

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Южно-Уральский государственный университет
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ТОЧНЫХ НАУК
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

РАБОТА ПРОВЕРЕНА

Рецензент, к.ф.-м.н., доцент

_____ / А.В. Кунгурцева

«___» _____ 2017 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н., доцент

_____ / В.Л. Дильман /

«___» _____ 2017 г.

**Численное и аналитическое исследование
нелинейного уравнения Буссинеска**

ЮУрГУ- 01.03.01.2017.13-04-1408.ВКР

Руководитель, к.ф.-м.н., доцент

_____ / Е.В. Бычков /

«___» _____ 2017 г.

Автор, студент группы ЕТ-481

_____ / М.А. Воронина

«___» _____ 2017 г.

Нормоконтролер, к.ф.-м.н., доцент

_____ / М.А. Корытова /

«___» _____ 2017 г.

Челябинск 2017

УДК 517.9

Воронина М. А.

Численное и аналитическое исследование нелинейного уравнения Буссинеска/ М.А. Воронина. – Челябинск, 2017. – 23с.

Работа посвящена аналитическому и численному исследованию нелинейного уравнения Буссинеска. В работе применяется метод Галёркина для доказательства теоремы о существовании решения уравнения Буссинеска.

Список лит. – 12 назв., рисунков – 3

Содержание

Введение	6
1. Исследование существования решения	11
2. Численное исследование	19
Заключение	24
Список литературы	25

Введение

Открытие Дж. Расселом солитонов в 1840-х создало проблему разработки такой математической теории для водных волн, допускающей волновое решение, которое бы не рассеялось со временем. В 1870-х, французский учёный Жозеф Буссинеск предложил теорию, которая, как он полагал, наиболее адекватно описывала подобные процессы. Им предполагалось, что амплитуда волны невелика по сравнению с глубиной. Полученное уравнение было названо уравнением Буссинеска

$$u_{tt} - C_0^2 \Delta u - \frac{C_0^2 h^2}{3} \Delta^2 u = 0, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, C_0 – предельная скорость распространения волн в мелкой воде, h – толщина не возбужденного водяного слоя. Оно содержит линейное и нелинейное дисперсионные слагаемые. Математическая модель Буссинеска оставалась была интересна, главным образом, для учёных, занимающихся гидродинамикой, до момента возрастания популярности солитонов в 1970, вызвавшей всеобщее внимание к нелинейным волновым уравнениям. Тогда они были интерпретированы, как уравнения, допускающие солитонные решения в локальном масштабе для взаимодействующих волн, меняющих фазы, но не меняющих форму. Однако, солитоны достаточно динамичны, и данный подход был бы не в состоянии сполна описать их природу. Хирота Р., в свою очередь, занимался изучением аналитическим описанием солитонов [10]. Другие исследователи придерживались других мнений. Как, например, было с уравнением синус-Гордана: одно уравнение может генерировать серию решений уравнений Буссинеска из одного решения при помощи преобразования Бэклунда. Эти наработки могли бы быть успешны, однако плохое изложение привело к невозможности их использования. Это заметно при рассмотрении решения для низкой амплитуды (нелинейная часть незначительна) формы $u(x; t) = \varepsilon e^{i(kx + \omega t)}$. Дисперсионное соотношение $\omega^2 = k^2 - k^4$ для $|k| > 1$ таково, что волно-

вая частота возрастает в t раз примерно до $e^{k^2 t}$ неограниченно, так как и параметр k неограничен. Малейшее изменение исходных данных влечёт изменения в общем поведении, что делает такую постановку задачи некорректной.

Одно из "улучшенных уравнений Буссинеска"

$$u_{tt} - u_{xx} = u_{xxtt} + (u^2)_{xx}, \quad (2)$$

где четвертая производная по x заменена на смешанную производную. Для него дисперсионное соотношение имеет вид $\omega^2 = k^2/(1 + k^2)$. Для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = (u^2)_{xx} - u_{xxtt}. \quad (3)$$

дисперсионное соотношение будет иметь вид: $\omega^2 = k^2 + k^4$. Это исправление качественно изменяет свойства решения данного уравнения, чем в начальном виде. И применимо как для исследования солитонов, так и для преобразования аналитических решений задач обратного рассеивания.

Опуская нелинейный член, получаем уравнение Буссинеска $u_{tt} - u_{xx} = u_{xxtt}$, эквивалентное "улучшенному уравнению Буссинеска но имеющее меньшую точность.

В работе [1] исследована математическая модель распространения волн в теории мелкой воды при условии потенциальности движения и сохранения массы в слое

$$\begin{aligned} (\lambda - \Delta)\ddot{u} &= \alpha^2 \Delta u + \Delta f(u), \\ u(x, 0) &= u_0(x); \dot{u}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

Функция $u(x, t)$ определяет высоту волны в момент времени t в точке x . Коэффициенты λ, α связывают глубину, гравитационную постоянную и число Бонда.

Также для изучения уравнений в частных производных очень важны методы Галёркина, которые, в свою очередь, также претерпевали много изменений.

Стоит начать с того, что метод решения дифференциальных уравнений путем введения аппроксимирующих функций впервые был разработан Релеем. Задача сводилась к минимизации функционала, связывающего кинетическую и потенциальную энергии системы. Она хорошо исследована в его монографии "Теория звука" (1877-1878), где Релей рассматривал колебания струн, пластин, оболочек, используя для описания системы форму колебаний простейшего осциллятора.

В 1908 году физик Вальтер Ритц выпустил труд "Об одном новом методе решения некоторых вариационных задач математической физики" [12]. Он решал задачи теории упругости, к примеру, задачу о прогибе пластины. Далее другими математиками было отмечено, что труды Ритца и Релея несколько взаимосвязаны. К примеру, С.Г. Михлин в [7] говорил, что в применении к задачам теории колебаний метод Ритца является обобщением метода Релея. Действительно, вскоре идеи Ритца получили широкое применение ввиду того, что высокой точности результатов, по сравнению с точным значением или экспериментальными данными. Основным недостатком метода Ритца является его применимость только для случаев, когда операторы, входящие в уравнение являются самосопряженными и положительно определенными. В 1915 году Борис Григорьевич Галёркин предложил метод интегрирования дифференциальных уравнений [3], являющегося современной продолжением идей Ритца и Релея. Его суть состоит в следующем: требуется найти функцию $u(A)$, удовлетворяющую уравнению

$$Lu - f(A) = 0 \quad (4)$$

в ограниченной области с гладкой границей уравнению и некоторым однородным краевым условиям.

Пусть последовательность $\varphi_1(A), \varphi_2(A), \dots, \varphi_n(A), \dots$ состоит из функций достаточное число раз непрерывно дифференцируема и удовлетворяющих однородным краевым условиям.

Приближенное решение ищем в виде $u_n(A) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(A)$, где a_1, a_2, \dots, a_n — неизвестные константы. По методу Галеркина коэффициенты a_k определяются подстановкой $u_n(A)$ в левую часть уравнения (4) так, что мы добьемся ортогональности к последовательности функций $\varphi_1(A), \varphi_2(A), \dots, \varphi_n(A)$. Отсюда получим систему линейных алгебраических уравнений $\sum_{k=1}^n a_k (L\varphi_k, \varphi_m) = (f, \varphi_m)$, $m = 1, 2, \dots, n$, для определения коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_n . В случае, если оператор в (4) является самосопряженным и положительно определенным, то метод Ритца и метод Галеркина будут иметь идентичные системы линейных уравнений. В литературе встречается, что метод Галеркина называют методом Бубнова—Галеркина. Это обусловлено тем, что схожая идея была высказана И.Г. Бубновым в 1913 году. Несмотря на то, что метод Галёркина был описан Бубновым раньше, он называется так по причине универсальности, в отличие от предшествующего варианта. Так же существуют различные вариации метода Галёркина, такие как, например, метод Галёркина — Петрова. Пусть F — линейный оператор, область определения лежит в гильбертовом пространстве X , а область значений в гильбертовом пространстве Y . Его суть в следующем: выбирается линейно независимая система элементов $\{\alpha_i\}_1^\infty$ из X и линейно независимая система функционалов $\{\beta_i\}_1^\infty$ из пространства Y^* , сопряженного к Y . При совпадении пространств $X = Y$ рассматривается обычный метод Галёркина.

Перейдем к постановке задачи.

Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega),$$

$$u_1 \in L^2(\Omega).$$

Тогда существует функция u , удовлетворяющая следующим условиям

$$u \in L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)),$$

$$(\lambda - \Delta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u + \Delta(u^3),$$

$$Q = \Omega \times [0, T],$$

$$u(0) = u_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1.$$

Таким образом, целью работы является исследование существования решения нелинейного уравнения Буссинеска. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить историю исследований уравнения Буссинеска и историю развития метода Галеркина;
2. Доказать теорему существования решения модифицированного уравнения с помощью метода Галеркина;
3. Разработать и реализовать алгоритм численного решения нелинейного уравнения Буссинеска методом Галеркина;
4. Провести вычислительные эксперименты, иллюстрирующие работу разработанного алгоритма.

В работе используется подход, предложенный Жаком-Луи Лионсом в работе [6], метод Петрова-Фаздо-Галеркина. И метод Рунге-Кутты для численного решения системы дифференциальных уравнений, относительно коэффициентов галеркинской суммы.

1 Исследование существования решения

Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей. Для простоты положим, что Ω промежуток из \mathbb{R} длины l . Рассмотрим в цилиндре $Q = \Omega \times \mathbb{R}_+$ нелинейное уравнение Буссинеска

$$(\lambda - \Delta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u + \Delta(u^3), \quad (5)$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1. \quad (7)$$

и краевым условием

$$u(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (8)$$

Теорема. Пусть

$$\lambda \notin \sigma(\Delta),$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega), \quad (9)$$

$$u_1 \in L^2(\Omega). \quad (10)$$

Тогда существует решение задачи (5) – (8) такое, что

$$u \in L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)), \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \quad (12)$$

Доказательство

План доказательства будет следующим:

- (i) методом Петрова—Фаэдо—Галёркина строим "приближенные" решения;
- (ii) для приближенного решения выводим априорные оценки;
- (iii) переходим к пределу, опираясь на свойства компактности (они нужны для перехода к пределу в нелинейных членах). Согласно методу Галёркина базисные функции должны w_1, \dots, w_m, \dots обладать следующими свойствами:

$$w_i \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \quad \forall i;$$

$$\forall m \quad w_1, \dots, w_m \text{ линейно независимы;} \quad (13)$$

В качестве w_i выберем $\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$. Очевидно, что последовательность $\left\{\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\right\}$ удовлетворяет (13).

Решение ищем в $H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$, так как оно сепарабельно, то линейные комбинации $\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$ плотны в $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

Этап (i) : «приближенные» решения.

Чтобы упростить запись, положим

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ и т.д.}$$

Приближенное решение $u_m = u_m(x, t)$ задачи будем искать в виде

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \quad (14)$$

где g_{im} определяются из условий

$$\begin{aligned} & \lambda \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) + \sum_{i=1}^m \ddot{g}_{im}(t) \left(\frac{l}{i\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) + \\ & + \alpha^2 \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \left(\frac{l}{i\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) - \left(\Delta(u_m^3(t)), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\right) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \lambda \left(\ddot{u}_m(t), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\right) - \left(\Delta \ddot{u}_m(t), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\right) - \\ & - \alpha^2 \left(\Delta u_m(t), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\right) - \left(\Delta(u_m^3(t)), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\right) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$1 \leq i \leq m.$$

Система (16) нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений дополняется начальными условиями

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u_{0m} = \sum_{i=1}^m \beta_{im} \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \rightarrow u_0 \text{ в } H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (17)$$

$$\dot{u}_m(0) = u_{1m}, \quad u_{1m} = \sum_{i=1}^m \gamma_{im} \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \rightarrow u_1 \text{ в } L^2(\Omega) \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Общие результаты о нелинейных системах (Теорема Коши: каковы бы не были начальные условия всегда существует решение системы с этими начальными значениями определенное на некотором интервале, содержащем точку t_0 . Далее, если имеются два решения с одинаковыми начальными значениями, каждое из которых определено на своем интервале, содержащем точку t_0 , то эти решения совпадают на общей части этих интервалов.) гарантируют существование решения задачи (16) - (18) на интервале $[0, t_m]$. Априорные оценки показывают, что $t_m = T$.

Этап (ii): априорные оценки.

Обозначим $|\varphi| = \|\varphi\|_{L^2}$. Умножим уравнение (16), отвечающее индексу i , на $\dot{g}_{im}(t)$ и просуммируем по i . Тогда получим

$$\begin{aligned} & \lambda \left(\ddot{u}_m(t), \dot{g}_{im}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) - \left(\Delta \ddot{u}_m(t), \dot{g}_{im}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) - \\ & - \alpha^2 \left(\Delta u_m(t), \dot{g}_{im}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) - \left(\Delta(u_m^3(t)), \dot{g}_{im}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

Преобразуем каждое слагаемое

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\dot{u}_m(t)|^2 &= \frac{d}{dt} (\dot{u}_m(t), \dot{u}_m(t)) = (\ddot{u}_m(t), \dot{u}_m(t)) + (\dot{u}_m(t), \ddot{u}_m(t)) = \\ &= [\text{пространство самосопряженных функций } L^4(\Omega); H_0^1(\Omega)] = \\ &= 2(\ddot{u}_m(t), \dot{u}_m(t)) \end{aligned}$$

аналогично поступаем с остальными.

Откуда

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} |\dot{u}_m(t)|^2 + \left(\frac{l}{i\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\dot{u}_m(t)|^2 + \alpha^2 \left(\frac{l}{i\pi}\right)^2 (u_m(t), \dot{u}_m(t)) - \\ - (\Delta(u_m^3(t)), \dot{u}_m(t)) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Проведем преобразования нелинейного члена

$$\begin{aligned} \left(\Delta(u_m^3(t)), \dot{g}_{im}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right)_{L^2} &= \left(u_m^3(t), \Delta \dot{g}_{im}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right)_{L^2} = \\ &= - \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 (u_m^3(t), \dot{u}_m(t)) = - \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \int_{\Omega} u_m^3(t) \dot{u}_m(t) dx \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательную конструкцию

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^4}^4 &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m^4(t) dx = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} u_m^4(t) dx = \int_{\Omega} (4u_m^3(t) \dot{u}_m(t)) dx = \\ &= 4(u_m^3(t), \dot{u}_m(t)). \end{aligned}$$

Воспользуемся полученными результатами, подставив все в (20)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} |\dot{u}_m(t)| + \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)| + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \frac{d}{dt} \|u_m(t)\| + \\ + \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^4}^4 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Проинтегрировав равенство (21) получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \right) |\dot{u}_m(T)| + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 |u_m(T)| + \frac{1}{4} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \|u_m(T)\|_{L^4}^4 = \\ = \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \right) |\dot{u}_m(0)| + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 |u_m(0)| + \frac{1}{4} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \|u_m(0)\|_{L^4}^4 \end{aligned} \quad (22)$$

В силу (21)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \right) |\dot{u}_m(t)| + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 |u_m(t)| + \frac{1}{4} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \|u_m(t)\|_{L^4}^4 \leq \\ \leq \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \right) |u_{1m}| + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 |u_{0m}| + \frac{1}{4} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \|u_m(0)\|_{L^4}^4 \end{aligned} \quad (23)$$

В силу (17), (18) правая часть последнего неравенства не превосходит C (буквой C - обозначим различные константы, не зависящие от t), откуда

$$\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \right) |\dot{u}_m(t)| + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 |u_m(t)| + \frac{1}{4} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \|u_m(t)\|_{L^4}^4 \leq C \quad (24)$$

Отсюда следует, что $t_m = T$ (см. конец этапа (i); неравенство (24) означает, что при $m \rightarrow \infty$ u_m ограничены (т. е. принадлежат ограниченному множеству) в

$$L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)), \text{ а } \dot{u}_m \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (25)$$

Этап (iii): предельный переход.

Согласно теореме Данфорда — Петтиса (см., например, Шварц [9, 594]), пространство $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$ (соответственно $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$) является сопряженным к $L^1(0, T, H_0^{-1}(\Omega) + L^{\frac{4}{3}}(\Omega))$ (соответственно $L^1(0, T; L^2(\Omega))$), и поэтому из последовательности u_m можно выделить такую последовательность u_μ , что

$$u_\mu \rightarrow u \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)), \quad (26)$$

$$\dot{u}_\mu \rightarrow \dot{u} \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)). \quad (27)$$

$\int_0^T (u_\mu(t), g(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u(t), g(t)) dt \quad \forall g \in L^1(0, T, H_0^{-1}(\Omega) + L^{\frac{4}{3}}(\Omega))$. Здесь идет речь о слабой сходимости в пространстве $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$, которое рассматривается как сопряженное пространство к $L^1(0, T, H_0^{-1}(\Omega) + L^{\frac{4}{3}}(\Omega))$. Эта сходимость, вообще говоря, слабее обычной слабой сходимости, при которой можно брать любые $g \in (L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)))'$. [5]

В силу (26) $\dot{u}_\mu \rightarrow \dot{u}$ в $D'(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$ и, следовательно, *-слабый предел последовательности \dot{u}_μ обязательно совпадает с \dot{u} .

Кроме того, из (25), в частности, следует, что u_m ограничены в

$$L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

а \dot{u}_m — в $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, откуда, в частности, вытекает, что u_m принадлежат ограниченному множеству в $H^1(Q)$.

Однако, как известно (теорема Реллиха — Кондрашова: допустим, что Ω удовлетворяет условиям, что граница Γ области Ω (в \mathbb{R}^n) есть бесконечно дифференцируемое многообразие размерности $n - 1$, Ω расположена

локально по одну сторону от Γ (иными словами, мы рассматриваем $\bar{\Omega}$, как многообразие с краем Γ класса C^∞); Ω ограничена, за исключением частных случаев, когда $\Omega = \mathbb{R}^n$ или Ω есть полупространство.

Пусть $s \in \mathbb{R}$ — произвольное число. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ вложение $H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\varepsilon}(\Omega)$ компактно)

$$\text{вложение } H^1(Q) \text{ в } L^2(Q) \text{ компактно.} \quad (28)$$

Итак, мы можем считать, что подпоследовательность u_μ , выбранная из последовательности u_m , удовлетворяет, кроме (26), (27), условию

$$u_\mu \rightarrow u \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ и почти всюду} \quad (29)$$

и, наконец, поскольку $\Delta(u^3)$ ограничены в $L^\infty(0, T; L^{\frac{4}{3}}(\Omega))$, то можно еще предположить, что

$$\Delta(u_\mu^3) \rightarrow w \text{ *}-\text{слабо в } L^\infty(0, T; L^{\frac{4}{3}}(\Omega)). \quad (30)$$

Существенно важный момент — здесь мы сталкиваемся с одной из наиболее типичных трудностей нелинейных задач — доказательство того, что

$$w = \Delta(u^3). \quad (31)$$

Равенство (31) вытекает из (30), (29) и из следующей леммы.

Лемма 1. Пусть \mathcal{O} — ограниченная область в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, g_μ и g — такие функции из $L^4(\mathcal{O})$, что

$$\|g_\mu\|_{L^4(\mathcal{O})} \leq C, \quad g_\mu \rightarrow g \text{ почти всюду в } \mathcal{O}$$

Тогда $g_\mu \rightarrow g$ слабо в $L^4\mathcal{O}$.

Применим эту лемму в случае, когда

$$\mathcal{O} = Q, \quad g_\mu = \Delta(u_\mu^3), \quad w = g = \Delta(u^3).$$

в силу (29) $g_\mu \rightarrow \Delta(u^3) = g$ почти всюду, а в силу (30) $g_\mu \rightarrow w$ слабо в $L^4(\mathcal{O})$.

Доказательство. Пусть N - возрастающая последовательность чисел, стремящихся к $+\infty$; положим

$$E_N = \{(x, t) | (x, t) \in \mathcal{O}, |g_\mu(x, t) - g(x, t)| \leq 1 \text{ для } \mu \geq N\}.$$

Множества (измеримые) E_N растут с ростом N и $\text{mes}(E_N) \rightarrow \text{mes}(\mathcal{O})$ при $N \rightarrow \infty$.

Пусть Φ_N - множество функций φ из $L^{\frac{4}{3}}(\mathcal{O})$ с носителем в E_N , и пусть $\Phi = \bigcup_{N \rightarrow \infty} \Phi_N$; Φ плотно в $L^{\frac{4}{3}}(\mathcal{O})$. Если мы возьмем $\varphi \in \Phi$, то в силу теоремы Лебега

$$\int_0^T \int_0^l \varphi(g_\mu - g) dx dt \rightarrow 0 \text{ при } \mu \rightarrow \infty \quad (32)$$

(действительно, $\varphi \in \Phi_{N_0}$ и если взять $\mu \geq N_0$, то $|\varphi(g_\mu - g)| \leq |\varphi|$ и левая часть этого неравенства $\rightarrow 0$ почти всюду). Так как Φ плотно в $L^{\frac{4}{3}}(\mathcal{O})$, то (32) доказывает лемму •

Таким образом, равенство (31) доказано, и можно перейти к пределу в (16), полагая $m = \mu$.

Пусть i фиксировано и $\mu > i$; тогда в силу (16)

$$\begin{aligned} & \lambda \left(\ddot{u}_\mu(t), \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \right) - \left(\Delta \ddot{u}_\mu(t), \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \right) - \\ & - \alpha^2 \left(\Delta u_\mu(t), \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \right) - \left(\Delta(u_\mu^3(t)), \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Но в силу (26)

$$\begin{aligned} \alpha^2 \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \left(u_\mu(t), \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \right) & \rightarrow \alpha^2 \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \left(u(t), \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \right) \text{ *-слабо в} \\ & L^\infty(0, T), \\ \left(\dot{u}_\mu(t), \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \right) & \rightarrow \left(\dot{u}(t), \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \right) \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\left(\ddot{u}_\mu(t), \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{u}_\mu(t), \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \right) \rightarrow \left(\ddot{u}(t), \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \right) \text{ в}$$

$$D'(0, T);$$

кроме того, в силу (30), (31)

$$\left(\Delta(u_\mu^3), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) \rightarrow \left(\Delta(u^3), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T).$$

Из (33) мы выводим, что

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{d^2}{dt^2} \left(u(t), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\Delta u(t), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) - \\ & - \alpha^2 \left(\Delta u(t), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) - \left(\Delta(u^3(t)), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) = 0, \end{aligned}$$

причем последнее равенство выполнено для любого фиксированного i . Отсюда, ввиду плотности "базиса" $\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \dots, \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ (см.(13)), следует, что

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d^2}{dt^2} (u(t), v) - \frac{d^2}{dt^2} (\Delta u(t), v) - \alpha^2 (\Delta u(t), v) - (\Delta(u^3(t)), v) = 0 \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega), \quad (34) \end{aligned}$$

а отсюда уже вытекает, что u удовлетворяет (5), а также (11), (12).

Лемма 2. Если $f \in L^4(0, T; X)$ и $\partial f / \partial t \in L^4(0, T; X)$, то f , после, быть может, изменения на множестве меры нуль (из отрезка $(0, T)$), будет непрерывным отображением $[0, T] \rightarrow X$.

Нам остается показать, что имеют место (6), (7). Согласно (26), (27) и Лемме 2., мы, в частности, имеем: $u_\mu(0) \rightarrow u(0)$ слабо в $L^2(\Omega)$; но (см. (17)) $u_\mu(0) = u_{0\mu} \rightarrow u_0$ в $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, откуда следует (6).

Далее, в силу (26)

$$\left(\dot{u}_\mu(t), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) \rightarrow \left(\dot{u}(t), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T)$$

и, следовательно (например, в силу леммы 2 с $X = \mathbb{R}$),

$$\left(\dot{u}_\mu(0), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) \rightarrow \left(\dot{u}, \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) \Big|_{t=0} = \left(\dot{u}(0), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right),$$

а поскольку (см. (18)) $\left(\dot{u}_\mu(0), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) \rightarrow \left(u_1, \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right)$, то имеем

$$\left(\dot{u}_\mu(0), \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right) = \left(u_1, \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \right), \quad \forall i$$

откуда вытекает (7)•

2 Численное исследование

Блок-схема алгоритма численного исследования задачи (5) – (8) представлена на рисунке 1.

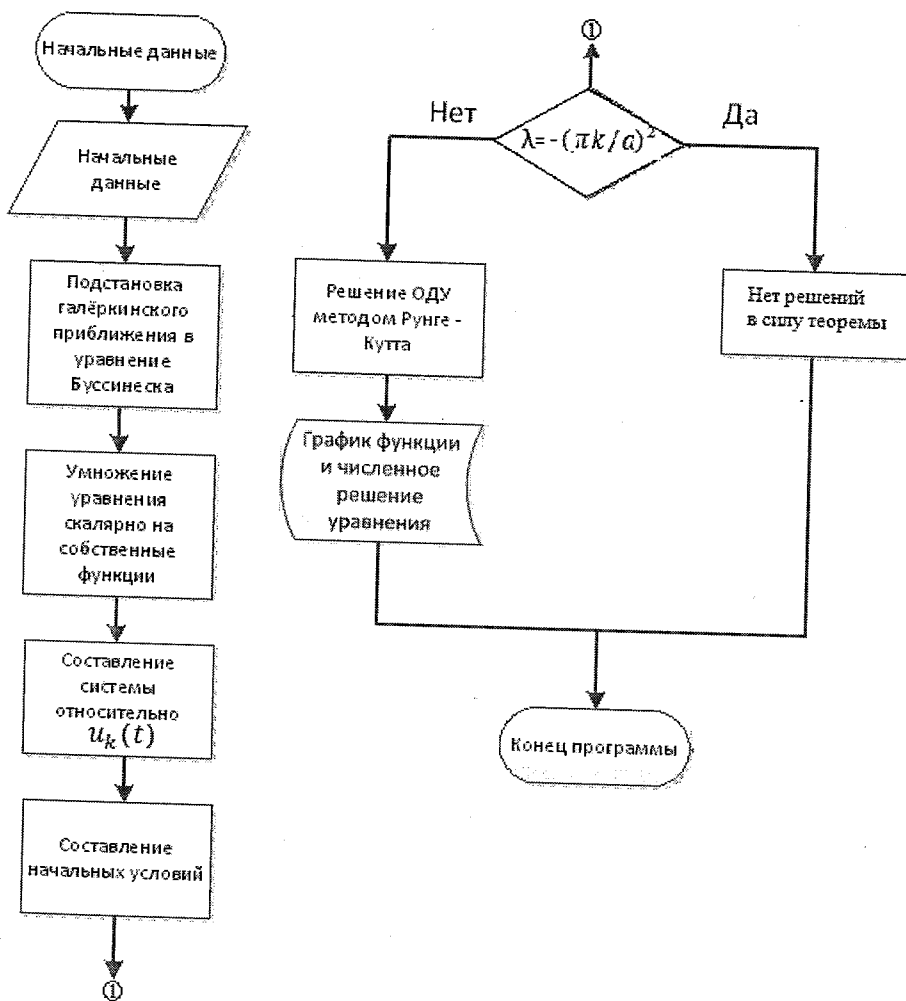


Рис. 1: Блок-схема алгоритма метода решения задачи (5) – (8).

Опишем алгоритм подробнее.

1. После начала выполнения программы необходимо ввести количество слагаемых галеркинской суммы m , коэффициенты λ, α , начальные условия u_0, u_1 и длину отрезка a , на котором ищется решение, Δx – шаг по пространственной переменной и Δt шаг по временной переменной, а также t_0 и T .

2. В цикле от 1 до m составляется искомое приближенное решение для функции \tilde{u} , в виде галеркинских сумм

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^m T_i(t) X_i(x).$$

3. Выражения для \tilde{u} , подставляются в исходное уравнение.

4. В цикле по i от 1 до m уравнение умножается скалярно на собственную функцию $X_i(x)$ в смысле пространства $L^2[0; a]$. Таким образом, получается система нелинейных ОДУ для определения коэффициентов галеркинских приближений.

5. Уравнения, полученные на предыдущем этапе, объединяются в систему.

6. Начальные условия раскладываются в галеркинскую сумму, исходя из них определяются начальные условия для системы уравнений, полученной на предыдущем этапе.

7. Проверка принадлежности λ спектру оператора Δ , то есть представимо ли λ в виде $-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$.

Если на седьмом этапе «истина»:

8. Нет решений в силу теоремы.

Если на седьмом этапе «ложь», то переходим к 9.

9. Решается система дифференциальных уравнений, полученная в 5, с начальными условиями, полученными в 6.

10. Составляется решение и выводится на экран в виде графика.

Программа позволяет проверить вырождено ли уравнение, если нет, то

получить решение задачи (5) – (8) в виде таблицы. Построить поточечно график решения по таблице и вывести его на экран.

Рассмотрим несколько примеров иллюстрирующих, полученные теоретические результаты.

Пример 1. Найти численное решение нелинейного уравнения Буссинеска

$$(-1 - \Delta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u + \Delta(u^3),$$

с начальными условиями

$$u(0) = x(\pi - x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0) = 0$$

и краевым условием

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

В этом случае решений нет, так как

Пример 2. Найти численное решение нелинейного уравнения Буссинеска

$$(9 - \Delta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u + \Delta(u^3),$$

с начальными условиями

$$u(0) = \sin(x) + 0.2 \sin(2x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0) = \sin(x) - 0.3 \sin(3x)$$

и краевым условием

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Пусть количество галеркинских приближений $m = 4$.

Заключение

В работе получено аналитическое и численное решения нелинейного уравнения Буссинеска. Изучены исторические аспекты развития метода Галёркина и уравнения Буссинеска. Доказана теорема существования решения задачи Коши — Дирихле для нелинейного уравнения Буссинеска с помощью метода Петрова — Фаэдо — Галёркина. Разработан алгоритм, написана и протестирована программа в среде Maple, позволяющая находить численное решение нелинейного уравнения Буссинеска. Также приведены примеры работы данной программы. Таким образом, поставленные задачи решены и цель достигнута.

Работа может быть полезна для изучения спецкурсов, связанных с уравнениями соболевского типа и дифференциальными уравнениями.

Список литературы

- [1] Архипов, Д.Г. Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах / Д.Г.Архипов, Г.А. Хабахпашев // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 93, №8. С. 469–472.
- [2] Афендикова, Н.Г. История метода Галеркина и его роль в творчестве М.В.Келдыша // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 77. 16с.
- [3] Галеркин, Б.Г. Собрание сочинений. / Б.Г. Галеркин // Том I. — М.: Издательство АН СССР, 1952.
- [4] Карпман, В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах / В.И. Карпман. — М.: Наука, 1973.
- [5] Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. /А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Наука, 1968.
- [6] Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. / Ж.-Л. Лионс; пер. с фр. под ред. О.А. Олейник. — М.: Мир, 1972.
- [7] Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике. / С. Г. Михлин. — М.: Гостехиздат, 1957.
- [8] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны./ Дж. Уизем — М.: Мир, 1977.
- [9] Шварц, Л. Анализ. / Л. Шварц //Том I. — М.: Мир, 1972.
- [10] Hirota, R. Exact N-soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow-water and in nonlinear lattices, J. Math. Phys., 14 (1973), 810-814
- [11] Embree, M. Boussinesq Equation, 2001.
- [12] Ritz W. Uber eine neue Methode zur Losung gewisser Randwertaufgaben. Gottingen Nachrichten, mathematische-physikalische Klasse, 1908, S.S. 236-248.