МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Южно-Уральский государственный университет"
(национальный исследовательский университет)
Высшая школа электроники и компьютерных наук
Кафедра вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений

РАБОТА ПРОВЕРЕНА:	ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ:
Рецензент	
______________	______________
"___"_______________2017г.	"___"_______________2017г.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛАБО ЗАМКНУТЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ЮУрГУ-01.04.02.2017.(номер зачетки).ВКР

Научный руководитель:
Д.ф.-м.н., профессор
_____________В.П. Танана

Автор работы:
магистр группы КЭ-215
_____________О.М. Тананыкина

Нормоконтролер:
к.ф.-м.н., доцент
_____________А.И. Сидикова
"___"_______________2017г.

Челябинск 2017

УДК 517.948

Тананыкина О.М.

Решение нелинейных уравнений со слабо замкнутым оператором./ О.М. Тананыкина. – Челябинск, 2017. – 69 с.

В данной работе рассмотрен широкий класс нелинейных операторных уравнений. Для этого класса уравнений построена общая теория регуляризации и решена проблема конечномерных аппроксимаций регуляризованных решений. Изложена методика исследований и решения достаточно широкого класса нелинейных операторных уравнений, доказана L-регуляризация нелинейных операторных уравнений. Результаты использованы для приближенного решения обратной задачи гравиметрии.

Список лит. – 51

Оглавление

Введение

Во многих областях естествознания приходится сталкиваться с задачами, которые в математике принято называть некорректными. Основы теории исследования и методов решения таких задач были разработаны в трудах академиков А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева и член–корр. РАН В.К. Иванова.

В начале XX века французский математик Адамар сформулировал условие корректности (см. [50]) в связи с желанием выяснить, какие типы каревых условий наиболее естественны для различных типов дифференциальных уравнений (для эллиптических – задача Дирихле и налогичные ей, для параболических и гиперболических – задача Коши).

Эти условия корректности применимы к уравнению

$$Au = f$$

и формулируются в следующем виде:

1) для любого $f \in F$ существует элемент $u \in U$ такой, что $Au = f$ (существование);

2) решение u элементом f определяется однозначано (единственность);

3) имеет место непрерывная зависимость u от f (устойчивость).

Под некорректными (неустойчивыми) задачами обычно понимают такие, в которых не выполнено третье условие корректности.

Долгое время считали, что подобные задачи не имеют практического значения. Однако в шестидесятые годы появилось большое число практически важных задач, не удовлетворяющих третьему условию корректности, что привлекло к теории некорректных задач многих математиков.

Развитие вычислительной техники стимулировало интерес к некорректным задачам. В настоящее время практически во всех разделах математики (включая алгебру, математический анализ, дифференциальные уравнения, математическую физику, функциональный анализ, вычислительную математику и т.д.), в физике, геофизике, медицине, астрономии и многих других областях знаний, в которых применимы математические методы исследований, изучаются такие задачи.

Примерами некорректно поставленных задач являются обратные задачи математической физики, имеющие большое прикладное значение. В их числе можно указать обратные коэффициентные задачи теплопроводности и фильтрации, задачи тепловой диагностики технических объектов, обратную задачу гравиметрии. Построение и обоснование методов решения таких задач представляется весьма актуальной проблемой, как с точки зрения теоретических исследований, так и с точки зрения многочисленных приложений.

Важными вопросами на сегодняшний день являются вопросы единственности решения, сходимости приближённых решений к точному решению, получение точных по порядку оценок погрешности предлагаемых методов.

Большое значение при решении некорректных задач имеет их правильная постановка. В вопросах постановки некорректных задач принципильно важное значение имеют работы А.Н. Тихонова [44-48], М.М. Лаврентьева [39, 40] и В.К. Иванова [34-36].

Постановки обратных задач, в отличии от прямых, не соответствуют физически реализуемым событиям. Например, нельзя обратить ход теплообменного процесса и тем более изменить течение времени. Таким образом, можно говорить о физической некорректности постановки обратной задачи. Естественно, что при математической формализации она проявляется уже как математическая некорректность (чаще всего – неустойчивость решения, если применять для получения этого решения прямые методы). Потому обратные задачи теории теплообмена представляют собой типичные примеры некорректно поставленных задач. Нарушение причинно-следственной связи, имеющее место в исходной постановке обратной задачи, предопределяет трудности их решения и разработки методов и алгоритмов, дающих достаточно достоверные результаты.

В начале 60-х годов А.Н. Тихоновым [45-47] был предложен принципиально новый подход к решению некорректных задач, который основывался на использовании лишь точности задания исходных данных. Этот подход послужил толчком для бурного развития теории некорректных задач и ее приложений в различных разделах естествознания и техники.

Развитие этой теории связано с именами видных математиков А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, а также их учеников и последователей [1- 33, 41, 42, 43-48, 51].

К настоящему моменту достаточно полно развита теория линейных некорректных задач, что нельзя сказать о нелинейных, несмотря на важность последних в приложениях и, в первую очередь, при исследовании и решении обратных (коэффициентных) задач математической физики [3, 12, 37, 39, 40].

Несмотря на большое число работ, посвященных нелинейной теории [1, 9, 41, 43, 47-49, 51], имеется мало приложений ее к обратным задачам. Причина этого кроется в том, что в общей теории используется сравнительно узкий класс нелинейных операторов, что в приложениях приводит к неестественно завышенным требованиям на гладкость решения [87].

Исследование приближенного решения обратных задач – большая и активно развивающаяся область исследований как в России, так и за рубежом. Отметим, что в России данное направление развивают ведущие научные школы, родоначальниками которых являются А.Н. Тихонов, В.К. Иванов, М.М. Лаврентьев – новосибирская школа (В.Г. Романов, С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин и др.), где основное внимание уделяется математическим вопросам исследования обратных задач для уравнений в частных производных, в частности, получению оценок условной устойчивости и доказательству существования и единственности решения, а также численному решению некоторых обратных задач, важных для приложений; московская школа (А.М. Денисов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола и другие), где большое внимание уделяется также математическому исследованию обратных задач для уравнений в частных производных (А. М. Денисов, Н.Л. Гольдман), а также обоснованию вариационных методов регуляризации и их далеко идущих обобщений; школа в Екатеринбурге (В.В. Васин, А.Л, Агеев, А. И. Короткий и др.), где основное внимание уделяется исследованию итерационных методов решения нелинейных обратных задач, численному решению прикладных задач, в частности, обратной задачи гравиметрии (В.В. Васин, Е.Н. Акимова). Математическое исследование (теоремы существования и единственности) различных классов обратных задач ведется А.И. Прилепко и его учениками. Большое число исследовательских групп работает в данном направлении за рубежом, в частности

- исследовательские группы в Институте Радона прикладной и вычислительной математики университета И. Кеплера (Австрия), где существуют достаточно давние традиции исследования методов регуляризации. Основным направлением было исследование методов регуляризации линейных некорректно поставленных задач, но в последнее время был получен ряд результатов по методам регуляризации нелинейных некорректно поставлеггых задач, включая как теоретические результаты, так и приложения;

- исследовательские группы в университете Хельсинки (Финляндия), где в последние годы был получен ряд значительных результатов по обратным задачам, возникающим в дифференциальных уравнениях, геометрии и стохастики и приложениям в таких областях, как медицина, неразрушающая диагностика.

- исследовательская группа в университете Геттингена (Германия), где исследуются обратные задачи, поставленные в виденелинейных операторных уравнений первого рода и приложения в естествознании, медицине и технике.

- исследовательская группа «Системы прикладной динамики и обратные задачи» в университете Оксфорда (Великобритания), где исследуются, в частности, нелинейные динамические системы, проводится теоритическое исследование обратных задач, исследуются задачи предсказания климата.

- исследовательские группы в университетах США (напрю, университеты штатов Вашингтон и Техас, университет в Окленде), где исследуются, в частности, обратные задачи восстановления изображений в нелинейной постановке, байесовские(статистические) обратные задачи, обратные задачи, возникающие в биологии и медицине,геофизике, промышленности.

В последнее время исследовательские группы, занимающиеся теорией обратных задач и ее приложениями, работают в университетах Турции, Вьетнама, Кореи.

Большой вклад в развитие теории линейных и нелинейных обратных задач вносят российские ученые А.М. Денисов, А. С. Леонов, Н.Л. Гольдман, В.Г. Романов, В. В. Васин, А.Л, Агеев,И.В. Мельникова, А.Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин, И .П. Рязанцева и многие другие. Значительную конкуренцию российским ученым в данной области исследования составляют ученые перечисленных выше зарубежных исследовательских центров и других университетов и научных центров Австрии (Е. Резмерита, С.В. Переверзев), Германии (А. Рамм), США(А. Карассо, М. Клибанов и др.), Японии (М.Ямамото), Эстония (Г,Н. Вайникко), Китай (Я. Вонг), Турция (А. Хасанов) и др.

В работе будет достаточно полно рассмотрено широкий класс нелинейных операторных уравнений, играющих важную роль в приложениях. Для этого класса уравнений построена общая теория регуляризации и решена проблема конечномерных аппроксимаций регуляризованных решений. Изложена методика исследований и решения достаточно широкого класса нелинейных операторных уравнений.

Для этого класса уравнений доказана разрешимость соответствующих аппроксимаций регуляризованных решений. Вопрос о сходимости конечномерных аппроксимаций имеет актуальнейшее значение, и ему посвящено большое число работ [2, 20, 23, 24-27, 51].

Кроме этого доказана L-регуляризация нелинейных операторных уравнений. Результаты будут использованы для приближенного решения обратной задачи гравиметрии.

1. Операторные уравнения со слабозамкнутым оператором

1.1. Основные определения

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, A - оператор с областью определения $D(A) \subset H$ и множеством значений $R(A) \subset H$.

Определение 1.1. Оператор A будем называть слабо замкнутым, если из того, что $u_n \xrightarrow{сл.} u$, а $Au_n \xrightarrow{сл.} \overline{f}$ следует, что $u \in D(A)$ и $Au = \overline{f}$ (см. [41]).

Определение 1.2. Будем говорить, что последовательность множеств $\{M_n\}$ из метрического пространства X β - сходится к множеству $M_0 \subset X$ если,

$$\beta(M_n, M_0) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где $\beta(M_n, M_0) = \sup\{p(x, M_0) : x \in M_n\}$ и обозначать

$$M_n \xrightarrow{\beta} M_0 \text{ при } n \to \infty$$

[34].

Определение 1.3. Многозначное отображение φ, действующее из метрического пространства X в метрическое пространство Y, будем называть H - полунепрерывным сверху, если для любого $x_n \to x$ влечет $\varphi(x_n) \xrightarrow{\beta} \varphi(x)$ [35].

1.2. Постановка задачи и метод регуляризации

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \; u \in D(A), \; f \in H \tag{1.1}$$

и предположим, что при $f = f_0$ оно разрешимо, но точное значение правой части f_0 уравнения (1.1) нам не известно. Вместо f_0 даны приблеженное значение f_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\| f_\delta - f_0 \| \le \delta$.

Требуется по исходным данным $\{f_\delta, \delta\}$ построить приближенное решение, близкое к точному решению M_0 уравнения (1.1) при $f = f_0$.

Метод регуляризации, следуя [48], заключается в сведении поставленной задачи к вариационной

$$\inf\left\{\|Au-f_\delta\|^2+\alpha\|u\|^2 : u\in D(A)\right\}, \tag{1.2}$$

где $\alpha>0$.

Теорема 1.1. Если оператор A слабо замкнут, то вариационная задача (1.2) разрешима.

Доказательство. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{u_n\}$ такую, что $\{u_n\}\subset D(A)$ и

$$\|Au-f_\delta\|^2+\alpha\|u\|^2 \to \inf\left\{\|Au-f_\delta\|^2+\alpha\|u\|^2 : u\in D(A)\right\}. \tag{1.3}$$

Из соотношения (1.3) следует ограниченность последовательностей $\{u_n\}$, $\{Au_n\}$ и $\{Au_n-f_\delta\}$. Так как пространство H гильбертово, то соответствующие последовательности слабо компактны.

Без ограничений общности можем считать, что

$$u_n \xrightarrow{сл.} u \tag{1.4}$$

а

$$Au_n \xrightarrow{сл.} \overline{f}. \tag{1.5}$$

Из слабой замкнутости оператора A и соотношений (1.4) и (1.5) следует $u\in D(A)$ и

$$\overline{f}=Au. \tag{1.6}$$

По свойству нормы слабого предела из соотношений (1.4-1.6) вытекает

$$\alpha\|u\|^2 \le \varliminf_{n\to\infty}\alpha\|u_n\|^2 \tag{1.7}$$

и

$$\|Au-f_\delta\|^2 \le \varliminf_{n\to\infty}\|Au-f_\delta\|^2. \tag{1.8}$$

Складывая соотношения (1.7) , (1.8) и используя (1.3) получаем

$$\|Au-f_\delta\|^2+\alpha\|u\|^2 \to \inf\left\{\|Au-f_\delta\|^2+\alpha\|u\|^2 : u\in D(A)\right\}. \tag{1.9}$$

Так как $u \in D(A)$, то из (1.9) следует, что u является одним из решений задачи (1.2).

В дальнейшем множество решений задачи (1.2) будем обозначать через M_{δ}^{α} и называть приближенным решением уравнения (1.1), полученным методом регуляризации.

Теорема 1.2. Пусть оператор A слабо замкнут. Тогда множество M_{δ}^{α} решений вариационной задачи (1.2) замкнуто.

Доказательство. Пусть $\{u_n\} \subset M_{\delta}^{\alpha}$ и $u_n \to u$. Тогда из определения множества M_{δ}^{α} для любого n

$$\|Au_n - f_\delta\|^2 + \alpha\|u_n\|^2 \to \inf\left\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A)\right\}. \qquad (1.10)$$

Из соотношения (1.10) следует ограниченность последовательности $\{Au_n\}$, а ввиду гильбертовости пространства H - ее слабая компактность.

Без ограничения общности можем считать, что

$$Au_n \xrightarrow{сл.} \overline{f} \text{ при } n \to \infty. \qquad (1.11)$$

Так как оператор A слабо замкнут, то из (1.11) следует, что $u \in D(A)$ и

$$Au = \overline{f}\,. \qquad (1.12)$$

По свойству нормы слабого предела из соотношений (1.10-1.12) следует, что $u \in D(A)$ и

$$\left\|Au - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|u\right\|^2 \le \inf\left\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A)\right\}. \qquad (1.13)$$

Так как в соотношении (1.13) строго меньше инфинума быть не может, то

$$\left\|Au - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|u\right\|^2 = \inf\left\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A)\right\}$$

и $u \in M_{\delta}^{\alpha}$.

Обозначим через $\overline{P}_\alpha$ многозначное отображение, которое каждому элементу $\overline{f} \in H$ ставит в соответствие множество $\overline{M}^\alpha$ решений вариационной задачи (1.2) при $f_\delta = \overline{f}$.

Теорема 1.3. Пусть оператор A слабо замкнут. Тогда отображение $\overline{P}_\alpha$ является H - полунепрерывным сверху.

Доказательство. Тот факт, что для любого элемента $\overline{f} \in H$ множество $\overline{P}_\alpha(\overline{f})$ не пусто и замкнуто, доказан в теоремах 1.1 и 1.2.

Теперь проверим, что $\overline{f}_n \to \overline{f}$ влечет $\overline{M}^{\alpha,n} \xrightarrow{\beta} \overline{M}^\alpha$. Предположим противное, то есть найдутся число $d > 0$ и последовательность $\{\overline{u}_n\}, \overline{u}_n \in \overline{M}^{\alpha,n}$ такие, что для любого n

$$\rho(\overline{u}_n, \overline{M}^\alpha) \geq d\,. \tag{1.14}$$

Пусть $\overline{u} \in \overline{M}^\alpha$. Тогда для любого n справедливо соотношение

$$\left\|A\overline{u}_n - \overline{f}_n\right\|^2 + \alpha\left\|\overline{u}_n\right\|^2 \leq \left\|A\overline{u} - \overline{f}_n\right\|^2 + \alpha\left\|\overline{u}\right\|^2. \tag{1.15}$$

Так как $\overline{f}_n \to \overline{f}$, то

$$\left\|A\overline{u} - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\left\|\overline{u}\right\|^2 \to \left\|A\overline{u} - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\left\|\overline{u}\right\|^2\ . \tag{1.16}$$

Из соотношений (1.15) и (1.16) следует, что

$$\left\|A\overline{u} - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\left\|\overline{u}\right\|^2 \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\left\|A\overline{u}_n - \overline{f}_n\right\|^2 + \alpha\left\|\overline{u}_n\right\|^2\right\}\ . \tag{1.17}$$

Из (1.17) следует слабая компактность последовательностей $\{\overline{u}_n\}$ и $\{A\overline{u}_n\}$.

Без ограничения общности можем считать, что

$$\overline{u}_n \xrightarrow{сл.} u \tag{1.18}$$

и

$$A\overline{u}_n \xrightarrow{сл.} \tilde{f}\,. \tag{1.19}$$

Так как оператор A слабо замкнут, то из (1.18) и (1.19) следует, что

$$u \in D(A) \tag{1.20}$$

и

$$A\hat{u} = \tilde{f}\,. \tag{1.21}$$

Тогда по свойству нормы слабого предела из (1.18-1.21) получим

$$\left\|A\hat{u} - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\left\|\hat{u}\right\|^2 \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\left\|A\overline{u}_n - \overline{f}_n\right\|^2 + \alpha\left\|\overline{u}_n\right\|^2\right\}\ . \tag{1.22}$$

Из (1.17) и (1.22) следует

$$\hat{u} \in \overline{M}^{\alpha} \tag{1.23}$$

и

$$\left\|A\overline{u}_n - \overline{f}_n\right\|^2 + \alpha\left\|\overline{u}_n\right\|^2 \to \left\|A\hat{u} - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\left\|\hat{u}\right\|^2. \tag{1.24}$$

Так как из (1.18-1.20) вытекает

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\left\|\overline{u}\right\|^2 \geq \left\|\hat{u}\right\|^2 \tag{1.25}$$

и

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\left\|A\overline{u}_n - \overline{f}_n\right\|^2 \geq \left\|A\hat{u} - \overline{f}\right\|^2 \tag{1.26}$$

то из (1.24-1.26) следует, что

$$\left\|\overline{u}_n\right\| \to \left\|\hat{u}\right\|, \tag{1.27}$$

а из (1.18) и (1.27)

$$\overline{u}_n \to \hat{u} \tag{1.28}$$

Из (1.23) и (1.28) имеем

$$\rho(\overline{u}_n, \overline{M}^{\alpha}) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

что противоречит (1.14) и доказывает теорему.

Теорема 1.4. Пусть оператор A слабо замкнут. Тогда, если параметр регуляризации α связать с уровнем погрешности исходных данных δ таким образом, чтобы $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta^2 / \alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, то имеет место β -

сходимость приближенных решений $M_\delta^{\alpha(\delta)}$, полученных методом регуляризации к множеству точных решений M_0 уравнения (1.1) .

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $d>0$ и последовательность $\{\bar{u}_n\}$ такие, что для любого n

$$\bar{u}_n \in M_{\delta_n}^{\alpha(\delta_n)}, \tag{1.29}$$

$\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ и для любого n

$$\rho(\bar{u}_n, M_0) \ge d. \tag{1.30}$$

Пусть $\bar{u}_n \in M_0$, тогда из (1.29) следует, что для любого n

$$\left\| A\bar{u}_n - f_{\delta_n} \right\|^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar{u}_n\|^2 \le \left\| A\bar{u}_0 - f_{\delta_n} \right\|^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar{u}_0\|^2. \tag{1.31}$$

Так как $A\bar{u}_0 = f_0$, а $\left\| f_0 - f_{\delta_n} \right\| \le \delta_n$, то из (1.31) имеем, что для любого n

$$\|\bar{u}_n\|^2 \le \|\bar{u}_0\|^2 + \delta_n^2 / \alpha(\delta_n) \tag{1.32}$$

и

$$\left\| A\bar{u}_n - f_{\delta_n} \right\|^2 \le \delta_n{}^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar{u}_0\|^2 . \tag{1.33}$$

Из (1.33) вытекает

$$A\bar{u}_n \to f_0, \tag{1.34}$$

а из (1.32) – ограниченность последовательности $\{\bar{u}_n\}$. Без ограничения общности можем считать, что

$$\bar{u}_n \xrightarrow{сл.} u. \tag{1.35}$$

Из (1.34), (1.35) имеем

$$\hat{u} \in D(A) \tag{1.36}$$

и

$$A\hat{u} = f_0. \tag{1.37}$$

Таким образом, из (1.36) и (1.37) следует

$$\hat{u} \in M_0. \tag{1.38}$$

Кроме того, из (1.35) вытекает

$$\|\hat{u}\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|\bar{u}_n\|^2, \tag{1.39}$$

а из (1.32) ввиду произвольности элемента $\bar{u}_0 \in M_0$ и условий теоремы

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|\bar{u}_n\| \le \inf\left\{\|u\| : u \in M_0\right\}. \tag{1.40}$$

Из (1.39) и (1.40) следует

$$\|\bar{u}_n\| \to \|\hat{u}\|,$$

а с учетом (1.35)

$$\bar{u}_n \to u$$

и, следовательно, с учетом (1.38),

$$\rho(\bar{u}_n, M_0) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{1.41}$$

Соотношение (1.41) противоречит (1.30) и доказывает теорему.

1.3. Аппроксимация регуляризованного решения

Определение 1.4. Последовательность операторов $\{A_n\}$ будем называть A - полной, если для любого $u \in D(A)$ найдется последовательность $\{u_n\}$ такая, что при любом значении n $u_n \in D(A_n)$, $u_n \to u$ и $A_n u_n \to Au$ при $n \to \infty$(см. [51]).

Определение 1.5. Пару A, $\{A_n\}$ будем называть слабо замкнутой, если из того, что

$$\bar{u}_n \xrightarrow{сл.} u,$$

а

$$A_n u_n \xrightarrow{сл.} \hat{f}$$

следует, что $\hat{u} \in D(A_n)$ и $A\hat{u} = \bar{f}$ (см. [51]).

Рассмотрим аппроксимационную задачу

$$\inf\left\{\left\|A_n u - f_\delta^n\right\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A_n)\right\}, \alpha > 0 \tag{1.42}$$

Предположим, что при любом значении n оператора A_n слабо замкнут, тогда из теоремы 1.1 следует разрешимость задачи (1.42). Множество решений вариационной задачи (1.42) обозначим через $M_\delta^{\alpha,n}$, которое, ввиду теоремы 1.2, замкнуто.

Теорема 1.5. Пусть $f_\delta^n \to f_\delta$, последовательность операторов $\{A_n\}$ является A - полной, а для любой последовательности $\{A_{n_k}\}$ пара A, $\{A_{n_k}\}$ слабо замкнута.

Тогда имеет место β-сходимость аппроксимаций $M_\delta^{\alpha,n}$ к регуляризационному решению M_δ^α уравнения (1.1).

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $d>0$ и последовательность $\{u_{n_k}\}$ такие, что для любого k $u_{n_k} \in M_\delta^{\alpha,n_k}$ и

$$\rho(u_{n_k}, M_\delta^\alpha) \geq d .$$

Так как последовательность операторов $\{A_{n_k}\}$ является A-полной, то для любого $\bar{u} \in M_\delta^\alpha$ найдется последовательность $\{\bar{u}_k\}$ такая, что для любого k $\{\bar{u}_k\} \in D(A_{n_k})$ и

$$\bar{u}_k \to \bar{u} \tag{1.44}$$

а

$$A_{n_k}\bar{u}_k \to A\bar{u} \tag{1.45}$$

при $k \to \infty$.

Из (1.44) и (1.45) следует, что

$$\left\|A_{n_k}\bar{u}_k - f_\delta^n\right\|^2 + \alpha\left\|\bar{u}_k\right\|^2 \to \left\|A\bar{u} - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|\bar{u}\right\|^2 . \tag{1.46}$$

Так как для любого k $u_{n_k} \in M_\delta^{\alpha,n_k}$, то

$$\left\|A_{n_k}u_{n_k} - f_\delta^{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|u_{n_k}\right\|^2 \leq \left\|A_{n_k}\bar{u}_k - f_\delta^{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|\bar{u}_k\right\|^2 . \tag{1.47}$$

Из (1.47) и (1.46) следует, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\{\left\|A_{n_k}u_{n_k} - f_\delta^{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|u_{n_k}\right\|^2\right\} \leq \left\|A\bar{u} - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|\bar{u}\right\|^2 . \tag{1.48}$$

Из соотношения (1.48) вытекает ограниченность последовательностей $\{u_{n_k}\}$, $\{A_{n_k}u_{n_k}\}$ и $\{A_{n_k}u_{n_k} - f_\delta^{n_k}\}$, а ввиду гильбертовости пространства H - и их слабая компактность.

Без ограничения общности можем считать, что

$$\bar{u}_{n_k} \xrightarrow{сл.} u, \tag{1.49}$$

$$A_{n_k}u_{n_k} \xrightarrow{сл.} f \tag{1.50}$$

и

$$A_{n_k}u_{n_k} - f_\delta^{n_k} \xrightarrow{сл.} f - f_\delta. \tag{1.51}$$

Так как пара A, $\{A_{n_k}\}$ слабо замкнута, то на основании (1.49) и (1.50) имеем

$$u \in D(A) \tag{1.52}$$

и

$$Au = f\,. \tag{1.53}$$

Из соотношений (1.49), (1.50), (1.52) и (1.53) вытекает

$$\left\|Au - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|u\right\|^2 \le \varliminf_{k\to\infty}\left\{\left\|A_{n_k}u_{n_k} - f_\delta^{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|u_{n_k}\right\|^2\right\}. \tag{1.54}$$

Из (1.48), (1.52) и (1.54) следует

$$u \in M_\delta^\alpha \tag{1.55}$$

и

$$\left\|Au - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|u\right\|^2 \le \lim_{k\to\infty}\left\{\left\|A_{n_k}u_{n_k} - f_\delta^{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|u_{n_k}\right\|^2\right\}. \tag{1.56}$$

Так как из (1.49), (1.51) и (1.53) $\left\|u\right\| \le \varliminf_{k\to\infty}\left\|u_{n_k}\right\|$, а $\left\|Au - f_\delta\right\|^2 \le \varliminf_{k\to\infty}\left\|A_{n_k}u_{n_k} - f_\delta^{n_k}\right\|^2$, то на основании (1.56)

$$\left\|u_{n_k}\right\| \to \left\|u\right\|. \tag{1.57}$$

Тогда из (1.49) и (1.57) следует

$$u_{n_k} \to u,$$

что, учитывая (1.55), противоречит (1.43).

1.4. Примеры слабо замкнутых операторов

Определение 1.6. Оператор A будем называть усиленно непрерывным, если его область определения $D(A)$ слабо замкнута и из того, что $\{u_n\}$, $u_0 \subset D(A)$ $u_n \xrightarrow{сл.} u_0$, следует $\mathrm{A}u_n \to Au_0$ при $n \to \infty$ [51].

Очевидно, что усиленно непрерывный оператор слабо замкнут.

Приведем еще один пример слабо замкнутого оператора, часто встречающегося в приложениях.

Пусть

$$A = D \cdot C, \tag{1.58}$$

где C - линейный вполне непрерывный оператор, отображающий H в H, а область определения $D(B)$ оператора B замкнута, $D(B) \cap R(C) \neq 0$ и оператор B непрерывен на $D(B)$. Тогда очевидно, что оператор A, определяемый формулой (1.58), усиленно непрерывен, а следовательно, и слабо замкнут.

Теперь приведем класс операторов, не являющихся слабо замкнутыми. Для этого предположим, что $H = L_2[0,1]$, а $\psi(x)$ - строго возрастающая и непрерывная на отрезке $[a,b]$, $0 < a < b$ функция. Используя эту функцию, зададим в $L_2[0,1]$ оператор A, определяемый на множестве $D(A) = \{u : u \in L_2[0,1] \text{ и } a \le u(t) \le b \text{ п.в.}\}$ формулой

$$Au(t) = \psi[u(t)],\ t \in [0,1]. \tag{1.59}$$

Теорема 1.6. Если существуют значения x_1 и $x_2 \in [a,b]$ такие, что $x_1 < x_2$ и $\psi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \neq [\psi(x_1) + \psi(x_2)]/2$, то оператор A, определяемый формулой (1.59), не слабо замкнут.

Доказательство. Рассмотрим функциональную последовательность u_n, определяемую формулой

$$u_n(t)=\begin{cases} x_1, \dfrac{i}{2^n}\le t\le \dfrac{i+1}{2^n}, i=2j \\ x_2, \dfrac{i}{2^n}\le t\le \dfrac{i+1}{2^n}, i=2j+1, \end{cases} \tag{1.60}$$

где $j=0,1,...,2^{n-1}$, а $\mathrm{i}=0,1,...,2^n$.

Из (1.59) и (1.60) следует, что для любого n

$$Au_n(t)=\begin{cases} \psi(x_1), \dfrac{i}{2^n}\le t\le \dfrac{i+1}{2^n}, i=2j \\ \psi(x_2), \dfrac{i}{2^n}\le t\le \dfrac{i+1}{2^n}, i=2j+1, \end{cases} \tag{1.61}$$

где i и j те же, что и в формуле (1.60).

Из (1.60) и (1.61) следует

$$u_n \xrightarrow{сл.} \frac{x_1+x_2}{2}=u \tag{1.62}$$

и

$$Au_n \xrightarrow{сл.} \frac{\psi\left(x_1\right)+\psi\left(x_2\right)}{2}=\overline{f}\ . \tag{1.63}$$

Так как $a\le \dfrac{x_1+x_2}{2}\le b$, то $\dfrac{x_1+x_2}{2}\in D(A)$ и из условия теоремы

$$\frac{\psi\left(x_1\right)+\psi\left(x_2\right)}{2}\ne \psi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \tag{1.64}$$

Таким образом, из (1.64) следует, что

$$Au\ne \overline{f}$$

и оператор A, определяемый формулой (1.59), не является слабо замкнутым.

Из теоремы 1.6 следует, что оператор A вида (1.59) является слабо замкнутым тогда и только тогда, когда функция $\psi(x)$ линейна, т.е.

$$\psi(x)=kx+d\ ,$$

где k и d - некоторые положительные константы.

2. Критерий сходимости метода обобщенной регуляризации

2.1. Необходимые и достаточные условия на оператора A, обеспечивающие сходимость метода регуляризации

Пусть U и F – гильбертовы пространства, A – оператор с областью определения $D(A) \subset U$ и множеством значений $R(A) \subset F$.

Определение 2.1. Будем говорить, что оператор A удовлетворяет условию (C), если из того что $\{u_n\} \subset D(A)$, $\bar{f} \in R(A)$, $Au_n \to \bar{f}$ и

$$\lim_{x\to\infty} \|u_n\| \le \inf \left\{ \|u_n\| : u \in D(A), Au \to \bar{f} \right\},$$

следует что $p(u_n, \bar{M}) \to 0$ при $n \to \infty$, где $\bar{M} = \left\{ u : u \in D(A), Au = \bar{f} \right\}$ (см. [51]).

Так как в случае оператора, удовлетворяющего условию, вариационная задача (1.2) может оказаться неразрешимой, то приближенное решение уравнения (1.1), полученное методом обобщенной регуляризации, определим формулой

$$M_{\delta,\varepsilon}^{\alpha} = \left\{ \bar{u} : \bar{u} \in D(A), \|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha \|\bar{u}\|^2 \le r_\delta^\alpha + \varepsilon \right\},$$

где $r_\delta^\alpha = \inf \left\{ \|Au - f_\delta\|^2 + \alpha \|u\|^2 : u \in D(A) \right\}$, а $\varepsilon > 0$.

Докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть $f_0 \in R(A)$ и для любого k $f_{\delta_k} = f_0, \delta_k = \alpha_k = \dfrac{1}{k}, \varepsilon_k = \dfrac{1}{k^2}$.

Обозначим через M_k множество, определяемое следующим образом:

$$M_k = \left\{ u : u \in D(A), \|Au - f_0\|^2 + \frac{1}{k}\|u\|^2 \le r_k + \frac{1}{k^2} \right\}, \tag{2.1}$$

где

$$r_k = \inf \left\{ \|Au - f_0\|^2 + \frac{1}{k}\|u\|^2 : u \in D(A) \right\}, \tag{2.2}$$

и через $\{m_k\}$ - последовательность такую, что

$$m_k = \inf\left\{\|u\| : u \in M_k\right\}. \tag{2.3}$$

Лемма 2.1. Если для любой зависимости $\alpha = \alpha(\delta, \varepsilon)$ такой, что $\alpha(\delta, \varepsilon) \to 0$ и $(\delta^2 + \varepsilon)/\alpha(\delta, \varepsilon) \to 0$ при $\delta, \varepsilon \to 0$ имеет место $\beta -$ *сходимость* приближенных решений $M^{\alpha}_{\delta,\varepsilon}$ к множеству точных решений M_0 уравнения (1.1), то справедливо следующее равенство

$$\lim_{k\to\infty} m_k = \inf\left\{\|u\| : u \in D(A), Au = f_0\right\}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Из (2.3) следует что для любого k

$$m_k \geq 0. \tag{2.5}$$

Докажем ограниченность последовательности $\{m_k\}$. Ввиду соотношения (2.5) достаточно проверить ее ограниченность сверху. Для этого рассмотрим произвольный элемент $\bar{u}_0 \in M_0$.

Тогда, ввиду (2.1), для любого $\hat{u} \in M_k$ будет выполняться соотношение

$$\frac{1}{k}\|\hat{u}\|^2 \leq \|A\hat{u} - f_0\|^2 + \frac{1}{k}\|\hat{u}\|^2 \leq r_k + \frac{1}{k^2}. \tag{2.6}$$

Из (2.2) и (2.6) следует, что

$$\frac{1}{k}\|\hat{u}\|^2 \leq \|A\bar{u} - f_0\|^2 + \frac{1}{k}\|\bar{u}\|^2 + \frac{1}{k^2}. \tag{2.7}$$

Так как $Au_0 = f_0$, то из (2.7)

$$\frac{1}{k}\|\hat{u}\|^2 \leq \frac{1}{k}\|\bar{u}_0\|^2 + \frac{1}{k^2}. \tag{2.8}$$

Из (2.3) и (2.8) следует, что для любого k

$$m_k \leq \left(\|\bar{u}_0\|^2 + \frac{1}{k}\right)^{1/2}. \tag{2.9}$$

Так как $\left(\|\bar{u}_0\|^2 + \frac{1}{k}\right)^{1/2} \to \|\bar{u}_0\|$ при $k \to \infty$, то она ограничено, а следовательно, ввиду (2.9) и последовательность $\{m_k\}$ ограниченна сверху.

Так как последовательность $\{m_k\}$ ограничена, то она имеет конечные верхний и нижний пределы, а равенство (2.4) может быть записано в следующем виде:

$$\varliminf_{k\to\infty} m_k = \varlimsup_{k\to\infty} m_k = \inf\left\{\|u\| : Au = f_0\right\}. \qquad (2.10)$$

Предположим, что соотношение (2.10) не имеет места. Тогда возможны два случая: либо

$$\varliminf_{k\to\infty} m_k < \inf\left\{\|u\| : Au = f_0\right\},$$

либо

$$\varlimsup_{k\to\infty} m_k > \inf\left\{\|u\| : Au = f_0\right\}$$

Рассмотрим эти случаи.

1-й случай. Имеет место соотношение

$$\varliminf_{k\to\infty} m_k < \inf\left\{\|u\| : Au = f_0\right\}. \qquad (2.11)$$

Тогда, на основании (2.11), существует последовательность $\{m_{k_l}\}$ такая, что

$$\lim_{l\to\infty} m_{k_l} < \inf\left\{\|u\| : Au = f_0\right\}. \qquad (2.12)$$

Обозначим через $\overline{q}$ число, определяемое следующим образом

$$\overline{q} = \inf\left\{\|u\| : Au = f_0\right\} - \lim_{l\to\infty} m_{k_l}. \qquad (2.13)$$

Из (2.1), (2.3) и (2.13) следует существование $u_{k_l} \in M_{k_l}$ такого, что

$$\left\|\overline{u}_{k_l}\right\| \le m_{k_l} + \overline{q}/4. \qquad (2.14)$$

Из (2.12) и (2.14) следует, что для любого l

$$\inf\left\{\|u\| : Au = f_0\right\} - \left\|\overline{u}_{k_l}\right\| \ge \overline{q}/2,$$

а, следовательно, и

$$p(\overline{u}_{k_l}, M_0) \ge \overline{q}/2. \qquad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что не имеет места β-сходимость последовательности M_{k_l} к M_0, что противоречит условию леммы.

2-й случай. Имеет место соотношение

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} m_k > \inf\left\{\|u\| : Au = f_0\right\}. \qquad (2.16)$$

Из (2.16) следует существование подпоследовательности $\left\{m_{k_s}\right\}$ такой, что

$$\lim_{s\to\infty} m_{k_s} > \inf\left\{\|u\| : Au = f_0\right\}. \qquad (2.17)$$

Обозначим через q число, определяемое формулой

$$q = \lim_{s\to\infty} m_{k_s}^2 - \inf\left\{\|u\|^2 : Au = f_0\right\}, \qquad (2.18)$$

а через $\tilde{u}_0$ - элемент из M_0 такой, что

$$\|\tilde{u}_0\|^2 < \inf\left\{\|u\|^2 : Au = f_0\right\} + \frac{q}{8}. \qquad (2.19)$$

Обозначим через s_0 номер, удовлетворяющий ввиду (2.18) соотношениям

$$m_{k_{s_0}} > \inf\left\{\|u\|^2 : Au = f_0\right\} + \frac{7}{8}q \qquad (2.20)$$

и

$$\frac{1}{k_{s_0}} < \frac{q}{8}. \qquad (2.21)$$

Пусть $\tilde{u} \in M_{k_{s_0}}$, тогда ввиду (2.20) и (2.3)

$$\|\tilde{u}\|^2 > \inf\left\{\|u\|^2 : Au = f_0\right\} + \frac{7}{8}q. \qquad (2.22)$$

Таким образом, из (2.1), (2.19) и (2.22) следует

$$\|A\tilde{u}_0 - f_0\|^2 + \frac{1}{k_{S_0}}\|\tilde{u}_0\|^2 = \frac{1}{k_{S_0}}\|\tilde{u}_0\|^2 < \frac{1}{k_{S_0}}\|\tilde{u}\|^2 - \frac{1}{k_{S_0}}\frac{3}{4}q. \qquad (2.23)$$

Из (2.21) и (2.23) –

$$\|A\tilde{u}_0 - f_0\|^2 + \frac{1}{k_{S_0}}\|\tilde{u}_0\|^2 < \frac{1}{k_{S_0}}\|\tilde{u}\|^2 - \frac{3}{\left(k_{S_0}\right)^2}. \qquad (2.24)$$

Из (2.1) и (2.24) имеем

$$\|A\tilde{u}_0 - f_0\|^2 + \frac{1}{k_{S_0}}\|\tilde{u}_0\|^2 < r_{k_{S_0}} - \frac{2}{\left(k_{S_0}\right)^2}$$

Что противоречит (2.2) и доказывает лемму.

Теорема 2.1. Для того, что бы для любого $f_0 \in R(A)$ имела место $\beta - сходимость$ приближенных решений $M_{\delta,\varepsilon}^{\alpha}$ к множеству точных решений M_0 уравнения (1.1) при условии что $\alpha = \alpha(\delta,\varepsilon), \alpha(\delta,\varepsilon) \to 0$ и $\left(\delta^2 + \varepsilon\right) / \alpha(\delta,\varepsilon) \to 0$ при $\delta,\varepsilon \to 0$ необходимо и достаточно, чтобы оператор А удовлетворял условию (С).

Доказательство. Необходимость. Предположим противное, т.е. имеет место $\beta - сходимость$ приближенных решений $M_{\delta,\varepsilon}^{\alpha}$ к множеству точных решений M_0 уравнения (1.1) при $\delta,\varepsilon,\alpha(\delta,\varepsilon)$ и $\left(\delta^2 + \varepsilon\right) / \alpha(\delta,\varepsilon) \to 0$, но оператор А не удовлетворяет условию (С).

Тогда найдутся числа $d > 0$ и последовательность $\{u_n\}$ такие, что

$$\{u_n\} \overset{сл.}{\to} \hat{u}\,, \tag{2.25}$$

$$Au_n \to f_0, \tag{2.26}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\| \le \inf\{\|u\| : u \in M_0\} \tag{2.27}$$

и для любого n

$$p(u_n, M_0) \ge d\,. \tag{2.28}$$

Сначала докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\| \le \inf\{\|u\| : u \in M_0\} \tag{2.29}$$

Предположим противное, т.е. найдутся число $d_1 > 0$ и последовательность $\{u_{n_k}\}$ такие, что для любого k справедливо, ввиду (2.27), соотношение

$$\|u_{n_k}\|^2 < \inf\left\{\|u\|^2 : u \in M_0\right\} - d_1. \tag{2.30}$$

Учитывая (2.26). Без ограничения общности, можем считать, что для любого k

$$\left\|Au_{n_k} - f_0\right\| < \frac{1}{k}. \tag{2.31}$$

Из леммы 2.1 следует существование k_0 такого, что

$$m_{k_0}^2 > \inf\left\{\|u\|^2 : u \in M_0\right\} - \frac{d_1}{8}. \tag{2.32}$$

Без ограничения общности можем считать, что

$$\frac{1}{k_0^2} < \frac{d_1}{8k_0}. \tag{2.33}$$

Таким образом, из (2.30-2.32) и (2.33) следует

$$\left\|Au_{n_{k_0}} - f_0\right\|^2 + \frac{1}{k_0}\left\|u_{n_{k_0}}\right\|^2 \le \frac{1}{k_0^2} + \frac{1}{k_0}\left\|u_{n_{k_0}}\right\|^2 < \frac{1}{k_0^2} + \frac{1}{k_0}\inf\left\{\|u\|^2 : u \in M_0\right\} - \frac{d_1}{k_0} \le$$

$$\le \frac{1}{k_0}\inf\left\{\|u\|^2 : u \in M_0\right\} - \frac{7d_1}{8k_0} \le \frac{1}{k_0}m_{k_0}^2 - \frac{3}{4k_0}d_1. \tag{2.34}$$

Из (2.1-2.3) вытекает, что для любого $\tilde{u}_0 \in M_{k_0}$

$$\frac{1}{k_0}m_{k_0}^2 \le \left\|A\tilde{u}_{k_0} - f_0\right\|^2 + \frac{1}{k_0}m_{k_0}^2 \le \left\|A\tilde{u}_{k_0} - f_0\right\|^2 + \frac{1}{k_0}\left\|\tilde{u}_{k_0}\right\|^2 \le r_{k_0} + \frac{1}{k_0^2}. \tag{2.35}$$

Из (2.33-2.35) имеет

$$\left\|Au_{n_{k_0}} - f_0\right\|^2 + \frac{1}{k_0}\left\|u_{n_{k_0}}\right\|^2 \le r_{k_0} - \frac{5}{8k_0}d_1,$$

то есть

$$\left\|Au_{n_{k_0}} - f_0\right\|^2 + \frac{1}{k_0}\left\|u_{n_{k_0}}\right\|^2 \le r_{k_0}$$

что противоречит (2.2) и доказывает соотношение (2.29).

Из (2.29) и леммы 2.1 следует существование последовательности $\{u_k\}$ такой, что для любого k, $\{\hat{u}_k\} \in M_k$ и

$$\left\|\hat{u}_k\right\|^2 - \left\|u_{n_k}\right\|^2 \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{2.36}$$

Из (2.31) и (2.36) вытекает

$$\left\|Au_{n_k}-f_0\right\|^2+\frac{1}{k}\left\|u_{n_k}\right\|^2\le\left\|A\hat{u}_k-f_0\right\|^2+\frac{1}{k}\left\|\hat{u}_k\right\|^2+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k}\left|\left\|\hat{u}_k\right\|^2-\left\|u_{n_k}\right\|^2\right| \quad (2.37)$$

Так как $\hat{u}_k\in M_k$, то из (2.1) и (2.37) следует

$$\left\|Au_{n_k}-f_0\right\|^2+\frac{1}{k}\left\|u_{n_k}\right\|^2\le r_k+\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k}\left|\left\|\hat{u}_k\right\|^2-\left\|u_{n_k}\right\|^2\right|. \quad (2.38)$$

Из (2.38) имеем

$$u_{n_k}\in M^{\frac{1}{k}}_{\frac{1}{k},\varepsilon_k}, \quad (2.39)$$

где $\varepsilon_k=\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k}\left|\left\|\hat{u}_k\right\|^2-\left\|u_{n_k}\right\|^2\right|, f_{\delta_k}=f_0$, а $M^{\frac{1}{k}}_{\frac{1}{k},\varepsilon_k}$ - приближенное решение уравнения (1.1) .

Из (2.36) следует

$$k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k}\left|\left\|\hat{u}_k\right\|^2-\left\|u_{n_k}\right\|^2\right|\right)\to 0 \text{ при } k\to\infty. \quad (2.40)$$

Из (2.40) и предположенной теоремы получим

$$M^{\frac{1}{k}}_{\frac{1}{k},\varepsilon_k}\xrightarrow{\beta}M_0, \quad (2.41)$$

а из (2.39) и (2.41) –

$$p\left(u_{n_k},M_0\right)\to 0 \text{ при } k\to\infty$$

что противоречит (2.28) и доказывает необходимость.

Достаточность. Предположим противное. Тогда найдутся число $d>0$ и последовательность $\{u_k\}$ такие, что для любого n

$$\bar{u}_n\in M^{\alpha(\delta_n,\varepsilon_n)}_{\delta_n,\varepsilon_n},$$

где $\delta_n,\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$ и для любого n

$$p\left(\bar{u}_n,M_0\right)\ge d. \quad (2.42)$$

Пусть $u_0\in M$, тогда для любого n имеет место соотношение

$$\left\|A\bar{u}_n-f_{\delta_n}\right\|^2+\alpha(\delta_n,\varepsilon_n)\left\|\bar{u}_n\right\|^2\le\left\|A\bar{u}_0-f_{\delta_n}\right\|^2+\alpha(\delta_n,\varepsilon_n)\left\|\bar{u}_0\right\|^2+\varepsilon_n. \quad (2.43)$$

Так как $Au_0 = f_0$, а $\left\| f_0 - f_{\delta_n} \right\| \le \delta_n$, то из (2.43) следует, что для любого n выполняются соотношения

$$\left\|\overline{u}_n\right\|^2 \le \left\|u_0\right\|^2 + \left(\delta_n^2 + \varepsilon_n\right) \big/ \alpha\left(\delta_n, \varepsilon_n\right) \tag{2.44}$$

и

$$\left\|A\overline{u}_n - f_{\delta_n}\right\|^2 \le \delta_n^2 + \alpha\left(\delta_n, \varepsilon_n\right)\left\|u_0\right\|^2 + \varepsilon_n. \tag{2.45}$$

Из (2.44) следует ограниченность последовательности $\left\{\overline{u}_n\right\}$ и

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\overline{u}_n\right\| \le \inf\left\{\left\|u\right\| : u \in M_0\right\}. \tag{2.46}$$

а из условия (2.45) –

$$A\overline{u}_n \to f_0. \tag{2.47}$$

Из соотношений (2.46), (2.47) и условия (С) следует

$$p\left(\overline{u}_n, M_0\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

что противоречит (2.42) и доказывает теорему.

2.2. Примеры операторов, удовлетворяющих условию (С).

Теорема 2.2. Пусть оператор A слабо-сильно замкнут. Тогда он удовлетворяет условию (С).

Доказательство. Пусть $u_n \xrightarrow{сл.} \hat{u}$, а $Au_n \to \overline{f}$.

Из условия

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|u_n\right\| \le \inf\left\{\left\|u\right\| : Au = \overline{f}\right\}$$

следует

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|u_n\right\| \le \left\|\hat{u}\right\|. \tag{2.48}$$

По свойству слабого предела

$$\left\|\hat{u}\right\| \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\left\|u_n\right\|. \tag{2.49}$$

Из (2.48) и (2.49) имеем

$$\left\|u_n\right\| \to \left\|\hat{u}\right\|,$$

а учитывая гильбертовость пространства *U*, получаем, что $u_n \to \hat{u}$, а, следовательно, и

$$p\left(u_n, \bar{M}\right) \to 0, \text{ при } n \to \infty,$$

где $\bar{M} = \left\{u : u \in D(A), Au = \bar{f}\right\}$.

Теперь рассмотрим некоторое обобщение оператора (1.59) .

Пусть $\psi(x)$ – строго возрастающая и непрерывная на полуоси $x \geq 0$ функция, используя которую введем оператор, действующий из $L_2[0,1]$ в $L_2[0,1]$ по формуле

$$Au(t) = \psi\left[u(t)\right], t \in [0,1], \tag{2.50}$$

Теорема 2.3. Оператор А, определенный формулой (2.50), удовлетворяет условию (С).

Доказательство. Так как функция $\psi(x)$ строго возрастает, то оператор A инъективен.

Предположим противное, т.е. что оператор A не удовлетворяет условию (С). Тогда найдутся число $d > 0$ и последовательность $\left\{u_n\right\} \subset D(A)$ такие, что

$$u_n \xrightarrow{сл.} \hat{u}, \tag{2.51}$$

$$Au_n \to \bar{f}, \bar{f} \in R\left(A\right), \tag{2.52}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|u_n\right\| \leq \left\|A^{-1}\bar{f}\right\|, \tag{2.53}$$

и для любого n

$$\left\|u_n - \bar{u}\right\| \geq d, \tag{2.54}$$

где $A\bar{u} = \bar{f}$.

Из (2.52) следует, что из последовательности $\left\{Au_n\right\}$ можно выделить подпоследовательность $\left\{Au_{n_k}\right\}$ такую, что $Au_{n_k}(t) \to \bar{f}(t)$ почти всюду.

Тогда, учитывая свойства функции $\psi(x)$, получаем что и последовательность $u_{n_k}(t)$ сходится почти всюду к $\bar{u}(t)$.

Из (2.51) следует, что

$$u_{n_k} \xrightarrow{сл.} \bar{\hat{u}}\,. \tag{2.55}$$

По свойству нормы слабого предела из (2.55) имеем

$$\|\bar{u}\| \le \lim_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|. \tag{2.56}$$

Из (2.53) и (2.56) следует

$$\|u_{n_k}\| \to \|\bar{u}\|. \tag{2.57}$$

Тогда из (2.55) и (2.57) вытекает

$$u_{n_k} \to \bar{u}$$

что противоречит (2.54) и доказывает теорему.

Приведем еще один пример оператора.

Пусть $U = F = L_2[0,1]$, p – положительное четное число. Тогда

$$A[u(t)] = u^p(t), \tag{2.58}$$

где $u, Au \in L_2[0,1]$.

Теорема 2.4. Оператор A, определяемый формулой (2.58) удовлетворяет условию (С).

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется последовательность $\{u_n'\} \subset D(A)$ такая, что $u_n' \xrightarrow{сл.} \hat{u}, Au_n' \to \bar{f}$, где $\bar{f} \in R(A)$.

Для любого $\tilde{u}$ такого, что $\tilde{u}^p(t) = \bar{f}(t)$ почти всюду

$$\|\tilde{u}\| \ge \lim_{n\to\infty} \|u_n'\|$$

и $p(u_n', \bar{M}) \not\to 0$, где $\bar{M} = \{u : Au = \bar{f}\}$.

По последовательности $\{u_n'\}$ построим последовательность $\{u_n\}$, определяемую формулой

$$u_n(t) = \begin{cases} u_n'(t) & , u_n' \ne 0, \\ \dfrac{1}{n} & , u_n' = 0. \end{cases} \tag{2.59}$$

Из (2.59) следует что последовательность $\{u_n\}$ удовлетворяет тем же условиям что и $\{u_n'\}$, т.е. $u_n \xrightarrow{сл.} \hat{u}, Au_n \to \bar{f}$ в $L_2[0,1]$.

Для любого $\tilde{u}$ такого, что $A\tilde{u} = \bar{f}$ следует, что

$$\|\tilde{u}\| \geq \lim_{n\to\infty} \|u_n\|, \tag{2.60}$$

и $p(u_n, \bar{M}) \not\to 0$.

Тогда найдутся число $d > 0$ и подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ такие, что для любого k

$$p(u_{n_k}, \bar{M}) \geq d. \tag{2.61}$$

Так как $u_{n_k}^p \to \bar{f}$ при $k \to \infty$, то следует, что из последовательности $\{u_{n_k}^p(t)\}$ может быть выделена подпоследовательность, сходящаяся к $\bar{f}(t)$ почти всюду.

Без ограничения общности можем считать, что

$$u_{n_k}^p(t) \to \bar{f}(t) \tag{2.62}$$

почти всюду.

Из (2.62) следует, что

$$|u_{n_k}(t)| \to \bar{u}(t) \tag{2.63}$$

почти всюду, где $\bar{u}(t) \geq 0, \bar{u}^p(t) = \bar{f}(t)$ почти всюду, т.е.

$$\bar{u} \in \bar{M}. \tag{2.64}$$

Так как для любого k

$$\| |u_{n_k}| \| = \|u_{n_k}\|$$

то на основании (2.60) и (2.64)

$$\|\bar{u}\| \geq \lim_{k\to\infty} \| |u_{n_k}| \|. \tag{2.65}$$

Из (2.65) следует ограниченность последовательности $\{|u_{n_k}|\}$, а, следовательно, и ее слабая компактность.

Без ограничения общности можем считать, что

$$\left|u_{n_k}\right| \xrightarrow{сл.} \bar{u}\,, \tag{2.66}$$

но тогда из (2.63) и (2.66) следует что

$$\bar{u}(t) = \bar{u}(t) \tag{2.67}$$

почти всюду

Из (2.66) и (2.67) по свойству нормы слабого предела имеем

$$\|\bar{u}\| \le \lim_{k\to\infty}\left\|\left|u_{n_k}\right|\right\|, \tag{2.68}$$

а из (2.65) и (2.68)-

$$\left\|\left|u_{n_k}\right|\right\| \to \|\bar{u}\|\,. \tag{2.69}$$

Из соотношений (2.66) и (2.69) следует

$$\left|u_{n_k}\right| \to \bar{u}\,. \tag{2.70}$$

Теперь, рассмотрим последовательность такую, что

$$\bar{u}_{n_k}(t) = \bar{u}(t)\cdot sign\left[u_{n_k}(t)\right]. \tag{2.71}$$

Из (2.64) и (2.71) следует, что для любого k

$$u_{n_k} \in \bar{M} \tag{2.72}$$

На основании (2.71) имеем

$$\left\|u_{n_k} - \bar{u}_{n_k}\right\| = \left\|\left|u_{n_k}\right| - \bar{u}\right\|. \tag{2.73}$$

Из (2.70) и (2.73) получаем при и, следовательно при , что противоречит (2.61) и доказывает теорему.

Теперь покажем, что оператор A, определяемый формулой (2.58), ни при каком положительном, четном значении p не является слабо-замкнутым. Для этого рассмотрим функциональную последовательность определяемую формулой (1.60), полагая при этом $x_1 = -1$, а $x_2 = 1$.

Так как последовательность ортонормированна, то

$$u_n \xrightarrow{сл.} 0\,, \tag{2.74}$$

а из (1.60) следует, что для любого n и $t \in [0,1]$

$$Au_n(t) = u_n^p(t) = 1,$$

то есть

$$Au_n \to 1. \qquad (2.75)$$

Так как $0^p = 0 \neq 1$, то из (2.74) и (2.75) следует, что оператор A не является слабо-сильно замкнутым.

Пусть $U = L_2[0,1] \times L_2[0,1], F = L_2[0,1]$, а оператор Aопределен формулой

$$A[u(t),\upsilon(t)] = u(t)\cdot\upsilon(t), \qquad (2.76)$$

где $u, \upsilon, u \cdot L_2[0,1]$ и $u(t) \geq r > 0$ при $t \in [0,1]$.

Теорема 2.5. Оператор A, определяемый формулой (2.76). Удовлетворяет условию *(C)*.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что оператор A не удовлетворяет условию *(C)*. Тогда найдутся число $d > 0$ и последовательность $\{(u_n, \upsilon_n)\} \subset D(A)$ такие что

$$u_n \overset{сл.}{\to} \hat{u},\ \upsilon_n \overset{сл.}{\to} \hat{\upsilon}_n, \qquad (2.77)$$

$$u_n \cdot \upsilon_n \to \overline{f}, \qquad (2.78)$$

и для любых u, υтаких, что

$$u(t)\cdot\upsilon(t) = \overline{f}(t)$$

почти всюду справедливо соотношение

$$\|u\|^2 + \|\upsilon\|^2 \geq \lim_{n\to\infty}\left(\|u\|^2 + \|\upsilon\|^2\right), \qquad (2.79)$$

и

$$p\left[(u_n, \upsilon_n); \bar{M}\right] \geq d, \qquad (2.80)$$

где $\bar{M} = \left\{(u,\upsilon) : u,\upsilon \in L_2[0,1], u(t)\cdot\upsilon(t) = \overline{f}(t)\right\}$.

Рассмотрим последовательность $\{\overline{\upsilon}_n\}$ такую, что для любого n

$$\overline{\upsilon}_n(t) = \upsilon_n(t) + \frac{\overline{f}(t) - u_n(t)\cdot\upsilon(t)}{u_n(t)}. \qquad (2.81)$$

Тогда, учитывая (2.78) и то что для любых n и t

$$\upsilon_n(t) \geq d > 0$$

получаем

$$\|\upsilon_n - u_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \qquad (2.82)$$

Так как из (2.81) следует что для любого n

$$(u_n, \upsilon_n) \in \bar{M},$$

то из (2.82) следует, что

$$\rho\left[(u_n, v_n); \overline{M}\right] \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

а это противоречит (2.80) и доказывает теорему.

Теперь покажем, что оператор A, определяемый формулой (2.76), не является слабо-сильно замкнутым. Для этого положим величину r, участвующую в определении оп ератора A, равной 1. Затем возьмем две функциональные последовательности $\{u_n(t)\}$ и $\{v_n(t)\}$, считая при этом, что при определении функции $u_n(t)$ положим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, а при определении $v_n(t)$, наоборот, т.е. $x_1 = 2$, а $x_2 = 1$.

Определенные таким образом функциональные последовательности $\{u_n(t)\}$ и $\{v_n(t)\}$ ортонормированы и потому

$$u_n \xrightarrow{сл.} 0 \qquad (2.83)$$

и

$$v_n \xrightarrow{сл.} 0, \qquad (2.84)$$

а для любых значений n и $t \in [0,1]$

$$u_n(t)v_n(t) = 2$$

и, следовательно,

$$A[u_n, v_n] = u_n(t)v_n(t) \to 2 \qquad (2.85)$$

Так как $o \cdot 0 = 0 \neq 2$, то из (2.83-2.85) будет следовать, что оператор A не является слабо-сильно замкнутым.

Теперь приведем пример оператора A, не удовлетворяющего условию (С).

Пусть $U = F = L_2[0,1]$, $D(A) = \{u : u \in L_2[0,1], 0 \le u(t) \le 2\}$.

$$Au(t) = \int_0^t u^4(\tau)d\tau\,, \tag{2.86}$$

а

$$f_0(t) = 8t\,. \tag{2.87}$$

Из вида оператора следует, что его область определения $D(A)$ является выпуклым и замкнутым множеством в пространстве $L_2\left[0,1\right]$, а сам оператор A непрерывен на $D(A)$.

Для оператора A, определяемого формулой (2.86), мы докажем более сильное утверждение, а именно что в случае точной правой части f_0, определяемой (2.87), вариационная задача (1.2) не будет иметь решений, а приближенные решения, полученные методом обобщенной регуляризации, не будут сходиться к точному.

Пусть $M_r = \left\{u : u \in L_2[0,1], 0 \le u(t) \le r\right\}$, где $0 < r < 8$, тогда справедливы две следующие леммы.

Лемма 2.2. Имеют место следующие соотношения:

$$pr(f_0, M_r) = \left\{\overline{f}_0\right\},$$

где $pr(f_0, M_r)$ - метрическая проекция элемента f_0 на множество M_r, а

$$\overline{f}_0(t) = \begin{cases} 8t,\ 0 \le t \le r/8, \\ r,\ r/8 < t < 1, \end{cases}$$

и

$$\rho^2(f_0, M_r) = \frac{64}{3}\left(1 - \frac{r}{8}\right)^3.$$

Лемма 2.3. Пусть α и $\eta > 0$, а

$$\varphi(\eta) = 2\alpha(1-\eta) + \frac{64}{3}\eta^3.$$

Тогда

$$\min_\eta \varphi(\eta) = \varphi\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{2}}\right) = 2\alpha(1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}})$$

и для любого $\eta \neq \frac{\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{2}}$

$$\varphi(\eta) > 2\alpha(1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}}).$$

Лемма 2.4. Пусть $\alpha > 0$, а A и f_0 удовлетворяют соотношениям (2.86) и (2.87), тогда для любого $u \in D(A)$

$$\|Au - f_0\|^2 + \alpha\|u\|^2 > 2\alpha\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}}\right).$$

Доказательство. Пусть $\|u\|^2 \geq 2$, тогда

$$\|Au - f_0\|^2 + \alpha\|u\|^2 \geq \alpha\|u\|^2 \geq 2\alpha > 2\alpha\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}}\right).$$

Пусть $\|u\|^2 < 2$ и $\|u\|^2 \neq 2\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}}\right)$. Тогда, обозначив $1 - \|u\|^2 / 2$ через η, получим

$$\|u\|^2 = 2(1-\eta),$$

а

$$Au(t) = \int_0^t u^4(\tau)d\tau \leq \int_0^1 u^4(\tau)d\tau. \tag{2.88}$$

Из (2.88) по обобщенной теореме о среднем

$$Au(t) \leq \sup_t u^2(t)\int_0^1 u^2(\tau)d\tau \leq 8(1-\eta). \tag{2.89}$$

Из (2.89) и леммы 2.2 следует

$$\|Au - f_0\|^2 \geq \frac{64}{3}\eta^3, \tag{2.90}$$

а из (2.90) и леммы 2.3 –

$$\|Au - f_0\|^2 + \alpha\|u\|^2 > 2\alpha\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}}\right).$$

Пусть $\|u\|^2 = 2\alpha\left(1-\frac{\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}}\right)$, тогда из леммы 2.2 следует

$$\|Au - f_0\|^2 \geq \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}}.$$

Предположим, что найденное $\bar{u}$ такое, что

$$\|A\bar{u} - f_0\|^2 = \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}}. \tag{2.91}$$

Тогда из (2.89) следует

$$A\bar{u}(t) \leq 8\left(1-\frac{\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{2}}\right). \tag{2.92}$$

Из (2.91), (2.92) и леммы 2.2 имеем

$$A\bar{u}(t) = \begin{cases} 8t, \ 0 \leq t \leq 1-\frac{\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{2}}, \\ 8\left(1-\frac{\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{2}}\right), \ 1-\frac{\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{2}} \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{2.93}$$

Из (2.86) и (2.93) следует

$$\|\bar{u}(t)\|^2 = 2\sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{2}}\right),$$

что противоречит исходному предположению.

Таким образом,

$$\|Au - f_0\|^2 > \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}},$$

а следовательно, и

$$\|Au - f_0\|^2 + \alpha\|u\|^2 > 2\alpha\left(1-\frac{\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}}\right).$$

Лемма 2.5. Имеет место соотношение

$$\inf\left\{\|Au - f_0\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A)\right\} = 2\alpha\left(1-\frac{\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}}\right).$$

Доказательство. Разобьем отрезок $\left[0,\left(1-\frac{\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{2}}\right)\right]$ на 2^n равных частей точками:

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_{2n+1}=1-\frac{\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{2}}.$$

Тогда для любого i

$$t_{i+1}-t_i=\frac{1-\frac{\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{2}}}{2^n}.$$

Затем определим функцию $\bar{u}_n$ следующим образом

$$\bar{u}_n(t)=\begin{cases} 2,\ t_i\le t\le t_{i+1}, i=2j, \\ 0,\ t_i<t<t_{i+1}, i=2j+1, \\ 0,\ 1\text{-}\frac{\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{2}}\le t\le 1, \end{cases} \tag{2.94}$$

где $j=0,1,\ldots,2^{n-1}$.

Из (2.94) следует, что для любого n

$$\left\|\bar{u}_n\right\|^2=2\left(1-\frac{\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{2}}\right)$$

и

$$\left\|A\bar{u}-f_0\right\|^2\to\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{2}}.$$

Рассмотрим операторное уравнение (1.1) с оператором A, определяемым формулой (2.86) и правой частью $f_{\delta_n}=f_0$, где f_0 задана формулой (2.87), а $\delta_n=n^{-3/4}$.

Из (2.86) вытекает инъективность и непрерывность оператора A, а также $f_0\in R(A)$.

Из лемм 2.5 и 2.4 следует, что ни при каком значении $\alpha>0$ вариационная задача (1.2) не имеет решения.

Таким образом, для приближенного решения уравнения (1.1) в данном случае нужно использовать обобщенную регуляризацию. Тогда, положив $\varepsilon_n = \delta_n$, а $a_n = 1/n$ приближенное решение уравнения (1.1), полученное методом обобщенной регуляризации, обозначим через M_n.

Так как из (2.86) и (2.87) следует

$$\|u_0\| = 2\sqrt{2}, \qquad (2.95)$$

а из выбора α_n, δ_n и ε_n -

$$\sup\left\{\|u\|^2 : u \in M_n\right\} \to 2 \text{ при } n \to \infty. \qquad (2.96)$$

Из (2.95) и (2.96) имеем

$$M_n \neq u_0$$

или, другими словами, что метод обобщенной регуляризации не применим к этому уравнению.

Применяя теорему 2.1 к полученному факту, имеем, что оператор A, определяемый формулой (2.86), не удовлетворяет условию (С).

3. Операторные уравнения со слабозамкнутыми операторами A и L

Пусть U, F и G - гильбертовы пространства, а A и L - слабо замкнутые операторы с областями определения $D(A)$, $D(L) \in U$ и множествами значений $R(A) \subset F$, $R(L) \subset G$ такие, что $D(A) \cap D(L) \neq \varnothing$.

Определение 3.1. Операторы A и L будут называться удовлетворяющими условию дополнительности, если найдется число $\lambda > 0$ такое, что для любых $u_1, u_2 \in D(A) \cap D(L)$ имеет место

$$\|Au_1 - Au_2\| + \|Lu_1 - Lu_2\| \geq \lambda \|u_1 - u_2\| \text{ (см. [42]).}$$

3.1. Метод L - регуляризации

Рассмотрим операторное уравнение (1.1)

$$Au = f,$$

где $u \in D(A) \cap D(L)$ и $f \in F$.

Определение 3.2. Множество $\overline{M}_L \subset D(A) \cap D(L)$ будем называть L - нормальным решением уравнения (1.1) при $f = \overline{f}$, если для любого $\overline{u} \in \overline{M}_L$, $A\overline{u} = \overline{f}$ и

$$\|L\overline{u}\| = \inf \left\{ \|Lu\| : u \in D(A) \cap D(L),\ A\overline{u} = \overline{f} \right\}$$

[51].

Теорема 3.1. Если операторы A и L удовлетворяют условию дополнительности, то для любого $\overline{f} \in A[D(A) \cap D(L)]$ существует замкнутое L - нормальное решение $\overline{M}_L$ уравнения (1.1).

Доказательство. Пусть $\overline{f} \in A[D(A) \cap D(L)]$. Тогда рассмотрим минимизирующую последовательность $\left\{ \overline{u}_n \right\}$ такую, что для любого n $\overline{u}_n \in D(A) \cap D(L)$,

$$A\overline{u}_n = \overline{f} \tag{3.1}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L\bar{u}_n\right\| = \inf\left\{\|Lu\| : u\in D(A)\cap D(L),\ Au=\bar{f}\right\}. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) следует ограниченность последовательностей $\left\{A\bar{u}_n\right\}$ и $\left\{L\bar{u}_n\right\}$, т.е. существует число r такое, что для любого n

$$\left\|A\bar{u}_n - A\bar{u}_1\right\| \le r \tag{3.3}$$

и

$$\left\|L\bar{u}_n - Lu_1\right\| \le r. \tag{3.4}$$

Так как операторы A и L удовлетворяют условию дополнительности, то из (3.3) и (3.4) следует ограниченность последовательности $\left\{\bar{u}_n\right\}$.

Таким образом, существует подпоследовательность с такая, что

$$\bar{u}_{n_k} \xrightarrow{сл.} u \tag{3.5}$$

и

$$L\bar{u}_{n_k} \xrightarrow{сл.} g. \tag{3.6}$$

Ввиду слабой замкнутости операторов A и L из соотношений (3.1), (3.5) и (3.6) следует, что $u\in D(A)\cap D(L)$

$$Au=\bar{f} \tag{3.7}$$

и

$$Lu=g. \tag{3.8}$$

По свойству нормы слабого предела из (3.6) и (3.8) вытекает

$$\|Lu\| \le \varliminf_{k\to\infty}\left\|L\bar{u}_{n_k}\right\|, \tag{3.9}$$

а из (3.2), (3.7) и (3.9) - $u\in\overline{M}_L$. Теперь докажем замкнутость данного множества. Для этого рассмотрим последовательность $\{u_n\}\subset\overline{M}_L$ такую, что

$$u_n \to u_0 \text{ при } n\to\infty. \tag{3.10}$$

Так как $\{u_n\}\subset\overline{M}_L$, то для любого n

$$Au_n = \overline{f} \tag{3.11}$$

и

$$\|Lu_n\| = \inf\left\{\|Lu\| : u \in D(A) \cap D(L),\ Au = \overline{f}\right\}. \tag{3.12}$$

Из (3.10) и (3.11) следует

$$Au_0 = \overline{f}\,, \tag{3.13}$$

а из (3.10) и (3.12)- существование подпоследовательности $\left\{u_{n_k}\right\}$ такой, что

$$Lu_{n_k} \overset{сл.}{\rightarrow} Lu_0, \tag{3.14}$$

где $u_0 \in D(A) \cap D(L)$.

По свойству нормы слабого предела из (3.14) следует

$$\|Lu_0\| \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \|Lu_{n_k}\|. \tag{3.15}$$

Таким образом из (3.12), (3.13) и (3.15) следует $u_0 \in \overline{M}_L$.

Теперь рассмотрим уравнение (1.1) и предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение $u_0 \in D(A) \cap D(L)$, но вместо f_0 нам известно приближенное решение f_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такой, что $\| f_\delta - f_0 \| \le \delta$.

Требуется по исходной информации $\{ f_\delta, \delta\}$ построить множество приближенных решений M_δ, близкое к L - нормальному решению $\overline{M}_L^0$ уравнения (1.1) при $f = f_0$.

Метод L- регуляризации заключается в сведении поставленной задачи к вариационной:

$$\inf\left\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|Lu\|^2 : u \in D(A) \cap D(L)\right\}, \alpha > 0, \tag{3.16}$$

(см. [51]).

Теорема 3.2. Если операторы A и L удовлетворяют условию дополнительности, то вариационная задача (3.16) разрешима.

Доказательство. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{u_n\}$ такую, что для любого n $u_n \in D(A) \cap D(L)$ и

$$\|Au_n - f_\delta\|^2 + \alpha\|Lu_n\|^2 \to \inf\left\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|Lu\|^2 : u \in D(A) \cap D(L)\right\}. \quad (3.17)$$

Из соотношений (3.17) следует ограниченность последовательностей $\{Au_n\}$ и $\{Lu_n\}$, а ввиду условия дополнительности операторов A и L и ограниченности $\{u_n\}$. Так как пространства U, F и G - гильбертовы, то соотвествующие последовательности слабо компактны.

Без ограничения общности можем считать, что

$$u_n \overset{сл.}{\to} u, \quad (3.18)$$

$$Au_n \overset{сл.}{\to} \bar{f} \quad (3.19)$$

и

$$Lu_n \overset{сл.}{\to} g. \quad (3.20)$$

Из слабой замкнутости операторов A, L и соотношений (3.18-3.20) следует, что

$$u \in D(A) \cap D(L), \quad (3.21)$$

$$\bar{f} = Au \quad (3.22)$$

и

$$g = Lu. \quad (3.23)$$

Из (3.19), (3.20), (3.22) и (3.23) по свойству нормы слабого предела получим

$$\left\|Au - f_\delta\right\| \le \varliminf_{n\to\infty}\|Au_n - f_\delta\| \quad (3.24)$$

и

$$\left\|Lu\right\| \le \varliminf_{n\to\infty}\|Lu_n\|. \quad (3.25)$$

Из (3.17), (3.24) и (3.25) следует, что

$$\left\|Au - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|Lu\right\|^2 \le \inf\left\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|Lu\|^2 : u \in D(A) \cap D(L)\right\}, \quad (3.26)$$

а из (3.21) и (3.26) – что u является решением задачи (3.16).

Множество решений вариационной задачи (3.16) обозначим через $M_L^{\alpha}(\delta)$ и будем называть приближенным решением уравнения (1.1), полученным методом L-регуляризации.

Теорема 3.3. Если операторы A и L удовлетворяют условию дополнительности, то множество $M_L^{\alpha}(\delta)$ решений вариационной задачи (3.16) замкнуто.

Доказательство. Пусть $\{u_n\} \subset M_L^{\alpha}(\delta)$ и $u_n \to u$. Тогда, по определению множества $M_L^{\alpha}(\delta)$, для любого n

$$\left\|Au_n - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|Lu_n\right\|^2 = \inf\left\{\left\|Au - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|Lu\right\|^2 : u \in D(A) \cap D(L)\right\}. \quad (3.27)$$

Из соотношения (3.27) следует ограниченность последовательностей $\{Au_n\}$, $\{Lu_n\}$.

Так как пространства F, G гильбертовы, то без ограничения обности можем считать, что

$$u \in D(A) \cap D(L), \quad (3.28)$$

$$Au_n \xrightarrow{сл.} Au \quad (3.29)$$

и

$$Lu_n \xrightarrow{сл.} Lu. \quad (3.30)$$

Из (3.29) и (3.30), по свойству нормы слабого предела, получим

$$\left\|Au - f_\delta\right\| \le \varliminf_{n\to\infty}\left\|Au_n - f_\delta\right\| \quad (3.31)$$

и

$$\left\|Lu\right\| \le \varliminf_{n\to\infty}\left\|Lu_n\right\|, \quad (3.32)$$

а из (3.27), (3.28), (3.31) и (3.32) – утверждение теоремы.

Обозначим через $\overline{P}_L^{\alpha}$ многозначное отображение, которое каждому элементу $\overline{f} \in F$ ставит в соответствии множество M_L^{α} решений вариационной задачи (3.16) при $f_\delta = \overline{f}$.

Теорема 3.4. Пусть операторы A и L удовлетворяют условию дополнительности.

Тогда многозначное отображение $\overline{P}_L^{\alpha}$ является H-полунепрерывным сверху.

Доказательство. Из теоремы 3.2 и 3.3 следует, что для любого $\overline{f} \in F$ множество $\overline{P}_L^{\alpha}(\overline{f})$ не пусто и замкнуто. Осталось проверить, что $\overline{f}_n \to \overline{f}$ влечет

$$\overline{M}_L^{\alpha,n} \xrightarrow{\beta} \overline{M}_L^{\alpha}.$$

Предположим противное, т.е. найдутся число $d > 0$ и последовательность $\{u_n\}$, $\overline{u} \in \overline{M}_L^{\alpha,n}$ такие, что для любого n

$$\rho\left(\overline{u}_n, \overline{M}_L^{\alpha}\right) \geq d\,. \tag{3.33}$$

Пусть $\overline{u} \in \overline{M}_L^{\alpha}$, тогда для любого n справедливо соотношение

$$\left\|A\overline{u}_n - \overline{f}_n\right\|^2 + \alpha\left\|L\overline{u}_n\right\|^2 \leq \left\|A\overline{u} - \overline{f}_n\right\|^2 + \alpha\left\|L\overline{u}\right\|^2. \tag{3.34}$$

Из того, что $\overline{f}_n \to \overline{f}$, следует

$$\left\|A\overline{u} - \overline{f}_n\right\|^2 + \alpha\left\|L\overline{u}\right\|^2 \to \left\|A\overline{u} - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\left\|L\overline{u}\right\|^2, \tag{3.35}$$

где

$$\left\|A\overline{u} - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\left\|L\overline{u}\right\|^2 = \inf\left\{\left\|Au - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\left\|Lu\right\|^2 : u \in D(A) \cap D(L)\right\}.$$

Из соотношений (3.34) и (3.35) вытекает

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left\{\left\|A\overline{u}_n - \overline{f}_n\right\|^2 + \alpha\left\|L\overline{u}_n\right\|^2\right\} \leq$$

$$\leq \inf\left\{\left\|Au - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\left\|Lu\right\|^2 : u \in D(A) \cap D(L)\right\}. \tag{3.36}$$

Из соотношений (3.36) следует ограниченность последовательностей $\left\{A\bar{u}_n\right\}$, $\left\{L\bar{u}_n\right\}$, а ввиду условия дополнительности - и $\left\{\bar{u}_n\right\}$.

Таким образом последовательности $\left\{\bar{u}_n\right\}$, $\left\{A\bar{u}_n\right\}$, $\left\{L\bar{u}_n\right\}$ слабо компактны и из них можно выделить слабо сходящиеся подпоследовательности, т.е. существует подпоследовательности $\left\{\bar{u}_{n_k}\right\}$, $\left\{A\bar{u}_{n_k}\right\}$, $\left\{L\bar{u}_{n_k}\right\}$ такие, что

$$\bar{u}_{n_k} \xrightarrow{сл.} u, \tag{3.37}$$

$$A\bar{u}_{n_k} \xrightarrow{сл.} \bar{f} \tag{3.38}$$

и

$$L\bar{u}_{n_k} \xrightarrow{сл.} g. \tag{3.39}$$

Из (3.37-3.39) следует

$$u \in D(A) \cap D(L), \tag{3.40}$$

$$\bar{f} = Au \tag{3.41}$$

и

$$g = Lu. \tag{3.42}$$

Из (3.38), (3.39), (3.41) и (3.42), используя свойство нормы слабого предела, получаем

$$\left\| Au - \bar{f} \right\| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \left\| A\bar{u}_{n_k} - \bar{f}_{n_k} \right\| \tag{3.43}$$

и

$$\left\| Lu \right\| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \left\| L\bar{u}_{n_k} \right\|. \tag{3.44}$$

Из (3.36), (3.43) и (3.44) следует

$$\left\| Au - \bar{f} \right\|^2 + \alpha \left\| Lu \right\|^2 = \inf \left\{ \left\| Au - \bar{f} \right\|^2 + \alpha \left\| Lu \right\|^2 : u \in D(A) \cap D(L) \right\} \tag{3.45}$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \left\| A\bar{u}_{n_k} - \bar{f}_{n_k} \right\|^2 + \alpha \left\| L\bar{u}_{n_k} \right\|^2 \right\} = \left\| Au - \bar{f} \right\|^2 + \alpha \left\| Lu \right\|^2. \tag{3.46}$$

Из (3.43), (3.44) и (3.46) вытекает

$$\left\| A\bar{u}_{n_k} - \bar{f}_{n_k} \right\| \to \left\| Au - \bar{f} \right\| \tag{3.47}$$

и

$$\left\| L\bar{u}_{n_k} \right\| \to \left\| Lu \right\|, \tag{3.48}$$

а из (3.38), (3.39), (3.47) и (3.48)

$$A\bar{u}_{n_k} \to Au \tag{3.49}$$

и

$$L\bar{u}_{n_k} \to Lu. \tag{3.50}$$

Учитывая условие дополнительности операторов A и L и соотношения (3.49), (3.50) получаем

$$\bar{u}_{n_k} \to u, \tag{3.51}$$

а из (3.40) и (3.45)

$$u \in \overline{M}_L^{\alpha}. \tag{3.52}$$

Таким образом, из (3.51) и (3.52) следует

$$\rho\left(\bar{u}_{n_k}, \overline{M}_L^{\alpha}\right) \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

что противоречит условию (3.33) и доказывает теорему.

Теорема 3.5. Пусть операторы A и L удовлетворяют условию дополнительности.

Тогда если параметр α связать с уровнем погрешности δ таким образом, что $\delta(\alpha) \to 0$ и $\delta^2 / \alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, то имеет место β-сходимость приближенных решений $\overline{M}_L^{\alpha(\delta)}(\delta)$, полученных методом L-регуляризации к L-нормальному решению $\overline{M}_L^{0}$ уравнения (1.1).

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $d > 0$ и последовательность $\{u_n\}$ такие, что для любого n

$$\bar{u}_n \in \overline{M}_L^{\alpha(\delta_n)}(\delta_n),\ \delta_n \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

и

$$\rho\left(\bar{u}_n, \overline{M}_L^0\right) \geq d\ . \tag{3.53}$$

Пусть $\bar{u}_0 \in \overline{M}_L^0$, тогда для любого n

$$\left\|A\bar{u}_n - \bar{f}_{\delta_n}\right\|^2 + \alpha(\delta_n)\left\|L\bar{u}_n\right\|^2 \leq \left\|A\bar{u}_0 - f_{\delta_n}\right\|^2 + \alpha(\delta_n)\left\|L\bar{u}_0\right\|^2. \tag{3.54}$$

Так как $A\bar{u}_0 = f_0$, а $\left\|f_0 - f_{\delta_n}\right\| \leq \delta_n$, то из (3.54) следует, что для любого n

$$\left\|L\bar{u}_n\right\|^2 \leq \left\|L\bar{u}_0\right\|^2 + \delta_n^2 / \alpha(\delta_n) \tag{3.55}$$

и

$$\left\|A\bar{u}_n - \bar{f}_{\delta_n}\right\|^2 \leq f_n^2 + \alpha(\delta_n)\left\|L\bar{u}_0\right\|^2. \tag{3.56}$$

Из (3.56) следует

$$A\bar{u}_n \to f_0, \tag{3.57}$$

а из (3.55) – ограниченность последовательности $\left\{L\bar{u}_n\right\}$. Учитывая условие дополнительности операторов A и L, из соотношения (3.57) и ограниченности последовательности $\left\{L\bar{u}_n\right\}$ получаем ограниченность $\left\{\bar{u}_n\right\}$.

Без ограничения общности можем считать, что

$$\bar{u}_n \xrightarrow{сл.} u \tag{3.58}$$

и

$$L\bar{u}_n \xrightarrow{сл.} g\ . \tag{3.59}$$

Тогда из (3.57-3.59) следует

$$u \in D(A) \cap D(L),\ Au = f_0 \tag{3.60}$$

и

$$g = Lu\ . \tag{3.61}$$

Из (3.59) и (3.61) по свойству нормы слабого предела получим

$$\left\|Lu\right\| \leq \varliminf_{n\to\infty}\left\|L\bar{u}_n\right\|, \tag{3.62}$$

а из (3.55), (3.60) и (3.62)

$$u \in \overline{M}_L^0 \tag{3.63}$$

и

$$\|L\bar{u}_n\| \to \|Lu\|. \qquad (3.64)$$

Из (3.59), (3.61) и (3.62)

$$L\bar{u}_n \to Lu \qquad (3.65)$$

а из (3.57), (3.60) и (3.65), учитывая условие дополнительности операторов A и L получаем

$$\bar{u}_n \to u. \qquad (3.66)$$

Из соотношения (3.63) и (3.66) следует $\rho\left(\bar{u}_n, \overline{M}^0_L\right) \to 0$, что

противоречит (3.53) и доказывает теорему.

3.2. Аппроксимация *L* - регуляризованных решений

Пусть A_n и L_n - слабо замкнутые операторы с областью определения $D(A_n)$ и $D(L_n) \subset U$ такими, что $D(A_n) \cap D(L_n) \neq \varnothing$ и множествами значений $R(A_n) \subset F$ и $R(L_n) \subset G$.

Определение 3.3. Последовательность операторов $\{A_n\}$ и $\{L_n\}$ будем называть удовлетворяющими условию дополнительности, если существует число $\lambda_1 > 0$ такое, что для любых n $u_1(x)$ и $u_2(x)$ таких, что $u_1(x)$, $u_2(x) \in D(A_n) \cap D(L_n)$ и

$$\|A_n u_1(x) - A_n u_2(x)\| + \|L_n u_1(x) - L_n u_2(x)\| \geq \lambda \|u_1(x) - u_2(x)\|.$$

Рассмотрим аппроксимационную задачу

$$\inf\left\{\|A_n u - f^n_\delta\|^2 + \alpha \|L_n u\|^2 : u \in D(A_n) \cap D(L_n)\right\}, \ \alpha > 0. \qquad (3.67)$$

Предположим, что последовательности слабо замкнутых операторов $\{A_n\}$ и $\{L_n\}$ удовлетворяют условию дополнительности, тогда из теоремы 3.2 следует разрешимость вариационной задачи (3.67). Множество решений этой задачи обозначим через $M^{\alpha,n}_L(\delta)$, которое ввиду теоремы 3.3, замкнуто.

Обозначим через (A,L) и (A_n, L_n) векторозначные операторы, определенные, соответственно, на множествах $D(A) \cap D(L)$ и $D(A_n) \cap D(L_n)$ и задаваемые формулами

$$(A,L)[u] = (Au, Lu)$$

и

$$(A_n, L_n)[u] = (A_n u, L_n u) .$$

Теорема 3.6. Пусть $f_\delta^n \to f_\delta$, последовательность операторов $\{(A_n, L_n)\}$ является (A,L)-полной, а для любых подпоследовательностей $\{A_{n_k}\}$ и $\{L_{n_k}\}$ пары A, $\{A_{n_k}\}$ и L, $\{L_{n_k}\}$ слабо замкнуты и удовлетворяют условию дополплнительности.

Тогда имеет место β-сходимость аппроксимаций $M_L^{\alpha,n}(\delta)$ к L-регуляризованному решению $M_L^\alpha(\delta)$ уравнения (1.1) .

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $d > 0$ и подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ такие, что для любого k $u_{n_k} \in M_L^{\alpha,n_k}(\delta)$ и

$$\rho(u_{n_k}, M_L^\alpha(\delta)) \geq d . \tag{3.68}$$

Так как последовательность операторов $\{(A_{n_k}, L_{n_k})\}$ является (A,L)-полной, то для любого $\bar{u} \in M_L^\alpha(\delta)$ найдется последовательность $\{\bar{u}_k\}$ такая, что для любого k $\bar{u}_k \in D(A_{n_k}) \cap D(L_{n_k})$ и

$$\bar{u}_k \to \bar{u}, \tag{3.69}$$

$$A_{n_k} \bar{u}_k \to A\bar{u}, \tag{3.70}$$

а

$$L_{n_k} \bar{u}_k \to L\bar{u}. \tag{3.71}$$

Из (3.70) и (3.71) следует

$$\left\| A_{n_k} \bar{u}_k - f_\delta^{n_k} \right\|^2 + \alpha \left\| L_{n_k} \bar{u}_k \right\|^2 \to \left\| A\bar{u} - f_\delta \right\|^2 + \alpha \left\| L\bar{u} \right\|^2 . \tag{3.72}$$

Так как для любого k $u_{n_k} \in M_L^{\alpha, n_k}(\delta)$, то

$$\left\| A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{n_k} \right\|^2 + \alpha \left\| L_{n_k} u_{n_k} \right\|^2 \le \left\| A_{n_k} \bar{u}_k - f_\delta^{n_k} \right\|^2 + \alpha \left\| L_{n_k} \bar{u}_k \right\|^2 . \qquad (3.73)$$

Из (3.72) и (3.73) следует

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left\{ \left\| A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{n_k} \right\|^2 + \alpha \left\| L_{n_k} u_{n_k} \right\|^2 \right\} \le \left\| A\bar{u} - f_\delta \right\|^2 + \alpha \left\| L\bar{u} \right\|^2 . \qquad (3.74)$$

Из соотношения (3.74) вытекает ограниченность последовательностей $\left\{ A_{n_k} u_{n_k} \right\}$, $\left\{ L_{n_k} u_{n_k} \right\}$, а ввиду условия дополнительности – и $\left\{ u_{n_k} \right\}$.

Так как пространства U, F и G - гильбертовы, то эти последовательности слабо компактны.

Без ограничения общности можем считать, что

$$\bar{u}_{n_k} \xrightarrow{сл.} u , \qquad (3.75)$$

$$A_{n_k} u_{n_k} \xrightarrow{сл.} \bar{f} \qquad (3.76)$$

и

$$L_{n_k} u_{n_k} \xrightarrow{сл.} g . \qquad (3.77)$$

Так как пары A, $\left\{ A_{n_k} \right\}$ и L, $\left\{ L_{n_k} \right\}$ слабо замкнуты, то на основании соотношений (3.75-3.77) имеем

$$u \in D(A) \cap D(L), \qquad (3.78)$$

$$Au = \bar{f} \qquad (3.79)$$

и

$$Lu = g . \qquad (3.80)$$

Из соотношений (3.76-3.80) следует

$$\left\| Au - f_\delta \right\|^2 + \alpha \left\| Lu \right\|^2 \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \left\{ \left\| A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{n_k} \right\|^2 + \alpha \left\| L_{n_k} u_{n_k} \right\|^2 \right\} . \qquad (3.81)$$

Из (3.74), (3.78) и (3.81) имеем

$$u \in M_L^{\alpha}(\delta) \qquad (3.82)$$

и

$$\left\|Au-f_\delta\right\|^2+\alpha\left\|Lu\right\|^2=\varliminf_{k\to\infty}\left\{\left\|A_{n_k}u_{n_k}-f_\delta^{n_k}\right\|^2+\alpha\left\|L_{n_k}u_{n_k}\right\|^2\right\}. \qquad (3.83)$$

Так как на основании (3.76), (3.77), (3.79) и (3.80) по свойству нормы слабого предела

$$\left\|Lu\right\|\le\varliminf_{k\to\infty}\left\|L_{n_k}u_{n_k}\right\| \qquad (3.84)$$

и

$$\left\|Au-f_\delta\right\|\le\varliminf_{k\to\infty}\left\|A_{n_k}u_{n_k}-f_\delta^{n_k}\right\|, \qquad (3.85)$$

то из (3.83-3.85) следует

$$\left\|L_{n_k}u_{n_k}\right\|\to\left\|Lu\right\| \qquad (3.86)$$

и

$$\left\|A_{n_k}u_{n_k}-f_\delta^{n_k}\right\|\to\left\|Au-f_\delta\right\|. \qquad (3.87)$$

Таким образом, из (3.76), (3.77), (3.79), (3.80), (3.86), и (3.87) вытекает

$$L_{n_k}u_{n_k}\to Lu \qquad (3.88)$$

и

$$A_{n_k}u_{n_k}\to Au\,, \qquad (3.89)$$

а ввиду того, что последовательности операторов $\left\{A_{n_k}\right\}$, $\left\{L_{n_k}\right\}$ удовлетворяют условию дополнительности, из соотношений (3.88) и (3.89) следует

$$u_{n_k}\to u\,. \qquad (3.90)$$

Из (3.82) и (3.90) вытекает, что $\rho(u_{n_k},M_L^\alpha(\delta))\to 0$ при $k\to\infty$ и это противоречит (3.68). Тем самым теорема доказана.

4. Обобщенная *L*-регуляризация уравнений с операторами, являющимися суперпозицией слабо и слабо-сильно замкнутого операторов

Пусть H_1, H_2 и H_3 - сепарабельные гильбертовы пространства.

Предположим, что оператор A с областью определения $D(A) \subset H_1$ и множеством значений $R(A) \subset H_3$ представим формулой

$$A = BL, \tag{4.1}$$

где B - слабо замкнутый оператор с областью определения $D(B) \subset H_2$ и множеством значений $R(B) \subset H_3$, а L - слабо-сильно замкнутый оператор с областью определения $D(L) \subset H_1$ и множеством значений $R(A) \subset H_2$ такой, что $R(L) \cap D(B)$.

4.1. Постановка задачи и метод обобщенной *L*-регуляризации

Рассмотрим операторное уравнение (1.1)

$$Au = f\,,\;\; u \in D(A),\;\; f \in H_3.$$

Предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение $u_0 \in D(A)$ уравнения (1) §1 гл.1, но вместо f_0 нам известны приближенное значение f_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\| f_\delta - f_0 \| \le \delta$.

Требуется по исходной информации $\{ f_\delta, \delta \}$ построить множество приближенных решений M_δ, близкое к множеству точных решений M_0 уравнения (1.1) при $f = f_0$.

Обобщенный метод L-регуляризации заключается в сведении поставленной задачи к вариационной (1,16) :

$$\inf \left\{ \|Au - f_\delta\|^2 + \alpha \|Lu\|^2 : u \in D(A) \right\}, \alpha > 0\,.$$

Так как оператор A, определяемый формулой (4.1), вообще говоря, не является L-слабо, полузамкнутым, то вариационная задача (1.16) может не иметь решения. Поэтому множество приближенных решений $M_\delta^{\alpha,\varepsilon}$ уравнения (1.1) определим формулой

$$M_\delta^{\alpha,\varepsilon} = \Big\{ \bar{u} : \bar{u} \in D(A), \left\| A\bar{u} - f_\delta \right\|^2 + \alpha \left\| L\bar{u} \right\|^2 \le$$

$$\le \inf \left[\left\| Au - f_\delta \right\|^2 + \alpha \left\| Lu \right\|^2 : u \in D(A) \right] + \varepsilon \quad \Big\}, \tag{4.2}$$

где ε -достаточно малое положительное число.

Перейдем к исследованию вопроса о β- сходимости множеств $M_\delta^{\alpha,\varepsilon}$, определяемых формулой (4.2), при подходящим образом выбранных зависимостях $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ к множеству точных решений M_0 уравнения (1.1) при $\delta \to 0$.

Теорема 4.1. Пусть область определения $D(L)$ инъективного оператора L ограничена, а обратный к нему оператор L^{-1} непрерывен на $R(L)$.

Тогда если параметры α и ε связать с δ таким образом, чтобы $\alpha(\delta)$, $\varepsilon(\delta)$ и $\dfrac{\delta^2 + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} \to 0$ при $\delta \to 0$, то имеет место β-сходимость приближенных решений $M_L^{\alpha(\delta),\varepsilon(\delta)}(\delta)$ к множеству точных решений M_0 уравнения (1.1).

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число Тогда найдутся число $d > 0$ и последовательности $\{\delta_n\}$, $\{u_n\}$ такие, что для любого n $\delta_n > 0$ и $u_n \in M_{\delta_n}^{\alpha(\delta_n),\varepsilon(\delta_n)}$, а

$$\rho(u_n, M_0) \ge d. \tag{4.3}$$

Пусть число γ_0 определено формулой

$$\gamma_0 = \inf \left\{ \left\| Lu \right\| : u \in M_0 \right\}. \tag{4.4}$$

Тогда из (4.2) и (4.4) следует, что для любого n выполняются соотношения

$$\left\| Lu \right\|^2 \le \frac{\delta_n{}^2 + \varepsilon(\delta_n)}{\alpha(\delta_n)} + \gamma_0{}^2 \tag{4.5}$$

и

$$\left\| Au_n - f_{\delta_n} \right\|^2 \le \delta_n^{\ 2} + \varepsilon(\delta_n) + \alpha(\delta_n)\gamma_0^{\ 2}. \qquad (4.6)$$

Из формулы (4.5) следует ограниченность последовательности $\{Lu_n\}$, а ввиду гильбертовости пространства H_2 - ее слабая компактность. Без ограничения общности можем считать, что

$$Lu_n \xrightarrow{сл.} \bar{v} \text{ при } n \to \infty, \qquad (4.7)$$

а из (4.6) – что

$$BLu_n \to f_0 \;\; n \to \infty. \qquad (4.8)$$

Из соотношений (4.7) и (4.8) следует, что

$$f_0 = B\bar{v}, \qquad (4.9)$$

а из (4.9) – что

$$\bar{v} \in LM_0. \qquad (4.10)$$

Таким образом, из (4.4), (4.7), (4.10) и свойства нормы слабого предела имеем

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|Lu_n\| \ge \gamma_0. \qquad (4.11)$$

С другой стороны из (4.5) вытекает

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \|Lu_n\| \le \gamma_0. \qquad (4.12)$$

Так как из (4.7) следует

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|Lu_n\| \ge \|\bar{v}\|, \qquad (4.13)$$

а из (4.4) и (4.10) –

$$\|\bar{v}\| \ge \gamma_0, \qquad (4.14)$$

то из (4.11-4.14) получаем

$$\|Lu_n\| \to \|\bar{v}\|. \qquad (4.15)$$

Из соотношений (4.7) и (4.15)

$$Lu_n \to \bar{v}. \qquad (4.16)$$

Так как $\{u_n\}$ содержится в ограниченном множестве $D(L)$, то она слабо компактна. Без ограничения общности можем считать, что

$$u_n \xrightarrow{сл.} u. \tag{4.17}$$

Из свойства оператора L и формул (4.16), (4.17) вытекает

$$\bar{v} = Lu. \tag{4.18}$$

Так как оператор L^{-1} непрерывен, то из (4.16) и (4.18) имеем

$$u_n \to u, \tag{4.19}$$

а формулы (4.10) и (4.19) противоречат формуле (4.3) и доказывают теорему.

4.2. Конечномерная апроксимация обобщенно *L*-регуляризованного решения

Дополнительно предположим, что область определения $D(L)$ оператора L является выпуклым замкнутым множеством в пространстве H_1, оператор L непрерывен на $D(L)$, а оператор B непрерывен на множестве значений $R(L)$ оператора L.

Рассмотрим возрастающую последовательность конечномерных подпространств $\{U_n\}$ пространства H_1 такую, что для любого n $D(L) \cap U_n \neq \varnothing$ и

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[D(L) \cap U_n\right]} = D(L), \tag{4.20}$$

и вариационную задачу

$$\inf\left\{\left\|Au - f_\delta^n\right\|^2 + \alpha\left\|Lu\right\|^2 : u \in D(L) \cap U_n\right\}, \tag{4.21}$$

где $\alpha > 0$, а $f_\delta^n \to f_\delta$ при $n \to \infty$.

Так как множество $D(L) \cap U_n$ компактно, а функция $\left\|Au - f_\delta^n\right\|^2 + \alpha\left\|Lu\right\|^2$ непрерывна на нем, то по известной теореме Вейерштрасса вариационная задача (4.21) разрешима.

Обозначим множество решений вариационной задачи (4.21) через $M_{\delta,n}^{\alpha}$ и будем называть конечномерной аппроксимацией регуляризованного решения $M_{\delta}^{\alpha,\varepsilon}$.

Теорема 4.2. При сформулированных выше условиях на операторы B и L имеет место β-сходимость конечномерных аппроксимаций $M_{\delta,n}^{\alpha}$ к множеству $M_{\delta}^{\alpha,\varepsilon}$ регуляризованного решения при $n \to \infty$.

Доказательство. Покажем существование номера n_0 такого, что для любого $n \geq n_0$

$$M_{\delta,n}^{\alpha} \subset M_{\delta}^{\alpha,\varepsilon}. \tag{4.22}$$

Действительно, из определения $M_{\delta,n}^{\alpha}$ следует, что для любого элемента $\bar{u}_n \in M_{\delta,n}^{\alpha}$

$$\left\|A\bar{u}_n - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|L\bar{u}_n\right\|^2 \leq \left(\left\|A\bar{u}_n - f_\delta\right\| + \left\|f_\delta^n - f_\delta\right\|\right)^2 + \alpha\left\|L\bar{u}_n\right\|^2. \tag{4.23}$$

Пусть $u \in M_{\delta}^{\alpha,\varepsilon/2}$, тогда

$$\left\|Au - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|Lu\right\|^2 \leq \inf\left\{\left\|Au - f_\delta^n\right\|^2 + \alpha\left\|Lu\right\|^2 : u \in D(L)\right\} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.24}$$

Из (4.20) следует существование последовательности $\left\{u_n\right\}$ такой, что для любого n $u_n \in D(L) \cap U_n$ и

$$u_n \to u \text{ при } n \to \infty. \tag{4.25}$$

Из (4.25) и непрерывности операторов A и L следует, что

$$Au_n \to Au \text{ при } n \to \infty \tag{4.26}$$

и

$$Lu_n \to Lu \text{ при } n \to \infty. \tag{4.27}$$

Таким образом, из (4.26) и (4.27) следует существование номера n_1 такого, что для любого $n \geq n_1$

$$\left\|Au_n - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|Lu_n\right\|^2 \leq \left\|Au - f_\delta^n\right\|^2 + \alpha\left\|Lu\right\|^2 + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.28}$$

Так как $u_n \in D(L) \cap U_n$, а $f_\delta^n \to f_\delta$ при $n \to \infty$, то на основании (4.23) имеем существование номера n_2 такого, что для любого $n \ge n_2$ и любого $\bar{u}_n \in M_{\delta,n}^\alpha$

$$\left\|A\bar{u}_n - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|L\bar{u}_n\right\|^2 \le \left\|Au_n - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|Lu_n\right\|^2 + \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (4.29)$$

Из (4.24), (4.28) и (4.29) следует, что при $n \ge n_0 = \max(n_1, n_2)$ для любого $\bar{u}_n \in M_{\delta,n}^\alpha$

$$\left\|A\bar{u}_n - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|L\bar{u}_n\right\|^2 \le \inf\left\{\left\|Au - f_\delta^n\right\|^2 + \alpha\left\|Lu\right\|^2 : u \in D(L)\right\} + \varepsilon,$$

что и доказывает соотношение (4.22).

4.3. Обратная задача гравиметрии

Следуя [27, с.13] обратную задачу гравиметрии можно свести к нелинейному интегральному уравнению

$$\frac{\rho}{4\pi}\int_{-l}^{l} \ln\frac{(t-\varepsilon)^2 + H^2}{(t-\varepsilon)^2 + (H - x(\varepsilon))^2} d\varepsilon = y(t)\ ,\ -l \le t \le l\,, \qquad (4.30)$$

где x и $y \in L_2[-l,l]$, $\rho > 0$.

Пусть $u(\varepsilon) = (H - x(\varepsilon))^2$ и существует положительное число α и функция $\psi(\varepsilon)$, непрерывная на отрезке $[-l,l]$ такая, что $\psi(-l) = \psi(l) = H^2$, а для любого $\xi \in (-l,l)$

$$0 < \alpha < \psi(\xi) < H^2 \qquad (4.31)$$

и для $\xi \in [-l,l]$

$$0 \le u(\xi) \le \psi(\xi), \qquad (4.32)$$

а

$$H - x(\xi) > 0. \qquad (4.33)$$

Уравнение (4.30) сведем к уравнению

$$Au = \int_{-l}^{l} \ln\left[u(\xi) + (t-\xi)^2\right] d\xi = f(t), \qquad (4.34)$$

где $f(t)=\int_{-l}^{l}\ln\left[H^2+(t-\xi)^2\right]d\xi-\dfrac{4\pi}{\rho}y(t)$, u и $f\in L_2[-l,l]$. При этом функцию $f(t)$ считаем известной, а $u(\xi)$ требуется определить.

Предположим, что при $f(t)=f_0(t)$ уравнение (4.34) разрешимо, но точное значение $f_0(t)$ не известно, а вместо него даны δ-приближение $f_\delta(t)$ и уровень погрешности $\delta>0$ такие, что $\|f_\delta-f_0\|\le\delta$.

Требуется по исходной информации (f_δ,δ) определить множество приближенных решений M_δ такое, что

$$M_\delta\xrightarrow{\beta}M_0 \text{ при } \delta\to 0, \tag{4.35}$$

где M_0 - множество точных решений u_0 уравнения (4.34), отвечающих значению правой части $f(t)=f_0(t)$. Заметим, что единственность решения уравнения (4.34) не предполагается.

Используя развитый в настоящем пункте подход, оператор A в уравнении (4.34) представим в виде суперпозиции двух операторов

$$A=B\circ L \tag{4.36}$$

где оператор B действует из пространства $L_2\left([-l,l]\times[-l,l]\right)$ в $L_2[-l,l]$ и определяется формулой

$$Bv=\int_{-l}^{l}v(\xi,t)d\xi\,,\ -l\le t\le l\,, \tag{4.37}$$

а оператор L действует из пространства $L_2[-l,l]$ в $L_2\left([-l,l]\times[-l,l]\right)$, имеет область определения

$$D(L)=\left\{u:u\in L_2[-l,l],\ \alpha\le u(\xi)\le\psi(\xi)\right\}$$

и определяется формулой

$$Lu=v(\xi,t)=\ln\left[u(\xi)+(t-\xi)^2\right]. \tag{4.38}$$

Лемма 4.1. Оператор B, определяемый формулой (4.37), линеен и ограничен.

Доказательство. Линейность оператора B следует из (4.37) , а из теоремы, сформулированной в [38, с. 432], следует, что для любого

$v \in L_2([-l,l]\times[-l,l])$ функция $\int_{-l}^{l} v(\xi,t)d\xi$ определена почти всюду на $[-l,l]$ и принадлежит пространству $L_2([-l,l]$. Кроме того, справедливо неравенство

$$\left\|\int_{-l}^{l} v(\xi,t)d\xi\right\| \le \sup\left\{\left\|\int_{-l}^{l} v(\xi,t)d\xi\right\|_{L_2} : \varphi \in L_2([-l,l],\ \|\varphi\| \le 1\right\} \le$$

$$\le \sqrt{\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} v^2(\xi,t)d\xi dt}\,,$$

которое доказывает ограниченность оператора B.

Из леммы 4.1 следует, что оператор B, определенный формулой (4.37), слабо непрерывен и тем более слабо замкнут.

Лемма 4.2. Оператор L, определяемый формулой (4.38), слабо-сильно замкнут.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{u_n\} \subset D(L)$ такую, что

$$u_n \overset{сл.}{\rightarrow} u \tag{4.39}$$

и

$$Lu_n \rightarrow \bar{v}. \tag{4.40}$$

Тогда из (4.40) следует существование подпоследовательности $\{u_{n_k}\}$ такой, что

$$\ln\left[u_{n_k}(\xi)+(t-\xi)^2\right] \rightarrow \bar{v}(\xi,t) \text{ почти всюду.} \tag{4.41}$$

Из (4.41) следует, что

$$u_{n_k}(\xi)+(t-\xi)^2 \rightarrow e^{\bar{v}(\xi,t)} \text{ почти всюду,} \tag{4.42}$$

а из (4.42) – что

$$u_{n_k}(\xi) \rightarrow e^{\bar{v}(\xi,t)} - (t-\xi)^2 \text{ почти всюду.} \tag{4.43}$$

Из (4.39) и (4.43) получаем

$$u(\xi) \rightarrow e^{\bar{v}(\xi,t)} - (t-\xi)^2 \text{ почти всюду.} \tag{4.44}$$

Так как множество $D(L)$ выпукло и замкнуто, то на основании (4.39)

$$u \in D(L), \tag{4.45}$$

а из (4.44) следует, что

$$Lu = \ln\left[u(\xi) + (t-\xi)^2\right] = \bar{v}(\xi, t) \text{ почти всюду.} \tag{4.46}$$

Соотношения (4.45) и (4.46) доказывают лемму.

Лемма 4.3. Оператор L^{-1} непрерывен на множестве значений $R(L)$ оператора L, определяемого формулой (4.38).

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся элемент $v_0 \in R(L)$, последовательность $\{u_n\}$, $\{u_n\} \subset R(L)$ такая, что

$$v_n \to v_0 \text{ при } n \to \infty, \tag{4.47}$$

и число $d > 0$ такое, что для любого n

$$\left\| L^{-1}v_n - L^{-1}v_0 \right\| \geq d \,. \tag{4.48}$$

Из (4.47) имеем существование подпоследовательности $\{u_{n_k}\}$ такой, что

$$v_{n_k}(\xi, t) \to v_0(\xi, t) \text{ почти всюду.} \tag{4.49}$$

Из (4.49) следует, что

$$L^{-1}v_{n_k} = e^{v_{n_k}(\xi,t)} - (t-\xi)^2 \to L^{-1}v_0 = e^{v_0(\xi,t)} - (t-\xi)^2 \text{ почти всюду.} \tag{4.50}$$

Так как для любого k элемент $L^{-1}v_{n_k}$ принадлежит ограниченному множеству $D(L)$, то существует число r такое, что для любого k: $\left|u_{n_k}(\xi)\right| \leq r$, где $u_{n_k} = L^{-1}v_{n_k}$, из соотношения (4.50) следует

$$L^{-1}v_{n_k} \to L^{-1}v_0,$$

что противоречит (4.48) и доказывает лемму.

Так как для операторов A и L, определяемых формулами (4.34) и (4.38), выполняется соотношение

$$D(A) = D(L),$$

то ввиду лемм 4.1-4.3 для уравнения (4.34), описывающего обратную задачу гравиметрии, применима теория регуляризации, описанная в п.4.

Следуя этой теории, уравнение (4.34) может быть сведено к вариационной задаче (1.16)

$$\inf\left\{\left\|Au-f_\delta\right\|_{L_2}^{\ 2}+\alpha\left\|Lu\right\|_{L_2}^{\ 2}:u\in D(A)\right\},$$

где $\alpha>0$, а операторы A и L определены формулами (4.34) и (4.38) соответственно.

Используя формулу (4.2), в качестве множества $M_\delta^{\alpha,\varepsilon}$ приближенных решений уравнения (4.34) возьмем

$$M_\delta^{\alpha,\varepsilon}=\left\{\bar{u}:\bar{u}\in D(L),\ \left\|A\bar{u}-f_\delta\right\|^2+\alpha\left\|L\bar{u}\right\|^2\le\right.$$

$$\left.\le\inf\left[\left\|Au-f_\delta\right\|_{L_2}^{\ 2}+\alpha\left\|Lu\right\|_{L_2}^{\ 2}:u\in D(A)\right]+\varepsilon\right. .$$

Следуя теореме 4.1, если параметры α и ε связать с уровнем погрешности δ исходных данных так, чтобы $\alpha=\alpha(\delta)$, $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$ и $\dfrac{\delta^2+\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)}\to 0$ при $\delta\to 0$, то будет иметь место β-сходимость приближенных решений $M_\delta^{\alpha(\delta),\varepsilon(\delta)}$ к множеству M_0 точных решений уравнения (4.34), отвечающих значению правой части $f(t)=f_0(t)$. Для окончательного решения обратной задачи гравиметрии воспользуемся конечномерной аппроксимацией регуляризованного решения $M_\delta^{\alpha,\varepsilon}$.

Разобьем отрезок $[-l,l]$ на 2^n равных частей $-l=\xi_0<\xi_1<...<\xi_{2^n}=l$ таким образом, что $\Delta_i=\left[\xi_i,\xi_{i+1}\right]$, а $\Delta\xi_i=\xi_{i+1}-\xi_i=2l/2^n$, $i=0,1,...,2^n-1$. В качестве конечномерного подпространства U_n рассмотрим пространство кусочно постоянных на Δ_i функций, т.е. $u\in U_n$ тогда и только тогда, когда

$$u(\xi)=\left\{u_i \text{ при } \xi\in\Delta_i\right\} .$$

Используя такую последовательность конечномерных подпространств U_n пространства $L_2[-l,l]$, получаем выполнение следующих условий. Для любого n $D(L)\cap U_n\neq\varnothing$ и

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[D(L)\cap U_n\right]}=D(L)$$

Таким образом, вариационную задачу (1.16) можно свести к конечномерной

$$\inf\left\{\int_{-l}^{l}\left[\frac{l}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{2^n-1}\ln\left[u_i+(t-\xi_i)^2-f_\delta^n(t)\right]^2 dt\right]+\right.$$

$$\left.+\alpha\int_{-l}^{l}\frac{l}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{2^n-1}\ln^2\left[u_i+(t-\xi_i)^2\right]: a\le u_i\le\psi_i, i=0,1,...2^n-1\right\}, \qquad (4.51)$$

где $f_\delta^n \to f_\delta$ при $n\to\infty$, а $\psi_i=\psi(\xi_i)$. Задача (4.51) разрешима. Обозначим множество решений этой задачи через $M_{\delta,n}^{\alpha}$.

Как следует из теоремы 4.2, для любого $\varepsilon>0$

$$M_{\delta,n}^{\alpha}\xrightarrow{\beta}M_{\delta}^{\alpha,\varepsilon} \text{ при } n\to\infty.$$

В заключении покажем, что оператор A, определяемый формулой (4.34), не является слабо-сильно замкнутым, т.е. не удовлетворяет условию, близкому к необходимому [43].

Пусть $k_0>6$, $l=1$. Разобьем отрезок $\left[-2,2\right]$ на 2^n равных частей точками деления $-2=s_0<s_1<...<s_{2^n}$, где $\Delta_i=\left[s_i,s_{i+1}\right]$, а $\Delta_{s_i}=s_{i+1}-s_i=2^{2-n}$, $i=0,1,...,2^{n-1}$. На отрезке $\left[-2,2\right]$ введем последовательность функций $\bar{u}_n$ следующим образом

$$\bar{u}_n(\xi)=\begin{cases} e^{k_1+1}+e^{k_0-1} \text{ при } \xi\in\Delta_i, i=2j \\ e^{k_1+1}-e^{k_0-1} \text{ при } \xi\in\Delta_i, i=2j+1, \end{cases} \qquad (4.52)$$

где $j=0,1,...,2^n-1$. Последовательность $\left\{\bar{u}_n\right\}\subset L_2\left[-2,2\right]$ и

$$\bar{u}_n\xrightarrow{сл.}e^{k_0+1}=\bar{u}(\xi). \qquad (4.53)$$

Сделав в операторе A, определяемом формулой (4.34), замену переменных, положив $s=\xi-t$, приведем его к следующему виду

$$Au=\int_{-1-t}^{1-t}\ln\left[u(s+t)+s^2\right]ds. \qquad (4.54)$$

Так как из (4.53) следует, что для любого значения $t \in [-1,1]$ и $s \in [-1-t, 1-t]$

$$\bar{u}_n(s+t) + s^2 \xrightarrow{сл.} e^{k_0+1} + s^2 \text{ в } L_2[-1-t, 1-t], \tag{4.55}$$

а

$$\ln\left[\bar{u}_n(s+t) + s^2\right] \xrightarrow{сл.} g(s) \text{ в } L_2[-1-t, 1-t], \tag{4.56}$$

то для любого $t \in [-1,1]$

$$A\bar{u}_n = \int_{-1-t}^{1-t} \ln\left[\bar{u}(s+t) + s^2\right] ds \to \int_{-1}^{1} g(s) ds. \tag{4.57}$$

Из (4.52), (4.56) и (4.57) следует существование числа r_2 такого, что для любого n и $t \in [-1,1]$

$$\left|\left[A\bar{u}_n\right](t)\right| \le r_2. \tag{4.58}$$

Из (4.57) и (4.58) имеем

$$A\bar{u}_n \to f \text{ при } n \to \infty \text{ в } L_0[-1,1]. \tag{4.59}$$

Так как из выбора значения k_0 и (4.53)

$$\left\|A\bar{u}\right\| > 2(k_0+1), \tag{4.60}$$

а

$$\left\|f\right\| < 2(k_0+1), \tag{4.61}$$

то из соотношений (4.53), (4.59-4.61) следует, что оператор A, определяемый формулой (4.34), не является слабо-сильно замкнутым.

Заключение

Таким образом, к настоящему моменту достаточно полно развита теория линейных некорректных задач, что нельзя сказать о нелинейных, несмотря на важность последних в приложениях и, в первую очередь, при исследовании и решении обратных (коэффициентных) задач.

В данной работе достаточно полно рассмотрен широкий класс нелинейных операторных уравнений, играющих важную роль в приложениях. Кроме этого построена общая теория регуляризации и решена проблема конечномерных аппроксимаций регуляризованных решений. Изложена методика исследований и решения достаточно широкого класса нелинейных операторных уравнений, доказана L-регуляризация нелинейных операторных уравнений. Результаты были использованы для нахождения приближенного решения обратной задачи гравиметрии.

Библиографический список

1. Агеев А.Л. Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций // ЖВМи МФ. 1980. Т. 20, № 4.. С.819-826

2. Агеев А.Л., Васин В.В. О сходимости обобщенного метода невязки и его дискретных аппроксимаций. Исследования по математическому анализу. Свердловск: Изд-во УрГУ, 1979. С. 3-18

3. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288с.

4. Альбер Я.И., Рязанцева И.П. Принцип невязки в нелинейных задачах с монотонными разрывными отображениями. Регуляризующий алгоритм //Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 5. С. 1017-1020.

5. Арсенин В.Я. О разрывных решениях уравнений первого рода //ЖВМиМФ. 1965. Т. 5, № 5. С. 922-926

6. Арсенин В.Я. О методах решения некорректно поставленных задач . М.: Изд-во МИФИ, 1977.

7. Арсенин В.Я., Иванов В.В. О решении некоторых интегральных уравнений I рода типа свертки методом регуляризации // ЖВМиМФ. 1968. Т. 8, № 2. С. 310-321.

8. Арсенин В.Я., Савелова Т.И. О применении метода регуляризации к интегральным уравнениям первого рода типа сверткитегральных // ЖВМиМФ. 1969. Т. 9, № 6. С. 1392-1396.

9. Бакушинский А.Б. Об одном численном методе решения интегральных уравнений Фредгольма I рода // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5, № 4. С. 744-749.

10. Бакушинский А.Б. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейных некорректных уравнений в гильбертовом пространстве // ЖВМиМФ. 1967. Т. 7, № 3. С. 672-676.

11. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1989, 200с.

12. Бухгейм А.Л. Уравнения Вольтера и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. 205с.

13. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука , 1986. 182с.

14. Васильев Ф.П. О регуляризации некорректных экстремальных задач // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 5. С. 1001-1004.

15. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстемальных задач. М.: Наука, 1980. 518 с.

16. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах. М.: Наука, 1981. 400 с.

17. Васин В.В. О связи некоторых вариационных методов приближенного решения некорректных задач // Мат. заметки. 1970. Т. 7, № 3. С. 265-272.

18. Васин В.В. Об одном проекционном методе решения неккорректных задач //Изв. вузов. Математика. 1970. № 11. С.26-32.

19. Васин В.В. О β-сходимости проектционного метода для нелинейных операторных уравнений // ЖВМиМФ. 1972. Т. 12, № 2. С. 492-497.

20. Васин В.В. Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов // ЖВМиМФ. 1979. Т. 19, № 1. С. 11-21.

21. Васин В.В. Общая схема дискредитации регуляризующих алгоритмов в банаховых пространствах // Докл. АН СССР. 1981. Т. 253, № 2. С. 271-275.

22. Васин В.В. Дискретная аппроксимация и устойчивость в экстремальных задачах // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22, № 4. С. 824-839.

23. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993. 262 с.

24. Васин В.В., Сидоров А.Ф. О некоторых методах решения дифференциальных и интегральных уравнений //Изв. вузов. Математика. 1983. № 7. С.13-27.

25. Васин В.В., Танана В.П. Приближенное решение операторных уравнений первого рода // Мат. зап. Урал. Ун-та. 1968. Т. 6, тетр. 2. С.27-37.

26. Васин В.В., Танана В.П. Необходимые и достаточные условия сходимости проекционных методов для линейных неустойчивых задач // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215, № 5. С. 1032-1034.

27. Васин В.В., Танана В.П. Об устойчивости проекционных методов при решении некорректных задач // ЖВМиМФ. 1975. Т. 15, № 1. С. 19-29.

28. Винокуров В.А. Приближенный метод невязки в нерефлексивных пространствах // ЖВМиМФ. 1972. Т. 12, № 1. С. 207-212.

29. Винокуров В.А. Два замечания о выборе параметра регуляризации // ЖВМиМФ. 1972. Т. 12, № 2. С. 481-483.

30. Винокуров В.А. О погрешности приближенного решения линейных обратных задач // Докл. АН СССР. 1979. Т. 19, № 4. С. 792-793.

31. Гапоненко Ю.Л. Некорректные задачи на слабых компактах. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1989. 128 с.

32. Гилязов С.Ф. Методы решения линейных некорректных задач. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1987. 120 с.

33. Гласко В.Б., Гущин Г.В., Старостенко В.И. О применении метода регуляризации А.Н. Тихонова к решению нелинейных систем уравнений // ЖВМиМФ. 1976. Т. 16, № 2. С. 283-292.

34. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах. //Мат. сб. 1963. Т. 61, № 2. С. 211-223.

35. Иванов В.К. , Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

36. Иванов В.К., Танана В.П. О корректности условно-корректных задач в локально выпуклых пространствах // Докл. РАН. 1992. Т. 325, № 6. С. 1107-1110.

37. Кабанихин С.И. Применение энергетических неравенств к однородной обратной задаче гиперболического уравнения //Дифференц. Уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 31-67.

38. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624 с.

39. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 92 с.

40. Лаврентьев М.М. Условно-корректные задачи для дифференциальнрых уравнений. Новосибирск: НГУ, 1973. 71 с.

41. Морозов В.А. О решении методом регуляризации некорректно поставленных задач с нелинейным неограниченным оператором // Дифференц. Уравнения. 1970. Т. 6, № 8. С. 1453-1458.

42. Морозов В.А., Кирсанова Н.Н. Об одном обобщенном методе регуляризации // Вычислительные методы и программирование. 1970. Вып. 14. С. 40-45.

43. Танана В.П. О критерии сходимости метода невязки // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 1. С. 22-24.

44. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195-198.

45. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501-504.

46. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач// Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49-52.

47. Тихонов А.Н. О решении нелинейных интегральных уравнений // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156, № 6. С. 1296-1299.

48. Тихонов А.Н. О нелинейных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161, № 5. С. 1023-1026.

49. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.: Наука, 1974. 223 с.

50. Hadamard J. Le probleme Cauchy. Paris, 1932

51 -108. Tanana V.P., Alves M.J. On regularization of nonlinear III-posed problems // Math. Stst. Infor., UEM, Maputo. 1994. № 1. P. 8-14.