

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра прикладной математики и программирования
Направление подготовки Прикладная математика

РАБОТА ПРОВЕРЕНА

Рецензент,

« ____ » _____ 2017г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н.,
доцент

_____ А.А.Замышляева
« ____ » _____ 2017 г.

Вычисление тэта-функций

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–01.03.02.2017.89.ПЗ ВКР

Руководитель работы, доцент

_____ /Ю.С. Васильев
« ____ » _____ 2017 г.

Автор работы

Студент группы ЕТ-482

_____ / С.И.Жильцов
« ____ » _____ 2017 г.

Нормоконтролер, доцент

_____ /Т.Ю. Оленчикова
« ____ » _____ 2017 г.

Челябинск 2017

АННОТАЦИЯ

Жильцов С.И.. Вычисление тэта-функции.– Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-482, 30с., 14 ил., 2 табл., библиогр. список – 5 наим., 1 прил.

В данной работе приведены начальные сведения о теории эллиптических функций. Рассмотрены тэта-функции и их свойства. Математически и при помощи программ показаны достоинства тэта-функций. Рассмотрен вывод формулы плотности вероятности для шума квантования. Эта формула, выраженная через двухмерную тэта-функцию, приведена к выражению, содержащему только одномерные тэта-функции. Проведен анализ и сравнение исходной и полученной формулы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1 Эллиптические функции.....	7
1.1 Эллиптические функции.....	7
1.2 Примеры и графики.....	8
1.3 Выводы по разделу.....	11
2 Тэта-функции.....	12
2.1 Введение в теорию тэта-функций.....	12
2.2 Соотношения между основными тэта-функциями.....	13
2.3 Графические представления тэта-функций.....	14
2.4 Выводы по разделу.....	18
3 Вывод двумерной формулы через одномерные тэта-функции и анализ.....	19
3.1 О скорости вычисления одномерных тэта-функций.....	19
3.2 Шум квантования и формула двумерной плотности вероятности шум квантования.....	19
3.3 Приведение двухмерной формулы к одномерному виду и первичный анализ	21
3.4 Анализ полученных данных.....	25
3.5 Выводы по разделу.....	29
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	30
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	31
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Текст программы.....	32

ВВЕДЕНИЕ

В наше время существует огромное множество многомерных формул, относящихся к прикладным задачам, связанных с механическими, электромагнитными, тепловыми колебаниями. Чаще всего эти формулы имеют тригонометрическое представление.

Вычислительная работа при подсчете этих формул требует больших затрат.

Цель данной работы – показать на конкретном примере достоинства тэта-функции.

В работе дано введение в теорию эллиптических функций. Будут рассмотрены одномерные и многомерные тэта-функции. Многомерная формула будет выведена на конкретном примере, через одномерные тэта-функции. Будет проведен детальный анализ изначальных и итоговых данных.

Актуальность данной работы заключается в том, что использование тэта-функций позволяет существенно уменьшить затраты на вычисления.

1 ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1.1 Эллиптические функции.

Для понимания того, для чего же нам нужно вычислять тэта-функции, давайте обратимся к теории эллиптических функций.

Начнем с определения. Эллиптическая функция — в комплексном анализе это периодическая в двух направлениях функция, заданная на комплексной плоскости. Простым языком: однозначная функция, которая не имеет предельных точек на конечном расстоянии. Если f такая, что $f(u) = f(u+C)$, где C — некоторая константа, то C является периодом функции f [2].

Если C_1, C_2, \dots, C_n — периоды функции, то число $mC_1 + mC_2$ при $\forall m \in \mathbb{Z}$ также является периодом f . Кстати, если функции $f(u)$ и $g(u)$ имеют одинаковый период, то функции:

$$f(u) \pm g(u), f(u) * g(u), \frac{f(u)}{g(u)}, f'(u),$$

имеют тот же период.

Основные свойства эллиптических функций:

1. Не существует отличных от констант целых эллиптических функций. Первая теорема Лиувилля [2].

2. Вторая теорема Лиувилля: если эллиптическая функция $f(z)$ не имеет полюсов на границе параллелограмма $\alpha + \Pi$, то сумма вычетов $f(z)$ во всех полюсах, лежащих внутри $\alpha + \Pi$ равна нулю [2].

Пояснение к первому свойству:

Первая теорема Лиувилля: если $f(u)$ — целая, двояко-периодическая функция, то $f(u)$ — величина постоянная.

Высказанная теорема представляется весьма важной по тем двум следствиям из нее, которые мы сейчас установим. Пусть две эллиптические функции $f_1(u)$ и $f_2(u)$ с одинаковыми периодами w_1 и w_2 . Положим, что они имеют в параллелограмме периодов одинаковые полюсы, с одинаковыми бесконечными частями. При этом разность будет двояко-периодической функцией без полюсов, т. е. эта разность будет целой двояко-периодической функцией, и из теоремы вытекает, что эта разность должна быть постоянной величиной [3]. Итак, мы имеем:

Следствие I. Если две эллиптические функции с одинаковыми периодами имеют в параллелограмме периодов одни и те же полюсы, с одинаковыми бесконечными частями, то они отличаются лишь постоянным слагаемым.

Положим теперь, что имеют в параллелограмме периодов одни и те же полюсы, одинаковой кратности, и одни и те же корни, одинаковой кратности. При этом отношение не будет вовсе иметь в параллелограмме ни корней, ни полюсов и должно равняться постоянной величине, т. е. мы имеем:

Следствие II. Если две эллиптические функции с одинаковыми периодами имеют в параллелограмме периодов одинаковые корни и полюсы, одной и той же кратности у обеих функций, то эти функции отличаются лишь постоянным множителем [3].

Вторая теорема Лиувилля: если эллиптическая функция $f(z)$ не имеет полюсов на границе параллелограмма, то сумма вычетов $f(z)$ во всех полюсах, лежащих внутри равна нулю[3].

Пояснение ко второму свойству:

Эллиптическая функция принимает в параллелограмме периодов всякое конечное значение одинаковое число раз.

Любая эллиптическая функция с периодами a и b может быть представлена в виде

$$f(z) = h(\wp(z)) + g(\wp(z)) * \wp'(z),$$

где h, g — рациональные функции, $\wp(z)$ — функция Вейерштрасса с теми же периодами, что и у $f(z)$. Если при этом $f(z)$ является чётной функцией, то её можно представить в виде $h(\wp(z))$, где h рациональна[4].

1.2 Примеры и графики

Основные эллиптические функции представлены ниже 1.1-1.4

$$sn(z, k) = \sin(\phi(z, k)), \quad (1.1)$$

$$cn(z, k) = \cos(\phi(z, k)), \quad (1.2)$$

$$dn(z, k) = \sqrt{1 - k^2 * sn^2 \phi(z, k)}, \quad (1.3)$$

$$cd(z, k) = \frac{cn(z, k)}{dn(z, k)}. \quad (1.4)$$

Функция $sn(z, k)$ носит название эллиптического синуса, а $cn(z, k)$ - эллиптического косинуса. Обратим внимание на тот факт, что при $k=0$, эллиптические функция представляются тригонометрическими функциями 1.5-1.8:

$$sn(z, 0) = \sin(\phi(z, 0)) = \sin(z), \quad (1.5)$$

$$cn(z, 0) = \cos(\phi(z, 0)) = \cos(z), \quad (1.6)$$

$$dn(z, k) = 1, \quad (1.7)$$

$$cd(z, k) = \cos(z). \quad (1.8)$$

Т.е. при $k=0$ эллиптические функции вырождаются в тригонометрические.

Графики эллиптических функций показаны на рисунках 1.1-1.4. Графические представления эллиптических функций:

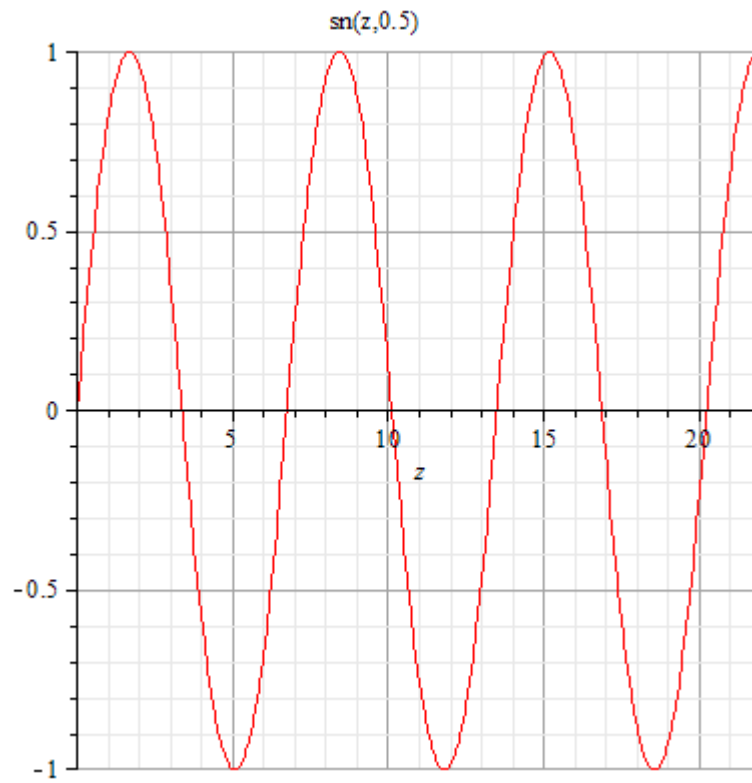


Рисунок 1.1 – Эллиптический sn с вещественным аргументом

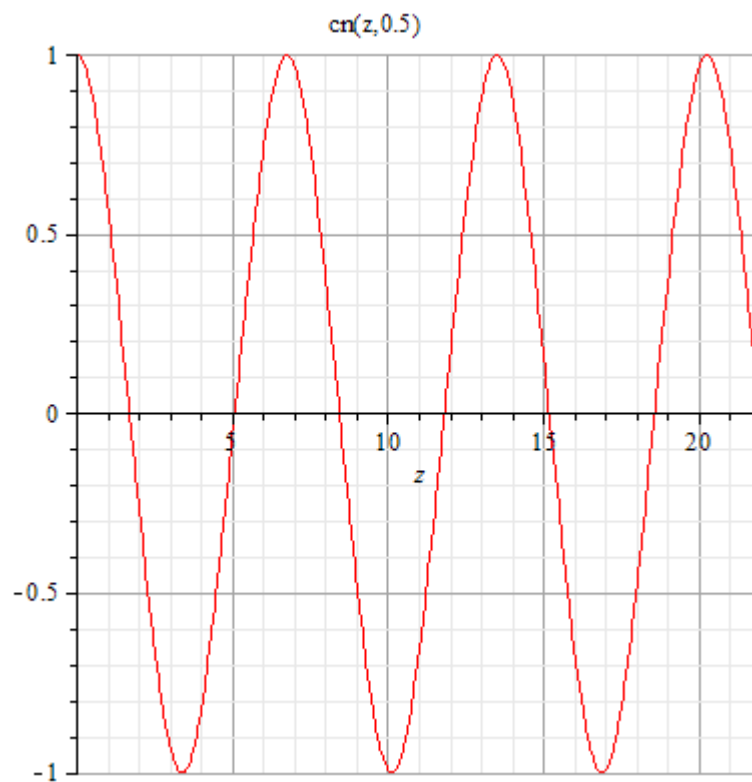


Рисунок 1.2 – Эллиптический cn с вещественным аргументом

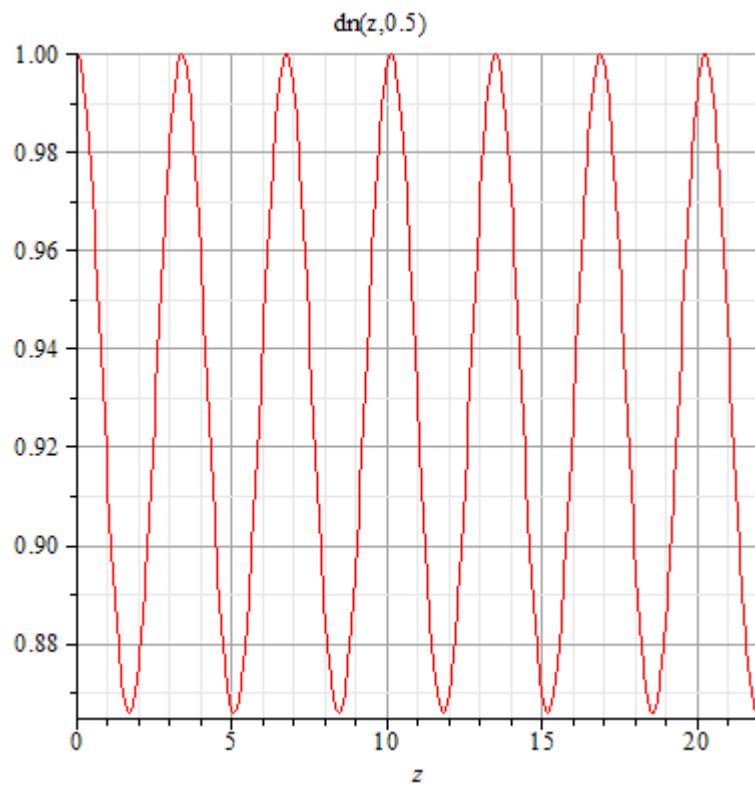


Рисунок 1.3 – Эллиптический dn с вещественным аргументом

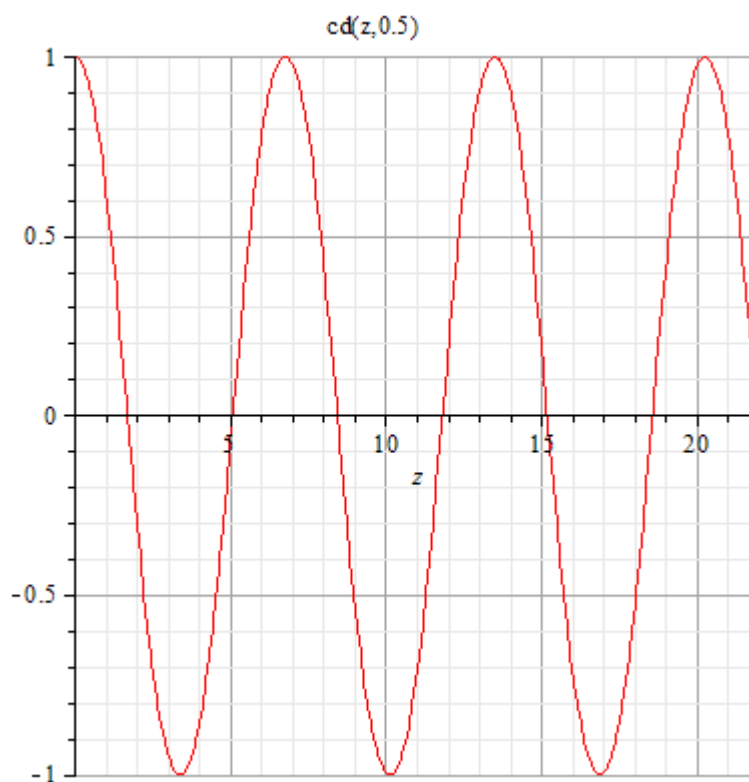


Рисунок 1.4 – Эллиптический cd с вещественным аргументом

Яркими примерами периодических функций являются тригонометрические ряды. Далее рассмотрим тригонометрические ряды, которыми и определяются тэта-функции.

1.3 Выводы по разделу

В данном разделе был рассмотрены эллиптические функции, их основные свойства и графические представления.

Основные эллиптические функции:

$$\begin{aligned}sn(z, k) &= \sin(\phi(z, k)), \\cn(z, k) &= \cos(\phi(z, k)), \\dn(z, k) &= \sqrt{1 - k^2 * sn^2 \phi(z, k)}, \\cd(z, k) &= \frac{cn(z, k)}{dn(z, k)}.\end{aligned}$$

Стоит добавить о роли эллиптических функций в современной математике. В качестве примера возьмем простой маятник:

Имея выражение для периода:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}},$$

делаем ряд замен:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= k, \sin \frac{\theta}{2} = k * \sin \varphi, \\ \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} &= k \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = k \cos \varphi, \\ \theta &= 2 \arcsin(k \sin \varphi), d\theta = \frac{2k \cos \varphi d\varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi},\end{aligned}$$

получим:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Что называется эллиптическим интегралом, это формула не может быть выражена в элементарных формулах.

2 ТЭТА-ФУНКЦИИ

2.1 Введение в теорию тэта-функций

Тэта-функция Якоби это тип комплексных функций (двойко - периодичная). Они играют важную роль в различных областях математики, прежде всего в теории чисел и в алгебраической геометрии. Тэта-функции Якоби используются для определения эллиптических функций Якоби sn, cn, dn [1].

За основную тэта-функцию примем 2.1:

$$v_3(\vartheta, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(m\tau + m\vartheta)\pi i}, \quad (2.1)$$

где ϑ – аргумент, τ – параметр.

Докажем двойко периодичность этой функции:

Приведем (посредством формулы Эйлера) формулу 1 к виду:

$$v_3(\vartheta) = 1 + 2h \cos 2\pi\vartheta + 2h^4 \cos 4\pi\vartheta + 2h^9 \cos 6\pi\vartheta + \dots$$

Из этого следует, что v_3 четная целая функция с периодом 1.

На основании этого, используя формулу 2.1:

$$v_3(\vartheta + \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(m^2\tau + 2m\vartheta + 2m\tau)\pi i} = i e^{-(2\vartheta + \tau)\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{[(m+1)^2\tau + 2(m+1)\vartheta]\pi i} i e^{-(2\vartheta + \tau)\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(n^2\tau + 2n\vartheta)\pi i}. \quad (2.2)$$

Из формулы 2.2 видно:

$$v_3(\vartheta + \tau) i e^{-(2\vartheta + \tau)\pi i} v_3(\vartheta). \quad (2.3)$$

Прологарифмируем обе части равенства 2.3 и возьмем 2-ую производную по ϑ :

Имеем:

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} \ln v_3(\vartheta + \tau) = \frac{d^2}{d\vartheta^2} \ln v_3(\vartheta), \quad (2.4)$$

подставляя в 2.4 $\tau = 1$:

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} \ln v_3(\vartheta + 1) = \frac{d^2}{d\vartheta^2} \ln v_3(\vartheta), \quad (2.5)$$

упростив равенство 2.5 перейдем к равенству:

$$\varphi(\vartheta) = \frac{d^2}{d\vartheta^2} \ln v_3(\vartheta). \quad (2.6)$$

$\varphi(\vartheta)$ является функцией с 2-умя периодами 1 и τ , значит она двойко периодическая.

Нулевыми тэта-значениями, или тэта-константами, называются величины 2.7-2.9:

$$v_2(0) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{\binom{n+1}{2}}, \quad (2.7)$$

$$v_3(0)=1+2\sum_{n=0}^{\infty}q^{n^2}, \quad (2.8)$$

$$v_4(0)=1+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nq^{n^2}. \quad (2.9)$$

являющиеся в действительности функциями комплексной переменной τ , $Im \tau > 0$. Из описания множества нулей функций $\theta_2(z)$, $\theta_3(z)$, $\theta_4(z)$ следует, что все тэта-константы θ_2 , θ_3 , θ_4 не обращаются в нуль ни в одной из точек верхней комплексной полуплоскости, т. е. множества чисел $\tau \in C$ с условием $Im \tau > 0$. Это множество в дальнейшем для краткости будет обозначаться буквой $H[4]$.

Помимо $v_3(v)$ введем еще три тэта-функции 2.10-2.12:

$$\vartheta_4(v)=\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right), \quad (2.10)$$

$$\vartheta_1(v)=ie^{-\pi i(v-\frac{\tau}{4})}\vartheta_3\left(v+\frac{1-\tau}{2}\right), \quad (2.11)$$

$$\vartheta_2(v)=e^{-\pi i(v-\frac{\tau}{4})}\vartheta_3\left(v-\frac{\tau}{2}\right). \quad (2.12)$$

которые раскладываются в ряд Фурье следующим образом и представлены на 2.13-2.16:

$$v_1(\vartheta)=2q^{\frac{1}{4}}\sin(z)-2q^{\frac{9}{4}}\sin(3z)+2q^{\frac{25}{4}}\sin(5z), \quad (2.13)$$

$$v_2(\vartheta)=2q^{\frac{1}{4}}\sin(z)+2q^{\frac{9}{4}}\sin(3z)+2q^{\frac{25}{4}}\sin(5z), \quad (2.14)$$

$$v_3(\vartheta)=1+2h\cos 2\pi\vartheta+2h^4\cos 4\pi\vartheta+2h^9\cos 6\pi\vartheta, \quad (2.15)$$

$$v_4(\vartheta)=1-2h\cos 2\pi\vartheta+2h^4\cos 4\pi\vartheta-2h^9\cos 6\pi\vartheta. \quad (2.16)$$

2.2 Соотношения между основными тэта-функциями

Соотношения между этими тэта-функциями будут выглядеть следующим образом 2.17-2.24:

$$\vartheta_0\left(z\pm\frac{1}{2}\right)=\vartheta_3(z), \quad (2.17)$$

$$\vartheta_0\left(z\pm\frac{\tau}{2}\right)=\pm ie^{-\pi i(v-\frac{\tau}{4})}*e^{\mp\pi iz}*\vartheta_1(z), \quad (2.18)$$

$$\vartheta_1\left(z\pm\frac{\tau}{2}\right)=\vartheta_2(z), \quad (2.19)$$

$$\vartheta_1\left(z\pm\frac{\tau}{2}\right)=\pm ie^{-\pi i\frac{\tau}{4}}*e^{\mp\pi iz}*\vartheta_0(z), \quad (2.20)$$

$$\vartheta_2\left(z\pm\frac{1}{2}\right)=\pm\vartheta_1(z), \quad (2.21)$$

$$\vartheta_2\left(z \pm \frac{\tau}{2}\right) = e^{-\pi i\left(v - \frac{\tau}{4}\right)} * e^{\mp \pi i z} * \vartheta_3(z), \quad (2.22)$$

$$\vartheta_3\left(z \pm \frac{1}{2}\right) = \vartheta_0(z), \quad (2.23)$$

$$\vartheta_3\left(z \pm \frac{\tau}{2}\right) = e^{-\pi i \frac{\tau}{4}} * e^{\mp \pi i z} * \vartheta_2(z). \quad (2.24)$$

2.3 Графические представления тэта-функций

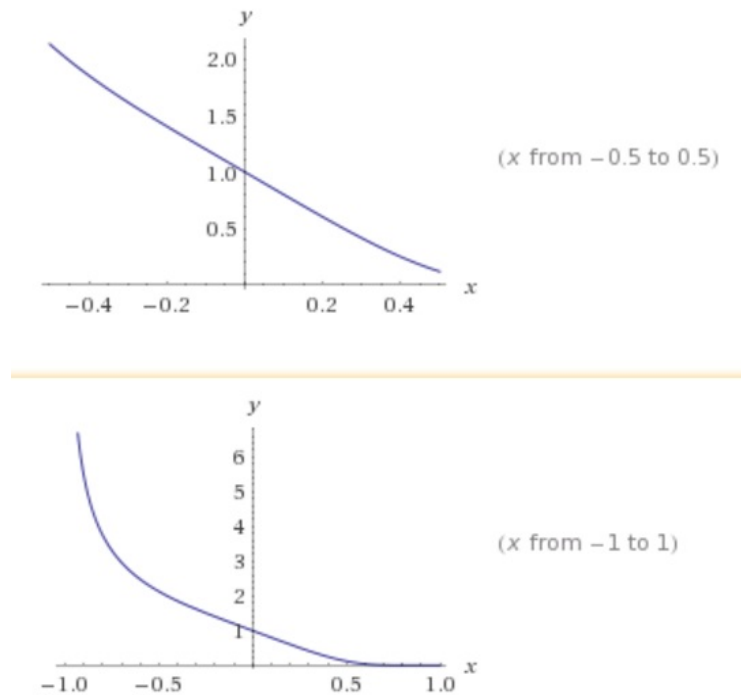


Рисунок 2.1 – Тэта-функция $\vartheta_0(v)$

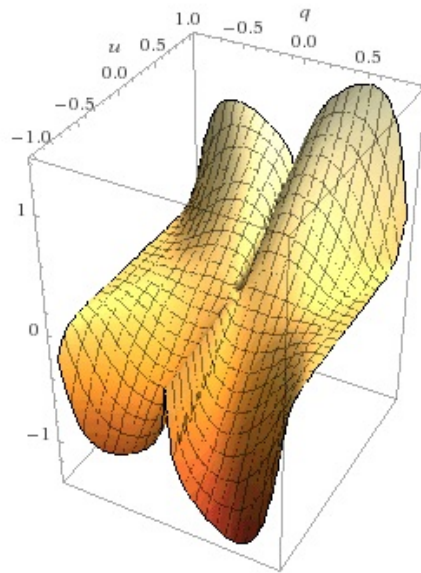


Рисунок 2.2 – Тэта-функция $\vartheta_1(v)$

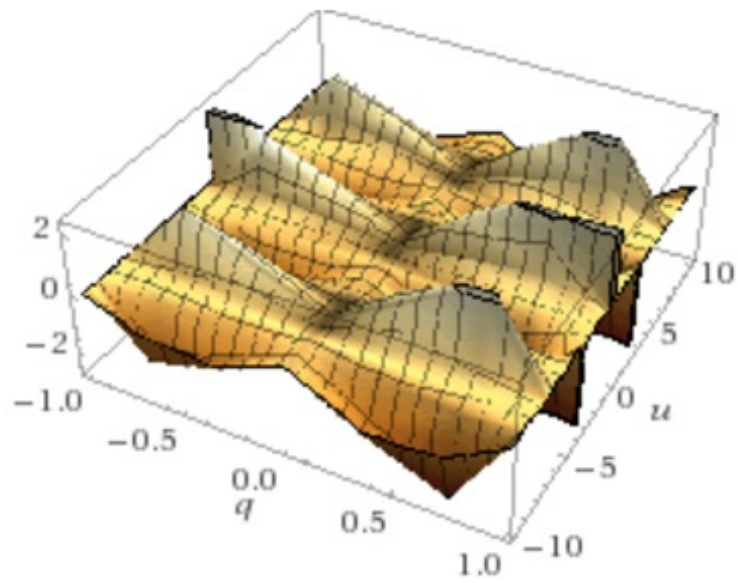


Рисунок 2.3 – Тэта-функция $\vartheta_2(v)$

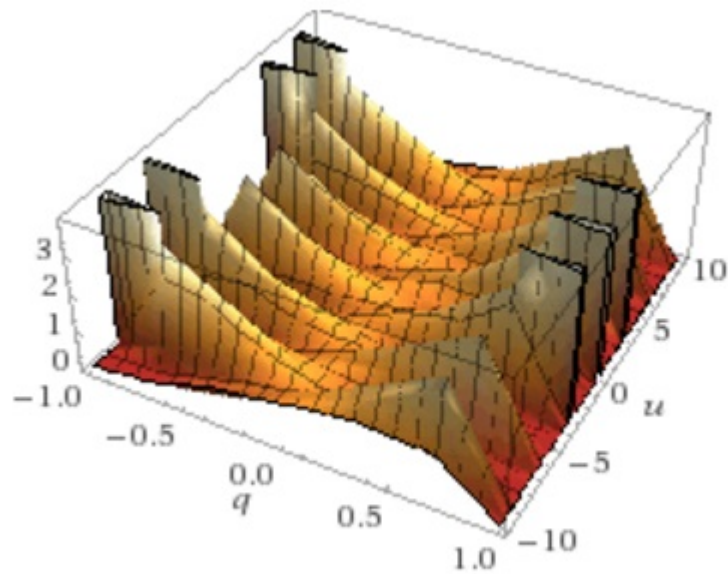


Рисунок 2.4 – Тэта-функция $\vartheta_3(v)$

Многомерные тэта-функции

Общий вид тэта-функции нескольких комплексных переменных представлен ниже 2.25:

$$2\pi i \sum_{j=1}^N z_j n_j - \sum_{i,j=1}^N t_{i,j} n_j n_i e^{i \sum_{j=1}^N z_j n_j} \quad (2.25)$$

$$v(z_1, z_2, \dots, z_N) = \sum_{n_j} e^{i \sum_{j=1}^N z_j n_j}$$

где суммирование ведется по всем возможным наборам положительных и отрицательных целых чисел, а также и по нулям для n_i . Стоит заметить, что многомерные тэта-функции обладают многими свойствами одномерных.

Самый простой способ выделить сходство одномерными - ввести более простое обозначение.

Введем некоторые элементарные векторно-матричные обозначения:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_N \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ n_N \end{pmatrix}, \quad T = (t_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.26)$$

Компоненты вектора-столбца z являются комплексными переменными, а компоненты n - положительные или отрицательные целые числа или нули. А T - это квадратная матрица, элементами которой являются комплексные числа. Давайте используем следующее обозначение:

$$(z, w) = \sum_{i=1}^N z_i w_i. \quad (2.27)$$

Где, исходя из 2.25-2.27 можем записать:

$$v(z, T) = v(z) = \sum_n e^{2\pi i(n, z) - (n, Tn)}. \quad (2.28)$$

Доказательство сходимости ряда, приведенного ниже:

Предположим, что $\theta(z, T)$ - полная функция от компоненты z и положительно-определенной симметричной матрицы T . Под этим (то, что она полная) мы имеем ввиду, что T имеет вид $T_1 + i * T_2$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$(x, T_1 x) \geq \lambda (x, x), \lambda_1 > 0$$

если для всех вещественных векторов x это условие выполнено, то легко видеть, что ряд мажорируется:

$$\left(\sum_{n_1 = -\infty}^{\infty} e^{2\pi |n_1| a_1 - n_1^2 \lambda_1} \right)^N,$$

где

$$a_1 = \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_N|).$$

Отсюда следует, что ряд для $\theta(z, T)$ абсолютно и равномерно сходится для конечного числа z и, следовательно, представляет полную функцию от $z[1]$.

Элементарные функциональные отношения

Обозначим e_k как единичный вектор (где все нули и на k -ом месте стоит 1).

$$v(z, T) = \sum_n e^{2\pi i(n + e_k, z) - (n + e_k, Tn + T e_k)} = e^{2\pi i(e_k, z) - (e_k, T e_k)} \sum_n e^{2\pi i(n, z) - (n, Tn) - 2(n, T e_k)} = e^{2\pi i(e_k, z) - (e_k, T e_k)} \sum_n \quad (2.29)$$

Следовательно, фундаментальные элементарные соотношения, которым удовлетворяют многомерные тэта-функции:

$$v(z + e_k, T) = v(z, T) \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.30)$$

Периодические для каждого компонента:

$$v(z + e_k, T) = e^{2\pi i(e_k, z) - (e_k, T e_k)} v(z, T). \quad (2.31)$$

Как и следовало, эти отношения определяют функции, вплоть до мультипликативных констант.

2.4 Выводы по разделу

В данном разделе были рассмотрены тэта-функции и их основные свойства. Доказана двояко-периодичность. Графически была показана периодичность тэта-функций. Рассмотрены многомерные тэта-функции.

Стоит отметить, что тэта-функции также как и эллиптические широко используются в математике. Например, функция:

$$v_3(z, q) = 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz),$$

является решением уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, it) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, it).$$

3 ВЫВОД ДВУМЕРНОЙ ФОРМУЛЫ ЧЕРЕЗ ОДНОМЕРНЫЕ ТЭТА-ФУНКЦИИ И АНАЛИЗ

3.1 О скорости вычисления одномерных тэта-функций

Покажем, что вычисление тэта-функций при помощи ЭВМ требует мало времени для вычислений, даже при небольшом аргумента q . Для этого была написана подпрограмма в среде разработки Maple, в которой подсчитывалось среднее время вычисления тэта-функции при различных аргументах q .

Таблица 3.1

Вычисленные значения тэта-функции

Изменение вещественного аргумента	Время вычисления тэта-функции($\vartheta_3 i$, с
[-0.4;-0.3]	0.0015100
[-0.3;-0.2]	0.0014921
[-0.2;-0.1]	0.0014930
[-0.1;0.0]	0.0015099
[0.0;0.1]	0.0015015
[0.1;0.2]	0.0014998
[0.2;0.3]	0.0014892
[0.3;0.4]	0.0015001

Время работы процессора с компиляцией – 28.86249500 (мс).
Время вычисления тэта-функции- 3.56250000 (мс).

Как видно из полученных значений, работа процессора по вычислению тэта-функций незначительная. Если бы программная среда не тратила столько времени на компиляцию, то время получения пользователем данных было бы порядка $10^{-3}(c)$.

Существует множество n -мерных функций, которые можно выразить через n -мерные тэта-функции и, в теории, свести к одномерным тэта-функциям.

Для того, чтобы показать насколько выгодно использование тэта-функций мною была взята статья Ю.С. Васильева и В.В. Заволокина «Тэта-функции в математической модели шума квантования».

3.2 Шум квантования и формула двумерной плотности вероятности шума квантования

Шум квантования возникает при квантовании суммы вектора теплового шума $\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2)$ и вектора, вызванного отражением электромагнитных волн от капель дождя $\vec{\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ или водосодержащих объектов в моменты времени соответственно t_1 и t_2 .

Шум квантования можно представить как аддитивный дискретный сигнал $e(nT)$, учитывающий ошибки квантования. $d(nT)$ - входной сигнал

квантования, F - его передаточная функция, то имеем следующую линейную модель шума квантования:

$$e(nT) = d(nT) - d(nT).$$

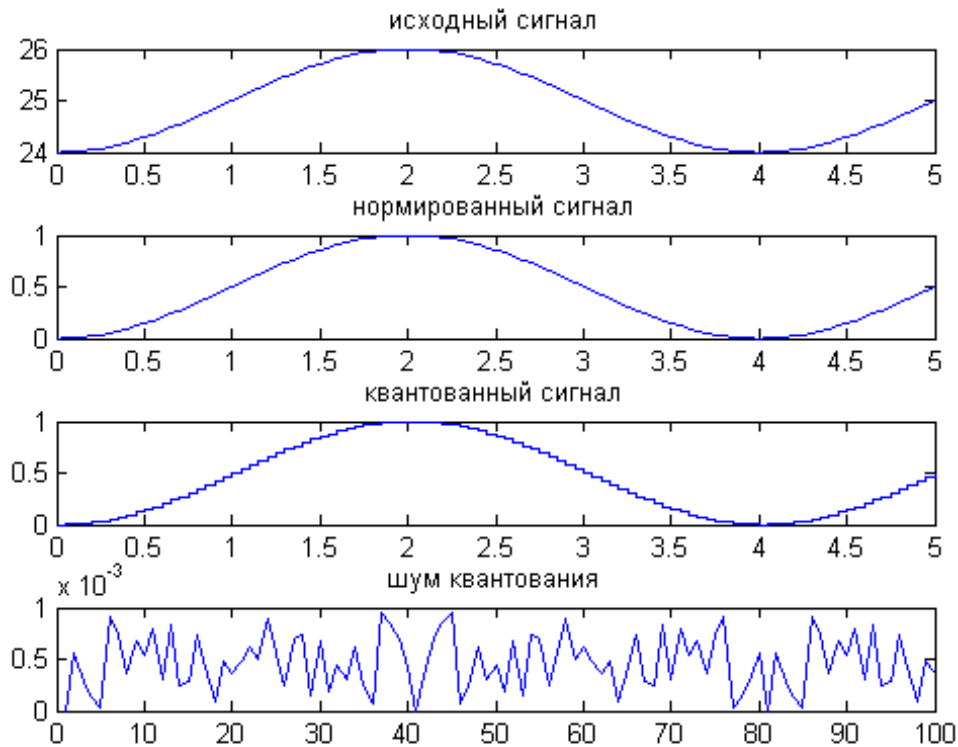


Рисунок 3.1 – Графическая модель процесса квантования

Где исходный сигнал – это изначальный сигнал, нормированный – отображение значений изначального сигнала в диапазоне $[0,1]$, квантованный – квантованный по уровню.

Шум квантования является причиной ухудшения обработки сигналов и увеличения времени вычислений.

В статье приводится следующая формула:

$$W_{\vec{\varepsilon}} = W_{\vec{\varepsilon}}(u_1, u_2) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}(n_1^2 + 2\rho n_1 n_2 + n_2^2)} \cos \frac{2\pi}{\Delta}(n_1 u_1 + n_2 u_2) \quad (3.1)$$

$$|u_1| \leq \frac{\Delta}{2}, |u_2| \leq \frac{\Delta}{2},$$

где Δ – шаг квантования, β – глубина квантования координат вектора $\left(\frac{\Delta^2}{D(\vec{\varepsilon})}\right)$, ρ – коэффициент корреляции координат вектора.

Подсчитывая через двойной ряд, затрачивается, довольно, много времени, что отражено на рис.3.2.

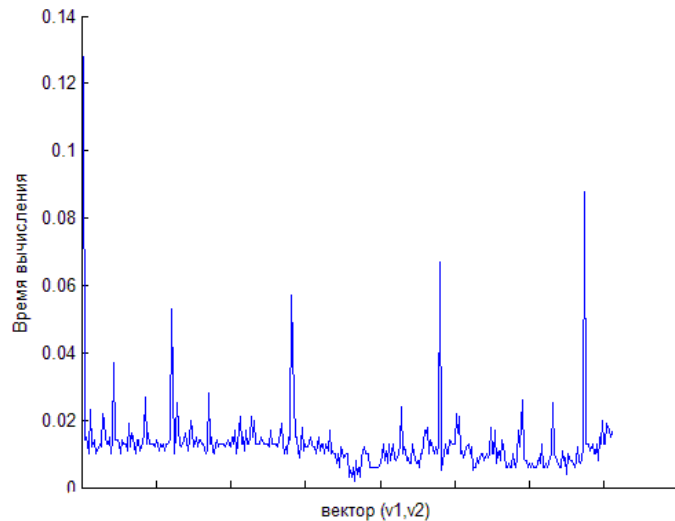


Рисунок 3.2 – Время вычисления через двойной ряд
 Планируется свести формулу к одномерному виду, при которой на том же самом множестве аргументов будет затрачиваться меньшее кол-во времени.

$$T(W \vec{\varepsilon}), N(W \vec{\varepsilon}) \rightarrow \min .$$

Примерное время вычисления двумерной плотности через тэта-функции представлено на рисунке 3.3.

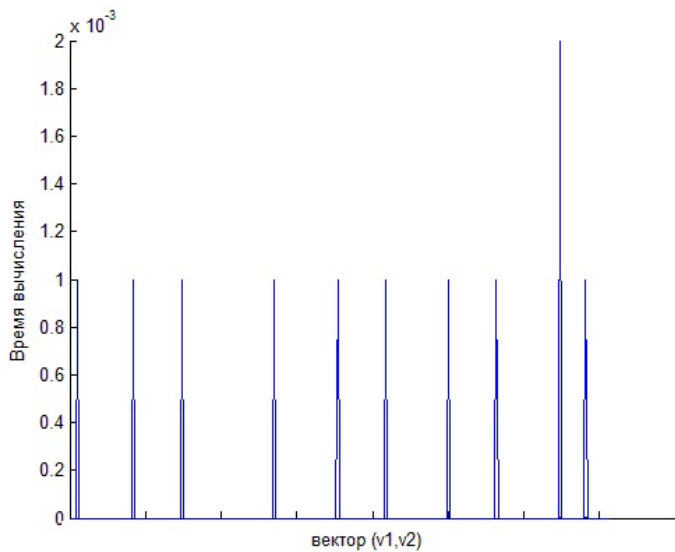


Рисунок 3.3 – Время вычисления через тэта-функции
 Как видно из графика, время вычисления снизится в 1000 раз.

3.3 Приведение двухмерной формулы к одномерному виду и первичный анализ

Перед тем как переходить к доказательству, стоит немного рассказать о двумерной плотности вероятности. Непрерывную двумерную случайную величину можно задать с помощью плотности совместного распределения вероятностей:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y},$$

то есть это вторая смешанная частная производная от функции распределения.

Плотность вероятности связана с функцией распределения следующим соотношением:

$$F(x, y) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Геометрический смысл формулы выше: подобно тому, как для одномерной случайной величины X вводится понятие «элемент вероятности», равный $j(x)dx$, для двумерной случайной величины (X, Y) вводится также понятие «элемент вероятности», равный $j(x, y)dx dy$. Он представляет (с точностью до бесконечно малых более высоких порядков) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в элементарный прямоугольник со сторонами dx и dy (рис.).

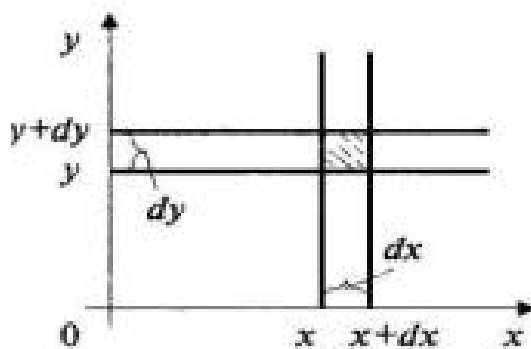


Рисунок 3.4 – Элемент вероятности

Плотность совместного распределения вероятностей имеет следующие свойства:

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

Для подсчета двумерной плотности распределения вероятности шума квантования, которая представлена в статье, мы выбрали несколько упрощенную формулу (с заменами):

$$W_{\varepsilon} = W_{\varepsilon}(u_1, u_2) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t(m^2 + 2\rho mn + n^2)} \cos \frac{2\pi}{\Delta} (m z_1 + n z_2) = \sum_{m, n} e^{\frac{-2\pi^2}{\beta} (n_1^2 + 2\rho n_1 n_2 + n_2^2)} \cos \frac{2\pi}{\Delta} (r \tag{3.2}$$

$$t = \frac{2\pi^2}{\beta}, m = n_1, n = n_2, z_1 = u_1 \frac{2\pi}{\Delta}, z_2 = u_2 \frac{2\pi}{\Delta}.$$

При помощи математического инструмента Maple была написана программа, которая на различных аргументах z_1 и z_2 вычисляет значения функции и строит ее трехмерное представление.

На основе полученных данных был построен график: двумерной плотности распределения вероятности шума квантования:

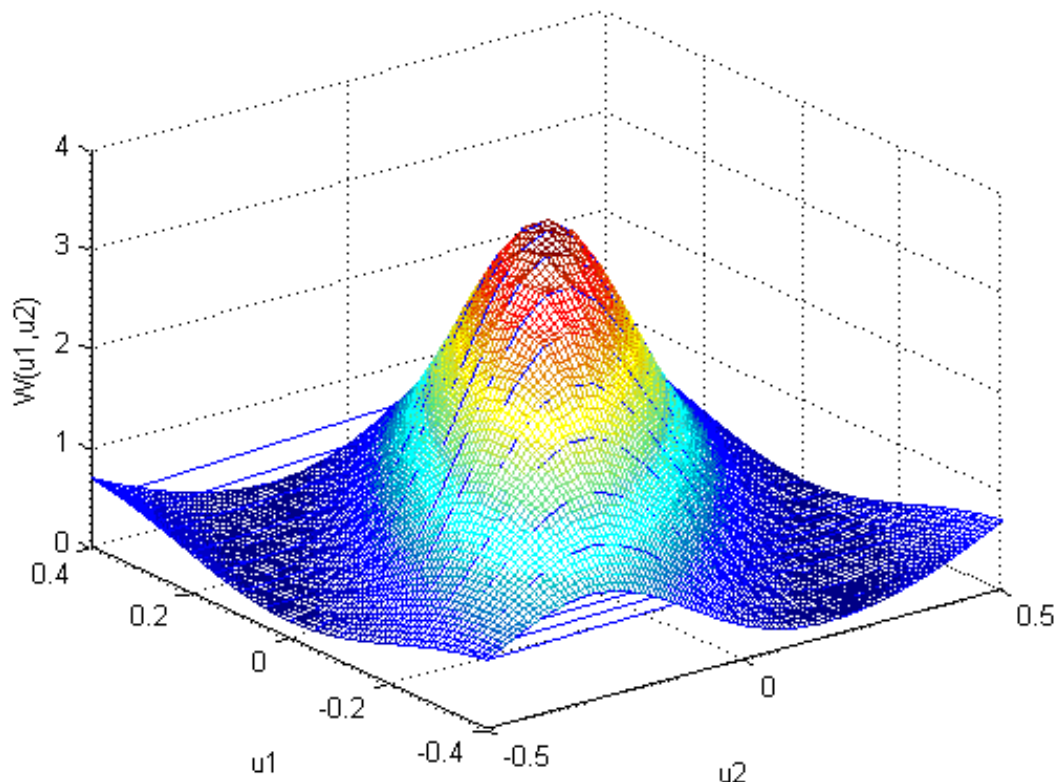


Рисунок 3.5 – Вычисленная через двойной ряд плотность вероятности
 Теперь перейдем к выведению двумерной плотности распределения вероятности шума квантования через одномерные тэта-функции.

Показательную функцию под знаком суммы в выражении (1) преобразуем в произведение двух сомножителей, каждый из которых зависит только от одного индекса суммирования. Для этого используем прием, заключающийся в следующей замене индексов суммирования:

$$m = \frac{i+j}{2}, n = \frac{i-j}{2}.$$

Тогда получим следующую формулу:

$$W_{\varepsilon} = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i,j} e^{\frac{-t(i^2(1+\rho)+j^2(1-\rho))}{2}} \cos \frac{2\pi}{\Delta} \left(\frac{i+j}{2} z_1 + \frac{i-j}{2} z_2 \right) \quad (3.3)$$

$$|z_1| \leq \pi, |z_2| \leq \pi.$$

Так как суммирование в выражении ведется по всем целым m и n , изменяющимся от $-\infty$ до ∞ то в каждой из пар индексов i, j индексы i и j после замены будут принимать одновременно либо только четные, либо только нечетные значения. Поэтому выражение верхнее выражение можно представить в виде двух бесконечных сумм, индексы суммирования которых i и j также изменяются от $-\infty$ до ∞ :

$$W_{\varepsilon}^{-} = \frac{1}{\Delta^2} \left(\sum_{i, j \text{ четные}}^{\infty} e^{\frac{-t(i^2(1+\rho)+j^2(1-\rho))}{2}} \cos \frac{2\pi}{\Delta} \left(\frac{i+j}{2} z_1 + \frac{i-j}{2} z_2 \right) + \sum_{i, j \text{ нечетные}}^{\infty} e^{\frac{-t(i^2(1+\rho)+j^2(1-\rho))}{2}} \cos \right. \\ \left. \right) \quad (3.4)$$

$$|z_1| \leq \pi, |z_2| \leq \pi.$$

Используя следующую подстановку:

$$\frac{z_1 - iz_2}{2}, \\ \frac{z_1 + iz_2}{2}, x_2 = i \\ x_1 = i$$

Получим:

$$W_{\varepsilon}^{-} = \frac{1}{\Delta^2} (S_1(x_1, x_2) + S_2(x_1, x_2) + S_3(x_1, x_2) + S_4(x_1, x_2)) \quad (3.5)$$

$$|x_1 + x_2| \leq \pi, |x_1 - x_2| \leq \pi,$$

где:

$$S_1(x_1, x_2) = \left(\sum_{i \text{ четное}} e^{\frac{-t(1+\rho)i^2}{2} \cos i x_1} \right) \left(\sum_{i \text{ четное}} e^{\frac{-t(1-\rho)i^2}{2} \cos j x_2} \right), \quad (3.6)$$

$$S_2(x_1, x_2) = \left(\sum_{i \text{ нечетное}} e^{\frac{-t(1+\rho)i^2}{2} \cos i x_1} \right) \left(\sum_{i \text{ нечетное}} e^{\frac{-t(1-\rho)i^2}{2} \cos j x_2} \right), \quad (3.7)$$

$$S_3(x_1, x_2) = \left(\sum_{i \text{ четное}} e^{\frac{-t(1+\rho)i^2}{2} \sin i x_1} \right) \left(\sum_{i \text{ четное}} e^{\frac{-t(1-\rho)i^2}{2} \sin j x_2} \right), \quad (3.8)$$

$$S_4(x_1, x_2) = \left(\sum_{i \text{ нечетное}} e^{\frac{-t(1+\rho)i^2}{2} \sin i x_1} \right) \left(\sum_{i \text{ нечетное}} e^{\frac{-t(1-\rho)i^2}{2} \sin j x_2} \right). \quad (3.9)$$

Функции $\sin i x_1 \sin j x_2$, входящие в выражения S_3 и S_4 (рисунки 3.6-3.9) являются нечетными. Поэтому в суммах-сомножителях выражений S_3 и S_4 индексам суммирования, отличающимся знаком, соответствуют члены с противоположным знаком, которые уничтожаются. По этой причине значения выражений S_3 и S_4 равны нулю.

Значит:

$$W_{\varepsilon}^{-} = \frac{1}{\Delta^2} (S_1(x_1, x_2) + S_2(x_1, x_2)) \quad (3.10)$$

$$|x_1 + x_2| \leq \pi, |x_1 - x_2| \leq \pi.$$

Введем следующие замены: для S_1 $i=2k, j=2k$, для S_2 $i=2k+1, j=2k+1$.

$$S_1(x_1, x_2) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2t(1+\rho)k^2 \cos 2k x_1} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2t(1-\rho)k^2 \cos 2k x_2} \right), \quad (3.11)$$

$$S_2(x_1, x_2) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2t(1+\rho)\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{2} \cos(2k+1)x_1} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2t(1-\rho)\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{2} \cos(2k+1)x_2} \right). \quad (3.12)$$

Введем следующие замены:

$$q_1 = e^{-2t(1+\rho)}, \quad q_2 = e^{-2t(1-\rho)}.$$

Тогда:

$$W_{\varepsilon} = \frac{1}{\Delta^2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_1^{k^2} \cos 2k x_1 \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_2^{k^2} \cos 2k x_2 \right) + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_1^{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2k+1)x_1 \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_2^{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2k+1)x_2 \right) \quad (3.13)$$

$$|x_1 + x_2| \leq \pi, |x_1 - x_2| \leq \pi.$$

Заменяя соответствующие сомножители на тэта-функции получим итоговую формулу:

$$W_{\varepsilon} = \frac{1}{\Delta^2} (v_3(x_1, q_1) v_3(x_2, q_2) + v_3(x_1, q_1) v_3(x_2, q_2)) \quad (3.14)$$

$$|x_1 + x_2| \leq \pi, |x_1 - x_2| \leq \pi.$$

3.4 Анализ полученных данных

Реализована программа на Maple, которая на некотором множестве аргументов вычисляет таблицу значений двумерной плотности распределения вероятности шума квантования по полученной формуле на том же самом множестве аргументов на котором до этого была вычислена таблица значений итоговой формулы. Также была вычислена максимальная относительная погрешность полученной формулы от итоговой на некотором наборе u_1 и u_2 по следующей формуле:

$$\mu = \frac{\Delta x}{x_{\text{точн}}} * 100\%,$$

где Δ - вектор модулей разности исходных значений и полученных, $x_{\text{точн}}$ - вектор исходных значений. Значение погрешности оказалось равным $1.2584 * 10^{-7}\%$. Что мало и находится пределах вычислительной погрешности. По полученным значениям итоговой формулы был построен график 3.6.

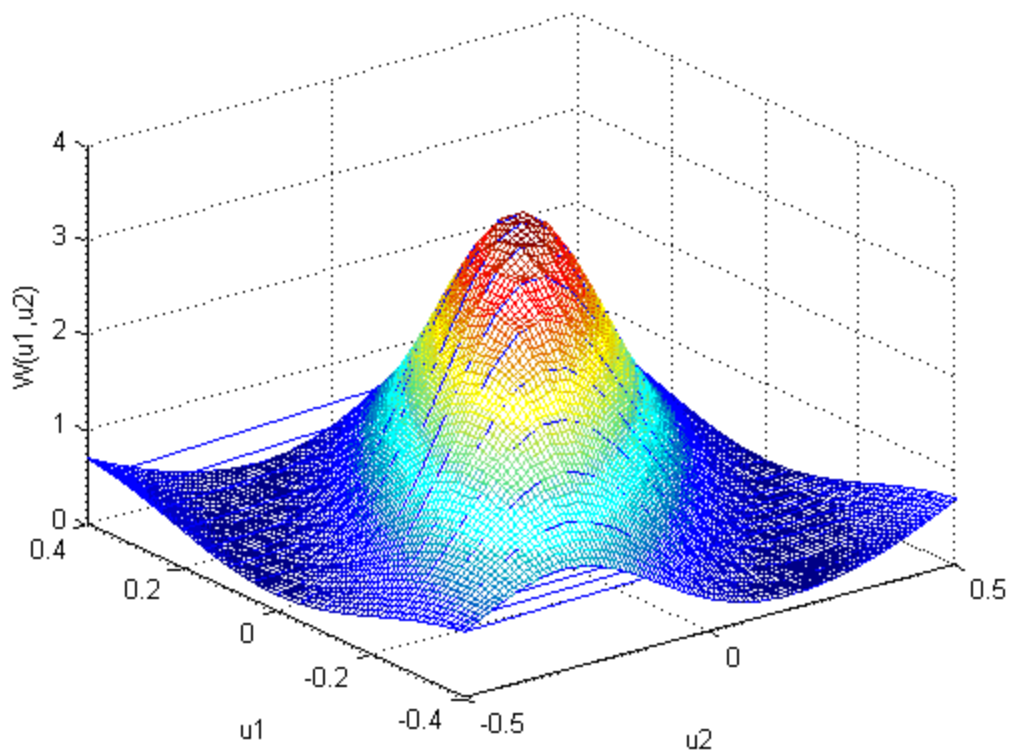


Рисунок 3.6 – Вычисленная через тэта-функции плотность

Также для более понятного объяснения того, что погрешность крайне мала. По таблице 3.2 разности значений исходной и полученной формул:

Таблица 3.2

Разность исходной и итоговой формул

Харгумент z	аргумент q	разность
0,015	0,4	3,47E-09
0,025	0,4	-1,15E-09
0,05	0,4	-2,00E-09
0,15	0,4	-4,70E-09
0,2	0,4	2,50E-09
0,25	0,4	0
0,3	0,4	-1,00E-09
0,35	0,4	2,00E-09
0,4	0,4	-1,90E-09
0,45	0,4	-2,20E-09
0,5	0,4	-1,20E-09
-0,5	0,35	-1,00E-09

Продолжение таблицы 3.2

-0,45	0,35	-2,90E-09
-0,4	0,35	5,00E-10
-0,35	0,35	-2,00E-10
-0,3	0,35	1,00E-10
-0,25	0,35	4,00E-10
-0,2	0,35	-4,00E-10
-0,15	0,35	7,00E-10
-0,1	0,35	-8,00E-10
-0,05	0,35	1,70E-09
0	0,35	-4,00E-10
0,05	0,35	-2,10E-09
-0,05	-0,35	5,00E-10
0	-0,35	-6,00E-10
0,05	-0,35	3,20E-09
0,1	-0,35	-1,20E-09
0,15	-0,35	5,00E-10
0,2	-0,35	6,00E-10
0,25	-0,35	8,00E-10
0,3	-0,35	0
0,35	-0,35	-3,00E-10
0,4	-0,35	-8,00E-10
0,45	-0,35	-6,30E-09
0,5	-0,35	-1,00E-09
-0,5	-0,4	4,00E-10
-0,45	-0,4	-4,20E-09
-0,4	-0,4	-2,20E-09
-0,35	-0,4	0
-0,3	-0,4	-2,00E-09

Был построен график разности на сетке между значениями итоговой формулы и изначальной:

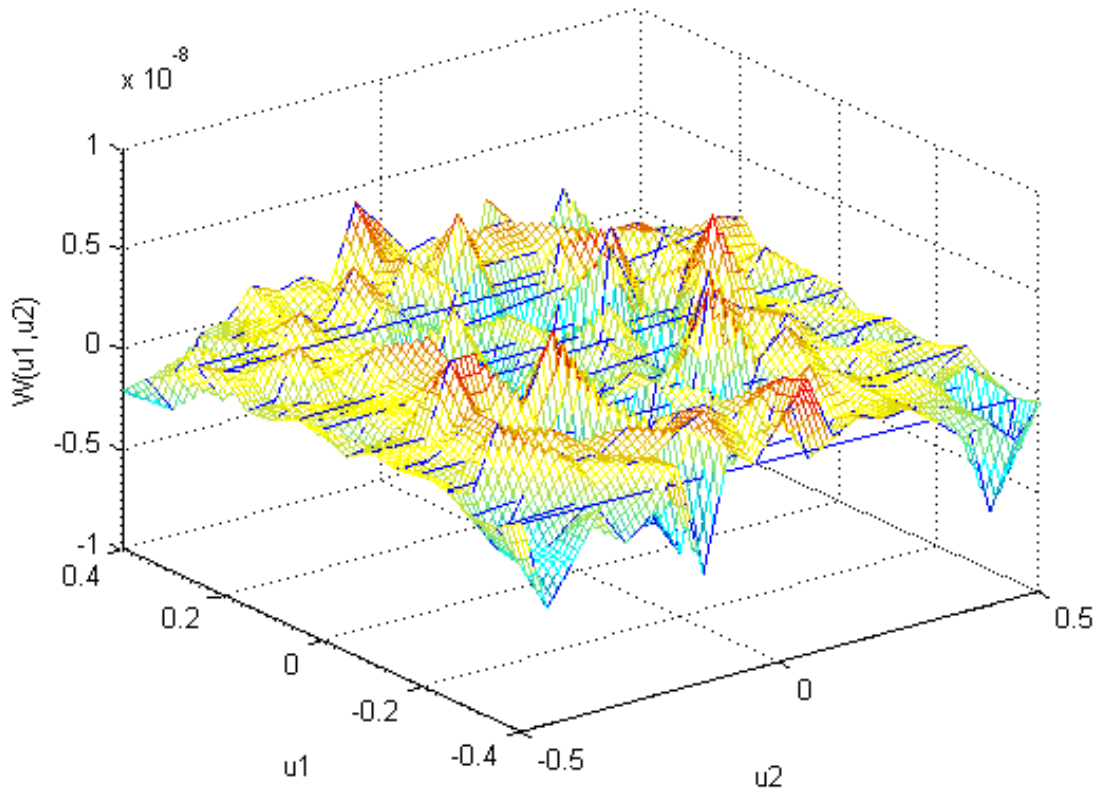


Рисунок 3.7 – Разность значений полученных на некотором множестве формулой через двойные ряды и через тэта-функции

Из графика видно, что присутствует отклонение в пределах машинной погрешности. Подсчитаем среднее линейное отклонение, дисперсию, среднеквадратичное отклонение погрешности.

Линейное отклонение:

$$i x_i - \bar{x} \vee \frac{i}{n},$$

$$a = \sum_{i=1}^n i$$

$$a = 0.211342 * 10^{-8}.$$

Дисперсия:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (i i - \bar{x})^2}{n},$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^n i$$

$$s^2 = 0.043552 * 10^{-16}.$$

Среднеквадратичное отклонение:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(i i - \bar{x})^2}{n},$$

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = 0.456229 * 10^{-8}.$$

3.5 Выводы по разделу

Мы показали, что вычисление тэта-функций при помощи ЭВМ требует мало времени для вычислений, и затраты процессора для получения результата незначительны. В работе для анализа использовалась ЭВМ с процессором Intel Core 2 Duo 6550 (2 логических ядра) с тактовой частотой 2330 МГц. То есть вычисление тэта-функции функций на более мощных ЭВМ будет крайне быстрым, порядка 10^{-5} с.

В дальнейшем планируется выражение еще нескольких многомерных формул через тэта-функции, что позволит решать многие физические задачи, преимущественно связанные с колебаниями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной работы было – показать на конкретном примере достоинства тэта-функции. Была выведена двумерная плотность вероятности через одномерные тэта-функции. Проведен анализ изначальной и полученной формулы.

В работе отражено то, что разница между значениями, полученными при помощи двух разных формул, на одном множестве аргументов, в пределах машинной погрешности. Также показана разница в затратах на вычисления в обоих случаях.

Для анализа и подтверждения результата использовались программные среды Maple и Matlab.

Для получения среднего времени вычисления тэта-функции, значений формул, погрешности были написаны подпрограммы на Maple. Для графического представления на Matlab.

Цели и задачи данной работы выполнены.

Полученные данные можно использовать при вычислении многих многомерных формул, что существенно ускорит их вычисление.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Матросов, А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики / А. В Матросов. — СПб. : ВHV-Санкт-Петербург, 2001. - 528 с
2. Дьяконов, В. П. Maple 9.5 10 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов. – М. : Солон-Пресс, 2006. — 720 с.
3. Мамфорд, Д. Абстрактные тэта-функции / Д.Мамфорд. – М.: Мир, 1988 . – 223 с.
4. Ахиезер, Н. И. Элементы теории эллиптических функций / Ахиезер Н. И.. —Издательство «Наука», 1970 —304 с.
5. Бейкер Г. Абелевы функции. Теорема Абеля и связанные с ней тэта-функции / Бейкер Г. —МЦНМО, 2008 —736 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Текст программы

Листинг подпрограммы для получения таблиц значений времени выполнения одномерной тэта-функции:

```
> ##Подпрограмма для вычисления среднего времени работы тэта-функции
sredneetheta := proc(otrz :: float, step :: float)
local tt, j, sum, sum1, res, res1;
##переменные в которых будет храниться сумма времени вычисления тэта-функций при различных аргументах
sum := 0;
sum1 := 0;
for j from -otrz by step to otrz do
  tt := time() · 31000000;
  sum1 := sum1 + time(JacobiTheta3(2.0, j));
  sum := sum +  $\frac{(\text{time}() \cdot 3^{1000000} - tt)}{3^{1000000}}$ ;
end do;
res :=  $\frac{sum}{\left(\frac{otrz \cdot 2}{step}\right)}$ ; ## время вычисления тэта-функции, вкл. компиляцию
res1 :=  $\frac{sum1}{\left(\frac{otrz \cdot 2}{step}\right)}$ ; ## время вычисления тэта-функции

print( value(res));
print( value(res1));
end proc;
> sredneetheta(0.4, 0.01);
```

Листинг подпрограммы для получения таблиц значений формулы, вычисленной через двухмерный ряд:

```
##Подпрограмма для вычисления таблицы значений двумерной
##плотности вероятности через одномерные тэта-функции
odnomer := proc(z1 :: float, z2 :: float)
local t, q1, q2, u1, u2, W;
##исходные данные
t := 1.3;
q1 := exp((-3.4) · t);
q2 := exp((-0.6) · t);
u1 := π · (z1 + z2);
u2 := π · (z1 - z2);
##итоговая формула
W := JacobiTheta3(u1, q1) · JacobiTheta3(u2, q2)
  + JacobiTheta2(u1, q1) · JacobiTheta2(u2, q2);
value(Re(%));
end proc;
>
odnomer1 := proc(otrz1 :: float, otrz2 :: float, step :: float)
local i, j;
print('W', u1', u2');
for i from otrz1 by -step to -otrz1 do for j from -otrz2 by step
  to otrz2 do print(j, i, odnomer(i, j), ); end do; end do;
end proc;
>
```

```
> odnomer1 (0.4, 0.5, 0.05);
```

```
#Подпрограмма для вычисления таблицы значений двумерной  
#плотности вероятности через одномерные тэта-функции  
odnomer := proc(z1 :: float, z2 :: float)  
  local t, q1, q2, u1, u2, W;  
  #исходные данные  
  t := 1.3;  
  q1 := exp((-3.4) · t);  
  q2 := exp((-0.6) · t);  
  u1 := π · (z1 + z2);  
  u2 := π · (z1 - z2);  
  #итоговая формула  
  W := JacobiTheta3(u1, q1) · JacobiTheta3(u2, q2)  
    + JacobiTheta2(u1, q1) · JacobiTheta2(u2, q2);  
  value(Re(%));  
end proc;
```

```
>  
odnomer1 := proc(otrz1 :: float, otrz2 :: float, step :: float)  
  local i, j;  
  print('W',          u1',          u2');  
  for i from otrz1 by -step to -otrz1 do for j from -otrz2 by step  
    to otrz2 do print(j, i, odnomer(i, j), ); end do; end do;  
end proc;
```

```
>
```

```
> odnomer1 (0.4, 0.5, 0.05);
```

Листинг подпрограммы для получения таблиц значений среднего времени вычисления формул, итоговой и полученной через тэта-функции:

```
timedvumer := proc(otrz1 :: float, otrz2 :: float, step :: float)  
  local i, j;  
  for i from otrz1 by -step to -otrz1 do for j from -otrz2 by step  
    to otrz2 do time[real](dvumer(i, j)) end do; end do;  
end proc;
```

```
timeodnomer := proc(otrz1 :: float, otrz2 :: float, step :: float)  
  local i, j;  
  for i from otrz1 by -step to -otrz1 do for j from -otrz2 by step  
    to otrz2 do time[real](odnomer(i, j)); end do; end do;  
end proc;
```

Листинг подпрограммы для получения шума квантования:

```
%подпрограмма для шума квантования  
clear, clc  
t = 0:0.05:5; % время  
s = 25-cos(2*pi*t/4); % какой-то сигнал  
subplot(4,1,1), plot(t, s)  
title('исходный сигнал')  
sn = (s - min(s)) / (max(s) - min(s)); % нормируем сигнал [0,  
1]  
subplot(4,1,2), plot(t, sn)  
title('нормированный сигнал')  
M = 1024; % кол-во уровней  
Skv = fix(sn*(M-1)) / (M-1); % квантуем  
subplot(4,1,3), stairs(t, Skv)
```

```

title('квантованный сигнал')
%строим шум квантования
delta=zeros(1,100);
for i=1:100
    delta(i)= sn(i) - Skv(i);
end
j=1:100;
subplot(4,1,4),plot(j,delta(1,j))
title('шум квантования')

```

Листинг подпрограммы для построения разности исходной и полученной формул:

```

%подпрограмма для построения разности исходной и
%полученной формул
clear all;
%задаем таблицы значений исходной и итоговой формул
Signal=[...];
Signal1=[...];
nn=length(Signal(:,3));
otkl=zeros(1, nn);
mass=Signal;
%цикл в котором находим разность
for i=1:nn
    mass(i,3)=(Signal(i,3)*10^9- Signal1(i,3)*10^9)/10^9;
end
%построение графика
figure(1)
plot3(mass(:,1),mass(:,2),mass(:,3));
grid on;
title('Разность итоговой формулы и изначальной');
xlabel('u2');
ylabel('u1');
zlabel('W(u1,u2)');
hold on
Surface_inter=TriScatteredInterp(mass(:,1),mass(:,2),mass(:,3));
sample_x=-0.5:.01:0.5;
sample_y=-0.4:.01:0.4;
[qx,qy]=meshgrid(sample_x,sample_y);
qz=Surface_inter(qx,qy);
mesh(qx,qy,qz)
-----

```

Листинг подпрограмм для построения графиков исходной и полученных формул:

```

%подпрограмма для построения графика функции вычисл.через
двухмерный ряд
clear all
%задаем таблицу значений функции вычисл. через %двухмерный
ряд
Signal=[...];
figure(1)
plot3(Signal(:,1),Signal(:,2),Signal(:,3));
grid on;
title('Двумерная плотность распределения вероятности шума
квантования');
xlabel('u2');
ylabel('u1');
zlabel('W(u1,u2)');
hold on
Surface_inter=TriScatteredInterp(Signal(:,1),Signal(:,2),Si
gnal(:,3));
sample_x=-0.5:.01:0.5;
sample_y=-0.4:.01:0.4;
[qx,qy]=meshgrid(sample_x,sample_y);
qz=Surface_inter(qx,qy);
mesh(qx,qy,qz)
-----
%подпрограмма для построения графика функции вычисл.через
тэта-функции
clear all
%задаем таблицу значений функции
Signal1=[...];
figure(1)
plot3(Signal(:,1),Signal(:,2),Signal(:,3));
grid on;
title('Двумерная плотность распределения вероятности шума
квантования по итоговой формуле'
);
xlabel('u2');
ylabel('u1');
zlabel('W(u1,u2)');
hold on
Surface_inter=TriScatteredInterp(Signal(:,1),Signal(:,2),Si
gnal(:,3));
sample_x=-0.5:.01:0.5;
sample_y=-0.4:.01:0.4;
[qx,qy]=meshgrid(sample_x,sample_y);
qz=Surface_inter(qx,qy);
mesh(qx,qy,qz)

```