МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Южно-Уральский государственный университет"
(национальный исследовательский университет)
Высшая школа электроники и компьютерных наук
Кафедра вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений

РАБОТА ПРОВЕРЕНА:	ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ:
Рецензент	
_____________	_____________
"___"______________2017г.	"___"______________2017г.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛУЗАМКНУТЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ-01.04.02.2017.115-056.ВКР

Научный руководитель:
Д.ф.-м.н., профессор
____________ В.П. Танана

Автор работы:
магистр группы КЭ-215
____________Е.С. Ермолина

Нормоконтролер:
к.п.н., доцент
____________М.Е.Коржова
"___"______________2017г.

Челябинск 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели многих физических и технологических процессов, строятся на основе решений нелинейных уравнений с полузамкнутыми операторами. В связи с этим вызывают большой интерес методы решения таких уравнений.

Одним из таких методов является метод регуляризации – алгоритм, позволяющий находить приближённое решение некорректно поставленных операторных задач вида $A\overline{u} = \overline{f}$.

Большой вклад в развитие данной теории внесли А.Л. Агеев, В.Я. Арсенин, А.Б. Бакушинский, Г.М. Вайникко, В.В. Васин, А.В. Гончарский, А.М. Денисов, В.К. Иванов, С.И. Кабанихин, А.С. Леонов, В.А. Морозов и другие.

Вместе с тем невозможно найти решение некоторых нелинейных уравнений с полузамкнутыми операторами на основе метода регуляризации, в связи с чем возникает два вопроса: какие уравнения с полузамкнутыми операторами не возможно решить на основе метода регуляризации? При каких условиях можно найти их корни на основе применения обобщенного метода регуляризации?

Все выше перечисленное определило выбор темы выпускной квалификационной работы.

Цель и задачи исследования. Целью данной работы является исследование условий применения обобщенной L-регуляризации к решению нелинейных уравнений с L-полузамкнутыми операторами и обоснование применения данного метода к решению целого класса рассматриваемых уравнений.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Рассмотреть определение понятия «операторные уравнения со слабо полузамкнутыми и слабо-сильно замкнутыми операторами» и возможность их решения на основе применения метода регуляризации, суть которого заключается в сведении решения уравнения к вариационной задаче;

2. Обобщить сущность обобщенного метода регуляризации и его применения в случае слабо-сильно замкнутого оператора;

3. Обосновать возможность применения метода L-регуляризации при условии, что оператор является L-слабо полузамкнутым сверху или снизу оператором;

4. Рассмотреть необходимые и достаточные условия β-сходимости L-регуляризованных решений к множеству точных решений уравнения;

5. Обосновать решение обратной задачи фильтрации на основе метода L-регуляризации.

Методы исследования. В работе использовались методы вычислительной математики, математического моделирования, функционального анализа, дифференциальных уравнений, теории обратных и некорректно поставленных задач, вариационного исчисления.

Научная новизна работы состоит в обобщении условий применения метода L-регуляризации к решению нелинейных уравнений при условии, что оператор является L-слабо полузамкнутым сверху или снизу оператором.

Теоретическая значимость. Предложен обобщённый метод L-регуляризации и конечномерной аппроксимации для решения нелинейных операторных уравнений. Исследован вопрос решения обратной задачи фильтрации на основе обобщённого метода L-регуляризации.

Практическая значимость работы состоит в возможности применения разработанных способов решения нелинейных уравнений для решения задач исследования комплекса естественных наук. Например, нефтяных пластов, тепловой диагностики технических объектов, изучения аномалий гравитационного поля.

1 Операторные уравнения со слабо полузамкнутыми и слабо-сильно замкнутыми операторами

1.1 Основные определения

Определение 1.1. Оператор А будем называть слабо полузамкнутым, если из того, что $u_n \xrightarrow{сл.} \hat{u}$, а $Au_n \xrightarrow{сл.} \overline{f}$ следует, что существует элемент $\overline{u} \in D(A)$ такой, что $A\overline{u} = \overline{f}$ и $\varliminf_{n\to\infty} \|u_n\| \geq \|\overline{u}\|$.

Определение 1.2. Оператор А будем называть слабо-сильно замкнутым, если из того, что $u_n \xrightarrow{сл.} \hat{u}$, а $Au_n \xrightarrow{сл.} \overline{f}$ следует, что $\overline{u} \in D(A)$ и $A\overline{u} = \overline{f}$.

Из определений 1.1 и 1.2 следует, что слабо замкнутый оператор А является слабо полузамкнутым и слабо-сильно замкнутым.

Таким образом, новый класс операторов не хуже, чем класс сильно замкнутых операторов.

Теперь покажем, что он шире. Для этого приведем пример оператора

$$A[u(t)] = u^2(t) \tag{1.1}$$

где $D(A) = \{u : u \in L_2[0,1], 1 \leq u(t) \leq 2 п.в.\}$ и $Au \in L_2[0,1]$.

Оператор, определяемый формулой (1.1), не слабо замкнутый. Перейдем к доказательству его слабой полузамкнутости и слабо-сильной замкнутости.

Пусть $G \subset R_N$ и $G = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_N, b_N]$. Тогда справедливы следующие леммы.

Лемма 1.1. Пусть $\{u_n\} \subset L_2[G]$

$u_n(\overline{x}) \to u(\overline{x})$ почти всюду на G

и $u_n \xrightarrow{сл.} \hat{u}$ в $L_2[G]$.

Тогда $u(\overline{x}) = \hat{u}(\overline{x})$ почти всюду на G**,** где $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $u \neq \hat{u}$ в $L_2[G]$. Тогда найдется измеримое множество $Q \subset G$ такое, что мера $\mu(Q)$ множества Q отлична от нуля и для любого вектора $\bar{x} \in Q,\ u(\bar{x}) \neq \hat{u}(\bar{x})$.

Обозначим через $\bar{u}_n$ сужение функции u_n с множества G на Q_1. Тогда последовательность $\{\bar{u}_n\}$ будет сходиться сильно в метрике пространства $L_2[Q_1]$ к функции $\bar{u}$, являющейся сужением функции u на множество Q_1.

Оператор S, отображающий пространство $L_2[G]$ на $L_2[Q_1]$ и определяемый формулой

$Su(\bar{x}) = \bar{u}(\bar{x}),\ \bar{x} \in Q_1,$

будет линейным непрерывным, а следовательно, слабо непрерывным.

Таким образом, последовательность $\{\bar{u}_n\}$ такая, что для любого n $\bar{u}_n = Su_n$ будет слабо сходиться к элементу $S\hat{u}$.

Так как сильно сходящаяся последовательность является и слабо сходящейся, то

$$\bar{u}_n \xrightarrow{сл.} \bar{u} \text{ при } n \to \infty$$

и для любого $\bar{x} \in Q_1$

$$\bar{u}(\bar{x}) \neq S\hat{u}(\bar{x})$$

Тем самым пришли к противоречию с единственностью слабого предела.

Лемма 1.2. Пусть $\{u_n\} \subset L_2[G]$, и $\in L_2[G]$ и $u_n \to u$ в метрике пространства $L_2[G]$.

Тогда существует подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, которая сходится к u почти всюду на G.

Доказательство. Если $u_n \to u$ по норме $L_2[G]$, то из теоремы Рисса, приведенной в [34, с. 272], следует существование подпоследовательности $\{u_{n_k}\}$, сходящейся к u почти всюду на G.

Лемма 1.3. Если последовательность $\{u_n\} \subset L_2[G]$ и почти всюду на G сходится к функции $u \in L_2[G]$, то при условии существования числа r такого, что для любого n $|u_n(\bar{x})| \leq r$ почти всюду на G, эта последовательность сходится сильно по норме пространства $L_2[G]$ к элементу u.

Доказательство. Пусть ε – достаточно малое положительное число. Тогда по теореме Егорова [34, с. 269] существует измеримое множество $G_1 \subset G$ такое, что

$$\mu(G_1) < \varepsilon / 4r \tag{1.2}$$

и $u_n(\overline{x})$ сходится к $u(\overline{x})$ равномерно на G / G_1. Таким образом, существует номер N_1 такой, что для любого $n \geq N_1$

$$\left|u_n(\overline{x}) - u(\overline{x})\right|^2 \leq \varepsilon^2 / 4\mu(G) \text{ почти всюду на G} \tag{1.3}$$

Из соотношений (1.2) и (1.3) следует, что для любого $n \geq N_1$ $\left\|u_n - u\right\| \leq \varepsilon$, откуда следует сильная сходимость последовательности $\{u_n\}$ к элементу u.

Лемма 1.4. Оператор A, определяемый формулой (1.1), слабо-сильно замкнут.

Доказательство. Пусть для любого n $u_n(t) \in D(A)$, $u_n \overset{сл.}{\rightarrow} \hat{u}$, а $u_n^2 \rightarrow \overline{f}$ в $L_2[0,1]$.

Тогда из леммы 2 следует существование подпоследовательности $\{u_{n_k}\}$ такой, что

$$u_{n_k}^2(t) \rightarrow \overline{f}(t) \text{ почти всюду.} \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует

$$u_{n_k}(t) \rightarrow \overline{u}(t) \text{ почти всюду,} \tag{1.5}$$

а из (1.5) и леммы 1 следует $\overline{u}(t) = \hat{u}(t)$ почти всюду. Таким образом, $\hat{u} \in D(A)$ и $A\hat{u} = \overline{f}$.

Заметим, что из леммы 3 и 4 следует непрерывность оператора A^{-1} на множестве значений R(A) оператора A, определяемого формулой (1.1).

Лемма 1.5. Оператор A, определяемый формулой (1), слабо полузамкнут.

Доказательство. Пусть для любого n $u_n \in D(A)$ и, следовательно, $u_n(t) \geq 1$ почти всюду, $u_n \in L_2[0,1]$ и $u_n^2 \in L_2[0,1]$.

Предположим, что

$$u_n \overset{сл.}{\rightarrow} \hat{u} \tag{1.6}$$

а

$$u_n^2 \overset{сл.}{\rightarrow} \overline{f} \tag{1.7}$$

Тогда из (1.7) следует

$$\int_0^1 u_n^2(t)d\mu_t \to \int_0^1 \overline{f}(t)d\mu_t \tag{1.8}$$

где $\overline{f}(t) \geq 1$ почти всюду.

Из (1.8) следует $\|u_n\|^2 \to \|\overline{u}\|^2$ где $\overline{u}(t) = \left[\overline{f}(t)\right]^{1/2}$ и оператор А полузамкнут.

Теперь проведем пример слабо полузамкнутого оператора A_1, не являющегося слабо-сильно замкнутым:

$$A_1\left[u(t)\right] = u^2(t), \tag{1.9}$$

где $D(A_1) = \left\{u : u \in L_2\left[0,1\right], |u(t)| \leq 1\right\}$ и $A_1 u \in L_2\left[0,1\right]$.

Доказательство слабой полузамкнутости оператора A_1 аналогично случаю оператора А, приведенному в лемме 5.

Покажем, что оператор A_1, определяемый формулой (1.9), не является слабо-сильно замкнутым.

Для этого рассмотрим последовательность $\left\{u_n(t)\right\}$, пологая в ней $x_1 = -1$, а $x_2 = 1$. Тогда последовательность $\left\{u_n\right\} \subset D(A_1)$, $u_n \overset{сл.}{\to} \Theta$ и $A_1 u_n(t) = 1$.

Таким образом, $A_1 u_n \to 1 \neq 0 = A_1\Theta$ Это доказывает, что оператор A_1 слабо-сильно незамкнут.

Теперь приведем пример слабо-сильно замкнутого оператора A_2, не являющегося слабо полузамкнутым:

$$A_2\left[u(t)\right] = u^3(t), \tag{1.10}$$

где $D(A_2) = \left\{u : u \in L_2\left[0,1\right], 0 \leq u(t) \leq 2\right\}$ и $A_2 u \in L_2\left[0,1\right]$. Доказательство слабо-сильно замкнутости оператора A_2 проводится аналогично доказательству, приведенному в лемме 4.

Покажем, что оператор A_2, определяемый формулой (1.10), не является слабо полузамкнутым. Для этого рассмотрим последовательность $\left\{\frac{1}{2}u_n(t)\right\}$, в которой $u_n(t)$ определено формулой

$$u_n(t) = \begin{cases} x_1, \frac{i}{2^n} \le t \le \frac{i+1}{2^n}, i = 2j, \\ x_2, \frac{i}{2^n} \le t \le \frac{i+1}{2^n}, i = 2j+1, \end{cases}$$

при этом $x_1 = 0$, а $x_2 = 2$. Тогда для любого n

$$\left| \frac{1}{2} u_n \right| = 1/\sqrt{2}, \tag{1.11}$$

а

$$A_2 \left[\frac{1}{2} u_n(t) \right] = \frac{1}{8} u_n^3(t) \overset{сл.}{\rightarrow} \frac{1}{2}, \tag{1.12}$$

Ввиду инъективности оператора A_2, определяемого формулой (1.10), существует единственный элемент

$$u_o(t) = 2^{-\frac{1}{3}}, \tag{1.13}$$

такой, что

$$A_2 u_o = \frac{1}{2},$$

Из (1.11) и (1.13) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{2} u_n \right\| < \|u_o\|,$$

а оператор A_2 не является слабо полузамкнутым.

1.2 Обоснование метода регуляризации

Метод регуляризации приближенного решения уравнения заключается в сведении его к вариационной задаче.

$$\inf \left\{ \|Au - f_\delta\|^2 + \alpha \|u\|^2 : u \in D(A) \right\}, \alpha > 0$$

Теорема 1.1. Если оператор А слабо полузамкнут, то вариационная задача разрешима.

Доказательство. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{u_n\}$ такую, что $\{u_n\} \subset D(A)$ и

$$\|Au_n - f_\delta\|^2 + \alpha\|u_n\|^2 \to \inf\left\{\|Au_n - f_\delta\|^2 + \alpha\|u_n\|^2 : u \in D(A)\right\}, \tag{1.14}$$

Из соотношения (1.14) следует ограниченность последовательностей $\{u_n\}$, $\{Au_n\}$ и $\{Au_n - f_\delta\}$. Так как пространство H гильбертово, то соответствующие последовательности слабо компактны.

Без ограничения общности можем считать, что

$$u_n \overset{сл.}{\to} \hat{u}, \tag{1.15}$$

$$Au_n \overset{сл.}{\to} \bar{f}, \tag{1.16}$$

и

$$Au_n - f_\delta \overset{сл.}{\to} \bar{f} - f_\delta, \tag{1.17}$$

Из слабой полузамкнутости оператора А и соотношений (1.15), (1.16) следует существование элемента $\bar{u} \in D(A)$ такого, что $A\bar{u} = \bar{f}$ и

$$\|\bar{u}\| \le \varliminf_{n\to\infty}\|u_n\|, \tag{1.18}$$

По свойству нормы слабого предела из (1.17) следует, что

$$\|A\bar{u} - f_\delta\| \le \varliminf_{n\to\infty}\|Au_n - f_\delta\|, \tag{1.19}$$

Из (1.18) и (1.19) вытекает

$$\|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2 \le \varliminf_{n\to\infty}\left\{\|Au_n - f_\delta\|^2 + \alpha\|u_n\|^2\right\},$$

Таким образом, элемент $\bar{u}$ является решением вариационной задачи и теорема доказана.

В дальнейшем множество решений будем обозначать через M_δ^α и называть приближенным решением уравнения, полученным методом регуляризации.

Теорема 1.2. Пусть оператор А слабо полузамкнут и слабо-сильно замкнут. Тогда множество M_δ^α решений вариационной задачи замкнуто.

Доказательство. Пусть $\{u_n\} \subset M_\delta^\alpha$ и $u_n \to \hat{u}$. Тогда по определению множества M_δ^α, для любого n

$$\|Au_n - f_\delta\|^2 + \alpha\|u_n\|^2 = \inf\left\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A)\right\}, \tag{1.20}$$

Из соотношения (20) следует ограниченность последовательности $\{Au_n - f_\delta\}$, а ввиду гильбертовости пространства H и ее слабая компактность.

Без ограничения общности будем считать, что

$$Au_n \xrightarrow{сл.} \bar{f}\text{, при } n \to \infty \tag{1.21}$$

Так как оператор А слабо полузамкнут, то из (1.21) следует существование элемента $\bar{u} \in D(A)$ такого, что

$$A\bar{u} = \bar{f}\,, \tag{1.22}$$

и

$$\|\bar{u}\| \leq \lim\|u_n\|, \tag{1.23}$$

Из (1.20), (1.22) и (1.23) следует, что

$$\left\|\bar{f} - f_\delta\right\| \geq \overline{\lim}\|Au_n - f_\delta\|, \tag{1.24}$$

а и (1.21), по свойству нормы слабого предела –

$$\left\|\bar{f} - f_\delta\right\| \leq \varliminf_{n\to\infty}\|Au_n - f_\delta\|, \tag{1.25}$$

Из соотношений (1.24) и (1.25) вытекает

$$\left\|\bar{f} - f_\delta\right\| = \lim_{n\to\infty}\|Au_n - f_\delta\|, \tag{1.26}$$

а из (1.21) и (1.26)

$$Au_n \to \bar{f}\,, \tag{1.27}$$

Из соотношения (1.27) и слабо-сильно замкнутости оператора А следует $\hat{u} \in D(A)$ и

$$A\hat{u} = \bar{f}\,, \tag{1.28}$$

а из (1.20), (1.27), (1.28) и того, что $u_n \to \hat{u}$, имеет

$$\|A\hat{u} - f_\delta\|^2 + \alpha\|\hat{u}\|^2 \leq = \inf\left\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A)\right\}$$

Что и доказывает замкнутость множества M_δ^α.

Обозначим через $\bar{P}_\alpha$ многозначное отображение, которое каждому элементу $\bar{f} \in H$ ставит в соответствие множество $\bar{M}^\alpha$ решений вариационной задачи при $f_\delta = \bar{f}$.

Теорема 1.3. Пусть A слабо полузамкнут и слабо-сильно замкнут. Тогда отображение $\bar{P}_\alpha$ является H-полунепрерывным сверху.

Доказательство. Тот факт, что для любого элемента $\bar{f} \in H$ множество $\bar{P}_\alpha(f)$ не пусто и замкнуто.

Теперь проверим β-непрерывность отображения $\bar{P}_\alpha$. Для этого предположим, что $\bar{f}_n \to \bar{f}$, обозначим через $\bar{M}^{\alpha,n}$ множество решений вариационной задачи при $f_\delta = \bar{f}_n$ и докажем, что

$$\bar{M}^{\alpha,n} \xrightarrow{\beta} \bar{M}^{\alpha} \text{ при } n \to \infty$$

Предположим противное, то есть найдутся число $d > 0$ и последовательность $\{u_n\}$, $\bar{u}_n \in \bar{M}^{\alpha,n}$ такие, что для любого n

$$\rho(\bar{u}_n, \bar{M}^{\alpha}) \geq d, \qquad (1.29)$$

Пусть $\bar{u} \in \bar{M}^{\alpha}$. Тогда для любого n справедливо соотношение

$$\left\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\right\|^2 + \alpha\left\|\bar{u}_n\right\|^2 \leq \left\|A\bar{u} - f_n\right\|^2 + \alpha\left\|\bar{u}\right\|^2, \qquad (1.30)$$

Из того что $\bar{f}_n \to \bar{f}$, следует

$$\left\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\right\|^2 + \alpha\left\|\bar{u}\right\|^2 \to \left\|A\bar{u} - \bar{f}\right\|^2 + \alpha\left\|\bar{u}\right\|^2, \qquad (1.31)$$

Из соотношений (1.30) и (1.31) вытекает

$$\left\|A\bar{u} - \bar{f}\right\|^2 + \alpha\left\|\bar{u}\right\|^2 \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\left\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\right\|^2 + \alpha\left\|\bar{u}_n\right\|^2\right\}, \qquad (1.32)$$

Из (1.32) следует слабая компактность последовательностей $\{\bar{u}_n\}$, $\{A\bar{u}_n\}$ и $\{A\bar{u}_n - \bar{f}_\delta\}$.

Без ограничения общности можем считать, что

$$\bar{u}_n \xrightarrow{сл.} \hat{u}, \qquad (1.33)$$

$$A\bar{u}_n \xrightarrow{сл.} \tilde{f}, \qquad (1.34)$$

$$A\bar{u}_n - \bar{f}_n \xrightarrow{сл.} \tilde{f} - \bar{f}, \qquad (1.35)$$

Так как оператор A слабо полузамкнут, то из соотношений (1.33) и (1.34) следует существование элемента $\tilde{u}$ такого, что

$$A\tilde{u} = \tilde{f}\ , \tag{1.36}$$

и

$$\|\tilde{u}\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|\bar{u}_n\|, \tag{1.37}$$

Тогда из (1.35) и (1.36), по свойству нормы слабого предела, будет следовать, что

$$\left\|A\tilde{u} - \bar{f}\right\| \le \varliminf_{n\to\infty} \left\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\right\|, \tag{1.38}$$

А из (1.37) и (1.38) – что

$$\left\|A\tilde{u} - \bar{f}\right\|^2 + \alpha\|\tilde{u}\|^2 \le \varliminf_{n\to\infty} \left\{\left\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\right\| + \alpha\|\bar{u}_n\|^2\right\}, \tag{1.39}$$

Так как $\bar{u} \in \bar{M}^{\alpha}$, то из (1.32) и (1.39) имеет

$$\left\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\right\| + \alpha\|\bar{u}_n\|^2 \to \left\|A\tilde{u} - \bar{f}\right\|^2 + \alpha\|\tilde{u}\|^2, \tag{1.40}$$

а из (1.36-1.38) и (1.40) следует

$$\left\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\right\| \to \left\|\tilde{f} - \bar{f}\right\|, \tag{1.41}$$

Таким образом, из (1.35) и (1.41) следует

$$A\bar{u}_n \to \tilde{f}\ , \tag{1.42}$$

Учитывая слабо-сильную замкнутость оператора А и соотношения (1.33) и (1.42), получаем, что $\hat{u} \in D(A)$, а

$$A\hat{u} = \tilde{f}\ , \tag{1.43}$$

Из (1.33), по свойству нормы слабого предела,

$$\|\hat{u}\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|\bar{u}_n\|, \tag{1.44}$$

а из (1.36), (1.38) и (1.43) –

$$\left\|A\hat{u} - \bar{f}\right\| \le \varliminf_{n\to\infty} \left\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\right\|, \tag{1.45}$$

Таким образом, из (1.44) и (1.45) имеем

$$\left\|A\hat{u} - \bar{f}\right\|^2 + \alpha\|\hat{u}\|^2 \le \varliminf_{n\to\infty} \left\{\left\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\right\|^2 + \alpha\|\bar{u}_n\|^2\right\}, \tag{1.46}$$

а из того, что $\bar{u} \in \bar{M}^{\alpha}$, а так же (1.32) и (1.46) –

$$\left\|A\bar{u}_n - \bar{f}_n\right\|^2 + \alpha\|\bar{u}_n\|^2 \to \left\|A\hat{u} - \bar{f}\right\|^2 + \alpha\|\hat{u}\|^2, \tag{1.47}$$

Из (1.44), (1.45) и (1.47) следует

$$\|\overline{u}_n\| \to \|\hat{u}\|, \tag{1.48}$$

а из (1.33) и (1.48) –

$$\overline{u}_n \to \hat{u}, \tag{1.49}$$

из (1.30) и (1.47) вытекает

$$\left\|A\hat{u} - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\|\hat{u}\|^2 \le \left\|A\overline{u} - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\|\overline{u}\|^2, \tag{1.50}$$

Так как $\hat{u} \in D(A)$, а

$$\left\|A\overline{u} - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\|\overline{u}\|^2 = \inf\left\{\left\|Au - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A)\right\}, \tag{1.51}$$

то из (1.50) и (1.51) следует

$$\left\|A\hat{u} - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\|\hat{u}\|^2 = \inf\left\{\left\|Au - \overline{f}\right\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A)\right\}, \tag{1.52}$$

А из (1.52) – $\hat{u} \in \overline{M}^{\alpha}$. Таким образом, соотношение (1.49) противоречит (1.29) и доказывает теорему.

Теорема 1.4. Пусть оператор А слабо полузамкнут и слабо-сильно замкнут.

Тогда, если параметры регуляризации α связать с уравнением погрешности исходных данных δ таким образом, что $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta^2 / \alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, то имеет место β-сходимость приближенных решений $M_{\delta}^{\alpha(\delta)}$, полученных методом регуляризации к множеству точных решений M_0.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $d > 0$ и последовательность $\{\overline{u}_n\}$ такие, что для любого n

$$\overline{u}_n \in M_{\delta_n}^{\alpha(\delta_n)}$$

$\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ и для любого n

$$\rho(\overline{u}_n, M_0) \ge d, \tag{1.53}$$

Пусть $\overline{u}_0 \in M_0$, тогда для любого n выполняются соотношения

$$\left\|A\overline{u}_n - f_{\delta_n}\right\|^2 + \alpha(\delta_n)\|\overline{u}_n\|^2 \le \left\|A\overline{u}_0 - f_{\delta_n}\right\|^2 + \alpha(\delta_n)\|\overline{u}_0\|^2, \tag{1.54}$$

Так как $A\overline{u}_0 = f_0$, а $\left\|f_0 - f_{\delta_n}\right\| \le \delta_n$, то из (1.54) следует, что для любого n выполняются соотношения

$$\|\overline{u}_n\|^2 \le \|\overline{u}_0\| + \delta_n^2 / \alpha(\delta_n), \tag{1.55}$$

и

$$\|A\overline{u}_n - f_{\delta_n}\|^2 \le \delta_n^2 + \alpha(\delta_n)\|\overline{u}_0\|^2, \tag{1.56}$$

Из соотношения (1.56) следует

$$A\overline{u}_n \to \overline{f}_0, \tag{1.57}$$

а из (1.55) – что последовательность $\{\overline{u}_n\}$ ограничена.

Без ограничения общности можем считать, что

$$\overline{u}_n \xrightarrow{сл.} \hat{u}, \tag{1.58}$$

Тогда из (1.57) и (1.58) следует

$$\hat{u} \in D(A), \tag{1.59}$$

и

$$A\hat{u} = f_0, \tag{1.60}$$

По свойству нормы слабого предела из (1.58) имеем

$$\|\hat{u}\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|\overline{u}_n\|, \tag{1.61}$$

Из соотношения (1.55) следует, что для любого n

$$\|\overline{u}_n\| \le \inf\{\|u\| : u \in M_0\}, \tag{1.62}$$

Так как из (1.59) и (1.60) следует, что $\hat{u} \in M_0$, то из (1.61) и (1.62) будем иметь

$$\|\overline{u}_n\| \to \|\hat{u}\|, \tag{1.63}$$

Таким образом, из (1.58) и (1.63) имеем $\overline{u}_n \to \hat{u}$,

а ввиду того, что $\hat{u} \in M_0$, $\rho(\overline{u}_n, M_0) \to 0$ при $n \to \infty$, что, в свою очередь, противоречит (1.53).

1.3 Апроксимация регуляризованного решения

Пару A, $\{A_n\}$ будем называть слабо полузамкнутой, если из того, что последовательность $\{u_n\}$ ограничена, а $A_n u_n \xrightarrow{сл.} \overline{f}$, следует, что существует элемент $\overline{u} \in D(A)$ такой, что $A\overline{u} = \overline{f}$ и $\|\overline{u}\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|u_n\|$.

Пару А, $\{A_n\}$ будем называть слабо-сильно замкнутой, если из того, что $u_n \xrightarrow{сл.} \hat{u}$, а $A_n u_n \to \overline{f}$, следует $\hat{u} \in D(A)$ и $A\hat{u} = \overline{f}$.

Рассмотрим вариационную задачу

$$\inf\left\{\left\|A_n u - f_\delta^n\right\|^2 : u \in D(A)\right\},\ \alpha > 0$$

Если предположим слабую полузамкнутость операторов А и A_n, то вариационные задачи будут разрешены. Обозначим их решения через M_δ^α и $M_\delta^{\alpha,n}$ соответственно.

Теорема 1.5. Пусть $f_\delta^n \to f_\delta$, последовательность операторов $\{A_n\}$ является А-полной, а для любой подпоследовательности $\{A_{n_k}\}$ пара А, $\{A_{n_k}\}$ слабо полузамкнута и слабо-сильно замкнута.

Тогда имеет место β-сходимость аппроксимаций $M_\delta^{\alpha,n}$ к регуляризованному решению M_δ^α при $n \to \infty$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $d > 0$ и последовательность $\{u_{n_k}\}$, $u_{n_k} \in M_\delta^{\alpha,n_k}$, такие, что для любого k

$$\rho(u_{n_k}, M_\delta^\alpha) \ge d, \tag{1.64}$$

Так как последовательность операторов $\{A_{n_k}\}$ является А-полной, то для любого $\overline{u} \in M_\delta^\alpha$ найдется последовательность $\{\overline{u}_k\}$, $\overline{u}_k \in D(A_{n_k})$ такая, что

$$\overline{u}_k \to \overline{u}, \tag{1.65}$$

и

$$A_{n_k}\overline{u}_k \to A\overline{u}, \tag{1.66}$$

Из (1.65) и (1.66) следует

$$\left\|A_{n_k}\overline{u}_k - f_\delta^{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|\overline{u}_k\right\|^2 \to \left\|A\overline{u} - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|\overline{u}\right\|^2, \tag{1.67}$$

Учитывая, что $u_{n_k} \in M_\delta^{\alpha,n_k}$, получаем для любого k выполняется соотношение

$$\left\|A_{n_k}\overline{u}_{n_k} - f_\delta^{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|\overline{u}_{n_k}\right\|^2 \le \left\|A_{n_k}\overline{u}_k - f_\delta^{n_k}\right\|^2 + \alpha\left\|\overline{u}_k\right\|^2, \tag{1.68}$$

Таким образом, из (1.67) и (1.68) следует, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\{\left\|A_{n_k}\bar{u}_{n_k}-f_\delta^{n_k}\right\|^2+\alpha\left\|\bar{u}_{n_k}\right\|^2\right\}\le\left\|A\bar{u}-f_\delta\right\|^2+\alpha\left\|\bar{u}\right\|^2, \tag{1.69}$$

Из (1.69) вытекает слабая компактность последовательностей $\left\{u_{n_k}\right\}$, $\left\{A_{n_k}u_{n_k}\right\}$ и $\left\{A_{n_k}u_{n_k}-f_\delta^{n_k}\right\}$.Без ограничений общности можем считать, что

$$u_{n_k}\xrightarrow{сл.}\hat{u}, \tag{1.70}$$

$$A_{n_k}u_{n_k}\xrightarrow{сл.}\tilde{f}, \tag{1.71}$$

и

$$A_{n_k}u_{n_k}-f_\delta^{n_k}\xrightarrow{сл.}\tilde{f}-f_\delta, \tag{1.72}$$

Так как пара A, $\left\{A_{n_k}\right\}$ слабо полузамкнута, то на основании (1.70) и (1.71) будем иметь, что $\tilde{f}\in R(A)$ и существует элемент $\tilde{u}$ такой, что

$$A\tilde{u}=\tilde{f}, \tag{1.73}$$

и

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\left\|u_{n_k}\right\|\ge\tilde{u}, \tag{1.74}$$

Из (1.72) и свойства нормы слабого предела следует, что

$$\left\|\tilde{f}-f_\delta\right\|\le\underline{\lim_{k\to\infty}}\left\|A_{n_k}u_{n_k}-f_\delta^{n_k}\right\|, \tag{1.75}$$

Из (1.73-1.75) имеем

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\left\{\left\|A_{n_k}u_{n_k}-f_\delta^{n_k}\right\|^2+\alpha\left\|u_{n_k}\right\|^2\right\}\ge\left\|A\tilde{u}-f_\delta\right\|^2+\alpha\left\|\tilde{u}\right\|^2, \tag{1.76}$$

Так как $\bar{u}\in M_\delta^\alpha$, то

$$\left\|A\tilde{u}-f_\delta\right\|^2+\alpha\left\|\tilde{u}\right\|^2\ge\left\|A\bar{u}-f_\delta\right\|^2+\alpha\left\|\bar{u}\right\|^2, \tag{1.77}$$

Из соотношений (1.76) и (1.77) следует, что

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\left\{\left\|A_{n_k}u_{n_k}-f_\delta^{n_k}\right\|^2+\alpha\left\|u_{n_k}\right\|^2\right\}\ge\left\|A\bar{u}-f_\delta\right\|^2+\alpha\left\|\bar{u}\right\|^2, \tag{1.78}$$

Из (1.69) и (1.78) вытекает

$$\left\|A\tilde{u}-f_\delta\right\|^2+\alpha\left\|\tilde{u}\right\|^2=\underline{\lim_{k\to\infty}}\left\{\left\|A_{n_k}u_{n_k}-f_\delta^{n_k}\right\|^2+\alpha\left\|u_{n_k}\right\|^2\right\}, \tag{1.79}$$

Учитывая соотношения (1.73-1.75) и (1.79), получаем

$$\left\| A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{n_k} \right\| \to \left\| A\tilde{u} - f_\delta \right\|, \tag{1.80}$$

Из (1.72), (1.73) и (1.80) следует

$$A_{n_k} u_{n_k} \to \tilde{f}\,, \tag{1.81}$$

Так как пара А, $\left\{ A_{n_k} \right\}$ слабо-сильно замкнута, то из(1.70) и (1.81) следует

$$\hat{u} \in D(A), \tag{1.82}$$

и

$$A\hat{u} = \tilde{f}\,, \tag{1.83}$$

Из (1.70-1.72), (1.82) и (1.83) по свойству нормы слабого предела имеем, что

$$\left\| A\hat{u} - f_\delta \right\|^2 + \alpha \left\| \hat{u} \right\|^2 \le \varliminf_{k\to\infty} \left\{ \left\| A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{n_k} \right\|^2 + \alpha \left\| u_{n_k} \right\|^2 \right\}, \tag{1.84}$$

и

$$\left\| \hat{u} \right\| \le \varliminf_{k\to\infty} \left\| u_{n_k} \right\|, \tag{1.85}$$

Так как из того, что $\bar{u} \in M_\delta^\alpha$, выполняется

$$\left\| A\hat{u} - f_\delta \right\|^2 + \alpha \left\| \hat{u} \right\|^2 \le \left\| A\bar{u} - f_\delta \right\|^2 + \alpha \left\| \bar{u} \right\|^2, \tag{1.86}$$

то из (1.69), (1.84) и (1.86) имеем

$$\hat{u} \in M_\delta^\alpha\,, \tag{1.87}$$

и

$$\left\| A\hat{u} - f_\delta \right\|^2 + \alpha \left\| \hat{u} \right\|^2 = \varliminf_{k\to\infty} \left\{ \left\| A_{n_k} u_{n_k} - f_\delta^{n_k} \right\|^2 + \alpha \left\| u_{n_k} \right\|^2 \right\}, \tag{1.88}$$

Из (1.75) и (1.88) следует

$$\left\| u_{n_k} \right\| \to \left\| \hat{u} \right\|, \tag{1.89}$$

А из (1.70) и (1.89) –

$$u_{n_k} \to \hat{u}\,, \tag{1.90}$$

Соотношения (1.87) и (1.90)противоречат (1.64) и доказывают теорему.

Для доказательства того факта, что результаты по аппроксимации регуляризованных решений является более общим. Приведем пример А-полной последовательности операторов $\left\{ A_n \right\}$ такой, что для любой подпоследовательности

$\{A_{n_k}\}$ соответствующая пара А, $\{A_{n_k}\}$ – слабо полузамкнута м слабо-сильно замкнута, но не слабо замкнута.

Пусть $H = l_2$, а оператор А определен формулой

$$A\overline{u} = (|u_1|, u_2, ...), \tag{1.91}$$

где $\overline{u}$ и $A\overline{u} \in l_2$

Далее, для любого n оператор A_n определим формулой

$$A_n\overline{u} = (\sqrt{u_1^2 + \frac{u_n^2}{2}}, u_2, ..., u_{n-1}, \frac{u_n}{\sqrt{2}}, u_{n+1}, ...), \tag{1.92}$$

Из (1.91) и (1.92) следует, что операторы А и A_n являются непрерывными и секвенциально слабо непрерывными, а следовательно, и слабо замкнутыми.

Кроме того, для любого $\overline{u} \in l_2$

$$A_n\overline{u} \to A\overline{u},$$

Поэтому последовательность операторов $\{A_n\}$ является А-полной.

Обозначим через $\{A_{n_k}\}$ произвольную подпоследовательность операторов A_n.

Теорема 1.6. Пара А, $\{A_{n_k}\}$ определенная формулами (1.91) и (1.92), является слабо полузамкнутой и слабо-сильно замкнутой.

Доказательство. Пусть последовательность $\{\overline{u}^k\} \subset l_2$ и удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{k\to\infty} \|\overline{u}^k\| = a, \tag{1.93}$$

и

$$A_{n_k}\overline{u}^k \xrightarrow{сл.} \overline{f}, \tag{1.94}$$

Тогда из (1.92) будет следовать, что для любого k

$$\|A_{n_k}\overline{u}^k\| = \|\overline{u}^k\|, \tag{1.95}$$

По свойству нормы слабого предела из (1.94) следует, что

$$\|\overline{f}\| \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \|A_{n_k}\overline{u}^k\|,$$

учитывая же (1.93) и (1.95), получаем, что $\|\overline{f}\| \le a$, а ввиду (1.91) – и

$$\|\bar{u}\| \le a ,$$

Таким образом, слабая полузамкнутость пары A, $\{A_{n_k}\}$ доказана.

Теперь докажем ее слабо-сильную замкнутость.

Для этого рассмотрим последовательность $\{\bar{u}^k\} \subset l_2$ такую, что

$$\bar{u}^k \overset{сл.}{\to} \hat{\bar{u}} , \tag{1.96}$$

и

$$A_{n_k}\bar{u}^k \to \bar{f} , \tag{1.97}$$

Из (1.97) следует, что

$$u_i^k \to f_i \text{ при } k \to \infty \text{ равномерно по } i \tag{1.98}$$

а из (1.96) – что для любого i

$$u_i^k \to \hat{u}_i \text{ при } k \to \infty \tag{1.99}$$

Из (1.92), (1.98) и (1.99) вытекает, что

$$u_i^k \to \hat{u}_i \text{ при } k \to \infty \text{ равномерно по } i \text{ при } i \ge 2$$

поэтому

$$u_{n_k}^k \to 0 \text{ при } k \to \infty \tag{1.100}$$

Таким образом, учитывая (1.91), (1.92), (1.99) и (1.100), получаем

$$A_{n_k}\bar{u}^k \overset{сл.}{\to} A\hat{\bar{u}} , \tag{1.101}$$

Так как $D(A) = l_2$, то $\hat{\bar{u}} \in D(A)$, а учитывая единственность слабого предела, на основании соотношений (1.97) и (1.101) получаем $\bar{f} = A\hat{\bar{u}}$, что и доказывает слабо-сильную замкнутость пары A, $\{A_{n_k}\}$.

Теперь докажем, что пара A, $\{A_n\}$, определяемая формулами (1.91) и (1.92), не является слабо замкнутой.

Для этого рассмотрим последовательность $\{\bar{u}^n\} \subset l_2$ такую, что для любого n

$$\bar{u}^n = (0,...,0,\overset{n}{1},0,...) \tag{1.102}$$

Из (1.102) следует

$$\overline{u}^n \xrightarrow{сл.} \overline{0} \qquad (1.103)$$

и для любого n

$$A_n \overline{u}^n = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, ..., 0, \overset{n}{\frac{1}{\sqrt{2}}}, 0, ...) \qquad (1.104)$$

Таким образом, на основании (1.104) имеем

$$A_n \overline{u}^n \xrightarrow{сл.} (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, ...) \neq \overline{0} \qquad (1.105)$$

Так как $A\overline{0} = \overline{0}$, то из (1.103-1.105) следует, что пара А, $\{A_n\}$ не является слабо замкнутой.

2 Обобщенная регуляризация уравнений со слабо-сильно замкнутым оператором

2.1 Понятие метода обобщенной регуляризации

В случае слабо-сильно замкнутого оператора A вариационная задача может не иметь решений. Проиллюстрируем этот факт на примере.

Пусть $H = L_2[0,1]$, а оператор A определим формулой

$$Au(t) = \begin{cases} u^2(t), u(t) \geq 0, \\ \dfrac{n-1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin \pi nt, u(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin \pi nt + \dfrac{1}{n} \end{cases} \tag{2.1}$$

где $D(A) = \left\{u(t) : u(t), u^2(t) \in L_2[0,1], u(t) \geq 0\right\} \cup \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin \pi nt + \dfrac{1}{n}\right\}$.

Тогда, положив $f_\delta(t) \equiv 1$, $\alpha = 1$, получим

$$\inf\left\{\|Au - 1\|^2 + \|u\|^2 : u \in D(A)\right\} = \frac{1}{2} \tag{2.2}$$

Для доказательства формулы (2.2) обозначим через $\bar{A}$ сужение оператора A, определяемого формулой (2.1), на класс неотрицательных функций и вычислим

$$\inf\left\{\left\|\bar{A}u - 1\right\|^2 + \|u\|^2 : u(t) \geq 0, u, u^2 \in L_2[0,1]\right\} \tag{2.3}$$

Так как для любого $u(t)$ имеет место соотношение

$$u^2(t) + \left[u^2(t) - 1\right]^2 \geq 3/4 \tag{2.4}$$

то из (2.3) и (2.4) следует

$$\inf\left\{\left\|\bar{A}u - 1\right\|^2 + \|u\|^2 : u \in D(\bar{A})\right\} \geq 3/4 \tag{2.5}$$

Теперь рассмотрим функционал

$$\|Au - 1\|^2 + \|u\|^2$$

на последовательности $\{u_n\}$, определяемой формулой

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin \pi nt + \frac{1}{n}$$

Из формулы (2.1) следует

$$\|Au_n - 1\|^2 + \|u_n\|^2 \to \frac{1}{2} \text{ при } n \to \infty \tag{2.6}$$

для любого n

$$\|Au_n - 1\|^2 + \|u_n\|^2 > \frac{1}{2} \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.1), (2.5) и (2.6) следует формула (2.2), а из (2.2) и (2.7) – неразрешимость соответствующей вариационной задачи.

Так как последовательность

$$\left\{ \frac{n-1}{n} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \pi n t \right\}$$

из $L_2[0,1]$ не содержит сходящихся подпоследовательностей, то из формулы (2.1) следует слабо-сильная замкнутость оператора А.

Так как для слабо-сильно замкнутого оператора А вариационная задача

$$\inf \left\{ \|Au - f_\delta\| + \alpha \|u\|^2 : u \in D(A) \right\}, \text{ где } \alpha > 0$$

может не иметь решений, то метод регуляризации к такого рода задачам неприменим.

Рассмотрим обобщение метода регуляризации, которое заключается в том, что вместо элементов, минимизирующих функционал

$$\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha \|u\|^2 \tag{2.8}$$

в качестве приближенных решений уравнения

$$Au = f,\ u \in D(A),\ f \in H$$

будем брать элементы, на которых значение функционала (2.8) сколь угодно близко к нижней грани.

В дальнейшем приближенным решением уравнения $Au = f$, полученным методом обобщенной регуляризации, будем называть множество $M_{\delta,\varepsilon}^{\alpha}$ определяемое формулой

$$M_{\delta,\varepsilon}^{\alpha} = \left\{ \bar{u} : \bar{u} \in D(A), \|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha \|\bar{u}\|^2 \le r_\delta^\alpha + \varepsilon \right\} \tag{2.9}$$

где $r_\delta^\alpha = \inf \left\{ \|Au - f_\delta\|^2 + \alpha \|u\|^2 : u \in D(A) \right\}$, а $\varepsilon > 0$

Очевидно, что множество $M_{\delta,\varepsilon}^{\alpha}$, определяемое таким образом, не пусто.

Теорема 2.1. Пусть оператор А –слабо-сильно замкнут. Тогда, если параметр α связать с δ и ε таким образом, чтобы $\alpha(\delta,\varepsilon)\to 0$ и $(\delta^2+\varepsilon)/\alpha(\delta,\varepsilon)\to 0$ при $\delta,\varepsilon\to 0$, то имеет место β-сходимость приближенных решений $M_{\delta,\varepsilon}^{\alpha(\delta,\varepsilon)}$ к множеству точных решений M_0 уравнения $Au=f$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $d>0$ и последовательность $\{\bar{u}_n\}$ такие, что для любого n $\bar{u}_n\in M_{\delta_n,\varepsilon_n}^{\alpha(\delta_n,\varepsilon_n)}$ и

$$\rho(\bar{u}_n,M_0)\geq d \tag{2.10}$$

где $\delta_{n,}\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, а M_0 – множество точечных решений уравнения $Au=f$ при $f=f_0$.

Пусть $u_0\in M_0$, тогда для любого n справедливо соотношение

$$\left\|A\bar{u}_n-f_{\delta_n}\right\|^2+\alpha(\delta_n,\varepsilon_n)\left\|\bar{u}_n\right\|^2\leq\left\|(Au_0-f)\delta_n\right\|^2+\alpha(\delta_n,\varepsilon_n)\left\|u_0\right\|^2+\varepsilon_n \tag{2.11}$$

Так как $Au_0=f_0$, а $\left\|f_0-f_{\delta_n}\right\|\leq\delta_n$. То из (2.11) следует, что для любого n имеют место соотношения

$$\left\|\bar{u}_n\right\|^2\leq\left\|u_0\right\|^2+(\delta_n^2+\varepsilon_n)/\alpha(\delta_n,\varepsilon_n) \tag{2.12}$$

и

$$\left\|A\bar{u}_n-f_{\delta_n}\right\|^2\leq\delta_n^2+\alpha(\delta_n,\varepsilon_n)\left\|u_0\right\|^2+\varepsilon_n \tag{2.13}$$

Из соотношения (2.13) следует

$$A\bar{u}_n\to f_0 \tag{2.14}$$

а из (2.12) – ограниченность последовательности $\{\bar{u}_n\}$

Ввиду гильбертовости пространства H из ограниченности последовательности $\{\bar{u}_n\}$ следует ее слабая компактность.

Без ограничения общности можем считать, что

$$\bar{u}_n\xrightarrow{сл.}\hat{u} \tag{2.15}$$

Так как оператор A слабо-сильно замкнут, то из (2.14) и (2.15) следует

$$\hat{u}\in D(A) \tag{2.16}$$

и

$$A\hat{u} = f_0 \tag{2.17}$$

Из (2.16) и (2.17) имеем

$$\hat{u} \in M_0 \tag{2.18}$$

Таким образом, из (2.12) и (2.18) следует, что для любого n

$$\|\overline{u}_n\|^2 \le \|\hat{u}\|^2 + (\delta_n^2 + \varepsilon_n) / \alpha(\delta_n, \varepsilon_n) \tag{2.19}$$

Из (2.19) вытекает

$$\|\hat{u}\|^2 \ge \overline{\lim_{n\to\infty}} \|\overline{u}_n\| \tag{2.20}$$

а из (2.15) – что

$$\|\hat{u}\|^2 \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \|\overline{u}_n\| \tag{2.21}$$

Из (2.20) и (2.21) следует

$$\|\overline{u}_n\| \to \|\hat{u}\|^2 \tag{2.22}$$

а из (2.15) и (2.22) –

$$\overline{u}_n \to \hat{u} \text{ при } n \to \infty \tag{2.23}$$

Таким образом, из (2.18) и (2.23) получаем

$$\rho(\overline{u}_n, M_0) \to 0$$

что противоречит (2.10) и доказывает теорему.

2.2 Пример слабо-сильно замкнутых операторов

Класс слабо-сильно замкнутых операторов шире класса слабо замкнутых операторов.

Рассмотрим оператор

$$Au(t) = \psi\left[u(t)\right], \ t \in [0,1]$$

Пусть $\psi(x)$ – строго возрастающая и непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Используя эту функцию, введем оператор А. действующий из $L_2[0,1]$ в $L_2[0,1]$, по формуле

$$Au(t) = \psi\left[u(t)\right], \ t \in [0,1] \tag{2.24}$$

где $u \in D(A)$, $D(A) = \{u : u, Au \in L_2[0,1], u(t) \in [a,b]\}$

Теорема 2.2. Оператор *A*, определяемый формулой (2.24), слабо-сильно замкнут.

Доказательство. Пусть $\{u_n\} \subset D(A)$

$$u_n \overset{сл.}{\rightarrow} \hat{u} \tag{2.25}$$

а

$$Au_n \rightarrow \bar{f} \tag{2.26}$$

Из (2.26) и леммы 1.2 следует существование подпоследовательности $\{u_{n_k}\}$ такой, что

$$Au_{n_k}(t) \rightarrow \bar{f}(t) \text{ почти всюду.} \tag{2.27}$$

Так как обратная функция $\psi^{-1}(y)$ строго возрастает и непрерывна, то из (2.27) следует, что

$$u_{n_k}(t) \rightarrow \psi^{-1}\left[\bar{f}(t)\right] \text{ почти всюду.} \tag{2.28}$$

Из (2.25) и (2.28) следует

$$\hat{u} \in D(A) \text{ и } A\hat{u} = \bar{f}$$

что и доказывает слабо-сильную замкнутость оператора *A*.

Пример не слабо-сильно замкнутого оператора A_1 задан формулой (1.9).

3 Операторные уравнения с L-полузамкнутыми сверху операторами

3.1 Основные определения

Пусть *U, F, G* – гильбертовы пространства, а *A* и *L* – операторы с областями определения *D(A)* и $D(L) \subset U$ такими, что $D(A) \cap D(L) \neq 0$ и множество значений $R(A) \subset F$ и $R(L) \subset G$.

Определение 3.1 Оператор *A* будем называть *L*-слабо полузамкнутым, если из того, что $\{u_n\} \subset D(A) \cap D(L)$, $Au_n \overset{сл.}{\to} \bar{f}$, а $Lu_n \overset{сл.}{\to} \tilde{g}$, следует существование элемента $\bar{u} \in D(A) \cap D(L)$ такого, что $A\bar{u} = \bar{f}$ и $\|L\bar{u}\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|Lu_n\|$.

Определение 3.2 Оператор *A* будем называть *L*- полузамкнутым сверху, если он *L*-слабо полузамкнут и из того, что $\{u_n\} \subset D(A) \cap D(L)$, $\bar{f} \in f\left[D(A) \cap D(L)\right]$, $Au_n \to \bar{f}$, а $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|Lu_n\| \leq \inf\left\{\|Lu\| : u \in D(A) \cap D(L), Au = \bar{f}\right\}$, следует, что $\rho(u_n, \overline{M}_L) \to 0$ при $n \to \infty$, где $\overline{M}_L$ – *L*-нормальное решение уравнения $Au = f$

Теорема 3.1. Пусть операторы *A, L* слабо замкнуты и удовлетворяют условию дополнительности.

Тогда оператор *A* является *L*-полузамкнутым сверху.

Доказательство. Пусть последовательность $\{u_n\} \subset D(A) \cap D(L)$ удовлетворяет соотношениям

$$Au_n \to \bar{f} \tag{3.1}$$

и

$$Lu_n \overset{сл.}{\to} \tilde{g} \tag{3.2}$$

Тогда из условия дополнительности следует существование числа $\lambda > 0$ такого, что для любого *n*

$$\|Au_n - Au_1\| + \|Lu_n - Lu_1\| \geq \lambda \|u_n - u_1\| \tag{3.3}$$

Из соотношений (3.1-3.3) следует ограниченность последовательности $\{u_n\}$. Так как пространство *U* гильбертово, то последовательность $\{u_n\}$ слабо компактна.

Без ограничения общности можем считать, что

$$u_n \xrightarrow{сл.} \hat{u} \tag{3.4}$$

Из слабой замкнутости операторов A, L и соотношений (3.1), (3.2), (3.4) следует $\hat{u} \in D(A) \cap D(L)$,

$$A\hat{u} = \bar{f} \tag{3.5}$$

и

$$L\hat{u} = \tilde{g} \tag{3.6}$$

По свойству нормы слабого предела из соотношений (3.2) и (3.6) следует, что

$$\|L\hat{u}\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|Lu_n\|$$

что, с учетом (3.5), дает *L*-слабую полузамкнутость оператора *A*.

Пусть теперь $Au_n \to \bar{f}$, а

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|Lu_n\| \le \inf\left\{\|Lu\| : u \in D(A) \cap D(L), Au = \bar{f}\right\} \tag{3.7}$$

Тогда из (3.7) и условия дополнительности следует ограниченность последовательности $\{u_n\}$.

Так как пространство *U* и *G* гильбертовы, то без ограничения общности можем считать, что

$$u_n \xrightarrow{сл.} \hat{u} \tag{3.8}$$

и

$$Lu_n \xrightarrow{сл.} \tilde{g} \tag{3.9}$$

Из слабой замкнутости операторов *A, L* и соотношений (3.8), (3.9) следует

$$\hat{u} \in D(A) \cap D(L) \tag{3.10}$$

$$A\hat{u} = \bar{f} \tag{3.11}$$

и

$$L\hat{u} = \tilde{g} \tag{3.12}$$

По свойству нормы слабого предела из (3.9) и (3.12) вытекает

$$\|L\hat{u}\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|Lu_n\| \tag{3.13}$$

а из (3.7), (3.10), (3.11) и (3.13) –

$$\|Lu_n\| \to \|L\hat{u}\| \tag{3.14}$$

Учитывая, что пространство G гильбертово, из (3.9), (3.12) и (3.14) получаем

$$Lu_n \to L\hat{u} \tag{3.15}$$

а из (3.7), (3.10), (3.11) и (3.14) следует, что

$$\hat{u} \in \overline{M_L} \tag{3.16}$$

где $\overline{M}_L$ – L-нормальное решение уравнения $Au = f$ при $f = \overline{f}$. Тогда из (3.15), того, что $Au_n \to A\hat{u}$, и условия дополнительности следует

$$u_n \to \hat{u}$$

что, с учетом (3.16). и дает соотношение

$$\rho(u_n, \overline{M}_L) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Теорема 3.2. Если оператор A является L-слабо полузамкнутым, то для любого $\overline{f} \in A\left[D(A) \cap D(L)\right]$ существует L-нормальное решение $\overline{M}_L$ уравнения $Au = f$.

Доказательство. Пусть $\overline{f} \in A\left[D(A) \cap D(L)\right]$. Тогда рассмотрим минимизирующую последовательность $\{\overline{u}_n\}$ такую, что для любого n

$\overline{u}_n \in D(A) \cap D(L)$, $A\overline{u}_n = \overline{f}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|L\overline{u}_n\| \le \inf\left\{\|Lu\| : u \in D(A) \cap D(L), Au = \overline{f}\right\} \tag{3.17}$$

Из (3.17) следует ограниченность последовательности $\{L\overline{u}_n\}$.

Так как пространство G гильбертово, то последовательность $\{L\overline{u}_n\}$ слабо компактна. Без ограничения общности можем считать, что

$$L\overline{u}_n \xrightarrow{сл.} \tilde{g} \tag{3.18}$$

Тогда из соотношения (3.18) и того, что A является L-слабо полузамкнутым оператором, следует существование элемента $\overline{u} \in D(A) \cap D(L)$ такого, что $A\overline{u} = \overline{f}$ и

$$\|L\overline{u}\| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \|L\overline{u}_n\| \tag{3.19}$$

Таким образом, из соотношения (3.19) следует, что $\overline{u} \in \overline{M}_L$.

3.2 Обоснование метода *L*-регуляризации

Рассмотрим уравнение $Au = f$ и предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение $u_0 \in D(A) \cap D(L)$, но вместо f_0 нам известно приближенное значение f_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\| f_\delta - f_0 \| \le \delta$.

Требуется по исходной информации $\{ f_\delta, \delta \}$ построить приближенное решение u_δ, близкое к *L*-нормальному решению $\bar{M}_L^0$ уравнения $Au = f$ при $f = f_0$.

Метод *L*-регуляризации заключается в сведении поставленной задачи к вариационной:

$$\inf \left\{ \| Au - f_\delta \|^2 + \alpha \| Lu \|^2 : u \in D(A) \cap D(L) \right\}, \alpha > 0$$

Теорема 3.3 Если оператор *A* является *L*-слабо полузамкнутым, то вариационная задача $\| A\bar{u} - \bar{f}_n \|^2 + \alpha \| \bar{u} \|^2 \to \| A\bar{u} - \bar{f} \|^2 + \alpha \| \bar{u} \|^2$ разрешима.

Доказательство. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{u_n\}$ такую, что для любого n $u_n \in D(A) \cap D(L)$ и

$$\| Au_n - f_\delta \|^2 + \alpha \| Lu_n \|^2 \to \inf \left\{ \| Au - f_\delta \|^2 + \alpha \| Lu \|^2 : u \in D(A) \cap D(L) \right\} \qquad (3.20)$$

Из соотношения (3.20) следует ограниченность последовательностей $\{Lu_n\}$, $\{Au_n\}$ и $\{Au_n - f_\delta\}$.

Так как пространства *F* и *G* гильбертовы, то соответствующие последовательности слабо компактны.

Без ограничения общности можем считать, что

$$Lu_n \xrightarrow{сл.} \tilde{g} \qquad (3.21)$$

$$Au_n \xrightarrow{сл.} \bar{f} \qquad (3.22)$$

и

$$Au_n - f_\delta \xrightarrow{сл.} \bar{f} - f_\delta \qquad (3.23)$$

Из L-слабой полузамкнутости оператора A и соотношений (3.21) и (3.22) следует существование элемента $\bar{u} \in D(A) \cap D(L)$ такого, что $A\bar{u} = \bar{f}$ и

$$\|L\bar{u}\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|Lu_n\| \tag{3.24}$$

По свойству нормы слабого предела из (3.23) следует, что

$$\|A\bar{u} - f_\delta\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|Au - f_\delta\| \tag{3.25}$$

Из (3.24) и (3.25) следует, что

$$\|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha\|L\bar{u}\|^2 \le \lim_{n\to\infty}\left\{\|Au_n - f_\delta\|^2 + \alpha\|Lu_n\|^2\right\}$$

то есть элемент $\bar{u}$ является решением вариационной задачи. Множество решений вариационной задачи обозначим через $M_L^\alpha(\delta)$ и будем называть приближенным решением уравнения $Au = f$, полученным методом *L*-регуляризации.

Теорема 3.4. Пусть оператор *A* является *L*-полузамкнутым сверху. Тогда есть параметр α связать с уровнем погрешности δ таким образом, что

$$\alpha(\delta) \to 0,\ \delta^2 / \alpha(\delta) \to 0 \text{ при } \delta \to 0$$

то имеет место β-сходимость приближенных решений $M_L^{\alpha(\delta)}(\delta)$, полученных методом *L*-регуляризации к *L*-нормальному решению $\overline{M}_L^0$ уравнения $Au = f$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $d > 0$ и последовательность $\{\bar{u}_n\}$ такие, что для любого *n*

$$\bar{u}_n \in M_L^{\alpha(\delta_n)}(\delta_n),\ \delta_n \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

и

$$\rho(\bar{u}_0, \overline{M}_L^0) \ge d \tag{3.26}$$

Пусть $\bar{u}_0 \in \overline{M}_L^0$, тогда для любого *n*

$$\|A\bar{u}_n - f_{\delta_n}\|^2 + \alpha(\delta_n)\|L\bar{u}_n\|^2 \le \|A\bar{u}_0 - f_{\delta_n}\|^2 + \alpha(\delta_n)\|L\bar{u}_0\|^2 \tag{3.27}$$

Так как $A\bar{u}_0 = f_0$, а $\|f_0 - f_{\delta_n}\| \le \delta_n$, то из (3.27) следует, что для любого *n*

$$\|L\bar{u}_n\|^2 \le \|L\bar{u}_0\|^2 + \delta_n^2 / \alpha(\delta_n) \tag{3.28}$$

и

$$\|A\bar{u}_n - f_{\delta_n}\|^2 \le \delta_n^2 + \alpha(\delta_n)\|L\bar{u}_0\|^2 \tag{3.29}$$

Из (3.29) следует

$$A\bar{u}_0 \to f_0 \qquad (3.30)$$

а из(3.28) – что последовательность $\{L\bar{u}_n\}$ ограничена. Без ограничения общности можем считать, что

$$L\bar{u}_n \xrightarrow{сл.} \tilde{g} \qquad (3.31)$$

Из (3.28) следует, что

$$\|L\bar{u}_0\| \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \|L\bar{u}_n\| \qquad (3.32)$$

Из (3.30-3.32) и L-полузамкнутости сверху оператора A вытекает

$$\rho(\bar{u}_n, \overline{M}_L^0) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

что противоречит (3.26).

3.3 Пример *L*-полузамкнутого сверху оператора

Пусть $U = F = G = L_2[0,1]$. Рассмотрим оператор A, определяемый формулой

$$Au(t) = \int_0^t u^4(\tau)d\tau$$

и

$$D(A) = \{u : u \in L_2[0,1], 0 \leq u(t) \leq 2\}$$

Введем оператор L следующим образом:

$$Lu(t) = u^4(t) \qquad (3.33)$$

где $D(L) - D(A) \subset L_2[0,1]$ и $Lu \in L_2[0,1]$ и покажем, что оператор A является L-полузамкнутым сверху.

Для этого рассмотрим оператор B, отображающий $L_2[0,1]$ в $L_2[0,1]$:

$$B\upsilon(t) = \int_0^t u\upsilon(\tau)d\tau \qquad (3.34)$$

Из (3.33) и (3.34) следует, что для любого $u \in D(A)$

$$Au = BLu \qquad (3.35)$$

Лемма 3.1. Оператор A, определяемый формулой $Au(t) = \int_0^t u^4(\tau)d\tau$, L-слабо полузамкнут.

Доказательство. Пусть $\{u_n\} \subset D(A)$

$$Au_n \xrightarrow{сл.} \bar{f} \tag{3.36}$$

и

$$Lu_n \xrightarrow{сл.} \tilde{g} \tag{3.37}$$

Тогда из (3.33-3.35) следует

$$Au_n \to B\tilde{g} \tag{3.38}$$

а из (3.36) и (3.38) –

$$\bar{f} = B\tilde{g} \tag{3.39}$$

из (3.37-3.39) вытекает

$$Lu_n \xrightarrow{сл.} L\bar{u} \tag{3.40}$$

где $\bar{u}(t) = \left[B^{-1}(\bar{f}(t)\right]^{1/4}$, а из (3.40) –

$$\|L\bar{u}\| \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|Lu_n\|$$

Тем самым лемма доказана.

Лемма 2. Оператор А, определяемый формулой $Au(t) = \int_0^t u^4(\tau)d\tau$, L-полузамкнут сверху.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что оператор А, определяемый формулой $Au(t) = \int_0^t u^4(\tau)d\tau$, L-слабо полузамкнут.

Пусть $\{u_n\} \subset D(A)$,

$$Au_n \to \bar{f} \tag{3.41}$$

а

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|Lu_n\| \geq \left\|B^{-1}\bar{f}\right\| \tag{3.42}$$

Так как из (3.41) следует, что

$$Lu_n \xrightarrow{сл.} B^{-1}\overline{f} \tag{3.43}$$

то по свойству нормы слабого предела

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|Lu_n\| \geq \|B^{-1}\overline{f}\| \tag{3.44}$$

а из (3.42) и (3.44) имеем

$$\|Lu_n\| \geq \|B^{-1}\overline{f}\| \tag{3.45}$$

Из (3.43) и (3.45) следует, что

$$Lu_n \to B^{-1}\overline{f} \tag{3.46}$$

Так как оператор A инъективен, а из теоремы 2.2 оператор L, определяемый формулой (3.33), слабо-сильно замкнут, то, полагая, что

$$u_n \xrightarrow{сл.} \hat{u} \tag{3.47}$$

получаем

$$\hat{u} \in D(A) \tag{3.48}$$

и

$$L\hat{u} = B^{-1}\overline{f} \tag{3.49}$$

а следовательно,

$$A\hat{u} = \overline{f} \tag{3.50}$$

На основании леммы 1.2 и формулы (3.46), без ограничения общности, можно считать, что

$$Lu_n(t) = B^{-1}\overline{f}(t) \text{ почти всюду,} \tag{3.51}$$

а из (3.33) и (3.51) следует, что

$$u_n(t) \to A^{-1}\overline{f}(t) \text{ почти всюду.} \tag{3.52}$$

Из вида области определения $D(A)$ в формуле $Au(t) = \int_0^t u^4(\tau)d\tau$, леммы 1.3 и соотношения (3.52) будем иметь

$$u_n \to \hat{u} \text{ при } n \to \infty$$

что и доказывает лемму.

4 Обобщенная *L*-регуляризация нелинейных уравнений с *L*-полузамкнутыми снизу операторами.

4.1 Основные понятия и примеры

Определение 4.1. Оператор A будем называть L-полузамкнутым снизу, если из того, что $\bar{f} \in A(D)$ и $Au_n \to \bar{f}$, а

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|Lu_n\| \le \inf\left\{\|Lu\| : u \in D, Au = \bar{f}\right\}$$

следует, что $\rho(u_n, \bar{M}) \to 0$ при $n \to \infty$, где $\bar{M} = \left\{u : u \in D, Au = \bar{f}\right\}$

Пусть *U*=*F*=*G*, а *E* – тождественный оператор, отображающий *U* в *U*. Тогда из определения 4.1 следует, что понятие *L*-полузамкнутого снизу оператора *A* обобщает понятия секвенциально слабо замкнутого и слабо-сильно замкнутого операторов.

Пусть B – секвенциально слабо замкнутый оператор с областью определения $D(B) \subset G$ и множеством значений $R(B) \subset F$, а оператор L, действующий из пространства U в G, слабо-сильно замкнут. Тогда если

$$R(L) \subset D(B) \tag{4.1}$$

а

$$A = B \cdot L \tag{4.2}$$

То справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть область определения *D(L)* инъективного оператора *L* ограничена, а обратный оператор L^{-1} непрерывен на *R(L)*.

Тогда оператор *A*, определяемый формулами (4.1) и (4.2), *L*-полузамкнут снизу.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $d > 0$, элемент $\bar{f} \in R(A)$ и последовательность $\{u_n\} \subset D(L)$ такие, что

$$Au_n \to \bar{f} \tag{4.3}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|Lu_n\| \le \inf\left\{\|Lu\| : u \in D(L), Au = \bar{f}\right\} \tag{4.4}$$

и для любого *n*

$$\rho(u_n, \bar{M}) \geq d \tag{4.5}$$

где $\bar{M} = \left\{u : u \in D(L), Au = \bar{f}\right\}$.

Из соотношения (4.4) следует ограниченность последовательности $\left\{Lu_n\right\}$, а ввиду гильбертовости пространства G – и ее слабая компактность.

Таким образом, из $\left\{u_n\right\}$ можно выделить последовательность $\left\{u_{n_k}\right\}$ такую, что

$$\upsilon_{n_k} \xrightarrow{сл.} \hat{\upsilon} \tag{4.6}$$

где $\upsilon_{n_k} = Lu_{n_k}$.

Из соотношений (4.1-4.3) следует, что

$$B\upsilon_{n_k} \to \bar{f} \tag{4.7}$$

Ввиду слабой замкнутости оператора B из (4.6) и (4.7) имеем

$$\hat{\upsilon} \in D(B) \tag{4.8}$$

и

$$A\hat{u} = \bar{f} \tag{4.9}$$

где $\hat{u} = L^{-1}\hat{\upsilon}$.

Из формул (4.8) и (4.9) вытекает

$$\hat{\upsilon} \in R(L) \tag{4.10}$$

а из (4.6) по свойству нормы слабого предела – что

$$\left\|\hat{\upsilon}\right\| \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \left\|\upsilon_{n_k}\right\| \tag{4.11}$$

Из соотношений (4.4) и (4.10) следует, что

$$\left\|\hat{\upsilon}\right\| \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} \left\|\upsilon_{n_k}\right\| \tag{4.12}$$

а из (4.11) и (4.12) – что

$$\left\|\upsilon_{n_k}\right\| \to \left\|\hat{\upsilon}\right\| \tag{4.13}$$

Таким образом, из (4.6) и (4.13) получаем

$$\upsilon_{n_k} \to \hat{\upsilon} \tag{4.14}$$

Из ограниченности множества *D(L)* следует ограниченность последовательности $\left\{u_{n_k}\right\}$ такой, что для любого *k*

$$u_{n_k} = L^{-1}\upsilon_{n_k} \tag{4.15}$$

Тогда ввиду гильбертовости пространства U и соотношения (4.15), будем иметь слабую компактность последовательности $\{u_{n_k}\}$.

Без ограничения общности можем считать, что

$$u_{n_k} \overset{сл.}{\rightarrow} \tilde{u} \tag{4.16}$$

Тогда из соотношений (4.14), (4.16) и свойства оператора L получим

$$\tilde{u} \in D(L) \tag{4.17}$$

и

$$L\tilde{u} = \hat{\upsilon} \tag{4.18}$$

Из (4.9) и (4.18) следует

$$\tilde{u} = \hat{\upsilon} \tag{4.19}$$

где $\hat{u} \in \overline{M}$.

Из непрерывности оператора L^{-1} и соотношения (4.14) вытекает

$$u_{n_k} \rightarrow L^{-1}\hat{\upsilon} \tag{4.20}$$

Из формул (4.16), (4.17), (4.19) и (4.20) получим

$$u_{n_k} \rightarrow \hat{\upsilon} \text{ при } k \rightarrow \infty$$

что противоречит (4.5) и доказывает теорему.

Приведем пример оператора A. показывающий, что в обратную сторону теорема 4.1 не верна.

Пусть $U = F = G = L_2[0,1]$, а оператор L имеет область определения

$$D(L) = \{u : u \in L_2[0,1], |u(t)| \leq 1 \text{ п.в.}\}$$

и определяется формулой

$$Lu(t) = u^2(t)$$

где $Lu \in L_2[0,1]$

Предположим, что оператор A совпадает с L, а оператор B в формуле (4.2) является тождественным, т.е. $B=E$.

Теперь докажем, что оператор L не слабо-сильно замкнут.

Для этого рассмотрим последовательность функций $\{u_n(t)\}$ такую, что для любого n

$$u_n(t)=\begin{cases} 1, & \dfrac{i}{2^n}\le t<\dfrac{i+1}{2^n}, i=2j, \\ -1, & \dfrac{i}{2^n}\le t<\dfrac{i+1}{2^n}, i=2j+1. \end{cases} \tag{4.21}$$

где j=0, 1, …, 2^{n-1}.

Функциональная последовательность $\{u_n(t)\}$ ортонормирована в пространстве $L_2[0,1]$, а следовательно,

$$u_n \xrightarrow{сл.} 0 \text{ в } L_2[0,1] \tag{4.22}$$

Из (4.21) следует, что для любого n

$$Lu_n(t)\equiv 1$$

то есть

$$Lu_n \to 1\neq 0$$

Соотношения (4.21) и (4.22) доказывают, что оператор L не слабо-сильно замкнут.

Теперь покажем, что оператор A, определяемый формулой

$$Au(t)=u^2(t) \tag{4.23}$$

с областью определения

$$D(A)=\{u: u\in L_2[0,1], |u(t)|\le 1 \text{ п.в.}\}$$

и множеством значений $R(A)\subset L_2[0,1]$ является L-полузамкнутым снизу при условии, что L=A.

Теорема 4.2. Оператор A, определяемый формулой (4.23), является A-полузамкнутым снизу.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $u_n \xrightarrow{сл.} \hat{u}$, $Au_n \to \bar{f}$ в $L_2[0,1]$, где $\bar{f}\in R(A)$.

Для любого $\tilde{u}\in L_2[0,1]$ такого, что $\tilde{u}^2(t)\equiv \bar{f}(t)$ почти всюду,

$$\|\tilde{u}\|\ge \lim_{n\to\infty}\|u_n\|$$

и

$$\rho(u_n, \overline{M}) \not\to 0 \text{ при } n \to \infty$$

где $\bar{M} = \left\{ u : u \in D(A), Au = \bar{f} \right\}$.

Используя последовательность $\left\{ u_n \right\}$, построим последовательность $\left\{ u'_n \right\}$, определяемую формулой

$$u'_n(t) = \begin{cases} u_n(t), \ u_n(t) \neq 0, \\ \dfrac{1}{n}, \ u_n(t) = 0. \end{cases} \tag{4.24}$$

Из (4.24) будет следовать, что последовательность $\left\{ u'_n \right\}$ удовлетворяет тем же условиям, что и $\left\{ u_n \right\}$.

Таким образом, $u'_n \xrightarrow{сл.} \hat{u}$, $Au'_n \to \bar{f}$ и для любого $\tilde{u}$ такого, что $A\tilde{u} = \bar{f}$

$$\|\tilde{u}\| \geq \lim_{n\to\infty} \|u'_n\| \tag{4.25}$$

а

$$\rho(u_n, \overline{M}) \not\to 0$$

Тогда найдутся число $d > 0$ и подпоследовательность $\left\{ u'_{n_k} \right\}$ такая, что для любого k

$$\rho(u'_{n_k}, \overline{M}) \geq d \tag{4.26}$$

Так как $(u'_{n_k}(t))^2 \to \bar{f}(t)$ в $L_2[0,1]$, то из теоремы, сформулированной в [34, с. 272] следует, что из последовательности $\left\{ (u'_{n_k})^2 \right\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $\bar{f}$ почти всюду.

Таким образом,

$$\left[u'_{n_k}(t) \right]^2 \to \bar{f}(t) \text{ почти всюду.} \tag{4.27}$$

Из (4.27) следует, что

$$\left| u'_{n_k}(t) \right| \to \bar{u}(t) \text{ почти всюду.} \tag{4.28}$$

где $\bar{u}^2(t) = \bar{f}(t)$ почти всюду, т.е.

$$\bar{u} \in \overline{M} \tag{4.29}$$

Так как для любого k

$$\| \, |u'_{n_k}| \, \| \to \|u'_{n_k}\|$$

То на основании (4.25) и (4.29)

$$\|\bar{u}\| \geq \lim_{k\to\infty} \| \, |u'_{n_k}| \, \| \qquad (4.30)$$

Из (4.30) вытекает ограниченность последовательности $\{|u'_{n_k}|\}$, а следовательно, ее слабая компактность.

Без ограничения общности можем считать, что

$$|u'_{n_k}| \xrightarrow{сл.} \hat{\bar{u}} \qquad (4.31)$$

но тогда из (4.28) и (4.31) следует, что

$$\hat{\bar{u}}(t) = \bar{u}(t) \text{ почти всюду.} \qquad (4.32)$$

Из (4.31), (4.32) и свойства нормы слабого предела имеем

$$\|\bar{u}\| \leq \varliminf_{k\to\infty} \| \, |u'_{n_k}| \, \| \qquad (4.33)$$

а из (4.30) и (4.33)

$$\| \, |u'_{n_k}| \, \| \to \|\bar{u}\| \text{ при } k \to \infty \qquad (4.34)$$

Таким образом, на основании (4.31), (4.32) и (4.34) получаем

$$|u'_{n_k}| \to \bar{u} \text{ при } k \to \infty \qquad (4.35)$$

Теперь рассмотрим последовательность $\{\bar{u}_{n_k}\}$ такую, что для любого k

$$\bar{u}_{n_k}(t) = \bar{u}(t) \cdot \mathrm{sign} u'_{n_k}(t) \qquad (4.36)$$

Из (4.29) и (4.36) следует, что для любого k

$$\bar{u}_{n_k} \in \overline{M} \qquad (4.37)$$

На основании (4.36) имеем

$$\|u'_{n_k} - \bar{u}_{n_k}\| = \| \, |u'_{n_k}| - \bar{u}\| \qquad (4.38)$$

Из (4.35) и (4.38) окончательно получаем $\|u'_{n_k} - \bar{u}_{n_k}\| \to 0$ при $k \to \infty$, что ввиду (4.37) противоречит (4.26) и доказывает теорему.

4.2 Необходимые и достаточные условия β-сходимости L-регуляризованных решений

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f\,, \qquad (4.39)$$

где $u \in D(A),\;\; f \in F$ и $D(A) = D$.

Предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение $u_0 \in D$ уравнения (4.39), но вместо f_0 нам известно приближенное значение f_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$.

Требуется по исходной информации $\{f_\delta, \delta\}$ построить множество приближенных решений M_δ, близкое к множеству точных решений $M_0 \subset D$ уравнения (4.39) такому, что $AM_0 = f_0$.

Обобщенный метод L-регуляризации заключается в сведении поставленной задачи к вариационной

$$\inf\left\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|Lu\|^2 : u \in D\right\},\; \alpha > 0 \qquad (4.40)$$

Так как вариационная задача (4.40) при общих предположениях об операторах A и L может иметь решения, множество приближенных решений $M_\delta^{\alpha,\varepsilon}$ уравнения (4.39) определим формулой

$$M_\delta^{\alpha,\varepsilon} = \left\{\bar{u} : \bar{u} \in D,\; \|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha\|L\bar{u}\|^2 \le \inf\left[\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|Lu\|^2 : u \in D\right] + \varepsilon\right\}, \qquad (4.41)$$

при $\varepsilon > 0$.

Теорема 4.3. Пусть оператор A является L-полузамкнутым снизу.

Тогда, если параметры α и ε связать с δ таким образом, чтобы $\alpha(\delta)$, $\varepsilon(\delta)$ и $\dfrac{\delta^2 + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} \to 0$ при $\delta \to 0$, то будем иметь место β-сходимость приближенных решений $M_\delta^{\alpha(\delta),\varepsilon(\delta)}$ к множеству точных решений M_0 уравнения (4.39).

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $d > 0$, последовательности $\{\delta_n\}$ и $\{u_n\}$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 0$, для любого n $\delta_n > 0$, а

$u_n \in M_{\delta}^{\alpha(\delta_n),\varepsilon(\delta_n)}$ и

$$\rho(u_n, M_0) \geq d, \tag{4.42}$$

Пусть число γ_0 определено формулой

$$\gamma_0 = \inf\left\{\|Lu_0\| : u_0 \in M_0\right\}, \tag{4.43}$$

Тогда из (4.41) и (4.43) следует, что для любого n выполняются соотношения

$$\|Lu_n\|^2 \leq \frac{\delta^2 + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} + \gamma_0^2, \tag{4.44}$$

и

$$\left\|Au_n - f_{\delta_n}\right\|^2 \leq \delta_n^2 + \varepsilon(\delta_n) + \alpha(\delta_n)\cdot\gamma_0^2, \tag{4.45}$$

Из формулы (4.45) вытекает

$$Au_n \to f_0, \text{ при } n \to \infty \tag{4.46}$$

а из (4.43) и (4.44)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|Lu_n\| \leq \inf\left\{\|Lu\| : u \in D,\ Au = f_0\right\}, \tag{4.47}$$

Из (4.46) и (4.47) следует

$$\rho(u_n, M_0) \to 0, \text{ при } n \to \infty$$

что противоречит (4.42) и доказывает теорему.

Пусть для любого натурального k $f_{\delta_k} = f_0,\ \delta_k = \alpha_k = k^{-1}$, а $\varepsilon_k = k^{-2}$

Обозначим через M_k множество, определяемое формулой

$$M_k = \left\{u : u \in D,\ \|Au - f_0\|^2 + k^{-1}\|Lu\|^2 \leq r_k + k^{-2}\right\}, \tag{4.48}$$

где

$$r_k = \inf\left\{\|Au - f_0\|^2 + k^{-1}\|Lu\|^2 : u \in D\right\}, \tag{4.49}$$

а через $\{m_k\}$ числовую последовательность такую, что

$$m_k = \inf\left\{\|Lu\| : u \in M_k\right\}, \tag{4.50}$$

Лемма 4.1. При сформулированных выше условиях справедливого равенства

$$\lim_{k\to\infty} m_k = \inf\left\{\|Lu\| : u \in D,\ Au = f_0\right\}, \tag{4.51}$$

Доказательство. Из формулы (4.49) следует, что для любого k

$$m_k \geq 0, \tag{4.52}$$

Из соотношения (4.48) для любого $\hat{u} \in M_k$ будет выполняться соотношение

$$k^{-1}\|L\hat{u}\|^2 \leq \|A\hat{u} - f_0\|^2 + k^{-1}\|L\hat{u}\|^2 \leq r_k + k^{-2}, \tag{4.53}$$

Из (4.49) и (4.53) следует

$$k^{-1}\|L\hat{u}\|^2 \leq \|A\overline{u}_0 - f_0\|^2 + k^{-1}\|L\overline{u}_0\|^2 + k^{-2}, \tag{4.54}$$

где $\overline{u}_0$ – произвольный элемент множества M_0.

Так как $A\overline{u}_0 = f_0$, то из (4.54) вытекает

$$k^{-1}\|L\hat{u}\|^2 \leq k^{-1}\|L\overline{u}_0\|^2 + k^{-2}, \tag{4.55}$$

Из (4.50) и (4.55) следует, что для любого k

$$m_k \leq \left(\|L\overline{u}_0\|^2 + k^{-1}\right)^{1/2}, \tag{4.56}$$

Из (4.52) и (4.56) следует ограниченность последовательности $\{m_k\}$.

Так как последовательность $\{m_k\}$ ограничена, то она имеет конечные верхний и нижний пределы, а равенство (4.51) может быть записано в следующем виде:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} m_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} m_k = \inf\left\{\|Lu\| : u \in D,\ Au = f_0\right\}, \tag{4.57}$$

Предположим, что соотношение (4.57) не имеет места. Тогда возможны два случая:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} m_k < \inf\left\{\|Lu\| : u \in D,\ Au = f_0\right\},$$

и

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} m_k > \inf\left\{\|Lu\| : u \in D,\ Au = f_0\right\},$$

Рассмотрим эти случаи.

Пусть выполнено соотношение

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} m_k < \inf\left\{\|Lu\| : u \in D,\ Au = f_0\right\}, \tag{4.58}$$

Тогда из (4.58) следует существование подпоследовательности $\{m_{k_l}\}$ такой, что

$$\lim_{k\to\infty} m_{k_l} < \inf\left\{\|Lu\| : u \in D,\ Au = f_0\right\}, \tag{4.59}$$

Обозначим через $\overline{q}$ число, определяемое формулой

$$\bar{q} = \inf\left\{\|Lu\| : u \in D,\ Au = f_0\right\} - \lim_{k\to\infty} m_{k_l}\,, \tag{4.60}$$

Из (4.48), (4.50) и (4.60) следует существование элемента $\bar{u}_{k_l} \in M_{k_l}$ такого, что

$$\left\|L\bar{u}_{k_l}\right\| \le m_{k_l} + \bar{q}/4\,, \tag{4.61}$$

Из (4.59-4.61) вытекает, что для любого l

$$\inf\left\{\|Lu\| : u \in D,\ Au = f_0\right\} - \left\|L\bar{u}_{k_l}\right\| \ge \bar{q}/2\,,$$

а следовательно, и

$$\rho(\bar{u}_{k_l}, M_0) \ge \bar{q}/2\,, \tag{4.62}$$

Из (4.62) следует, что не имеет место β-сходимость последовательности M_{k_l} к множеству M_0 при $l \to \infty$, а это противоречит утверждению теоремы 4.3.

Перейдем к исследованию второго случая.

Пусть выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} m_k > \inf\left\{\|Lu\| : u \in D,\ Au = f_0\right\}, \tag{4.63}$$

Из (4.63) следует существование подпоследовательности $\left\{m_{k_s}\right\}$ такой, что

$$\lim_{s\to\infty} m_{k_s} < \inf\left\{\|Lu\| : u \in D,\ Au = f_0\right\}, \tag{4.64}$$

Обозначим через q число, определяемое формулой

$$q = \lim_{s\to\infty} m_{k_s} - \inf\left\{\|Lu\| : u \in D,\ Au = f_0\right\}, \tag{4.65}$$

Обозначим через $\tilde{u}_0$ элемент из M_0 такой, что

$$\left\|L\tilde{u}_0\right\|^2 < \inf\left\{\|Lu\|^2 : u \in D,\ Au = f_0\right\} + q/8\,, \tag{4.66}$$

а через s_0 – номер, который удовлетворяет, ввиду (4.64) и (4.65), соотношениями

$$m_{k_{sO}}^2 > \inf\left\{\|Lu\| : u \in D,\ Au = f_0\right\} + \frac{7}{8}q\,, \tag{4.67}$$

и

$$1/k_{sO} < q/8\,, \tag{4.68}$$

Пусть $\tilde{u} \in M_{k_{sO}}$, тогда из (4.67) и (4.68) имеем

$$\|L\tilde{u}\|^2 > \inf\left\{\|Lu\|^2 : u \in D,\ Au = f_0\right\} + \frac{7}{8}q, \tag{4.69}$$

Таким образом, из (4.48), (4.66) и (4.69) имеем

$$\|A\tilde{u}_0 - f_0\|^2 + \frac{1}{k_{sO}}\|L\tilde{u}_0\|^2 = \frac{1}{k_{sO}}\|L\tilde{u}_0\|^2 < \frac{1}{k_{sO}}\|L\tilde{u}\|^2 - \frac{1}{k_{sO}} \cdot \frac{3}{4}q, \tag{4.70}$$

Из (4.68) и (4.70) вытекает

$$\|A\tilde{u}_0 - f_0\|^2 + \frac{1}{k_{sO}}\|L\tilde{u}_0\|^2 < \|A\tilde{u} - f_0\|^2 + \frac{1}{k_{sO}}\|L\tilde{u}\|^2 - \frac{3}{\left(k_{sO}\right)^2}, \tag{4.71}$$

а из (4.48) и (4.71)

$$\|A\tilde{u} - f_0\|^2 + \frac{1}{k_{sO}}\|L\tilde{u}\|^2 < r_{k_{sO}} - \frac{2}{\left(k_{sO}\right)^2},$$

что противоречит (4.49) и доказывает лемму.

Теорема 4.4. Для того чтобы для любого $f_0 \in A(D)$ имела место β-сходимость приближенных решений $M_\delta^{\alpha(\delta_n),\varepsilon(\delta_n)}$ к множеству точных решений M_0 уравнения (4.39) при условии, что $\alpha(\delta)$, $\varepsilon(\delta)$ и $\dfrac{\delta^2 + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} \to 0$ при $\delta \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был L-полузамкнут снизу.

Доказательство. Необходимость

Предположим противное, то есть пусть имеет место β-сходимость приближенных решений $M_\delta^{\alpha(\delta_n),\varepsilon(\delta_n)}$ к множеству точных решений M_0уравнения (4.39) при условии, что $\alpha(\delta)$, $\varepsilon(\delta)$ и $\dfrac{\delta^2 + \varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} \to 0$ при $\delta \to 0$, а оператор А не является L-полузамкнутым снизу. Тогда найдутся число $d > 0$ и последовательность $\{u_n\}$ такая, что

$$Lu_n \xrightarrow{сл.} \hat{\upsilon}, \tag{4.72}$$

$$Au_n \to f_0, \tag{4.73}$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\|Lu_n\| \le \inf\left\{\|Lu\| : u \in M_0\right\}, \tag{4.74}$$

и для любого n

$$\rho(u_n, M_0) \ge d, \tag{4.75}$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\|Lu_n\| = \inf\left\{\|Lu\| : u\in M_0\right\}, \tag{4.76}$$

Предположим противное, т.е. найдутся число $d_1 > 0$ и подпоследвательность $\{u_{n_k}\}$ такая, что для любого k

$$\|Lu_{n_k}\|^2 < \inf\left\{\|Lu\|^2 : u\in M_0\right\} - d_1, \tag{4.77}$$

Из (4.73), без ограничения общности, следует, что

$$\|Au_{n_k} - f_0\| < 1/k, \tag{4.78}$$

Из леммы 4.1 следует существование числа k_0 такого, что

$$m_{k_0}^2 > \inf\left\{\|Lu\|^2 : u\in M_0\right\} - d_1/8, \tag{4.79}$$

Без ограничения общности можем считать, что

$$1/k_0^2 < d_1/8k_0, \tag{4.80}$$

Таким образом, из (4.72), (4.74) и (4.77-4.80) следует, что

$$\begin{aligned}&\|Au_{n_{k_0}} - f_0\|^2 + \frac{1}{k_0}\|Lu_{n_{k_0}}\|^2 \le \frac{1}{k_0^2} + \frac{1}{k_0}\|Lu_{n_{k_0}}\|^2 < \frac{1}{k_0^2} + \frac{1}{k_0}\inf\left\{\|Lu\|^2 : u\in M_0\right\} - d_1/8 \le \\ &\le \frac{1}{k_0}\inf\left\{\|Lu\|^2 : u\in M_0\right\} - \frac{7}{8}d_1 \le \frac{1}{k_0}m_{k_0}^2 - \frac{3}{4k_0}d_1\end{aligned} \tag{4.81}$$

Из (4.48-4.50) – что для любого $\tilde{u}_{k_0}\in M_{k_0}$

$$\frac{1}{k_0}m_{k_0}^2 \le \|A\tilde{u}_{k_0} - f_0\|^2 + \frac{1}{k_0}m_{k_0}^2 \le \|A\tilde{u}_{k_0} - f_0\|^2 + \frac{1}{k_0}\|L\tilde{u}_{k_0}\|^2 < r_{k_0} + \frac{1}{k_0^2} \tag{4.82}$$

Из (4.80-4.82) – что

$$\|Au_{n_{k_0}} - f_0\|^2 + \frac{1}{k_0}\|Lu_{n_{k_0}}\|^2 \le r_{k_0} - \frac{5}{8k_0}d_1$$

то есть

$$\|Au_{n_{k_0}} - f_0\|^2 + \frac{1}{k_0}\|Lu_{n_{k_0}}\|^2 \le r_{k_0}$$

что противоречит (4.49) и доказывает соотношение (4.76). Из (4.76) и леммы 4.1 следует существование последовательности $\{\hat{u}_k\}$ такой, что для любого k $\hat{u}_k\in M_k$ и

$$\left\|L\hat{u}_k\right\|^2 - \left\|Lu_{n_k}\right\|^2 \to 0 \text{ при } k \to \infty \qquad (4.83)$$

Из (4.78) и (4.83) вытекает

$$\left\|Au_{n_k} - f_0\right\|^2 + k^{-1}\left\|Lu_{n_k}\right\|^2 \le \left\|A\hat{u}_k - f_0\right\|^2 + k^{-1}\left\|L\hat{u}_k\right\|^2 + k^{-2} + k^{-1}\left| \; \left\|L\hat{u}_k\right\|^2 - \left\|Lu_{n_k}\right\|^2 \; \right| \qquad (4.84)$$

Так как $\hat{u}_k \in M_k$, то из (4.48) и (484) следует, что

$$\left\|Au_{n_k} - f_0\right\|^2 + k^{-1}\left\|Lu_{n_k}\right\|^2 \le r_k + 2/k^2 + k^{-1}\left| \; \left\|L\hat{u}_k\right\|^2 - \left\|Lu_{n_k}\right\|^2 \; \right| \qquad (4.85)$$

Из (4.85) – что

$$u_{n_k} \in M_{1/k}^{1/k,\varepsilon_k} \qquad (4.86)$$

где $\varepsilon_k = 2/k^2 + k^{-1}\left| \; \left\|L\hat{u}_k\right\|^2 - \left\|Lu_{n_k}\right\|^2 \; \right|$, $f_{\delta_k} = f_0$, а $M_{1/k}^{1/k,\varepsilon_k}$ - приближенное решение уравнения (4.39), полученное обобщенным методом L-регуляризации, определяемое формулой (4.41).

Из (4.83) вытекает

$$\left(\frac{3}{k} + \frac{1}{k}\left| \; \left\|L\hat{u}_k\right\|^2 - \left\|Lu_{n_k}\right\|^2 \; \right|\right)k \to 0 \text{ при } k \to \infty \qquad (4.87)$$

Из теоремы 4.3 и соотношения (4.87)

$$M_{1/k}^{1/k,\varepsilon_k} \xrightarrow{\beta} M_0 \text{ при } k \to \infty \qquad (4.88)$$

а из (4.86) и (4.88)

$$\rho(u_{n_k}, M_0) \to 0, \text{ при } k \to \infty$$

что противоречит (4.75) и доказывает теорему.

Достаточность следует из теоремы 4.3.

4.3 Обратная задача фильтрации

Следуя [39], процесс нестационарной фильтрации жидкости к одиночной скважине в осесимметричном случае описывается уравнением

$$\frac{\partial P(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[xa(x)\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} \right] \qquad (4.89)$$

где $P(t,x)$ – давление в пласте, *a(x)* – коэффициент теплопроводности пласта, $t \in [0,T]$, $T > 0$, а $x \in [c,d]$, где $c > 0$.

Сделаем следующие предположения: на границе пласта выполняется условие непротекания

$$\frac{\partial P(t,d)}{\partial x} = 0 \tag{4.90}$$

известны начальное давление в пласте

$$P(0,x) = P_0 \tag{4.91}$$

а так же забойное давление и дебит скважины

$$P(t,c) = f(t) \tag{4.92}$$

и

$$\frac{\partial P(t,c)}{\partial x} = g(t) \tag{4.93}$$

Коэффициент гидропроводности *a(x)* удовлетворяет условию

$$a(x) \geq d > 0 \tag{4.94}$$

и о ем известна следующая информация:

$$a(c) = \bar{a}_0 \text{ , а } a(d) = \bar{a}_1 \tag{4.95}$$

где числа $\bar{a}_0$ и $\bar{a}_1$ считаем известными.

Обратная задача фильтрации (4.89-4.95) заключается в определении коэффициента гидропроводности пласта *a(x)* по известным характеристикам пласта $\bar{a}_0$, $\bar{a}_1$, P_0, $f(t)$ и $g(t)$.

В работе [39] была доказана сходимость метода регуляризации при условии, что $a(x) \in H^1[c,d]$. В настоящей работе $a(x) \in L_2[c,d]$.

Пусть функция a(x) принадлежит пространству $L_2[c,d]$ и удовлетворяет условию

$$a_0 \leq a(x) \leq a_1 \tag{4.96}$$

где a_0 и a_1 – некоторые положительные числа.

Пусть оператор *A* действует из пространства $L_2[c,d]$ в $L_2[c,d]$, определен формулой

$$A\varphi(x)=\sqrt{xa(x)}\,\frac{d\varphi(x)}{dx}\ ;\ \varphi \text{ и } A\varphi\in L_2\left[c,d\right] \qquad (4.97)$$

и имеет область определения

$$D(A)=\left\{\varphi:\varphi,\ \varphi'\in L_2\left[c,d\right],\ \varphi(c)=0\right\}\ ;\ \varphi \text{ и } A\varphi\in L_2\left[c,d\right] \qquad (4.98)$$

и удовлетворяет (4.96). Из (4.97) и (4.98) следует, что сопряженный оператор A' будет иметь вид

$$A'\psi(x)=-\frac{d}{dx}\left[\sqrt{xa(x)}\psi(x)\right];\ \ \psi, A'\psi\in L_2\left[c,d\right] \qquad (4.99)$$

а его область определения

$$D(A')=\left\{\psi:\psi(x) \text{ и } \frac{d}{dx}\left[\sqrt{xa(x)}\psi(x)\right]\in L_2\left[c,d\right],\ \psi(d)=0\right\} \qquad (4.100)$$

Таким образом, ввиду (4.97-4.100) оператор $A'A$ будет отображать пространство $L_2\left[c,d\right]$ в $L_2\left[c,d\right]$ и иметь область определения $D(A'A)$ и множество значений $R(A'A)$, всюду плотные в $L_2\left[c,d\right]$.

Тогда $T>0$, а $H=L_2\left[c,d\right]$. Тогда введем гильбертово пространство

$$W(0,T)=\left\{f:f\in L_2(0,T;H) \text{ и } \frac{df}{dt}\in L_2(0,T;H)\right\} \qquad (4.101)$$

Это пространство снабжено нормой

$$\| f\|_{W(0,T)}=\left[\int_0^T\| f(t)\|_H^2\,dt+\int_0^T\left\|\frac{df(t)}{dt}\right\|_H^2 dt\right]^{1/2} \qquad (4.102)$$

Известно, что

$$W(0,T)\subset C^0(\left[0,T\right];H) \qquad (4.103)$$

где $C^0(\left[0,T\right];H)$ – пространство непрерывных отображений отрезка $\left[0,T\right]$ в пространстве H.

Теперь, учитывая (4.97-4.103), распространим оператор $A'A$ на пространство $W(0,T)$, положив для $u(t,x)\in W(0,T)$

$$A'Au(t,x)\in L_2(0,T;H) \qquad (4.104)$$

Из (4.104) следует, что оператор $A'A$ продолженный на $W(0,T)$, будет иметь область определения $D\left(A'A\right)$, всюду плотную в $W(0,T)$. Если рассматривать этот оператор действующим из $W(0,T)$ в $L_2(0,T;H)$, то он замкнут.

Из (4.89-4.92) следует, что процесс фильтрации может быть описан задачей

$$\frac{du(t,x)}{dt} + A'Au(t,x) = f'(t) \tag{4.105}$$

и

$$u(0,x) = 0 \tag{4.106}$$

где $u \in W(0,T)$, $f'(t) \in L_2[0,T]$, а $f(0) = 0$.

Условие (4.93) удобней переписать в следующей форме

$$ca(c)\frac{\partial u(t,c)}{\partial x} = g(t)$$

Это условие, используя соотношения (4.105) и (4.106), может переписать в форме

$$\int_c^d u(t,x)xdx = G(t) + \frac{(d-c)^2}{2} f(t) \tag{4.107}$$

где $G(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau$

Проинтегрировав уравнение (4.105) по t и воспользовавшись условием (4.106), получим.

$$u(t,x) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[xa(x)\frac{\partial \upsilon(t,x)}{\partial x} \right] + f(t) \tag{4.108}$$

где $\upsilon(t,x) = \int_0^t u(\tau,x)d\tau$

Теперь проинтегрируем уравнение (4.108) по x и воспользуемся условием (4.107)

$$y(t,x) - xa(x)\frac{\partial \upsilon(t,x)}{\partial x} = G(t) + \frac{(d-c)^2}{2} f(t) \tag{4.109}$$

где $y(t,x) = \int_c^x u(t,\xi)\cdot \xi d\xi$

Из (4.109) следует, что функция $y(t,x)$ принадлежит пространству Соболева $H^1([0,T]\times[c,d])$, а

$$y(t,d) = G(t) + d\,\frac{(d-c)^2}{2}\,f(t) \qquad (4.110)$$

Для приближенного решения уравнения (4.109), к которому сведена обратная задача фильтрация (4.105-4.107), введем исходные пространства и операторы.

Пусть ψ_1 и $\psi_2 \in C\left[c,d\right]$, $\psi_1(c) = \psi_2(c) = a(c) \neq 0$ и $\psi_1(d) = \psi_2(d) = a(d) \neq 0$. Для любого $x \in \left(c,d\right)$

$$0 < \psi_1(x) < \psi_2(x)$$

Предположим, что коэффициент *a(x)* уравнения (4.109) принадлежит метрическому пространству Z, определяемому следующим образом:

$$Z = \left\{a : a \in L_2\left[c,d\right],\ \psi_1(x) \le a(x) \le \psi_2(x),\ x \in \left[c,d\right]\right\} \qquad (4.111)$$

а $\rho_Z(a_1;a_2) = \left\|a_1 - a_2\right\|_{L_2}$.

Тогда оператор L, действующий из пространства $L_2(\left[0,T\right]\times\left[c,d\right])$ в $H^1(\left[0,T\right]\times\left[c,d\right])$, определим формулой

$$L\upsilon = \int_c^x \upsilon_t'(t,\xi)\cdot\xi d\xi \qquad (4.112)$$

а оператор C, действующий из пространства $L_2\left[c,d\right]\times L_2(\left[0,T\right]\times\left[c,d\right])$ в $L_2(\left[0,T\right]\times\left[c,d\right])$, формулой

$$C(a,\upsilon) = xa(x)\frac{\partial\upsilon(t,x)}{\partial x} \qquad (4.113)$$

с областью определения

$$D(C) = \left\{\left(a,\upsilon\right) : a \in Z,\ \upsilon \in H^1(\left[0,T\right]\times\left[c,d\right])\right.$$

$$\left.\frac{\partial\upsilon(t,c)}{\partial x} = 0,\ xa(x)\frac{\partial\upsilon(t,x)}{\partial x} \in H^1(\left[0,T\right]\times\left[c,d\right])\right\} \qquad (4.114)$$

Обозначим через B оператор, действующий из пространства $L_2\left[c,d\right]\times L_2(\left[0,T\right]\times\left[c,d\right])$ в $L_2(\left[0,T\right]\times\left[c,d\right])$ и определяемый формулой

$$B(a,\upsilon) = L\upsilon - C(a,\upsilon) \qquad (4.115)$$

Теперь соотношения (4.109) и (4.110) можно переписать в определенном виде

$$B(a,\upsilon)=G(t)+\frac{(d-c)^2}{2}f(t) \qquad (4.116)$$

где $G(t)$ и $f(t)$ были определены ранее.

Предположим, сто при $f(t)=f_0(t)$ и $G(t)=G_0(t)$ существует точное решение (a_0,υ_0) уравнения (4.116), но вместо этих значений нам известны лишь их δ-приближения f_δ и $G_\delta \in H^1[c,d]$ такие, что $f_\delta(0)=G_\delta(0)=0$, $\|f_\delta - f_0\|_{L_2} \le \delta$, $\|G_\delta - G_0\|_{L_2} \le \delta$ и уровень погрешности δ>0.

Требуется по исходным данным задачи f_δ, G_δ и δ определить множество приближенных решений $M_\delta \subset D(B)$ такое, что $M_\delta \xrightarrow{\beta} M_0$ при $\delta \to 0$, где $M_0 \subset D(B)$ и является множеством точных решений уравнения (4.116).

Считая пространство $L_2([0,T]\times[c,d])$ подпространством декартова произведения $L_2[c,d]\times L_2([0,T]\times[c,d])$ и обозначив пространство $L_2[c,d]\times L_2([0,T]\times[c,d])$ через *U*, пространство $H^1([0,T]\times[c,d])$ через *G*, а $L_2([0,T]\times[c,d])$ через *F*, докажем *L*-полузамкнутость снизу оператора *B*.

Теорема 4.5. Пусть операторы *B* и *L* определены формулами (4.111-4.115). Тогда оператор *B* является *L*-полузамкнутым снизу.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $d>0$, пара функций (f_0,G_0) такая, что

$$G_0(t)+\frac{(d-c)^2}{2}f_0(t)\in R(B),$$

и пара последовательностей $\{a_n\}$ и $\{\upsilon_n\}$ такая, что для любого *n* $(a_n,\upsilon_n)\in D(B)$,

$$B(a_n,\upsilon_n)\to G_0(t)+\frac{(d-c)^2}{2}f_0(t), \qquad (4.117)$$

а последовательность $\{L\upsilon_n\}$ ограничена и для любого *n*

$$\rho\left[(a_n,\upsilon_n);M_0\right]\ge d, \qquad (4.118)$$

где $M_0 = \left\{ \left(a_n, \upsilon_n\right) : \left(a_n, \upsilon_n\right) \in D(B),\ B\left(a_n, \upsilon_n\right) = G_0(t) + \frac{(d-c)^2}{2} f_0(t) \right\}$.

Так как последовательность $\{L\upsilon_n\}$ ограничена в пространстве $H^1([0,T]\times[c,d])$, то она слабо компактна в нем. Без ограничения общности можно считать, что

$$L\upsilon_n \xrightarrow{сл.} \hat{y} \text{ в } H^1([0,T]\times[c,d]) \tag{4.119}$$

а из (4.119) – что

$$L\upsilon_n \to \hat{y} \text{ в } L_2([0,T]\times[c,d]) \tag{4.120}$$

Из соотношений (4.115), (4.117) и (4.120) следует, что

$$xa_n(x)\frac{\partial \upsilon_n(t,x)}{\partial x} \to \hat{z}(t,x) \text{ в } L_2([0,T]\times[c,d]) \tag{4.121}$$

Так как из (4.111) следует ограниченность последовательностей $\{a_n\}$ и $\{a_n^{-1}\}$, то из (4.121) – ограниченность последовательностей $\{\upsilon_n\}$ и $\left\{\frac{\partial \upsilon_n}{\partial x}\right\}$. Таким образом,

$$\begin{gathered} a_n \xrightarrow{сл.} \hat{a} \text{ в } L_2[c,d] \\ \upsilon_n \xrightarrow{сл.} \hat{\upsilon} \text{ в } L_2([0,T]\times[c,d]) \\ \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x} \xrightarrow{сл.} \frac{\partial \upsilon}{\partial x} \text{ в } L_2([0,T]\times[c,d]) \end{gathered} \tag{4.122}$$

Из (4.112), (4.120) и (4.122) вытекает, что

$$L\upsilon_n \to L\hat{\upsilon} \text{ в } L_2([0,T]\times[c,d])$$

Теперь введем последовательность $\{\bar{\upsilon}_n\}$ такую, что для любого n $\left(a_n, \bar{\upsilon}_n\right) \in D(B)$ и удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial \bar{\upsilon}_n(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon_n(t,x)}{\partial x} + \frac{L\hat{\upsilon}(t,x) - xa_n(x)\frac{\partial \upsilon_n(t,x)}{\partial x} - G_0(t) - \frac{(d-c)^2}{2} f_0(t)}{xa_n(x)} \tag{4.123}$$

Так как для любого n и почти любого $x \in [c,d]$.

$$a_n(x) \geq a_0 > 0$$

то из (4.123) вытекает, что

$$\left\| \frac{\partial \bar{\upsilon}_n}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x} \right\|_{L_2} \to 0 \text{ при } n \to \infty \tag{4.124}$$

а из (4.124) – что

$$\left\| \bar{\upsilon}_n - \upsilon_n \right\|_{L_2} \to 0 \text{ при } n \to \infty \tag{4.125}$$

Из выбора υ_n следует, что для любого n $\left(a_n, \bar{\upsilon}_n\right) \in M_0$, а это на ряду с (4.125) противоречит соотношению (4.118) и доказывает теорему.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты, приведённые в выпускной квалификационной работе:

1. Приведены определения понятий «операторные уравнения со слабо полузамкнутыми» и «оперативные уравнения со слабо-сильно замкнутыми операторами» и их свойства;

2. Рассмотрена сущность метода регуляризации приближенного решения уравнения как метода, суть которого заключается в сведении уравнения к вариационной задаче. Обосновано применение апроксимации регуляризованного решения уравнения как более общего способа решения уравнений рассматриваемого вида.

3. Введено понятие метода обобщенной регуляризации и обосновано его применение в случае слабо-сильно замкнутого оператора А, то есть когда вариационная задача может не иметь решений.

4. Доказана возможность применения обобщенной L-регуляризации к нелинейным уравнениям с L-полузамкнутыми снизу операторами и нелинейным уравнениям с L- полузамкнутыми сверху операторами, рассмотрены необходимые и достаточные условия β-сходимости L-регуляризованных решений,

5. Исследован вопрос решения обратной задачи фильтрации на основе применения обобщенной L-регуляризации к нелинейным уравнениям с L-полузамкнутыми операторами.

Необходимо отметить, что в работе для всех предложенных методов решения нелинейных уравнений приводятся примеры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Агеев А.Л. Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций // ЖВМиМФ.1980. Т. 20, №4юС. 819-826.

2. Агеев А.Л., Васин В.В. О сходимости обобщенного метода невязки и его дискретных аппроксимаций. Исследования по математическому анализу. Свердловск: Изд-во УрГУ, 1979. С. 3-18.

3. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Руменцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1982. 288с.

4. Альбер Я.И., Рязанцева И.П., Принцип невязки в нелинейных задачах с монотонными разрывными отображениями. Регуляризующий алгоритм // Докл. АН СССР. 1978ю Т. 239, №5. С. 1017-1020.

5. Арсенин В.Я. О разрывных решениях уравнений первого рода // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5, №5. С. 922-926.

6. Арсенин В.Я. О методах решения некорректно поставленных задач. М.: Изд-во МИФИ, 1977.

7. Арсенин В.Я., Иванов В.В. О решении некорректных интегральных уравнений I рода типа свертки методом регуляризации // ЖВМиМФ. 1968. Т. 8, №2. С. 310-322.

8. Арсенин В.Я., Савелова Т.И. О применении метода регуляризации к интегральным уравнениям первого рода типа свертки // ЖВМиМФ. 1969. Т. 9, №6. С. 1392-1396.

9. Бакушинский А.Б. Об одном численном методе интегральных уравнений Фредгольма I рода // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5, №4. С. 744-749.

10. Бакушинский А.Б. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейных некорректных уравнений в гильбертовом пространстве // ЖВМиМФ. 1967. Т. 7, №3. С. 672-676.

11. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1989. 200 с.

12. Бухгейм А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. 205 с.

13. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986. 182 с.

14. Васильев Ф.П. О регуляризации некорректных экстремальных задач // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, №5. С. 1001-1004.

15. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 518 с.

16. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах. М.: Наука, 1981. 400 с.

17. Васин В.В. О связи некоторых вариационных методов приближенного решения некорректных задач // Мат. Заметки. 1970. Т. 7, №3. С. 265-272.

18. Васин В.В. Об одном проекционном методе решения некорректных задач // Ид. вузов. Математика. 1970. №11. С. 26-32.

19. Васин В.В. О β-сходимости проекционного метода для нелинейных операторных уравнений // ЖВМиМФ. 1972. Т. 12, №2. С. 492-497.

20. Васин В.В. Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов // ЖВМиМФ. 1979. Т. 19, №1. С. 11-21.

21. Васин В.В. Общая схема дискретизации регуляризующих алгоритмов в банаховых пространствах // Докл. АН СССР. 1981. Т. 253, №2. С. 271-275.

22. Васин В.В. Дискретная аппроксимация и устойчивость в экстремальных задачах // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22, №4. С. 824-839.

23. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993. 262 с.

24. Васин В.В., Сидоров А.Ф. О некорректных методах решения дифференциальных и интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1983. №7. С. 13-27.

25. Васин В.В., Танана В.П. Приближенное решение операторных уравнений первого рода // Мат. зап. Урал. ун-та. 1968. Т. 6, тетр. 2. С. 27-37.

26. Васин В.В., Танана В.П. Необходимые и достаточные условия сходимости проекционных методов для линейных неустойчивых задач // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215, №5. С. 1032-1034.

27. Васин В.В., Танана В.П. Об устойчивости проекционных методов при решении некорректных задач // ЖВМиМФ. 1975. Т. 15, №1. С. 19-29.

28. Винокуров В.А. Приближенный метод невязки в нерефлексивных пространствах // ЖВМиМФ. 1972. Т. 12, №1. С. 207-212.

29. Винокуров В.А. Два замечания о выборе параметра регуляризации // ЖВМиМФ. 1972. Т. 12, №2. С. 481-483.

30. Винокуров В.А. О погрешности приближенного решения линейных обратных задач // Докл. АН СССР. 1979. Т. 19, №4. С. 792-793.

31. Гапоненко Ю.Л. Некорректные задачи на слабых компактах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 128 с.

32. Гилязов С.Ф. Методы решения линейных некорректных задач. М.: Изд-во Моск. ун-та,1987. 120 с.

33. Гласко В.Б., Гущин Г.В., Старостенко В.И. О применении метода регуляризации А.Н. Тихонова к решению нелинейных систем уравнений // ЖВМиМФ. 1976. Т. 16, №2. С. 283-292.

34. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624с.

35. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.

36. Танана В.П. О β-устойчивости проекционных методов при решенииоператорных уравнений первого рода с нелинейным оператором // Мат. Зап. Урал. Ун-та. 1975. Т. 9, тетр. 2. С. 132-138.

37. Танана В.П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. 158 с.

38. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, №3. С. 501-504.

39. Tanana V.P., Alves M.J. On regularization of nonlinear III-posed problems// Math. Stat. Infor., UEM, Maputo. 1994. №1. P. 8-14.