задачи (4.60) $u_{\delta n}^{\alpha}$ к u_{δ}^{α} при $n \to \infty$.

Из теоремы 4.2 следует

Теорема 4.3. Решения задачи (4.60) $u_{\delta n}^{\alpha}(t)$ сходится равномерно к решению задачи (4.59) $u_{\delta}^{\alpha}(t)$. Более того, $L_n^i u_{\delta n}^{\alpha}(t) \to \left(u_{\delta}^{\alpha}(t)\right)^{(i)}$ при $i = 1, 2, \ldots, (p-1)$ равномерно, а при $i = p$ $L_n^i u_{\delta n}^{\alpha}(t) \to \left(u_{\delta}^{\alpha}(t)\right)^{(i)}$ в метрике $L_2(0,1)$.

2. Численный метод оценки погрешности приближенного решения обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности

2.1. Постановка прямой задачи.

$$\frac{du(x,t)}{dt}=\frac{d^2u(x,t)}{dx^2} \quad 0<x<1 \quad 0<t\le T\,. \tag{2.1.1}$$

Решение уравнения (1.1) $u(x,t)\in C([0.1]\times[0.T])\cap C^{2,1}((0;1)\times[0,T])$ и удовлетворяет начальному и граничному условиям

$$u(x,0)=0, \quad 0\le x\le 1,$$

$$\frac{du(1,t)}{dt}+ku(1,t)=0, \quad k>0, \quad 0\le t\le T$$

$$u(0,t)=h(t), \quad 0\le \mathrm{t}\le \mathrm{T}$$

где

$$h(t)\in W_2^2[0,T], \;\; h(0)=h'(T)=0, \;\; h'(0)=a, \;\; a>0$$

и для любого $t\in[0,T]$ $h''(t)\le 0$ почти всюду.

Сделаем замену

$$v(x,t)=u(x,t)+\left[\frac{k}{k+1}x-1\right]h(t)\,.$$

Тогда уравнение (2.1.1) примет вид

$$\frac{dv(x,t)}{dt}=\frac{d^2v(x,t)}{dx^2}+\left[\frac{k}{k+1}x-1\right]h't, \quad 0<x<1, \quad 0<t\le T\,, \tag{2.1.2}$$

$$v(x,0)=0, \quad 0\le x\le 1, \tag{2.1.3}$$

$$v(0,t)=0, \quad 0\le t\le T\,, \tag{2.1.4}$$

$$v_x'(1,t)+kv(1,t)=0 \quad 0\le t\le T\,. \tag{2.1.5}$$

Решая задачу (2.1.2)-(2.1.5) методом разделения переменных, получим

$$v(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}v_i(t)\sin\lambda_i x,$$

где λ_i - положительные решения уравнения

$$\mathrm{tg}\lambda = -\frac{\lambda}{k},$$

$$v_i(t) = 2b_i \int_0^t e^{-\lambda_i^2 (t-\tau)} h'(\tau) d\tau \tag{2.1.6}$$

$$b_i = -\frac{4}{2\lambda_i - \sin 2\lambda_i}, \qquad \lambda_i = \frac{2i+1}{2}\pi + \gamma_i, \tag{2.1.7}$$

где $\gamma_i \to +0$ при $i \to \infty$.

Интегрируя (2.1.6) по частям, получим

$$v_i(T) = -\frac{2b_i a}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i^2 T} - \frac{2b_i}{\lambda_i^2} \int_0^T e^{-\lambda_i^2 (T-\tau)} h''(\tau) d\tau . \tag{2.1.8}$$

В выражение (2.1.8) положим $g(\tau) = -h''(\tau)$.

2.2. Постановка обратной задачи

Предположим, что функция $h(t)$ не известна, а вместо нее дана функция $f(x) = v(x,T)$.

Предположим, что при $f(x) = f_0(x)$ существует функция $g_0(t) = -h_0''(t)$ такая, что решение задачи (1.2)-(1-5) с функцией $h_0(t)$ удовлетворяет условию

$$v(x,T) = f_0(x), \qquad \|g_0(t)\| \le r, \tag{2.2.1}$$

где r известное число, но $f_0(x)$ нам не известна, а вместо нее даны функции $f_\delta(x) \in L_2[0,1]$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\| f_\delta(x) - f_0(x)\|_{L_2} \le \delta. \tag{2.2.2}$$

Требуется, используя исходные данные задачи (f_δ, δ, r), определить приближенное решение $h_\delta(t)$ задачи (2.1.2)-(2.1.5), (2.2.1)может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода.

$$\int_0^T K(x,\tau) g(\tau) d\tau = \psi(x), \tag{2.2.3}$$

где

$$K(x,\tau) = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i^2 (T-\tau)} \sin \lambda_i x, \tag{2.2.4}$$

$g(\tau) = -h''(\tau) \in L_2[0,T]$, а $\psi(x) = f(x) + 2a\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i^2 T} \sin \lambda_i x$.

Обозначим через $L_2^+[0,T]$ положительный конус в пространстве $L_2[0,T]$, т.е.

$$L_2^+[0,T] = \{ g(\tau) : g(\tau) \in L_2[0,T], \;\; g(\tau) \ge 0, \;\; \tau \in [0,T] \}.$$

Лемма 2.2.1. Пусть $g(\tau) \in L_2^+[0,T]$. Тогда решение уравнения (2.2.3) единственно.

Доказательство.

Пусть функция $\psi(x)$ почти всюду равна нулю. Тогда из (2.2.4) для любого i будет следовать

$$\int_0^T e^{-\lambda_i^2(T-\tau)} g(\tau)d\tau = 0. \qquad (2.2.5)$$

Так как $e^{-\lambda_i^2(T-\tau)} g(\tau)d\tau \geq 0$ почти всюду, то из (2.2.5) будет следовать, что $e^{-\lambda_i^2(T-\tau)} g(\tau)d\tau = 0$ почти всюду и, следовательно, $g(\tau) = 0$ почти всюду.

Тем самым лемма доказана.

Введем оператор B, отображающий пространство $L_2[0,T]$ в $L_2[0,T]$ формулой

$$Bg(\tau) = \int_0^t \left[\int_T^s g(\xi)d\xi \right] ds.$$

Для удобства уравнение (2.2.3) запишем в операторной форме

$$Cg = \psi; \quad g \in L_2[0,T], \quad \psi \in L_2[0,1]. \qquad (2.2.6)$$

2.3. Конечномерная аппроксимация оператора *C*

Для численного решения уравнения (2.2.6) используем алгоритм, предложенный в [23, с.264]. Этот алгоритм заключается в сведении уравнения (2.2.6) к системе линейных алгебраических уравнений. Для этого мы оператор C должны заменить конечномерным оператором $C_{n,m}$ и оценить величину погрешности $\mu_{n,m}$, возникающую при такой замене

$$\left\| C_{n,m} - C \right\| \le \mu_{n,m}.$$

Для осуществления указанной замены разобьем отрезок $\left[0,T\right]$ на n равных частей точками $\tau_j = jT/n$, $j = 0,1,...,n-1$, а также отрезок $\left[0,1\right]$ на m равных частей точками $x_k = k/m$; $k = 0,1,...,m-1$.

Теперь введем функцию

$$\bar{K}_j(x) = K(x,\tau_j), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2.3.1}$$

$$K_n(x,\tau) = \bar{K}_j(x), \quad \tau_j \le \tau \le \tau_{j+1}, \quad x \in \left[0,1\right], \tag{2.3.2}$$

$$K_{n,m}(x,\tau) = \bar{K}_j(x_k), \quad \tau_j \le \tau \le \tau_{j+1}, \quad x_k \le x \le x_{k+1}, \tag{2.3.3}$$

$j = 0,1,...,n-1$; $k = 0,1,...,m-1$.

Используя формулы (2.3.1)-(2.3.3), определим операторы C_n и $C_{n,m}$

$$C_n g(\tau) = \int_0^T K_n(x,\tau) g(\tau) d\tau; \quad x \in \left[0,1\right], \tag{2.3.4}$$

$$C_{n,m} g(\tau) = \int_0^T K_{n,m}(x,\tau) g(\tau) d\tau; \quad x \in \left[0,1\right] \tag{2.3.5}$$

И предположим, что эти операторы отображают пространство $L_2\left[0,T\right]$ в $L_2\left[0,1\right]$.

Перейдем к оценке величины $\left\| C_{n,m} - C \right\|$. Для этого используем неравенство

$$\left\| C_{n,m} - C \right\| \le \left\| C_{n,m} - C_n \right\| + \left\| C_n - C \right\|.$$

Лемма 2.3.1. Если оператор C_n определен формулами (2.3.1), (2.3.2) и (2.3.4), а оператор C формулами (2.2.3) и (2.2.4), то

$$\|C_n - C\| \le 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{T^{3/2}}{n}.$$

Доказательство.

Известно, что

$$\|C_n - C\|^2 \le \sum_{j=0}^{n-1} \int_{T_j}^{T_{j+1}} \int_0^1 \left(2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda_i^2} \sin\lambda_i x \left[e^{-\lambda_i^2 (T-\tau)} - e^{-\lambda_i^2 (T-\tau_j)} \right] \right)^2 dx d\tau. \quad (2.3.6)$$

Так как система функций $\{\sin\lambda_i x\}$ ортогональна в пространстве $L_2[0,1]$ и

$$\int_0^1 \sin^2 \lambda_i x dx = \frac{1}{\lambda_i b_i},$$

то из (2.3.6) следует, что

$$\|C_n - C\|^2 \le \sum_{j=0}^{n-1} \int_{T_j}^{T_{j+1}} 4\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda_i^5} \left[e^{-\lambda_i^2 (T-\tau)} - e^{-\lambda_i^2 (T-\tau_j)} \right]^2 d\tau. \quad (2.3.7)$$

Из (2.3.7) и того, что

$$\left[e^{-\lambda_i^2 (T-\tau)} - e^{-\lambda_i^2 (T-\tau_j)} \right]^2 \le \lambda_i^4 (\tau - \tau_j)^2$$

следует

$$\|C_n - C\|^2 \le \sum_{j=0}^{n-1} \int_{T_j}^{T_{j+1}} 4\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda_i} (\tau - \tau_j)^2. \quad (2.3.8)$$

Ввиду того, что $(\tau - \tau_j)^2 \le T^2/n^2$ на основании (2.3.8) получим, что

$$\|C_n - C\|^2 \le 4\frac{T^3}{n^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda_i}. \quad (2.3.9)$$

Так как из (2.1.7) следует

$$|b_i| \le \frac{4}{\lambda_i}, \text{ а } \lambda_i > \pi i \ge \pi, \quad (2.3.10)$$

то из (2.3.9), (2.3.10) получим

$$\|C_n - C\|^2 \le \frac{16}{\pi} \cdot \frac{T^3}{n^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}. \qquad (2.3.11)$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \le 2\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 2, \qquad (2.3.12)$$

из оценки (2.3.11) имеем

$$\|C_n - C\|^2 \le \frac{4\sqrt{2}T^{3/2}}{\sqrt{\pi}n}.$$

Тем самым лемма доказана.

Для оценки слагаемого $\|C_n - C_{n,m}\|$ введем число N_1

$$N_1 = \max\left\{|K_x'(x,\tau)| \ : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le \tau \le T\right\}. \qquad (2.3.13)$$

Лемма 2.3.2. Если оператор C_n определен формулами (2.3.1), (2.3.2) и (2.3.4), а оператор $C_{n,m}$ формулами (2.3.3) и (2.3.5), то

$$\|C_n - C_{n,m}\| \le \frac{16\sqrt{T}}{\pi m}.$$

Доказательство. Из (2.2.4) имеем

$$K_x'(x,\tau) = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda_i} e^{-\lambda_i^2(T-\tau)} \cdot \cos\lambda_i x. \qquad (2.3.14)$$

Из (2.3.14) следует, что для любых значений $x \in [0,1]$ и $\tau \in [0,T]$

$$|K_x'(x,\tau)| \le 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda_i}. \qquad (2.3.15)$$

Из (2.3.10), (2.3.12) и (2.3.15) получим

$$N_1 \le \frac{8}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}. \qquad (2.3.16)$$

Из (2.3.12) и (2.3.16) следует, что

$$N_1 \le \frac{16}{\pi}. \qquad (2.3.17)$$

Так как из (2.3.1)-(2.3.3)

$$\left|K_{n,m}(x,\tau)-K_n(x,\tau)\right|\le\left|\bar{K}_j(x)-\bar{K}_j(x_k)\right|, \qquad (2.3.18)$$

при $\tau_j\le\tau<\tau_{j+1}$, $x_k\le x\le x_{k+1}$; $j=0,1,2,...,n-1$, $k=0,1,...,m-1$, а из (2.3.13)

$$\left|\bar{K}_j(x)-\bar{K}_j(x_k)\right|\le N_1\frac{1}{m}, \qquad (2.3.19)$$

то из (2.3.17)-(2.3.19) получим

$$\left|K_{n,m}(x,\tau)-K_n(x,\tau)\right|\le\frac{16}{\pi m}. \qquad (2.3.20)$$

Из (2.3.20) следует, что

$$\left\|C_n-C_{n,m}\right\|^2\le 16^2\int_0^1\int_0^T\left(\frac{1}{\pi m}\right)^2 ds d\tau .$$

Окончательно, получим

$$\left\|C_n-C_{n,m}\right\|\le\frac{16\sqrt{T}}{\pi m}.$$

Тем самым лемма доказана.

Из лемм 2.3.1 и 2.3.2 будет следовать, что

$$\mu_{n,m}=4\sqrt{\frac{2T}{\pi}}\cdot\frac{T}{n}+\frac{16\sqrt{T}}{\pi m}.$$

2.4. Метод невязки

Обозначим через G_n конечномерное подпространство пространства $L_2[0,T]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $[\tau_j,\tau_{j+1})$, $j=0,1,...,n-1$, а через X_m подпространство пространства $L_2[0,1]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $[x_k,x_{k+1})$, $k=0,1,...,m-1$. Пусть P_m оператор метрического проектирования пространства $L_2[0,T]$ на подпространство G_n, а Q_m оператор метрического проектирования пространства $L_2[0,1]$ на подпространство X_m.

Для приближенного решения уравнения (2.2.6) воспользуемся конечномерным вариантом метода невязки, предложенным в работе [19]. Этот метод заключается в сведении уравнения (2.2.6) к вариационной задаче на условный экстремум

$$\inf\left\{\|g(\tau)\|^2 \quad : \quad g(\tau)\in G_n, \quad \left\|C_{n,m}g(\tau)-\psi_\delta^m(x)\right\|\le r\mu_{n,m}+\delta\right\}, \quad (2.4.1)$$

где $\psi_\delta^m(x)=Q_m[\psi_\delta(x)]$.

В работе [19] доказано, что при условии

$$\left\|\psi_\delta^m(x)\right\|>r\mu_{n,m}+\delta, \quad (2.4.2)$$

вариационная задача (2.4.1) имеет единственное решение $\bar{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)$, которое удовлетворяет равенству

$$\left\|C_{n,m}\bar{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)-\psi_\delta^m(x)\right\|=r\mu_{n,m}+\delta. \quad (2.4.3)$$

Из работы [5] следует, что задача (2.4.1) сводится к вариационной задаче на безусловный экстремум

$$\inf\left\{\left\|C_{n,m}g(\tau)-\psi_\delta^m(x)\right\|^2+\alpha\|g(\tau)\|^2 \quad : \quad g(\tau)\in G_n\right\}, \quad \alpha>0, \quad (2.4.4)$$

являющейся конечномерным вариантом метода регуляризации А.Н. Тихонова [27].

Задача (2.4.4) имеет единственное решение $g^{\alpha}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)$. В этом решении параметр α необходимо выбрать из принципа невязки [19]

$$\left\|C_{n,m} g^{\alpha}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - \psi^{m}_{\delta}(x)\right\|^2 = r\mu_{n,m} + \delta . \tag{2.4.5}$$

Известно (см. [19]), что при выполнении условия (2.4.2), уравнение (2.4.5) относительно α имеет единственное решение $\alpha(n,m)$.

Из теоремы, доказанной в [31], следует, что при условии (2.4.2)

$$\bar{g}^{\alpha}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) = g^{\alpha(n,m)}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau).$$

Решая задачу (2.4.4), придем к уравнению

$$C^{*}_{n,m} C_{n,m} g(\tau) + \alpha g(\tau) = C^{*}_{n,m} \psi^{m}_{\delta}(x), \tag{2.4.6}$$

где $C^{*}_{n,m}$ - оператор, сопряженный оператору $C_{n,m}$.

Чтобы свести уравнение (2.4.6) к системе линейных алгебраических уравнений, следуя [23], введем ортонормированные базисы в пространствах G_n и X_m, формулами

$$e_j(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{n}{T}}; & \tau_j \le \tau < \tau_{j+1}, \\ 0; & \tau \notin \left[\tau_j, \tau_{j+1}\right); \quad j = 0,1,\dots,n-1 \end{cases}$$

и

$$\bar{\psi}_k(x) = \begin{cases} \sqrt{m}; & x_k \le x < x_{k+1}, \\ 0; & x \notin \left[x_k, x_{k+1}\right); \quad k = 0,1,\dots,n-1 \end{cases}$$

Используя эти базисы, определим операторы J_1 и J_2, отображающие пространства R^n на G_n и R^m на X_n соответственно.

$$J_1\left[(y_j)\right] = \sum_{j=0}^{n-1} y_j e_j(\tau); \qquad (y_j) \in R^n, \qquad J_1\left[(y_j)\right] \in G_n$$

$$J_2\left[(z_k)\right] = \sum_{k=0}^{m-1} z_k \bar{\psi}_k(x); \qquad (z_k) \in R^m, \qquad J_2\left[(z_k)\right] \in X_m$$

Так как базисы $\{e_j(\tau)\}$ и $\{\bar{\psi}_k(x)\}$ ортонормированны в пространствах G_n и X_m, соответственно, то операторы J_1 и J_2 изометричны.

Применяя эти операторы к уравнению (2.4.6), сведем его к системе линейных алгебраических уравнений

$$\frac{T}{n}\cdot\sum_{j=0}^{n-1} b_{jl} g_j + \alpha g_j = z_l, \qquad l = 0,1,\ldots,n-1, \tag{2.4.7}$$

где $b_{jl} = 1/m\cdot\sum_{k=0}^{m-1}\bar{K}_j(x_k)\bar{K}_i(x_k)$, $z_l = 1\Big/ m\sqrt{n}\sum_{k=0}^{m-1}\bar{K}_l(x_k)\psi_k$, $J_2\left[(\psi_k)\right] = \psi_\delta^m(x)$.

В работе [31] доказана теорема, которую сформулируем в виде леммы.

Лемма 2.4.1. Пусть $g^\alpha_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)$ и $\{g^\alpha_j\}$ решения уравнения (2.4.6) и системы уравнений (2.4.7), соответственно. Тогда эти решения связаны соотношением $g^\alpha_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) = J_1\left[(g^\alpha_j)\right]$.

Для определения значения параметра $\alpha(n,m)$ в решение $g^\alpha_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau)$ используем уравнение (2.4.3).

Таким образом, при выполнении условия (2.4.2), получим решение задачи (2.4.1)

$$\bar{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) = g^{\alpha(n,m)}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau).$$

Чтобы использовать всю априорную информацию о точном решении $g_0(\tau)$, потребуем, чтобы приближенное решение принадлежало положительному конусу в пространстве $L_2^+\left[0,T\right]$, т.е.

$$\hat{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) = pr\left[\bar{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau), L_2^+\left[0,T\right]\right]. \tag{2.4.8}$$

Из (2.4.8) следует, что

$$\hat{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) = \begin{cases} \bar{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau), & \text{при } \ \bar{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) \ge 0, \\ 0, & \text{при } \ \bar{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) < 0. \end{cases}$$

Основным условием, позволяющим использовать для оценки погрешности модуль непрерывности обратного оператора $\omega(\tau,r)$, является коммутируемость операторов $C_1 = C^*C$ и $B_1 = B^*B$, см [11, с.144]. Покажем, что для операторов B_1 и C_1 это условие не выполняется.

Рассмотрим оператор C_1

$$C_1 g(\tau) = C^*Cg(\tau) = \int_0^T K_1(t,\tau)g(\tau)d\tau \qquad C_1 : L_2[0,T] \to L_2[0,T], \tag{2.4.9}$$

где $K_1(t,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-4)b_i}{\lambda_i^5} e^{-\lambda_i^2[2T-(\tau+t)]}$, и оператор B_1

$$B_1 g(\tau) = B^2 g(\tau), \qquad B_1 : L_2[0,T] \to L_2[0,T]. \tag{2.4.10}$$

Лемма 2.4.2. Пусть операторы C_1 и B_1 определены формулами (2.4.9), (2.4.10), $\alpha T > 3/2$. Тогда существует собственная функция $g_0(\tau)$ оператора B_1, не являющаяся собственной функцией оператора C_1.

Доказательство. У оператора B_1 существует ортонормированная система собственных функций $\left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{\pi(2j+1)\tau}{2T} \right\}$.

Положим $j = 1$ и обозначим $\sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{3\pi\tau}{2T}$ через $g_0(\tau)$. Покажем, что $g_0(\tau)$ не является собственной функцией оператора C_1.

$$C_1 \sin \frac{3\pi\tau}{2T} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-4)b_i}{\lambda_i^5} \int_0^T e^{-\lambda_i^2[2T-(\tau+t)]} \cdot \sin \frac{3\pi\tau}{2T} d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-4)b_i}{\lambda_i^5} \cdot \frac{6T\pi e^{-\lambda_i^2(2T-t)} - 4T^2 e^{-\lambda_i^2[T-t)]} \lambda_i^2}{9\pi^2 + 4T^2\lambda_i^4}. \tag{2.4.11}$$

Возьмем значение $\tau_0 = 2T/3$ и покажем, что для любого λ

$$C_1 g_0(\tau_0) \neq \lambda g_0(\tau_0), \text{ а } B_1 g_0(\tau_0) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \left(\frac{2T}{3\pi} \right)^4 \sin \frac{3\pi\tau_0}{2T} = 0.$$

При $t = \tau_0$ и $T > 2/3$, из (2.3.10), (2.4.11) получим

$$C_1 g_0(\tau_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-4)b_i}{\lambda_i^5} \cdot \frac{6T\pi e^{-\lambda_i^2 \frac{4T}{3}} - 4T^2 e^{-\lambda_i^2 \frac{T}{3}} \lambda_i^2}{9\pi^2 + 4T^2\lambda_i^4} \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4b_i\pi \cdot (4T^2 - 6T) \cdot e^{-\lambda_i^2 \frac{T}{3}}}{\lambda_i^5 \cdot (9\pi^2 + 4T^2\lambda_i^4)} < 0 . \quad (2.4.12)$$

Из (2.4.12) следует, что B_1 и C_1 не приводятся к общей ортонормированной системе.

Тем самым лемма доказана.

Следствие 2.4.1. Операторы B_1 и C_1 не коммутируют.

2.5. Оценка погрешности приближенного решения $\bar{h}_{\delta,\mu_{n,m}}(t)$ обратной задачи (2.1.2)-(2.1.5), (2.2.1), (2.2.2)

Пусть
$\omega(\tau,r)=\sup\left\{\|h(\tau)\| \;:\; h(\tau)=Bg(\tau),\ g(\tau)\in L_2[0,T],\ \|g(\tau)\|\le r,\ \|Cg(\tau)\|\le r\right\}$, где r и $\tau>0$.

Приведем оценку погрешности для функции

$$\bar{h}_{\delta,\mu_{n,m}}(t)=-\int_0^t\left(\int_T^s \bar{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(\xi)d\xi\right)ds.$$

Следуя [21, с. 151], введем функцию $\gamma(\delta,r,\bar{h}_{\delta,\mu_{n,m}}(t))$ формулой

$$\gamma(\delta,r,\bar{h}_{\delta,\mu_{n,m}}(t))=\sup\left\{\left\|\bar{h}_{\delta,\mu_{n,m}}(t)-Bg(t)\right\| \;:\; g(t)\in\Omega_n^+\right\}$$

$$g(t)\in\Omega_n^+\Leftrightarrow g(t)\ge 0,\ g(t)\in G_n,\ g(t)=\left\{g_{ij} \;:\; \tau_{i-1}\le\tau\le\tau_i\right\},\ i=0,1,...,n-1,\ j=0,1,...,m-1$$

$$\left\|\bar{g}_{\delta,\mu_{n,m}}(t)\right\|\le\|g_0(t)\|\le r,\quad \left\|C_{n,m}g_0(\tau)-\psi_\delta^m(x)\right\|\le r\mu_{n,m}+\delta.$$

Окончательно получим $\gamma(\delta,r,\bar{h}_{\delta,\mu_{n,m}}(t))\le 2\omega(r\mu_{n,m}+\delta,r)+\dfrac{2r}{\sqrt{n}}$.

Тогда $\left\|\bar{h}_{\delta,\mu_{n,m}}(t)-h_0(t)\right\|\le\gamma(\delta,r,\bar{h}_{\delta,\mu_{n,m}}(t))$.

2.6. Численное решение

Для проверки численного решения обратной граничной задачи, описанного выше, исследуем его на модельных примерах

$$h(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi t}{2}, & \text{при} \quad t\in[0,1];\\ 0, & \text{при} \quad t\in(0,\infty);\end{cases} \tag{2.6.1}$$

$$h(t)=\begin{cases}-(t-1)^2+1, & \text{при} \quad t\in[0,1];\\ 0, & \text{при} \quad t\in(0,\infty);\end{cases} \tag{2.6.2}$$

Используя метод множителей Лагранжа, вариационную задачу (2.4.4) можно свести к следующей:

$$\inf\left\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}K_{ij}\bar{g}_i-f_j\right]^2+\frac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{g}_i^2\right\}, \tag{2.6.3}$$

где α - положительный числовой параметр, удовлетворяющий условию

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}K_{ij}\bar{g}_i^{\alpha}-f_j\right]^2=\delta^2, \tag{2.6.4}$$

в котором $\bar{g}_i^{\alpha}$ является решениями задачи (2.6.3).

Пусть $n=m=10$, тогда, записывая для задачи (2.6.3) условие минимальности, мы придем к следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{n^2}(K_{ij})'(K_{ij})\bar{g}_i^{\alpha}+\alpha(\bar{g}_i^{\alpha})=\frac{1}{n}(K_{ij})'(f_j), \quad i,j=1,2,...,n,$$

где $(K_{ij})'$ - матрица, транспонированная к (K_{ij}), при этом параметр α должен удовлетворять условию (2.6.4).

На рисунке 1 даны результаты расчета модельного примера (2.6.1) при уровне погрешности $\delta_1=0,046042$ и уровне гладкости $r_1=1$

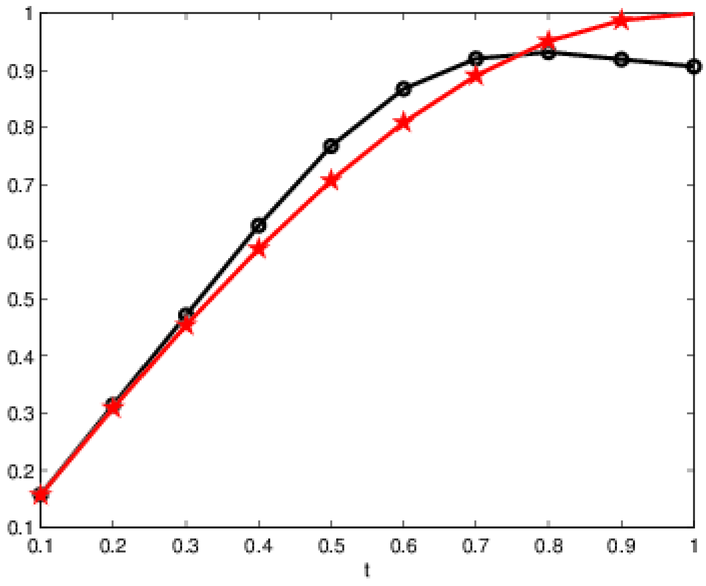

Рис. 1.

и модельного примера (2.6.2) при $\delta_2 = 0{,}022672$ и уровне гладкости $r_2 = 2/\sqrt{3}$

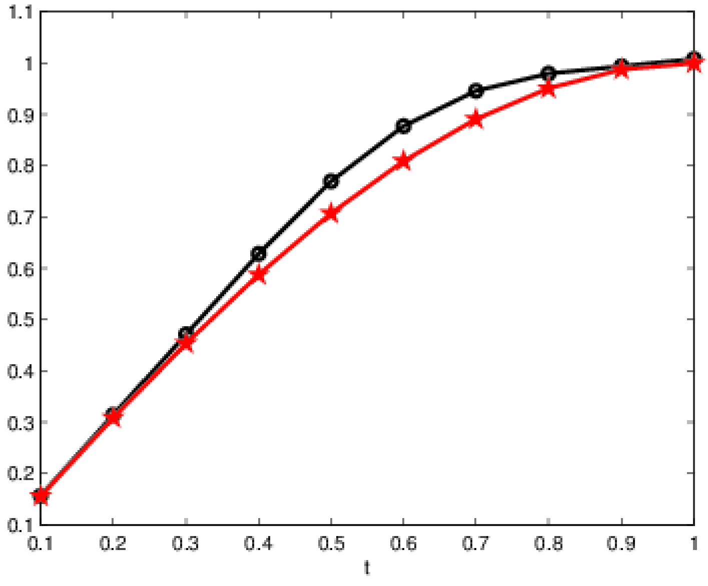

Рис.2.

Красная линия – приближенное решение.

Черная линия – экспериментальные данные.

Заключение

Для решения обратной граничной задачи теплопроводности она была сведена к интегральному уравнению первого рода, для решения которого был применен регуляризующий алгоритм. Данный алгоритм включает конечномерную аппроксимацию исходной задачи и позволяет свести ее к системе линейных алгебраических уравнений при использовании метода невязки. Для оценки погрешности приближенного решения предложен численный алгоритм, не использующий модуль непрерывности обратного оператора. Приведенные примеры показывают возможность эффективной реализации предложенного алгоритма.

Список литературы

1. Menikhles, L.D. A criterion for convergence of approximations in the regularization method and Tikhonov regularization of *n*-th order / L.D. Menikhles, V.P. Tanana // J. Inverse Ill-Posed Problems. - 1998. - Vol. 6, - №3. - P.241-262

2. Tanana, V.P. A criterion for convergence of approximations in the residual method for linear ill-posed problems // J. Inverse Ill-Posed Problems. - 1997. - Vol. 5, - №2. - P.1-12

3. Агеев, А.Л. Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций / А.Л. Агеев // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. - 1980. - Т. 20. - №4. - С. 516-531.

4. Вайникко, Г.М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах / Г.М. Вайникко. - Тарту: изд-во Тартус. ун-та, 1982. - 111 с.

5. Васин В.В. О связи некоторых вариационных методов приближенного решения некорректных задач // Матем. заметки. - 1970. - Т. 7, - № 3. - С.265-272

6. Васин, В.В. Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Агеев. - Екатеринбург: Наука, 1993. - 261 с.

7. Винокуров, В.А. Об одном необходимом условии регуляризуемости по Тихонову / В.А. Винокуров // ДАН СССР. - 1981. - Т. 256 - №2. - С. 271-275.

8. Данфорд, Н., Шварц, Дж. Т., Линейные операторы: Общая теория. - М.: Мир, 1962.

9. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. - М.: Физматлит, 1995. - 176 с.

10. Иванов, В.К. О некорректно поставленных задачах / В.К. Иванов // Матем. сб. - 1963. - Т. 61. - №2. - С. 211-213.

11. Иванов, В.К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода / В.К. Иванов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. - 1966. -

Т. 6. - №6 - С. 1089-1094.

12. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. - М.: Наука, 1978. - 208 с.

13. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. - М.: Наука, 1980. - 288 с.

14. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. - Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. - 92 с.

15. Лаврентьев, М.М. Теория операторов и некорректные задачи / М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. - Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. - 702 с.

16. Лаврентьев, М.М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений / М.М. Лаврентьев. - Новосибирск: Изд-во НГУ, 1973. - 71 с.

17. Латтес, Р. Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латтес, Ж.Л. Лионс. - М.: Мир, 1970. - 224 с.

18. Лисковец, О.А. Вариационные методы решения неустойчивых задач / О.А. Лисковец. - Минск: Наука и техника, 1981. - 343 с.

19. Морозов В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. - 1966. - Т. 6, - № 1. - С. 170-175

20. Морозов, В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В.А. Морозов. - М.: Наука, 1987. - 239 с.

21. Сидикова А.И. Численный подход к оценке погрешности некорректных задач // Вестник ЮУрГУ: серия Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника - 2016. - Т. 16, - № 2. - С. 150-153.

22. Танана В.П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. - 156 с.

23. Танана В.П., Сидикова А.И. Об оценке погрешности приближенного решения, вызванной дискретизацией интегрального уравнения первого рода // Труды ИММ УрО РАН. - 2016. - Т. 22 - № 1. - С. 30-34

24. Танана, В.П. О сходимости метода аппроксимаций при решении вырожденных операторных уравнений // Сиб. мат. журн. - 1999. - Т. 40, - №2. - С. 443-454.
25. Танана, В.П. Оптимальные методы решения некорректно поставленных задач / В.П. Танана, А.И. Сидикова. - Челябинск: ЮУрГу, 2012. - 161 с.
26. Танана, В.П. Проекционные методы и конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач // Сиб. мат. журн. - 1975. - Т. 16, - №6, - С. 1302-1307
27. Тихонов, А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. - 1963. - Т. 151, - №3. - С. 501-504
28. Тихонов, А.Н., Методы решения некорректных задач. / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. 2-е изд. - М.: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1979. - 285 с.
29. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. - М.: Наука, 1974. - 223 с.
30. Тихонов, А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов // ДАН СССР. - 1963. - Т. 153. - №1. - С. 49-52.
31. Тихонов, А.Н. Об устойчивости обратных задач / А.Н.Тихонов // ДАН СССР. - 1943. - Т. 39. - №5. - С. 195-198.
32. Тихонов, А.Н. Численные методы решения некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. - М.: Наука, 1990. - 232 с.
33. Федотов, А.М. Некорректные задачи со случайными ошибками в данных / А.М. Федотов. - Новосибирск: Наука, 1982. - 190 с.