Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического анализа и методики преподавания математики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, к. ф.-м.н.,доцент
_______________ /М.А.Сагадеева/
директор ИЕТН ЮУрГУ
_______________ /А.В.Келлер/
«____» ____________ 2017 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой, д.ф. -м.н.,доцент
____________________ /В.Л. Дильман/
«____» ____________ 2017 г.

Уравнение Хоффа в квазисоболевских пространствах с трехточечным начально-конечным условием

ЮУрГУ – 01.03.01. 2017. 12-031-1881. ВКР

Руководитель, д.ф. -м.н., доцент
____________________ /С.А. Загребина/
«____» ____________ 2017 г.

Автор, студент группы ЕТ-481
____________________ /Е.М. Стрелецкая/
«____» ____________ 2017 г.

Нормоконтролер, к. ф.-м.н., доцент
______________________ /М.А.Корытова /
«____» ____________ 2017 г.

Челябинск 2017

УДК 517.9

Стрелецкая Е. М.

Уравнение Хоффа в квазисоболевских пространствах с трехточечным начально-конечным условием/ С.М. Стрелецкая. – Челябинск, 2017. – 34с.

Работа посвящена разрешимости трехточечной начально-конечной задачи для уравнения Хоффа в квазибанаховых пространствах.

Список лит. – 18 назв.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(Национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического анализа и методики преподавания математики

Задание

студенту группы ЕТ-481

Стрелецкой Елизавете Михайловне

на выполнение выпускной квалификационной работы

по направлению 01.03.01.62 - МАТЕМАТИКА

1. Тема выпускной квалификационной работы

Уравнение Хоффа в квазисоболевских пространствах с трехточечным начально-конечным условием.

(Утверждена приказом по университету от «____» ____________ 2017 г.№____)

2. Перечень подлежащих исследованию вопросов

2.1 Введение

2.2 Существование решений для одного класса линейных динамических уравнений

2.3 Относительно спектральные проекторы

2.4 Трехточечная начально-конечная задача

2.5 Уравнение Хоффа в квазисоболевских пространствах

3. Календарный план подготовки выпускной квалификационной работы

Наименование этапов-дипломной работы	**Срок выполнения этапов работы**	**Отметка о выполнении руководителя**
1.Обзор литературы	22.10.2016-7.01.2017	
2. Выбор и разработка методов исследования	23.03.2017-18.04.2017	
3. Получение результатов, формулировка выводов, структурирование текста. Подготовка текста выпускной квалифицированной работы	29.04.2017-18.06.2017	
4. Проверка и рецензирование работы руководителем, исправление замечаний	20.06.2017- 20.06.2017	
5. Подготовка доклада и текста выступления	05.06.2017-18.06.2017	
6. Внешнее рецензирование	05.06.2017-20.06.2017	
7. Защита выпускной квалифицированной работы	30.06.2017	

4. Дата выдачи задания «____» ______________ 2017 г.

Руководитель работы (д. ф.-м. наук, доцент) ______________________/С.А.Загребина

Задание приняла к исполнению ______________________/Е.М.Стрелецкая

Содержание

Введение

В связи с развитием высоких технологий, инженерии перед наукой стоит важная задача в разработке математических моделей, описывающих те или иные процессы в природе. В настоящее время стоит необходимость в тщательном исследовании различных физических процессов, для решения конкретных прикладных задач, многие из которых описываются уравнениями в частных производных. В данной работе мы рассмотрим уравнение Хоффа, описывающее процесс выпучивания двутавровой балки. Эта модель является неклассической, так как уравнение Хоффа не укладывается в рамках одного из классических типов уравнений, таких, как: эллиптические, гиперболические, параболические. Уравнения такого типа рассматриваются на пространствах с различной геометрческой структурой.

В данной работе мы рассматриваем квазибанаховы пространства. Квазибанахово пространство является одним из обобщенных понятий банахова пространства, где одно из условий заменяется более общим. Квазибанаховы пространства метризуемы, но ненормируемы. Приведем пример квазибанахова пространства: пространство последовательностей $\ell_p,\ p \in (0,1)$, которое не является нормируемым. В рамках данной работы мы будем рассматривать квазибанаховы пространства последовательностей $\ell_p^m,\ p \in (0,1),\ m \in \mathbb{R},\ l_p^0 = l_p$, они так же называются квазисоболевы. Необходимость исследования квазибанаховых пространств возникает при решении прикладных задач.

Уравнением Хоффа

$$(\lambda + \Lambda)u_t = \alpha u, \quad \lambda, \alpha \in \mathbb{R}$$

можно описать процесс выпучивания двутавровой балки. Балка находится под постоянной нагрузкой и здесь параметры $\lambda \in \mathbb{R}_+$ дают характеристику нагрузки, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}_+$ характеризуют свойства материала, функция $u = u(x,t)$ показывает отклонение балки от вертикальной оси. В данной работе рассматривается трехточечная начально-конечная задача для абстрактного уравнения соболевского типа в квазисоболевских пространствах.

Целью работы является разрешимость линеаризованного уравнения Хоффа

$$(\lambda + \Lambda)u_t = \alpha u + g,$$

с трехточечным начально-конечным условием

$$P_0(u(\tau_0) - u_0) = P_1(u(\tau_1) - u_1) = P_2(u(\tau_2) - u_2) = 0,$$

где $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \leq +\infty$, P_0, P_1, P_2 – относительно спектральные проекторы.

1 Квазибанаховы пространства последовательностей и линейные операторы

1.1 Квазинормированные пространства последовательностей

Пусть $\mathfrak{U}$ - некоторый вещественный линеал; *квазинормированным пространством* называется упорядоченная пара $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$, если задана функция ${}_{\mathfrak{U}}\|u\| : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим свойствам:

(1) $\forall u \in \mathfrak{U}\ {}_{\mathfrak{U}}\|u\| \geq 0,$ причем ${}_{\mathfrak{U}}\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = \mathbf{0},$ где $\mathbf{0} \in \mathfrak{U}$

(2) $\forall u \in \mathfrak{U}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ {}_{\mathfrak{U}}\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot_{\mathfrak{U}} \|u\|$

(3) $\forall u, v \in \mathfrak{U}\ {}_{\mathfrak{U}}\|u + v\| \leq C({}_{\mathfrak{U}}\|u\| +_{\mathfrak{U}} \|v\|),$ где константа $C \geq 1$ и не зависит

ни от u, ни от v. Функция ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\| : \mathfrak{U} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *квазинормой* в случае $C \geq 1$, а в случае $C = 1$ нормой. Таким образом, понятие квазинормированного пространства является обобщением понятия нормированного пространства. В дальнейшем квазинормированное пространство $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ будем отождествлять с линеалом $\mathfrak{U}$.

Квазинорма ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$ естественным образом задает топологию на $\mathfrak{U}$. Базис окрестностей есть совокупность всех множеств вида $\{u \in \mathfrak{U} :\ {}_{\mathfrak{U}}\|u - v\| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Если $C = 1$ это топология определяется посредством метрики $\rho(u, v) =_{\mathfrak{U}} \|u - v\|$. В случае $C > 1$. квазинормированное пространство так же имеет метрику.

Лемма 1.1 *Пусть $\mathfrak{U}$ - квазинормированное пространство и пусть число α определяется уравнением $(2C)^\alpha = 2$. Тогда на $\mathfrak{U}$ существует метрика $d : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ такая, что при всех $u \in \mathfrak{U}$*

$$d(\boldsymbol{0}, u) \leq_{\mathfrak{U}} \|u\|^\alpha \leq 2d(\boldsymbol{0}, u). \tag{1.1.1}$$

Из леммы 1.1. вытекает, что мы можем ввести понятие *фундаментальной последовательности* $\{u_n\} \subset \mathfrak{U} : \lim\limits_{n,l\to\infty}\ {}_{\mathfrak{U}}\|u_n - u_l\| = 0$, следовательно, и понятие полноты.

Определение 1.1 *Квазибанаховым называется полное квазинормированное пространство.*

Квазинормированное пространство не является нормированным, например пространство последовательностей $\ell_p,\ \ 0 < p < 1$.

Определение 1.2 *Пространство* $\ell_p,\ \ 0 < p < 1$ *– пространство всех последовательносетй* $x = \{x_i\}$ *из* $\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$*, таких, что* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$*.*

Пример 1.1.1 *Пространство последовательностей* $\ell_p,\ \ 0 < p < 1$*, с функцией* $\|x\|_p = (\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ *не является нормированным пространством, так как не выполняется условие 3 из определения нормы.*

Положим $p = \frac{1}{2},\ \ x, y$ *– последовательности, где* $x = \{0.1, 0, 0, 0, ..., 0\}$ *,* $y = \{0, 0.2, 0, ..., 0\}$*. Тогда мы имеем* $\|x + y\|_{\frac{1}{2}} = (\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{\frac{1}{2}})^2 \approx 0.58283$*,* $\|x\|_{\frac{1}{2}} + \|y\|_{\frac{1}{2}} = (\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}})^2 + (\sum\limits_{i=1}^{\infty} |y_i|^{\frac{1}{2}})^2 = 0.3$.
Мы видим, что $\|x + y\|_{\frac{1}{2}} > \|x\|_{\frac{1}{2}} + \|y\|_{\frac{1}{2}}$*. Таким образом* $\ell_p,\ \ 0 < p < 1$ *не является нормированным пространством.*

Символом $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ будем обозначать предел $u \in \mathfrak{U}$ сходящейся в квазибанаховом пространстве $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$.

Пример 1.1.2 *Пространства последовательностей* ℓ_p*,* $p \in \mathbb{R}_+$*, банаховы при*
$p \in [1, +\infty)$ *и квахибанаховы при* $p \in (0, 1)$*. Во втором случае* $C = 2^{\frac{1}{p}}$*. Квазибанаховыми пространствами последовательностей будем называть пространства последовательностей* ℓ_q *при* $q \in (0, 1)$ *.*

Пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ *монотонно неубывающая последовательность чисел, такая что* $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$*. По аналогии с пространствами Соболева* W_p^m *будем рассматривать квазисоболевы пространства*

$$\ell_p^m = \left\{ \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^p < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}_+$. *Пространства* ℓ_p^m *квазибанаховы при всех* $m \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}_+$ *с квазинормой*

$$ {}_p^m\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}, $$

причем они так же являются банаховыми только если $p \in [1, +\infty)$. *Если* $p \in (0, 1)$, *то константа* $C = 2^{\frac{1}{p}}$. *Отметим, что если* $m = 0$, *то* $\ell_p^0 = \ell_p$.

Константу C часто называют *модулем вогнутости* квази-нормы. В изучении квазибанаховых пространств очень важным результатом является теорема Аоки-Ролевича, которая может интерпретироваться следующим образом: если $0 < p \leq 1$ задается $C = 2^{1/p-1}$, то существует константа B такая, что для любых $x_1, ...x_n \in X$ мы имеем

$$ \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leq B \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p \right)^{1/p} $$

это позволяет заменить $\|\cdot\|$ на эквивалентную p-субаддитивную квазинорму $|||\cdot|||$ так, что

$$ |||x_1 + x_2||| \leq (|||x_1|||^p + |||x_2|||^p)^{1/p} $$

Пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F};\ {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ - квазибанаховы пространства последовательностей. Будем говорить, что

- $\mathfrak{U}$ *вложено* в $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{U}$ подмножество $\mathfrak{F}$, то есть $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$;

- $\mathfrak{U}$ *плотно вложено* в $\mathfrak{F}$, если замыкание $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{F}$;

- $\mathfrak{U}$ *плотно и непрерывно вложено* в $\mathfrak{F}$, если для всех $u \in \mathfrak{U}$ выполняется ${}_{\mathfrak{U}}\|u\| \geq C \cdot {}_{\mathfrak{F}}\|u\|$, где $C \in \mathbb{R}_+$ - некоторая константа, которая не зависит от u. Плотное и непрерывное вложение будем обозначать символом $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Теорема 1.1 *При всех* $p \in \mathbb{R}_+,\ m \in \mathbb{R},\ l \leq m$, *имеют место плотные и непрерывные вложения* $\ell_p^m \hookrightarrow \ell_p^l$.

1.2 Линейные операторы в квазибанаховых пространствах последовательностей

Теперь пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\, {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F};\, {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ — квазибанаховы пространства последовательностей. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$ называется *непрерывным*, если $\lim\limits_{n\to\infty} Lu_n = L\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\right)$ для любой сходящейся в $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ и *ограниченным*, если при любом $u \in \mathfrak{U}$

$$ {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| \le K \cdot {}_{\mathfrak{U}}\|u\|, $$

где $K \in \mathbb{R}_+$ не зависит от u.

Лемма 1.2 (*лемма о локальной непрерывности*). *Пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}; d_1)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}; d_2)$ два метрических пространства и оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$, определенный в окрестности точки $u_0 \in \mathfrak{U}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *L непрерывное отображение в точке $u_0 \in \mathfrak{U}$, т.е.*
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \forall u \in \mathfrak{U} \quad d_1(u, u_0) < \delta \Rightarrow d_2(Lu, Lu_0) < \varepsilon;$

2) *прообраз открытого в $\mathfrak{F}$ множества открыт в $\mathfrak{U}$;*

3) *для любой последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$, последова–тельность $\{Lu_n\}$ является сходящейся в $\mathfrak{F}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} Lu_n = L\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\right)$.*

Множество всех линейных $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ ограниченных операторов, отображающих пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$, таких что $\operatorname{dom} L = \mathfrak{U}$ является линеалом, который мы будем обозначать символом $\mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. На этом линеале определена неотрицательная функция

$$ {}_{\mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|. $$

Теорема 1.2 *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ - квазибанаховы пространства последовательностей. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ такой, что $\operatorname{dom} L = \mathfrak{U}$, непрерывен тогда и только тогда, когда ограничен.*

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{F}$ - квазибанаховы пространства последовательностей и заданы операторы $T : \mathfrak{V} \to \mathfrak{F}$ и $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$, тогда оператор $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ определяется формулой

$$Mu = T(Lu) \quad (u \in \mathfrak{U})$$

и называется *композицией* операторов T и L ($M = TL$).

Лемма 1.3 *Пусть* $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{F}$ *- квазибанаховы пространства последовательностей, операторы* $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ *и* $L \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ *(линейные и непрерывные), тогда оператор* M *ограничен, т.е.* $M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, *и*

$${}_{\mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|M\| = {}_{\mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|TL\| \leq {}_{\mathfrak{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{F})}\|T\|_{\mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}\|L\|.$$

Утвеждение леммы, следуя определению квазинормы, вообще говоря происходит из оценки

$${}_{\mathfrak{F}}\|Mu\| = {}_{\mathfrak{F}}\|T(Lu)\| \leq {}_{\mathfrak{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{F})}\|T\|_{\mathfrak{V}}\|Lu\| \leq {}_{\mathfrak{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{F})}\|T\|_{\mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}\|L\|_{\mathfrak{U}}\|u\|.$$

Оператор $L \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ *является обратимым, если существует оператор* $L^{-1} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$, *такой что* $L^{-1}L = \mathbb{I}_{\mathfrak{U}}, LL^{-1} = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}}$. *Обратимый оператор* $L \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ *называется непрерывно обратимым, если* $L^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$. *Непрерывный оператор называется топлинейным изоморфизмом, если* $\operatorname{dom} L^{-1} = \mathfrak{F}$.

Теорема 1.3 (*аналог теоремы Банаха*). *Пусть* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{F}$ *- квазибанаховы пространства последовательностей, тогда биективный оператор* $L \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ – *топлинейный изоморфизм.*

Известно, что оператор Лапласа $-\Delta$, определяемый формулой

$$-\langle \Delta u, v \rangle = \sum_{m=1} \int_{\Omega} u_{x_m} v_{x_m} dx,$$

задает топлинейный изоморфизм:

$$-\Delta \; : \; W_2^1(\Omega) \to W_2^{-1}(\Omega). \tag{1.2.1}$$

Теперь пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – множество собственных значений оператора Лапласа, нумеруется по неубыванию с учетом кратности.

Построим пространства:

$$l_2^1 = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k|^2 < \infty \right\},$$

$$l_2^{-1} = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |u_k|^2 < \infty \right\}$$

здесь топлинейные изоморфизмы $l_2^1 \cong W_2^1(\Omega)$, $l_2^{-1} \cong W_2^{-1}(\Omega)$ и так же отметим плотность и непрерывность вложений

$$l_2^1 \hookrightarrow l_2 \hookrightarrow l_2^{-1}. \tag{1.2.2}$$

Пространства l_2^1, l_2^{-1} – банаховы с нормами $\|u\|_1^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k|^2$, $\|v\|_{-1}^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |v_k|^2$. Рассмотрим квазиоператор Лапласа

$$\Lambda u = \lambda_k u_k, \tag{1.2.3}$$

Так как $\|\Lambda u\|_{-1} = \|u\|_1$, то из (1.2.3) следует топлинейность изоморфизма $\Lambda : l_2^1 \to l_2^{-1}$, который можно получить из (1.2.1), (1.2.2). Квазиоператор Грина Λ^{-1} является обратным к Λ и задается формулой

$$\Lambda^{-1} v = \lambda_k^{-1} v_k. \tag{1.2.4}$$

Построим квазисоболевы пространства

$$l_p^1 = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{p}{2}} |u_k|^p < \infty \right\},$$

$$l_p^{-1} = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-\frac{p}{2}} |u_k|^p < \infty \right\},$$

где $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$, $p \in (0,1)$. Так же как в в пространствах Соболева W_p^m введем в рассмотрение квазисоболевы пространства

$$\ell_p^m = \left\{ \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^p < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}_+$. Пространства ℓ_p^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$$ {}_p^m\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}, $$

причем они тоже банаховы только если $p \in [1, +\infty)$. Если $p \in (0,1)$, то константа $C = 2^{\frac{1}{p}}$. Заметим еще, что если $m = 0$, то $\ell_p^0 = \ell_p$.

Теорема 1.4 *При всех $p \in \mathbb{R}_+,\ m \in \mathbb{R},\ l \leq m$, имеют место плотные и непрерывные вложения $\ell_p^m \hookrightarrow \ell_p^l$.*

Теорема 1.5 *При всех $p \in \mathbb{R}_+,\ m \in \mathbb{R}$ квазиоператор Лапласа $\Lambda : \ell_p^{m+2} \to \ell_p^m$ – топлнейный изоморфизм.*

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ - квазибанаховы пространства последовательностей, $\mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ - линеал всех линейных ограниченных операторов, отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$.

Теорема 1.6 *(теорема о продолжении) Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ - квазибанаховы пространства последовательностей. Любой линейный непрерывный оператор $L : \operatorname{dom} L \to \mathfrak{F}$ с плотной областью определения $(\overline{\operatorname{dom} L} = \mathfrak{U})$ можно продолжить единственным образом, до линейного непрерывного оператора $\tilde{L} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, определенного на всем пространстве $\mathfrak{U}$.*

Лемма 1.4 *Функция ${}_{\mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|\cdot\| : \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \to \mathbb{R}_+$ – квазинорма.*

Теорема 1.7 *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства последовательностей, тогда $\mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ – квазибанахово пространство с квазинормой ${}_{\mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|\cdot\|$*

1.3 Резольвента и спектр линейных ограниченных операторов

Пусть $\mathfrak{F}$ – квазибанахово пространство последоваетльностей, $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}) \equiv \mathfrak{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{F})$ – квазибанахово пространство линейных ограниченных операторов.

Теорема 1.8 *Пусть $\mathfrak{F}$ - квазибанахово пространство последовательностей, оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ и ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\| < 1/C$. Тогда оператор $T = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M$ непрерывно обратим и*

$$ {}_{\mathfrak{L}(\mathfrak{F})}\left\|T^{-1}\right\| \leq \frac{C}{1 - C \cdot {}_{\mathfrak{L}(\mathfrak{F})}\|M\|}, $$

где C — константа из определения квазинормы.

Определение 1.3 *Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется регулярной точкой оператора $M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$, если существует оператор $R_\lambda(M) = (\lambda\mathbb{I} - M)^{-1}$ (резольвента оператора M). Резольвентным множеством оператора M называется множество регулярных точек $\rho(M)$ оператора M.*

Определение 1.4 *Комплексное число λ, называется спектральной точкой или спектральным значением оператора M, если не входит в резольвентное множество. Множество спектральных точек $\sigma(M)$ есть спектр оператора M.Таким образом, $\sigma(M) = \mathbb{C} \backslash \rho(M)$.*

Спектр всегда непуст, замкнут и лежит в круге $|\lambda| \leq C \cdot_{\mathfrak{L}(\mathfrak{F})} \|M\|$. Точнее, *спектр $\sigma(M)$ лежит в круге, радиус которого равен $C \cdot r_M$*, где

$$ r_M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M^n\|}. $$

При $|\lambda| > C \cdot r_M$ резольвента всегда существует и $R_\lambda(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{\lambda^{k+1}}$. Для резольвенты выполняется *тождество Гильберта*

$$ R_\lambda(M) - R_\mu(M) = (\mu - \lambda) R_\lambda(M) R_\mu(M), \quad \lambda, \mu \in \rho(M). \tag{1.4.2} $$

Теорема 1.9 *Пусть $\mathfrak{F}$ - квазибанахово пространство последовательностей, оператор $M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$. Тогда резольвентное множество $\rho(M)$ открыто, а резольвента $R_\lambda(M)$ оператора M есть аналитическая функция переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ в окрестности некоторой регулярной точки $\mu \in \rho(M)$, при этом, для $|\mu - \lambda| < 1/(C \cdot_{\mathfrak{L}(\mathfrak{F})} \|R_\mu(M)\|)$ справедливо*

$$ R_\lambda(M) = R_\mu(M) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu - \lambda)^k R_\mu^{k+1}(M). \tag{1.4.3} $$

1.4 Аналитические функции операторов

Пусть D - ограниченная область в $\mathbb{C}$ и пусть вектор-функция $f(z)$ определена на D и область значений лежит в квазибанаховом пространстве последовательностей $\mathfrak{F}$. Будем говорить, что $f(z)$ *аналитична* в D, если для любого $z_0 \in D$ существует окрестность V_{z_0}, в которой функция $f(z)$ может быть представлена как сумма степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n, \quad f_n \in \mathfrak{F}.$$

Рядом Лорана будем называть степенной ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n,$$

где $a \in \mathbb{C}$, элементы $c_n \in \mathfrak{F}$,. Если вектор-функция может быть представлена сходящимся рядом Лорана в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$, то *вычетом* функции в этой точке назовем коэффициент c_{-1} лорановского разложения. Обратимся к классификации изолированных особых точек в теории функций комплексного переменного:

1) Точка называется *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(z)$.

2) $z = a$ называется *полюсом* $f(z)$ – аналитической функции, если $\exists \lim\limits_{x \to a} f(z) = \infty$

3) $z = a$ называется *существенной особой точкой* $f(z)$ – аналитической функции, если $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(z)$.

Интеграл от вектор-функции $f(z)$ по замкнутому гладкому контуру $\Gamma \subset \mathbb{C}$ есть сумма вычетов в изолированных особых точках, находящихся внутри некоторого замкнутого контура Γ, умноженной на коэффициент $2\pi i$. Так же для аналитических вектор-функций всегда справедлива классическая теорема Коши о равенстве нулю интеграла по замкнутому контуру.

Пусть $M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$, класс всех функций комплексного переменного $\varphi(\lambda)$ *кусочно-аналитических на спектре* $\sigma(M)$ обозначим через K_M. Это означает, что функция $\varphi \in K_M$, если она обладает следующими свойствами:

1) область определения функции $\varphi(\lambda)$ состоит из конечного числа открытых связных множеств, в объединении которых содержится спектр $\sigma(M)$ оператора M, и притом каждое множество содержит в себе хотябы одну точку спектра;

2) функция $\varphi(\lambda)$ кусочно-голоморфна, то есть голоморфна в каждой компоненте своей области определения.

Если две функции $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda) \in K_M$ совпадают на некоторой открытой окрестности спектра $\sigma(M)$, из этого следует то, что они являются аналитическим продолжением друг друга. Такие функции мы будем считать равными.

Для $\varphi \in K_M$ всегда найдется гладкий, сложный контур Γ_M, охватывающий спектр $\sigma(M)$. Вообще говоря, Γ_M можно разделить на конечное число границ некоторых открытых множеств, объединение которых принадлежит области определения φ и накрывает спектр $\sigma(M)$, каждый из жордановых контуров "положительно"ориентирован, т. е. ориентирован так, чтобы при движении в заданном направлении по контуру соответствующее множество оставалось слева. После этого положим для $\varphi \in K_M$

$$\varphi(M) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_M} \varphi(\lambda) R_\lambda(M) d\lambda.$$

Теорема Коши говорит о независимости интеграла от выбора контура. В частности, операторная экспонента e^{Mt} и сам оператор M задаются следующим образом:

$$e^{Mt} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_M} e^{\lambda t} R_\lambda(M) d\lambda, \quad M = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_M} \lambda R_\lambda(M) d\lambda.$$

Рассмотрим оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, спектр которого образует несвязное множество. *Спектральным множеством* называется замкнутая часть спектра, имеющая в нем замкнутое дополнение.

Предположим, что

$$\sigma(M) = \bigcup_{k=1}^{m} \sigma_k(M),$$

где $\sigma_k(M)(k = \overline{1,m})$ – непересекающиеся спектральные множества. Будем считать, что контур Γ_M состоит из непересекающихся частей $\Gamma_k(k = \overline{1,m})$, каждая из которых окружает область G_k, содержащую соответствующее спектральное множество $\sigma_k(M)$.

Зададим функции

$$\varphi_k(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda \in G_k, \\ 0, & \text{если } \lambda \in G_j, \quad j \neq k \end{cases}$$

Функции $\varphi_k(M) \in K_M(k = \overline{1,m})$, и поэтому имеют смысл операторы

$$P_k = \varphi_k(M) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_M} \varphi_k(\lambda) R_\lambda(M) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_M} R_\lambda(M) d\lambda.$$

Последний интеграл в этом равенстве известен под названием *интеграл Ф. Рисса.* Поскольку в области $G = \bigcup_{k=1}^{m} G_k$ выполняются *соотношения*

$$\varphi_k(\lambda)\varphi_j(\lambda) = \delta_{kj}\varphi_k(\lambda),$$

(δ_{kj} здесь символ Кронекера);

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\lambda) \equiv 1,$$

то справедливы равенства

$$P_k P_j = 0 \ \ (k \neq j); \quad P_k^2 = P_k; \quad \sum_{k=1}^{m} P_k = I.$$

Теорема 1.10 *Пусть $M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ и функция $\varphi \in K_M$. Тогда*

1. *Оператор $\varphi(M) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ обратим тогда и только тогда, когда $\varphi(\lambda) \neq 0$ при каждом $\lambda \in \sigma(M)$;*

2. *$\sigma(\varphi(M)) = \varphi(\sigma(M))$.*

2 Трехточечная начально-конечная задача для уравнения соболевского типа с (L,p)-ограниченным оператором

2.1 (L,p)-ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{U}$ – квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Рассмотрим L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому L-спектр всегда замкнут и L-резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M голоморфна на $\rho^L(M)$.

Определение 2.1 *Оператор M назовем спектрально ограниченным относительно оператора L ((L,σ)-ограниченным), если*

$$\exists a \in R_+ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Определение 2.2 *Пусть $\rho^L(M) \neq 0$, тогда оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}, R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ называются соответственно L-резольвентой, правой или левой L-резольвентой оператора M.*

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, а контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Рассмотрим интегралы Ф. Рисса

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M)d\mu,$$

где $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ – правая, а $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – левая L-резольвенты оператора M. Здесь интегралы понимаются в смысле Римана. Операторы $P \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$.

Лемма 2.1 *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, тогда операторы $P \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ – проекторы.*

Пусть $\mathfrak{U}^0$ $(\mathfrak{U}^1) = \ker P$ $(\operatorname{im} P)$, $\mathfrak{F}^0$ $(\mathfrak{F}^1) = \ker Q$ $(\operatorname{im} Q)$, и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k, k = 0, 1$. Из леммы 2.1 следует, что проекторы P, Q расщепляют пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ в прямые суммы $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$.

Теорема 2.1 ***(Теорема о расщеплении)*** *Пусть оператор $M(L, \sigma)$-ограничен, тогда*

1. *Операторы $L_k, M_k \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k),\ k = 0, 1$*

2. *Существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$.*

В силу теоремы о расщеплении, существуют операторы:

$$H = M_0^{-1} L_0 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^0) \text{ и } S = L_1^{-1} M_1 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^1).$$

Следствие 2.1 *В условиях теоремы о расщеплении для любых $\mu \in \mathbb{C}, |\mu| > a$, имеем*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} (Q).$$

Пусть $G = L_0 M_0^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^0),\ T = M_1 L_1^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^1)$ и выполняются условия следствия, тогда

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k M_0^{-1} G^k (\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} L_1^{-1} T^{k-1} Q.$$

Определение 2.3 *Для L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M бесконечно удаленную точку будем называть*

- *устранимой особой точкой, если $H = \mathbb{O}$;*

- *полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$;*

- *существенно особой точкой, если $H^p \neq \mathbb{O}$ для любого $p \in \mathbb{N}$.*

Определение 2.4 *оператор M называется (L,p)-ограниченным, если (L,σ)-ограничен и ∞ является полюсом порядка p, где $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его L-резольвенты.*

Определение 2.5 *(L,σ)-ограниченный оператор M назовем*

- *$(L,0)$-ограниченным, если $H \equiv \mathbb{O}$;*
- *(L,p)-ограниченным, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$ при $p \in N$*

Лемма 2.2 *Пусть оператор L, непрерывно обратим, тогда справедливо $\sigma^L(M) = \sigma(S)$.*

Пусть $\mu \in \rho^L(M)$, тогда из тождеств:

$$(\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} = \mathbb{I} + (\lambda - \mu)L(\mu L - M)^{-1},$$

$$(\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M) = \mathbb{I} + (\lambda - \mu)(\mu L - M)^{-1}L$$

справедливы L-резольвентные тождества, являющиеся аналогами тождества Гильберта:

$$(\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1}L(\lambda L - M)^{-1},$$

$$R^L_\lambda(M) - R^L_\mu(M) = (\mu - \lambda)R^L_\mu(M)R^L_\lambda(M)$$

$$L^L_\lambda(M) - L^L_\mu(M) = (\mu - \lambda)L^L_\mu(M)L^L_\lambda(M)$$

Теорема 2.2 *Пусть операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, тогда L-резольвента, правая и левая L-резольвента оператора M аналитичны в $\rho^L(M)$.*

Мы будем считать термины "оператор $M(L,p)$-ограничен,$p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$"и "оператор $M(L,\sigma)$-ограничен, при этом ∞ – несущественная особая точка L-резольвенты оператора M" эквивалентными.

Замечание 2.1 *оператор $M(L,0)$-ограничен, если* $\ker L = \{0\}$.

2.2 Существование решений для одного класса линейных динамических уравнений

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства, операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{2.2.1}$$

Рассмотрим разрешимость задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{2.2.2}$$

для динамических уравнений в квазисоболевых пространствах.

Определение 2.6 *Вектор-функцию $u \in C^{\infty}((a,b),\mathfrak{U})$ назовем решением уравнения (2.2.1), если она удовлетворяет ему.*

Решение $u = u(t)$ уравнения (2.2.1) назовем решением задачи Коши (2.2.2), если оно так же удовлетворяет условию Коши (2.2.2) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Определение 2.7 *Множество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$ называется фазовым пространством уравнения (2.2.1), если*

1. *любое решение уравнения (2.2.1) лежит в $\mathfrak{B}$ как траектория (т.е. $u(t) \in \mathfrak{B} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$);*
2. *при любом $u_0 \in \mathfrak{B}$ существует единственное решение задачи (2.2.2).*

Теорема 2.3 *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения (2.2.1) служит подпространство $\mathfrak{U}^1$.*

Лемма 2.3 *Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{r+2n}$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^r$. Тогда $L,\ M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$.*

Определение 2.8 *Отображение $\operatorname{im} U^{\bullet} \in C^{\infty}((a,b),\mathfrak{U})$ назовем группой разрешающих операторов уравнения (2.2.1), если:*

- $U^s U^t = U^{s+t}$ *при любых* $s, t \in \mathbb{R}$;
- $\forall\, u_0 \in \mathfrak{U}$ *вектор-функция* $u(t) = U^t u_0$ *является решением уравнения (2.2.1).*

Пусть $\{U^t : t \in R\}$ – голоморфная вырожденная группа операторов, голоморфная, если ее можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость с сохранением свойств 1 и 2 и вырожденная, если U^0 – ее единица является проектором.

Рассмотрим далее образ $\operatorname{im} U^\bullet = \operatorname{im} U^0$ и ядро $\ker U^\bullet = \ker U^0$ этой группы. Пусть $\{U^t : t \in R\}$ – разрешающая группа уравнения (2.2.1), если фазовое пространство уравнения совпадает с образом $\operatorname{im} U^\bullet$ и если решением этого уравнения является вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Теорема 2.4 *Пусть оператор* M (L, p)*-ограничен,* $p \in \{0\} \cup N$*, тогда существует единственная разрешающая группа уравнения (2.2.1), которая так же имеет вид*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu,\ t \in R,$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = h > a\}$.

В силу теоремы (2.4) решение задачи (2.2.1), (2.2.2) имеет вид $u(t) = U^t u_0$, где U^t – разрешающая группа, $u_1 \in \mathfrak{U}^1$, а группа $U^t = e^{St}$, где $S = l_1^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$.

Единственная разрешающая группа уравнения (2.2.1) может не быть единственной голоморфной вырожденной группой уравнения. Поэтому мы вводим в рассмотрение условие для относительного спектра

$$\sigma^L(M) = \bigcup_{j=0}^{2} \sigma^L_j(M), \ \ \sigma^L_j(M) \neq \oslash \tag{2.2.3}$$

причем существует ограниченная область $\Omega_j \subset \mathbb{C}$ с границей $\partial\Omega_j$ класса $\mathbb{C}^1, \Omega_j \supset \sigma_j^L(M)$ и $\bar{\Omega}_j \cup \sigma_0^L(M) = \oslash,\ \bar{\Omega}_k \cup \bar{\Omega}_l = \oslash \quad \forall j,k,l = 1,2,\ k \neq l.$

Теорема 2.5 *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен и выполнено условие (2.2.3), тогда существуют голоморфные вырожденные группы уравнения (2.2.1).*

Доказательство. Построим интегралы типа Данфорда-Тейлора (являются интегралами Римана)

$$U_j^t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu,\ j = 1,2.$$

Так как выполнено условие (2.2.3), то группа уравнения (2.2.1) является аналитичной во всей комплексной области. Исходя из теоремы (2.4) Группу $U^\bullet \in \mathbb{C}^\infty(R, L(T))$ можно продолжить на всю комплексную плоскость. Можно установить, что голоморфная группа вырожденная, так как

1. единица группы является проектором
$$U_j^0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu = P_j,$$
2. $U_j^t U^s = U^s U_j^t = U_j^{s+t}$ при всех $s,t \in \mathbb{R}, j = 1,2;$
3. $u_j(t) = U_j^t u_0.$

Следствие 2.2 *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, тогда*

1. $U^t U_j^s = U_j^s U^t = U_j^{s+t}$ *при всех* $s,t \in \mathbb{R},\quad j = 1,2;$
2. $U_k^t U_l^s = U_l^s U_k^t = \mathbb{O}$ *при всех* $s,t \in \mathbb{R},\quad k,l = 1,2,\ k \neq l.$

Зададим $U_0^t = U^t - U_1^t - U_2^t.$

Следствие 2.3 *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен и выполнено условие (2.2.3), тогда $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ - голоморфная вырожденная группа уравнений (2.2.1).*

Замечание 2.2 *Рассмотрим единицы* $P_j = U_j^0, j = 0, 1, 2;$. *В силу условия (2.2.3) голоморфных вырожденных групп* $\{U_j^t : t \in \mathbb{R}\},\ j = 0, 1, 2$ *уравнения (2.2.1) получаем*

1. $PP_j = P_jP = P_j,\ j = 0, 1, 2; 0$

2. $P_kP_l = P_lP_k = \mathbb{O},\ k, l = 0, 1, 2,\ k \neq l.$

2.3 Относительно спектральные проекторы

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ и выполняется условие (2.2.3). Пусть $\gamma_1 = \partial\Omega_1,\ \ \gamma_2 = \partial\Omega_2$, построим операторы

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j} R_\mu^L(M)d\mu \quad \text{и} \quad Q_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j} L_\mu^L(M)d\mu,\ \ j = 1, 2; \qquad (1.6.5)$$

$P_j \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^j)$ и $Q_j \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^j),\ \ j = 1, 2.$

Лемма 2.4 *Пусть операторы* $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, *причем выполнено условие для относительного спектра (2.2.4). Тогда операторы* $Q_j : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F},\ \ j = 1, 2;$ *– проекторы, причем*

1. $QQ_j = Q_jQ = Q_j, j = 1, 2;$

2. $Q_kQ_l = Q_lQ_k = \mathbb{O},\ k, l = 1, 2,\ k \neq l.$

Замечание 2.3 *Построим оператор* $Q_0 = Q - Q_1 - Q_2$, *он является проектором, причем*

1. $QQ_0 = Q_0Q = Q_0$

2. $Q_0Q_j = Q_jQ_0 = \mathbb{O},\ j = 1, 2.$

Операторы $P_j,\ Q_j$ называются *относительно спектральными проекторами.*

Лемма 2.5 *Пусть оператор* M (L, σ)*-ограничен и выполнено условие (2.2.3). Тогда* $P_j = PP_j = P_jP$ *и* $Q_j = QQ_j = Q_jQ,\ \ j = 1, 2.$

Лемма 2.6 *Возьмем операторы $P_0 = P - P_1 - P_2$ и $Q_0 = Q - Q_1 - Q_2$, по лемме выше они являются проекторами. Пусть $\mathfrak{U}^{01}$ $(\mathfrak{F}^{01}) = \operatorname{im} P_0$ $(\operatorname{im} Q_0)$ и через L_{01} (M_{01}) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^{01}$. Пусть выполнены условия предыдущей леммы, тогда*

1. $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^{01} \oplus \mathfrak{U}^{11}, \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^{01} \oplus \mathfrak{F}^{11}$;

2. *операторы* $L_{01}, M_{01} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^{01}; \mathfrak{F}^{01})$;

3. $\sigma^{L_{01}}(M_{01}) = \sigma_0^L(M)$.

Рассмотрим $\mathfrak{U}^{11}$ $(\mathfrak{F}^{11}) = \operatorname{im} P_1$ $(\operatorname{im} Q_1)$ и $\mathfrak{U}^{12}$ $(\mathfrak{F}^{12}) = \operatorname{im} P_2$ $(\operatorname{im} Q_2)$ и через L_{11} (M_{11}), L_{12} (M_{12}) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^{11}$, $\mathfrak{U}^{12}$.

Теорема 2.6 *Пусть выполнены условия леммы 2.3, тогда*

1. *операторы* $L_{11}, M_{11} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^{11}; \mathfrak{F}^{11})$, $L_{12}, M_{12} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^{12}; \mathfrak{F}^{12})$;

2. *существует оператор* $L_{11}^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^{11}; \mathfrak{U}^{11})$ $L_{12}^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^{12}; \mathfrak{U}^{12})$;

3. $\sigma^{L_{11}}(M_{11}) = \sigma_1^L(M)$, $\sigma^{L_{12}}(M_{12}) = \sigma_2^L(M)$.

Следствие 2.4 *Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и выполнено условие (2.2.3), тогда*

$$U_j^t = e^{tS_j} P_j, \ j = 1, 2.$$

и образ группы

$$U_j^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_j} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad j = 1, 2, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{2.1.3}$$

2.4 Трехточечная начально-конечная задача

Рассмотрим разрешимость линейного неоднородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + g, \tag{2.4.1}$$

где вектор-функцию $g : [0, \tau] \to \mathfrak{U}, \tau \in \mathbb{R}_+$ определим ниже. Обозначим $g^0 = (I - Q)g$ и $g^1 = Qg$. Пусть оператор M (L, σ)-ограничен и выполнено условие (2.2.3). Рассмотрим на отрезке $[0, \tau_2]$ начально-конечную трехточечную задачу

$$P_0(u(0) - u_0) = 0,\ P_1(u(\tau_1) - u_1) = 0,\ P_2(u(\tau_2) - u_1) = 0,\ u_0, u_1, u_2 \in \mathfrak{U} \tag{2.4.2}$$

для неоднородного уравнения (2.4.1), здесь P_j – относительно спектральные проекторы из пункта 2.3.

Определение 2.9 *Решением трехточечной начально-конечной задачи (2.4.1) назовем вектор-функцию $u = u(t),\ t \in (a, b)$, удовлетворяющую условиям (2.4.2).*

Существование проекторов P_j гарантирует выполнение условия (2.2.3).

Теорема 2.7 *Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, тогда для любой аналитической вектор-функции $g : [0, \tau_2] \to \mathfrak{F}$ и любого $u_j \in \mathfrak{U},\ \ j = 0, 1, 2$ существует единственное решение $u \in C^1([0, \tau]; \mathfrak{U})$ задачи (2.4.2) для уравнения (2.4.1), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{p} (M_0^{-1}L_0)^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)g^{(k)}(t) + U_0^{t-\tau_0}u_0 + U_1^{t-\tau_1}u_1 + U_2^{t-\tau_2}u_2 + \tag{1}$$

Замечание 2.4 *В силу обобщенной спектральной теоремы и теоремы Свиридюка о расщеплении уравнение (2.4.1) можно свести к системе*

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)g,\ \ \dot{u}^{1j} = S_j u^{1j} + L_{1j}^{-1} Q_j g,\ \ j = 0, 1, 2; \tag{2.4.4}$$

где $u^0 = (\mathbb{I} - P)u,\ \ u^{1j} = P_j u,\ \ j = 0, 1, 2$. Каждое уравнение определено на соответствующем ему подпространстве. Первое уравнение из системы продифференцируем почленно и умножим слева на оператор H, так *как он является нильпонентным, получим*

$$u^0(t) = -\sum_{k=0} H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)g^{(k)}(t). \tag{2.4.5}$$

Для остальных двух уравнений системы условия (1.4.8) являются условиями Коши

$$u^{11}(\tau_1) = P_1 u_1, \quad u^{12}(\tau_2) = P_2 u_2.$$

Решая задачи в итоге получаем

$$u^{1j}(t) = U_j^{t-\tau_j} u_j + \int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s} L_{1j}^{-1} Q_j g(s)ds, \ \ j = 0, 1, 2. \tag{2.4.6}$$

$$u(t) = U^t Q_0 u_0 + \int_0^t U^{t-s} L^{-1} Q_0 g(s)ds +$$

$$+ U^{t-\tau_1} Q_1 u_{\tau_1} + U^{t-\tau_2} Q_2 u_{\tau_2} - \int_{\tau_1}^{t} U^{t-s} L^{-1} Q_1 g(s)ds - \int_{\tau_2}^{t} U^{t-s} L^{-1} Q_2 g(s)ds -$$

$$- \sum_{q=0} H^q M_0^{-1} \frac{h^q}{dt^q} (\mathbb{I} - Q) g^0(t).$$

2.5 Уравнение Хоффа в квазисоболевских пространствах

Рассмотрим аналог линеаризованного уравнения Хоффа

$$(\lambda + \Lambda)u_t = \alpha u, \quad \lambda, \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.5.1}$$

в квазисоболевых пространствах $\mathfrak{U} = l_q^{r+2n}$ и $\mathfrak{F} = l_q^r$ при $r \in \mathbb{R}$ и $q \in \mathbb{R}_+$, а последовательность $\{\lambda_k \subset \mathbb{R}_+\}$, такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_f = +\infty$.

Оператор $\Lambda^n : l_q^{r+2n} \to l_q^r$. Пусть операторы $L == \lambda + \Lambda$ и $M = (\Lambda) = \alpha\,\mathbb{I}$, тогда исходя из леммы 2.3 операторы $L, M \in \mathfrak{L}(l_q^{r+2}; l_q^r)$.

L-спектр оператора M состоит из

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \mu_k = \frac{\alpha}{\lambda + \lambda_k}, \text{ при } k : \lambda_k \neq -\lambda \right\}. \tag{2.5.2}$$

Лемма 2.7 *Пусть* $\mathfrak{U} \in l_q^{r+2}$ *и* $\mathfrak{F} \in l_q^r$ *при* $r \in \mathbb{R}$ *и* $q \in \mathbb{R}_+$, *тогда для любых* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *оператор* M $(L,0)$*-ограничен.*

В соответствии с теоремой 2.4 существует разрешающая группа уравнения (2.5.1), которая имеет вид

$$U^t = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\frac{\alpha}{\lambda+\lambda_k}t}\langle\cdot, e_k\rangle e_k, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda, k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k\neq l} e^{\frac{\alpha}{\lambda+\lambda_k}t}\langle\cdot, e_k\rangle e_k, & \text{если существует } l \in \mathbb{N} : \lambda_l = -\lambda. \end{cases}$$

Начальное значение $\{u_{0k}\} = u_0 \in l_q^{r+2}$, векторы $e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, в которых единица стоит на k-том месте. Исходя из теоремы 2.3 образ $\operatorname{im} U^\bullet$ совпадает с фазовым пространством уравнения (2.5.1). И оно имеет вид

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} l_q^{r+2}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda, \forall k \in \mathbb{N}; \\ \{u \in l_q^{r+2} : u_k = 0, \ \ \lambda_k = -\lambda\}. & \end{cases}$$

Перейдем к разрешимости неоднородного уравнения Хоффа

$$(\lambda + \Lambda)u_t = \alpha u + g \tag{2.5.3}$$

где вектор-функция $g : [0, \tau] \to l_q^{r+2}, \ \tau \in \mathbb{R}_+$ будет определена далее.

Для постановки трехточечной начально-конечной задачи определим вид оператора P

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda, \forall\ k \in \mathbb{N}; \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{k\in\mathbb{N}:k=l} \langle\cdot, e_k\rangle e_k, & \text{если } \lambda_l = -\lambda \text{ для некоторого } l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Таким же образом построим оператор

$$L_1^{-1} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda + \lambda_k)^{-1}\langle\cdot, e_k\rangle e_k, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda, \forall k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k\in\mathbb{N}:k=l} (\lambda + \lambda_k)^{-1}\langle\cdot, e_k\rangle e_k, & \text{если } \lambda_l = -\lambda \text{ для некоторого } l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

и

$$\mathfrak{F}^0 = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda, \ \forall k \in \mathbb{N}; \\ \{f \in \mathfrak{F} : f_k = 0, k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = -\lambda\}\}; \end{cases}$$

$$\mathfrak{F}^1 = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda, \forall k \in \mathbb{N}; \\ \{f \in \mathfrak{F} : f_k = 0, \lambda_k = -\lambda\}; \end{cases}$$

Замечание 2.5 *Пусть выполнено условие (2.2.3) и $\sigma_0^L \neq \oslash$. Рассмотрим трехточечную начально-конечную задачу (2.5.5)*

$$\sum_{\mu_k \in \sigma_0^L(M)} \langle u(0) - u_0, e_k \rangle e_k = 0,$$

$$\sum_{\mu_k \in \sigma_1^L(M)} \langle u(\tau_1) - u_{\tau_1}, e_k \rangle e_k = 0,$$

$$\sum_{\mu_k \in \sigma_2^L(M)} \langle u(\tau_2) - u_{\tau_2}, e_k \rangle e_k = 0$$

для уравнения (2.5.3). В силу леммы 2.4 справедлива следующая теорема

Теорема 2.8 *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, выполено условие (2.2.3) и $\sigma_0^L(M) \neq \oslash$. Тогда для любой аналитической вектор-функции $g : [0, \tau_2] \to l_q^r$, а так же для любых $u_0, u_{\tau_1},\ u_{\tau_2} \in l_q^{r+2}$, существует единственное решение $u \in C^1([0, \tau_2]; l_q^{r+2})$ задачи (2.5.5) которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = \sum_{l \in \mathbb{N}: \lambda_l = -\lambda} \frac{\langle g(t), e_l \rangle}{\alpha} e_l +$$

$$+ \sum_{\mu_k \in \sigma_0^L(M)} e^{\mu_k t} \langle u_0, e_k \rangle + \int_0^t \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{\lambda + \lambda_k} e^{\mu_k (t-s)} ds \quad e_k +$$

$$+ \sum_{\mu_k \in \sigma_1^L(M)} e^{\mu_k (t-\tau_1)} \langle u_{\tau_1}, e_k \rangle - \int_{\tau_1}^t \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{\lambda + \lambda_k} e^{\mu_k (t-s)} ds \quad e_k +$$

$$+ \sum_{\mu_k \in \sigma_2^L(M)} e^{\mu_k (t-\tau_2)} \langle u_{\tau_2}, e_k \rangle - \int_{\tau_2}^t \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{\lambda + \lambda_k} e^{\mu_k (t-s)} ds \quad e_k$$

Здесь μ_k взяты из (2.5.2).

Заключение

В работе было рассмотрено понятие квазибанахова пространства последовательностей l_p^m, $m \in \mathbb{R}$, $p \in (0, +\infty)$. Так же был рассмотрен квазиоператор Лапласа и была поставлена трехточечная начально-конечная задача

$$P_0(u(0) - u_0) = 0,\ P_1(u(\tau_1) - u_1) = 0,\ P_2(u(\tau_2) - u_1) = 0,\ u_0, u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$$

для уравнения соболевского типа в квазибанаховых пространствах. Где $-\infty \leq \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \leq +\infty$, P_0, P_1, P_2 – относительно спектральные проекторы. Обозначено условие существования и единственности решения рассматриваемой задачи в квзибанаховых пространствах. Главным результатом работы является разрешимость трехточечной начально-конечной задачи для уравнения Хоффа. Доказательство существования и единственности решения задачи приводятся в [4].

Список литературы

1. Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для линейной модели Хоффа / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия ММФ. – 2012. –№5 (264), вып.11.– С.4-12.

2. Хасан Ф.Л.: ограниченные решения одного класса линейных динамических уравнений в квазисоболевых пространствах / Ф.Л. Хасан. – дис. на соиск. уч. степ. канд. ф.-м. наук – Челябинск, 2016. – 105с.

3. Загребина, С.А. Начально-конечная задача на линейных эволюционных уравнений соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Обозрение приклад. и пром. математики. -М., 2009. – Т. 16, вып. 2.– С. 329 –330.

4. Аль-Дельфи Дж.К.: Исследование вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых пространствах / Дж.К. Аль-Дельфи. – дис. на соиск. уч. степ. канд. ф.-м. наук – Челябинск, 2015. – 98с.

5. Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для уравнения соболевского типа с (L, p)-ограниченным оператором / С.А. Загребина // Материалы докл. Междунар. симпозиума, Челябинск, 10-14 нояб. 2014г. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ.–2014.– С.19-31.

6. Аль-Дельфи Дж.К.: Квазисоболевы пространства l_p^m / Дж.К. Аль-Дельфи // Вестник ЮУрГУ. Серия ММФ. – 2013. –№5 , вып.1.– С.107-109.

7. Al-Saphory, R.A.: Quasi-Banach Space for the Sequence Space ℓ_p, where $0 < p < 1$ / R.A. Al-Saphory, A.S. Al-Janabi, J.K. Al-Delfi // Journal of college of education, №3, 2007, –С.285-295. 8. Свиридюк, Г.Ф. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. – Новосибирск, 2002. – С.221 – 225.

9. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство одной неклассической модели / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Изв. вузов. Математика.-2005.-№10.-С. 47 – 52.

10. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения.-2006.-Т. 42, №1.-С. 126 – 131.
11. Свиридюк, Г.А. О прямой и обратной задачах на уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, А.А. Баязитова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки.- 2009.-№1 (18). - С. 6 –17.
12. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида – М.: Мир, 1967.
13. Rolewicz, S. Metric Linear Spaces / S. Rolewicz. – Springer, 1985.
14. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т.49, №4. –С.47-74.
15. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02: защищена 27.12.05: утв. 10.05.06 / Шеметова Вероника Владимировна. – Магнитогорск, 2005. – 109 с. – Библиогр.:с.93 – 109.
16. Федоров, В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений соболевского типа в банаховых и локально выпуклых пространствах: дис. на соиск. уч.ст. докт. физ.-мат. наук / В.Е. Федоров. – Челябинск, 2005.
17. Kosugi, S.A Semilinear Elliptic Equation In A Thin Network – Shaped Domain / S. Kosugi // J. Math. Soc. Jap. – 2000. – Vol. 52, №3. – P. 672 – 697.
18.Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физи- ки / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (299). – С. 7–18.