

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра прикладной математики и программирования
Направление подготовки Прикладная математика и информатика

РАБОТА ПРОВЕРЕНА

Рецензент, зав.каф. ТОТС

ФГБОУ ВО «ЮУрГАУ», д.т.н, доцент

_____ Н.Машрабов

« ____ » _____ 2017г..

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н.,

доцент

_____ /А.А.Замышляева

« ____ » _____ 2017 г.

Математическое моделирование пневматической системы с поршнем

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–010402.2017.148.ПЗ ВКР

Руководитель работы, к.ф.-м.н.,
доцент

_____ А. В. Геренштейн

« ____ » _____ 2017 г.

Автор работы

Студент группы ЕТ-222

_____ /Н.С. Мидоночева

« ____ » _____ 2017 г.

Нормоконтролер, к.э.н., доцент

_____ /Д.А. Дрозин

« ____ » _____ 2017 г.

Челябинск 2017

АННОТАЦИЯ

Мидоночева Н. С. Математическое моделирование пневматической системы с поршнем. – Челябинск: ЮУрГУ, 2017. – 69 с. Илл. 18. Табл. 1. Библ. – 22 наименов. Прилож. – 3.

В работе изложены способы математического описания движения жидкостей (газа). С помощью обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений газовой динамики рассматриваются некоторые способы построения математической модели процесса движения поршня в цилиндрической трубе под действием давления ограниченного этим поршнем газа, причем рассматриваются только изэнтропийные процессы. Также рассматривается процесс движения поршня в трубе под действием нагревающегося газа.

Математическая модель, построенная с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, довольно проста в построении, в отличие от математической модели задачи, построенной на основе уравнений математической физики – здесь используются уравнения в частных производных, называемые иначе уравнениями газовой динамики. Однако этот метод позволяет получить значение скорости поршня на выходе из трубы на 3,8-4,2% точнее первого в зависимости от параметров задачи.

Кроме того, в данном разделе рассмотрен дифференциально-разностный способ построения математической модели. Этот способ интересен тем, что он является «пограничным» случаем: исследование поведения системы на границе устойчивости.

					ММиКТ 010402.2017.148 ПЗ			
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Математическое моделирование пневматической системы с поршнем. Пояснительная записка.	Литера	Лист	Листов
Разработ.	Мидоночева Н.С.					Д	4	69
Проверил	Геренштейн А.В.					ЮУрГУ кафедра ПМиП		
Рецензент								
Н.контр.	Дрозин Д.А.							
Утвердил	Замышляева А.А.							

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1. МЕТОДЫ И ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	10
1.1. Математические модели баллистических установок.....	11
1.2. Влияние сил трения на процесс движения поршня в цилиндрической трубе под действием давления жидкости.....	18
1.3. Приложения к математической модели рассматриваемой задачи.....	22
1.4. Математическое моделирование пневматической системы.....	24
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	28
2.1. Подходы к изучению движения жидкости.....	28
2.2. Математическая модель пневматической системы, построенная с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений.....	32
2.3. Уравнения газовой динамики.....	35
2.4. Математическая модель пневматической системы, построенная с использованием уравнений в частных производных.....	41
2.5. Сравнение математических моделей системы, построенных с помощью ОДУ и уравнений газовой динамики с точки зрения физики	48
2.6. Использование дифференциально-разностного метода для построения математической модели пневматической системы.....	50
4. ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ РАССМОТРЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.....	57
4.1. Программа для ЭВМ, разработанная для вычисления параметров математических моделей.....	57
4.2. Сравнение математических моделей, в основе которых лежат обыкновенные ДУ и уравнения газовой динамики.....	59
4.3. Преимущества и недостатки дифференциально-разностного подхода к построению математической модели.....	59
5. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	60
5.1. Описание методики расчета.....	60
5.2. Стоимостная оценка затрат.....	61
4.1. Приведение затрат к расчетному месяцу.....	63
4.2. Стоимостная оценка результатов.....	64
4.3. Стоимостная оценка эффекта.....	64
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	66
ЛИТЕРАТУРА.....	68
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Пример выходного файла.....	71
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Пример схемы баллистической установки.....	73
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Схемы алгоритмов модулей 1 и 2 программы.....	75

ВВЕДЕНИЕ

«Мы живем на дне воздушного океана» – высказывание известного итальянского физика Э. Торичелли. Действительно, как и океан, воздух – не только среда и источник жизни, но и удобный рабочий инструмент. Воздух – газ, который можно сжимать и разрезать. При сжатии воздух накапливает энергию, которая затем используется в различных пневматических машинах [14].

Пневматика [от греч. *pneumatikos* - дыхательный, воздушный] – это:

- 1) раздел физики, изучающий тела в газообразном состоянии;
- 2) устройство, приспособленное для сжатия или разрежения воздуха [Толковый словарь Кузнецова].

История пневматических систем насчитывает не одно столетие – еще за 3000 лет до н. э. появилось устройство, использующее в своей работе сжатый воздух – кузнечные мехи. А в I в до н. э. греческий математик и механик Герон изучал различные механизмы, использующие для своих действий сжатый воздух. Некоторые из этих механизмов он описал в своем трактате «Пневматика». А примерно в тоже время в Александрии математик и изобретатель Ктезибий изобрел поршневой насос.

В 1760 г в Англии был изобретен компрессор, обеспечивающий сжатие и подачу газов [14].

Сейчас пневматические системы прочно вошли в технику: подобные системы в сочетании с компрессорами используются в качестве пневматических приводов и пневматических моторов. Пневматических системы используются в компьютерной технике для поглощения вибраций и преобразования электрического сигнала в движение (роботы и автоматы в металлургии, горнодобывающей промышленности), в энергетике и двигателестроении, в военном деле, в строительстве, промышленности, сельском хозяйстве и медицине.

Наряду с пневматическими системами используются гидравлические (использующие жидкости) и электрические системы.

В сравнении с гидравликой, пневматические системы обладают рядом преимуществ:

- экологическая чистота;
- доступность;
- надёжность;
- меньшая пожароопасность и лучшая защита от перегрузок;
- технологичность: легки в исполнении, могут находиться в любом месте, где есть воздух;
- удельные показатели: мощность, скорость выше, чем у гидравлики, а масса конструкции – ниже.

В данном исследовании рассматривается класс пневматических систем, предназначенных для сообщения некоторого импульса поршню. Основной принцип работы системы заключается в использовании энергии сжатого воздуха. В общем виде подобного рода системы состоят из двух основных частей: герметичного с одной стороны цилиндра, который накапливает сжатый воздух и подвижного поршня, который под действием давления сжатого воздуха приводится в движение внутри цилиндра. При конструировании таких систем важно знать скорость поршня на выходе из трубки: например, на этом расстоянии будет находиться снаряд, которому необходимо сообщить некоторую начальную скорость. В этом случае скорость поршня при соприкосновении со снарядом (или, точнее, на выходе из цилиндра) имеет принципиальное значение.

Как ясно из вышесказанного, тема данного исследования достаточно актуальна: в горнодобывающей и тяжелой промышленности, в робототехнике, некоторых отраслях военного дела и даже в компьютерной технике не обойтись без пневматики.

В настоящее время получен широкий спектр данных в этой области: решены многие частные задачи, построены и активно используются в промышленности и военном деле пневматические и баллистические системы. Однако математические модели подобных систем (в общем случае) не пригодны для расчетов за приемлемое время – слишком сложные системы не могут быть решены аналитически и не могут быть представлены в оригинальном виде в памяти ЭВМ. Исходя из этого факта, подобные математические модели принято решать с помощью численных методов. Но и здесь всё не так просто – обилие уже рассмотренных и примененных для данной задачи численных методов говорит о том факте, что ни один из них полностью не удовлетворяет ей. Но это в свою очередь означает, что необходимо продолжать поиск: улучшать существующие методы или искать новые. Этим фактом объясняется целесообразность исследования.

Цели и задачи научно-исследовательской работы

Цель работы: изучить теоретические основы газовой динамики, построить математическую модель движения поршня в трубе под действием давления газа: а) при равномерном расширении газа за поршнем (использование обыкновенных дифференциальных уравнений); б) при неравномерном расширении газа (использование уравнений газовой динамики), сравнить полученные математические модели по следующим критериям:

- 1) сложность построения модели;
- 2) точность метода, лежащего в основе модели.

Аналогично построить математическую модель движения поршня в трубе под действием нагревающегося газа.

Для достижения цели необходимо выполнить следующие задачи:

- изучить основы газовой динамики, подходы к ее изучению;

- построить математическую модель движения поршня в трубе с учетом давления газа при равномерном и неравномерном расширении газа;
- разработать программу на языке программирования C, вычисляющую характеристики заданной пневматической системы несколькими способами;
- сравнить математические модели, используя результаты работы программы по каждому из способов и сделать выводы о целесообразности использования каждого метода для математического моделирования процесса движения поршня в трубе.

Необходимо отметить, что в данной работе проведено сравнение двух методов построения математической модели системы: с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, а кроме того предложен новый, дифференциально-разностный метод, что и характеризует новизну исследования.

1. МЕТОДЫ И ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Моделирование процессов, происходящих в баллистических и пневматических системах широко проводилось уже в 1989 году, и к этому времени уже были получены решения задач о взаимодействии ударной волны с препятствиями, обтекание тела или поршня с отверстием в пусковой трубе [3, 4], истечении газа в пространство, заполненное газом, или в вакуум и другие. В то время решение подобных задач было затруднительным и требовало больших затрат машинного времени, и поэтому именно тогда возник вопрос об упрощении математической постановки задачи и об упрощении методик расчета.

Пневматические системы довольно часто представляют собой сложную систему, и при этом эффективность работы такой системы, при прочих равных условиях, обеспечивается согласованностью параметров составляющих их элементов. Оптимизация параметров названных элементов может быть произведена на основе анализа экспериментальных данных или же в результате аналитического исследования математических моделей. Первый вариант более предпочтителен в том случае, когда при оптимизации параметров какой-либо конкретной пневмосистемы имеется достаточно большой объем статистического материала. Например, имеется некий прототип изделия, использующего в себе подобную систему, с этим прототипом проводят испытания и получают объективные данные, на основе которых выявляют достоинства и недостатки всей модели в целом и ее составляющих в частности. Оптимизация по второму варианту при использовании современной вычислительной техники, возможно, окажется менее трудоемкой и позволит выявить некоторые недостатки системы непосредственно в процессе проектирования.

Формирование математических моделей пневмосистем целесообразно выполнять в два этапа: создание моделей в процессах отдельных элементах, а затем уже, на основе этих частных моделей, выполняется разработка

математической модели всей системы в целом. [21] Решению одной из задач первого этапа, а именно, формированию математических основ движения поршня при действии давления газа и посвящена данная работа.

1.1. Математические модели баллистических установок

В настоящее время наиболее распространенным и хорошо зарекомендовавшим себя средством получения высоких скоростей метания тел в лабораторных условиях является двухступенчатая легкогазовая баллистическая установка, простейшая схема которой приведена в приложении 2. Выстрел из двухступенчатой легкогазовой установки является сложным быстропротекающим физическим процессом, поэтому при его математическом моделировании важно выделить и учесть существенные свойства этого явления [5].

Самой простой баллистической установкой является полубесконечная труба, часть объема которой заполнена газом. С одной стороны газ ограничен неподвижной стенкой, а с другой – поршнем, имеющим конечный вес и возможность свободно перемещаться вдоль пусковой трубы. С другой стороны поршня – вакуум. Требуется найти течение газа и закон движения поршня по пусковой трубе. В этом и состоит постановка классической задачи Лагранжа [1, 19]. При этом предполагается, что идеальный газ в начальный момент времени однороден и неподвижен. Поршень в начальный момент времени под действием газа приходит в движение и в дальнейшем движется с ускорением. Трением поршня со стенками пусковой трубы и теплообменом между газом, трубой и поршнем пренебрегаем. Кроме того, не учитывается деформация пусковой трубы и поршня в процессе выстрела. Такая постановка задачи является простейшей математической моделью процесса работы реальной одноступенчатой баллистической установки, в которой камера сжатия не имеет уширения, а рабочий газ в ней получает всю порцию энергии до начала движения поршня, например, при мгновенном срабатывании генератора рабочего газа [5].

Рассмотрим движение поршня под действием сжатого газа в стволе, когда этот поршень перекрывает только часть площади поперечного сечения пусковой трубы. В этом случае будем говорить о свободном метании тела или о метании свободного тела газовым потоком. К решению этой же задачи приводит и газодинамический расчет различных установок, в которых движущиеся поршни имеют одно или несколько отверстий (рис. 1.1).

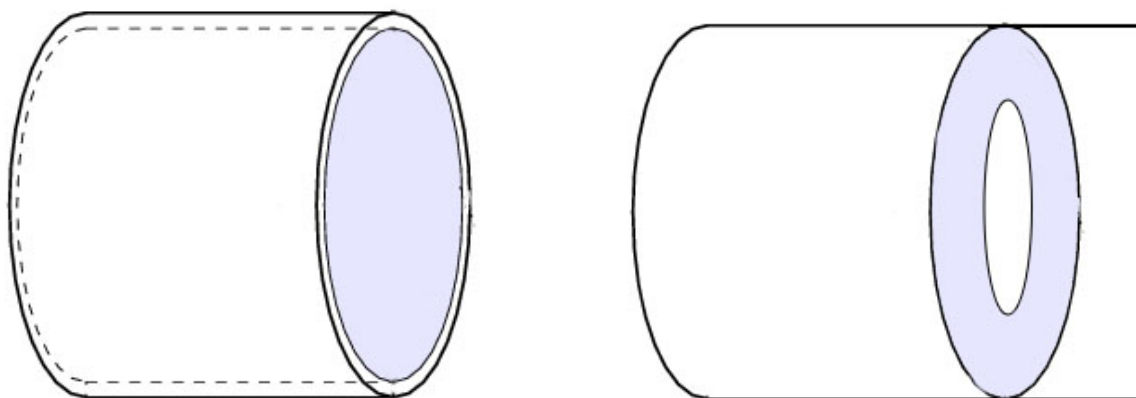


Рис. 1.1. Пневматическая система с зазором между поршнем и стенками цилиндрической трубы и поршень с отверстием

Теоретическое исследование этой задачи в строгой постановке приводит к необходимости рассматривать пространственное неустановившееся течение газа со сложными граничными условиями. Эта задача является достаточно сложной, поэтому в настоящее время более реальным является нахождение различных решений при дополнительных допущениях. В частности, в данном подпункте рассматривается случай, когда зазор между метаемым телом и пусковой трубой лежит в пределах $\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$, где через ε обозначена минимальная вскрытая часть площади поперечного сечения, приходящаяся на единицу площади сечения пусковой трубы (как правило, все аналитические решения нами получены для трубы, площадь поперечного сечения которой равна единице, что несколько упрощает изложение без ограничения его общности). Величину ε будем называть зазором или коэффициентом проницаемости. Пределы изменения коэффициента проницаемости ε_1 и ε_2 определяются из следующих условий:

первый — из возможности пренебрежения вязкостью газа, второй — из необходимости установления критической скорости истечения газа через зазор. Это обстоятельство позволяет решить данную задачу, используя одномерную аппроксимацию [10].

При одномерной аппроксимации эта задача эквивалентна движению поршня под действием сжатого газа, когда в поршне имеется одно или несколько отверстий, суммарная площадь которых равна ε . Для описания этого движения можно воспользоваться системой уравнений для течения газа с вводом массы, импульса и энергии (1.1) – (1.3), которая для совершенного газа в одномерном случае примет вид:

$$\frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dx} = -v \frac{db}{dt}, \quad (1.1)$$

$$\frac{du}{dt} + v \frac{dp}{dx} = F - u \frac{db}{dt}, \quad (1.2)$$

$$v \frac{dp}{dt} + \gamma p \frac{dv}{dt} = (\gamma - 1) \left(\frac{dq^i}{dt} + (u^2 - H^2) \frac{db}{dt} - Fu \right), \quad (1.3)$$

где t — время; u — скорость газа; p — давление; v — удельный объем;

$\frac{db}{dt}$, F и $\frac{dq^i}{dt}$ — скорость подвода соответственно массы, импульса и энергии,

приходящихся на единицу массы газа; $H = \frac{u^2}{2} + e + pv$; e — внутренняя энергия единицы массы газа.

Так как справа от метаемого тела находится область низкого давления (в начальный момент — вакуум), то истечение газа будет происходить с критическими параметрами. Эти параметры легко можно найти, если течение рассматривать как квазистационарное, то есть предполагать, что истечение происходит через малые отверстия. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} u_i &= \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1-\gamma}, \\ v_i &= \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{-1(\gamma-1)}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где a и v – скорость звука и удельный объем в газе слева от метаемого тела. Тогда скорости подвода импульса и энергии будут определяться следующим образом:

$$F = \frac{db}{dt}(u+u_i), \quad (1.5)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{db}{dt} \left(\frac{1}{2}(u+u_i)^2 + \frac{u_i^2}{\gamma-1} \right). \quad (1.6)$$

Учитывая (1.5) и (1.6) из (1.3) после некоторых вполне очевидных преобразований получим:

$$\frac{d}{dt}(\ln p v^\gamma) = \frac{\frac{db}{dt} \left(\frac{\gamma+1}{2} u_i^2 - a^2 \right)}{p v}. \quad (1.7)$$

Из (1.7) и (1.4) следует:

$$\frac{d(p v^\gamma)}{dt} = 0,$$

и это означает, что энтропия сохраняется в частице газа. Если в начальный момент внутренняя энергия во всех частицах газа была одинакова, то в области течения будет выполняться следующее соотношение:

$$p v^\gamma = A_0.$$

Решим эту задачу методом характеристик и дадим краткое изложение его для системы (1.1) – (1.3).

Среди всех известных методов численного расчета одномерных нестационарных задач газовой динамики метод характеристик занимает исключительное положение. Это особое положение метода объясняется прежде всего возможностью 'получить высокую точность решения при сравнительно малой затрате машинного времени. Во-вторых, метод характеристик обладает наглядным физическим смыслом, что делает его просто незаменимым при анализе сложных задач газовой динамики, особенно при наличии слабых или сильных разрывов, когда требуется по условию решаемой задачи выявить структуру рассматриваемого течения или понять характер взаимодействия

различных видов волн. Этими положительными качествами в основном и объясняется, что метод характеристик до сих пор используется при численном решении многих задач газовой динамики. Вместе с этим метод характеристик имеет и ряд недостатков, к которым следует отнести, прежде всего, трудности в программировании, когда в области течения возникают или имеются поверхности сильного разрыва. Большие трудности возникают также при использовании метода характеристик, когда число независимых переменных больше двух.

Преобразуем систему (1.1) – (1.3) к виду, удобному для интегрирования методом характеристик. Для этого перейдем к новым искомым функциям

$u, a = \zeta(\gamma p v)^{\frac{1}{2}}, A = p v^{\gamma}$. При этом получим:

$$\frac{2}{\gamma-1} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{2}{\gamma-1} u \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial x} = a \left(p + \frac{\partial b}{\partial t} \right), \quad (1.8)$$

$$\frac{2a}{\gamma-1} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} \frac{\partial \ln A}{\partial x} + F - u \frac{\partial b}{\partial t}, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \ln A}{\partial t} = (\gamma-1)p,$$

$$p = \frac{\gamma}{a^2} \left(\frac{d q^i}{dt} + (a^2 - H^2) \frac{db}{dt} - Fu \right). \quad (1.10)$$

Следует заметить, что в уравнении (1.10) полная производная по времени берется вдоль линии частицы. Чтобы проинтегрировать данную систему методом характеристик, рассмотрим характеристики в плоскости (x, t) в виде дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = \chi$. Тогда частные производные по t из уравнений (1.8) и (1.9) можно исключить, выражая их через полные производные вдоль соответствующего характеристического направления и частные производные по x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{da}{dt} - \chi \frac{\partial a}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{du}{dt} - \chi \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Учитывая (1.11), из (1.8) и (1.9) получим

$$\frac{1}{\gamma-1} (u - \chi) \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2}{\gamma-1} \frac{da}{dt} - ap - a \frac{db}{dt}, \quad (1.12)$$

$$\frac{2a}{\gamma-1} \frac{\partial a}{\partial x} + (u-\chi) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-du}{dt} + \frac{a^2}{(\gamma-1)\gamma} \frac{\partial \ln A}{\partial x} + F - u \frac{db}{dt}. \quad (1.13)$$

Используя определение характеристик, приравняем нулю основной определитель, составленный из коэффициентов при $\frac{\partial a}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$. Получим угловые коэффициенты характеристик в плоскости независимых переменных

$$\chi_i = u \pm a, (i=1,2), (1.14)$$

Подставляя χ_i в уравнения (1.12) и (1.13) и (приравнявая нулю определитель, получим после ряда преобразований дифференциальные уравнения характеристик в плоскости искомых функций:

$$\frac{2}{\gamma-1} da \pm du = \frac{ad \ln A}{(\gamma-1)\gamma} + \left(D \pm \left(F - u \frac{db}{dt} \right) \right) dt, (1.15)$$

где $D = \frac{\gamma-1}{a} \left(\frac{dq}{dt} - uF + \frac{u^2}{2} \frac{db}{dt} \right)$.

Таким образом, метод характеристик позволяет интегрирование системы уравнений в частных производных от двух независимых переменных (1.1) – (1.3) свести к интегрированию обыкновенных уравнений вдоль характеристик. Применение этого метода для нахождения численного решения системы, например, (1.1) – (1.3), состоит в следующем. Используя уравнения характеристик (1.14) и линии частиц $\frac{dx}{dt} = u$ (характеристика третьего семейства), а также начальные и граничные условия конкретной задачи, строят достаточно густую сетку характеристик в плоскости независимых переменных. Уравнения (1.15) и (1.10) вместе с начальными и граничными условиями дают возможность определить значения искомых функций в узлах этой сетки. В результате такого построения будут известны значения искомых функций в ряде достаточно близких между собой точек плоскости (x,t) , то есть будет найдено численное решение конкретной задачи. Но поскольку характеристики, вообще говоря, являются криволинейными, и при построении сетки характеристик отрезки соответствующих кривых приходится заменять касательными к ним, то точность

численного решения зависит от густоты построенной сетки характеристик. Однако густота сетки характеристик находится в нашем распоряжении и ограничена лишь трудоемкостью расчета, то есть количеством времени работы ЭВМ.

Задачу о свободном метании тел будем решать в безразмерных величинах. За основные единицы выберем плотность и скорость звука в начальный момент времени и длину камеры высокого давления. Тогда начальные условия задачи о движении поршня с отверстиями или зазором под действием сжатого газа примут простой вид:

$$\begin{aligned} t=0 & , \\ 1 \leq x \leq 0 & , \\ u=0 & , \\ a=1 & . \end{aligned} \tag{1.16}$$

Граничное условие на неподвижной левой стенке камеры высокого давления будет $u(-1,t)=0$, а граничное условие на поршне при малом значении ε , когда можно пренебречь противодействием, имеет следующий вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{\gamma} (1-\varepsilon) a^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}},$$

где σ – отношение массы рабочего газа к массе поршня в начальный момент времени.

Таким образом, пространственное нестационарное течение газа в пусковой баллистической трубе можно аппроксимировать одномерным нестационарным потоком с вводом массы, импульса и энергии [9]. При этом связь между источниками массы, импульса и энергии определяется условием истечения и, в конечном счете, как это видно из (1.5) и (1.6), через интенсивность ввода массы. Чтобы уменьшить разрыв между математической постановкой задачи и реальным явлением, нужно отвод газа производить в небольшой окрестности поршня, аппроксимируя этим отводом реальную потерю газа через отверстия в поршне или через зазор, образующийся между пусковой трубой и телом. Данная задача была решена сеточным методом характеристик [11]. При этом было

предусмотрено автоматическое дробление шага в области отвода газа, а также увеличение шага по пространству, когда число интервалов увеличивалось до заданного числа.

Аналогично может быть решена и задача Лагранжа для случая, когда зазор между метаемым телом (цилиндром) и стволом настолько мал, что вязкостью газа уже пренебречь нельзя [8].

Как видно из вышесказанного, получены некоторые результаты расчетов баллистических установок, из которых можно сделать выводы о том, что для расчетов данных в подобных математических моделях принято применять разностные схемы.

Влияние сил трения и вязкости жидкости (для газа аналогично) будет рассмотрено в следующем разделе.

1.2. Влияние сил трения на процесс движения поршня в цилиндрической трубе под действием давления жидкости

Исследование влияния трения между внутренними частями технических элементов на характер движения элементов (например, движение поршня в трубе) является актуальной задачей, так как позволяет определить параметры, при которых трение будет минимальным, а коэффициент полезного действия — максимальным. В данной работе имеет место явление трения между поршнем и стенками цилиндрической трубы.

В работе [16] приведены исследования влияния сил трения на поршень в пневматической системе. Итак, рассматривается движение поршня радиуса r_1 и массой m внутри цилиндра радиуса $r_2=r_1+h$, где h — зазор между поршнем и цилиндром (аналогично рассматривается задача с поршнем, имеющим отверстия).

Цилиндр (рис. 1.1) заполнен жидкостью с плотностью ρ и динамической вязкостью μ , под действием периодического по времени перепада давления $\Delta p f(t)$ с функцией перепада $f(t)=\cos(\omega t)$ (см. рис. 1.1), где

$\Delta p = p_1 - p_2$ — амплитуда давления; $\omega = 2\pi f$ — угловая частота; f — частота колебаний давления. Начало цилиндрической системы координат поместим на оси в центре цилиндра. Координаты в радиальном и осевом направлениях обозначим через r и z соответственно, а соответствующие компоненты скорости течения жидкости — через v_r и v_z . Скорость движения поршня имеет только одну компоненту v_p вдоль оси z .

Справа на рис. 1.2. изображено проникновение жидкости в зазор между поршнем и стенками цилиндрической трубки.

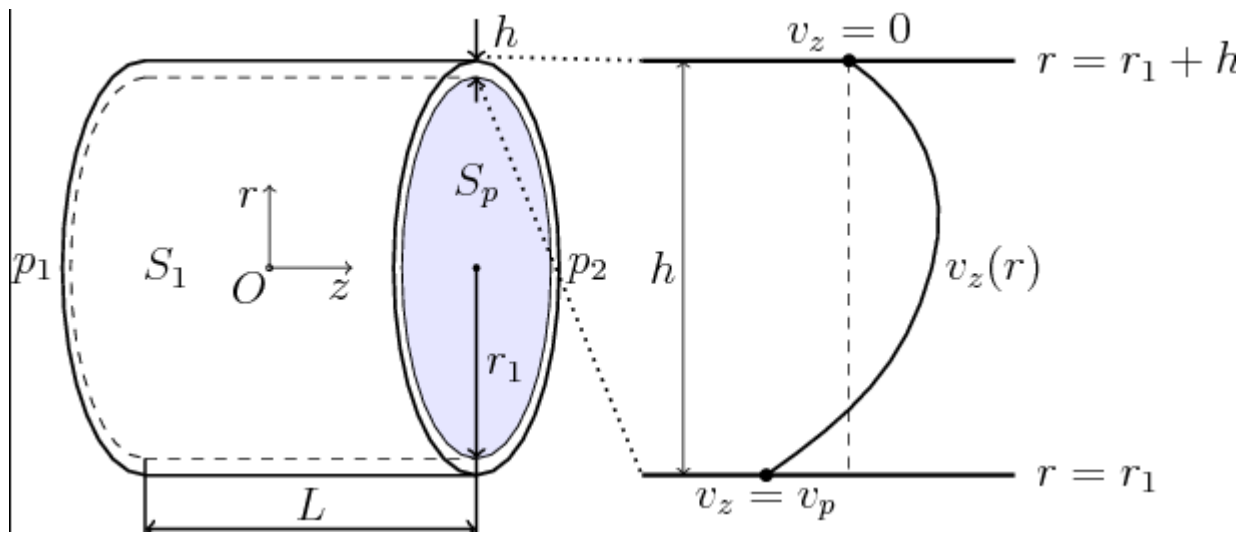


Рис. 1.2. Схема задачи о движении поршня в трубе с учетом зазора h и сил трения

Уравнение движения поршня описывается вторым законом Ньютона:

$$m \frac{dv_p(t)}{dt} = S_p \Delta p f(t) - \mu S_1 \left. \frac{\partial v_2(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_1}, \quad (1.17)$$

$$F_v = \left. \frac{\partial v_2(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_1}, \quad (1.18)$$

где S_p — площадь поперечного сечения поршня; $S_1 = 2\pi r_1 L$ — площадь внешней поверхности поршня; L — длина поршня. Второе слагаемое уравнения (1.17) описывает силу вязкого трения F_v . В начальный момент времени поршень покоится, то есть $v_p(0) = 0$.

Пренебрегая краевыми эффектами, которые возникают вблизи краев поршня, и для случая осесимметричного течения получим уравнение движения жидкости [13]:

$$\rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial r} \right), \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\Delta p}{L} f(t). \quad (1.19)$$

Граничные условия на поверхности поршня и цилиндра:

$$v_2(t, r_1) = v_p(t),$$

$$v_2(t, r_2) = 0.$$

Уравнения (1.17) – (1.19) с граничными условиями записывались в виде конечно-разностной схемы и решались численно методом Ньютона–Рафсона. При разбиении сетки по координате на 50 узлов и $2 \cdot 10^5$ шагов за 1 с по времени погрешность вычислений скорости поршня не превышала 1%. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $r_1 = 0.5$ см, $h = 0.02r_1$, $L = 2r_1$, $\mu = 1.5 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho = 780$ кг/м³, $\rho_p = 2700$ кг/м³, $\Delta p = 10^5$ Па, $f = 40$ Гц.

На рис. 1.3 показана зависимость силы $f_v(t) \frac{dv_2(r_1)}{dr}$, действующей на поршень со стороны жидкости.

При совпадении знаков f_v и скорости поршня v_p эта сила ускоряет движение поршня, то есть поршень увлекается потоком жидкости, а при различных знаках f_v проявляется как сила вязкого трения и при этом уменьшает скорость поршня. Двоякая роль силы f_v объясняется тем, что на жидкость, как и на поршень, действует одинаковый градиент давления и, в силу того, что инерция поршня выше, жидкость движется быстрее поршня и увлекает его за собой. В моменты, когда градиент давления меняет знак, поршень продолжает двигаться по инерции, а течение жидкости меняет свое направление и f_v действует как сила вязкого трения (сила вязкого трения проявляется при движении твердого тела по поверхности жидкости и определяется напряжением, создаваемым жидкостью на поверхности твердого тела).

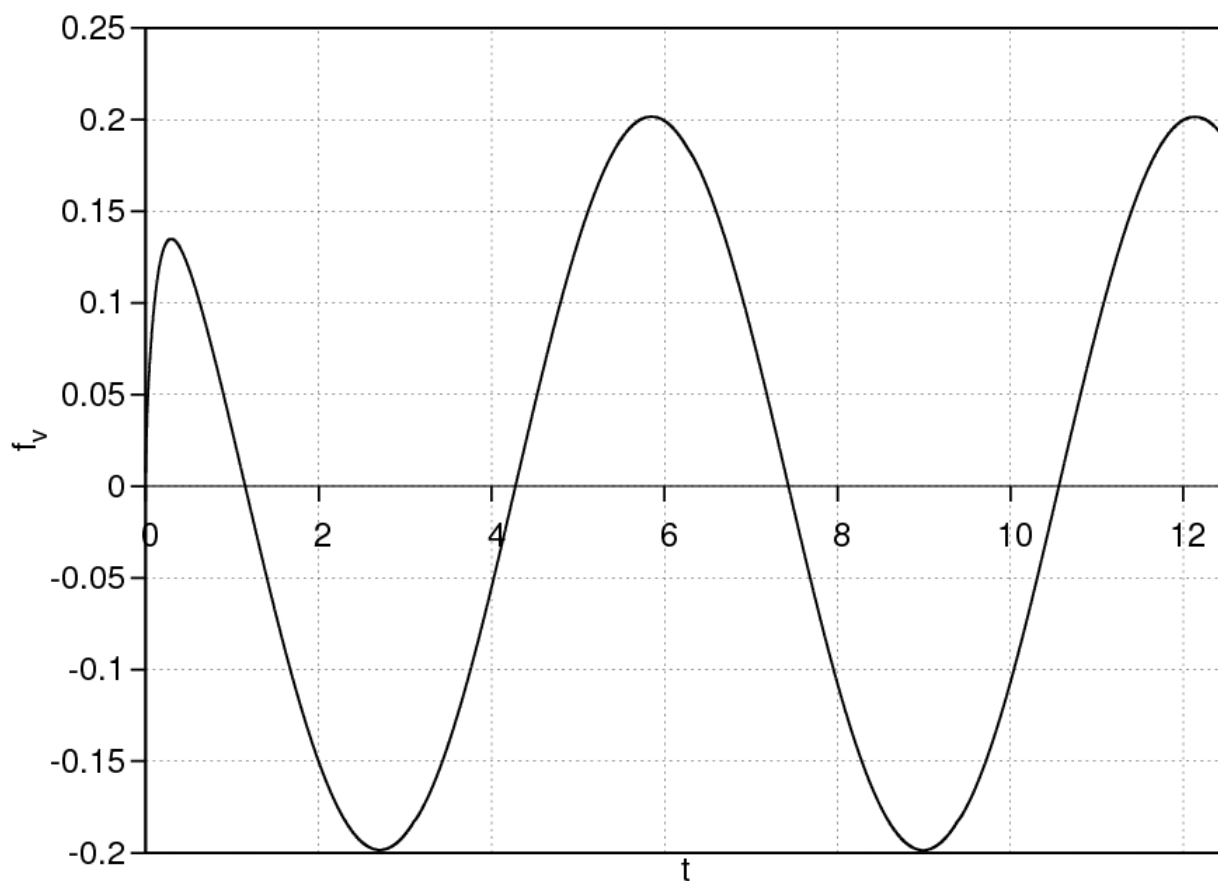


Рис. 1.3. Зависимость силы воздействия жидкости f_v на поршень от времени

К достоинствам рассмотренной математической модели следует отнести:

- модель учитывает силы вязкого трения, возникающие при движении поршня в трубе;
- геометрия модели включает в себя зазор между поршнем и стенками трубки и при расчетах учитывается проникновение части жидкости в этот зазор. В этом пункте следует отметить тот факт, что вязкость газа несколько отличается от вязкости жидкости, однако имеются вполне определенные функциональные зависимости этих величин. Пример приведен на рис. 1.4;

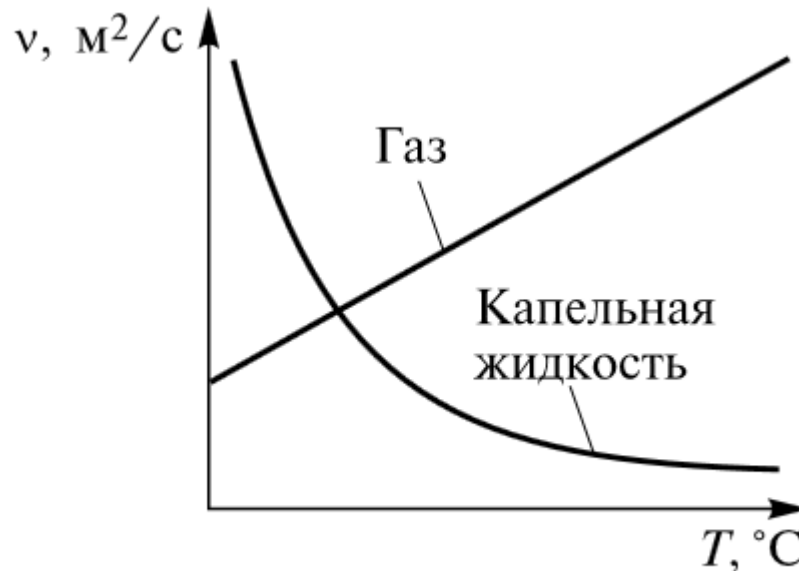


Рис. 1.4. Зависимость вязкости от температуры. Сравнительные характеристики газа и жидкости

- рассмотренное давление на поршень периодически, следовательно, данная модель может применяться как в расчете движения поршневых двигателей, так и в баллистике.

К недостаткам следует отнести тот факт, что применяемый разностный метод Ньютона-Рафсона не дает достаточной для конструирования некоторых механизмов точности. Кроме того, зависящий от начального приближения, данный метод может не сойтись при неудачном выборе параметров.

1.3. Приложения к математической модели рассматриваемой задачи

В настоящее время получены некоторые важные результаты расчетов математических моделей пневматических (баллистических) систем. Например, имеется точное аналитическое решение простейшей задачи Лагранжа, на которое можно опираться при расчетах с помощью численных методов. Однако аналитическое решение описывает лишь некоторые частные случаи задач, а при общем решении не обойтись без численных методов. Кроме того, проведенные исследования показали, что в данном случае явные разностные схемы

предпочтительнее, чем неявные. Получены зависимости некоторых характеристик движения поршня.

1. Поршень с отверстием

Как было сказано в предыдущем подразделе, модель системы, включающей в себя поршень с отверстием (или модель с зазором между поршнем и стенками трубы) предполагает проникновение части газа (жидкости) в правую часть трубы (правой частью трубы условно называется часть трубы, находящаяся справа от поршня).

Получены данные о скорости поршня с отверстием в сравнении с таким же поршнем без отверстия (рис. 1.5).

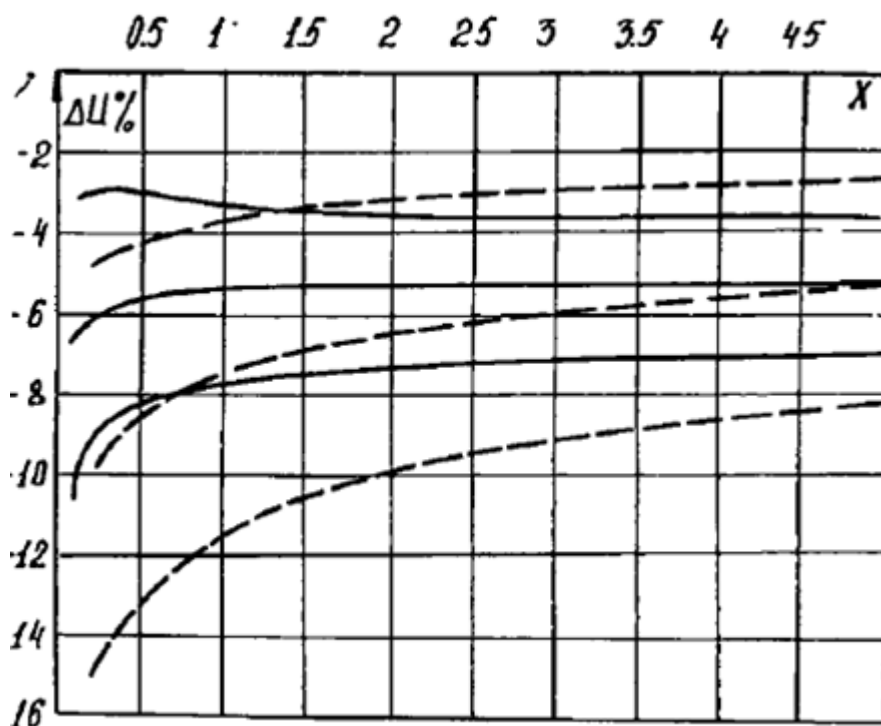


Рис. 1.5. Пример относительного уменьшения скорости поршня с различным размером отверстия от соответствующей скорости поршня без отверстия

2. Модель с нагревом предполагает какой-либо источник тепла, находящийся извне системы. В реальных моделях это может быть, например, горение пороховых газов, однако в рамках данного исследования малоинтересна природа поступающего в рассматриваемую пневматическую систему тепла, а необходимо

исследовать, как именно это обстоятельство повлияет на скорость движения поршня. Оказывается, уже получены данные расчетов, позволяющие оценить увеличение скорости поршня в системе с нагреваемым газом.

На рис. 1.6 представлены приращения скорости поршня в случае подвода в систему тепла при некоторых значениях массы газа. Однако, имеющийся в распоряжении математический аппарат позволяет вычислить такое приращение при любом значении m .

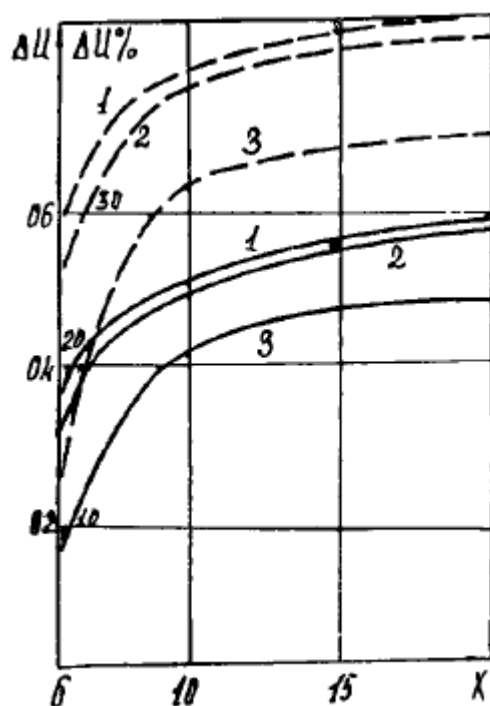


Рис. 1.6. Примеры приращения скорости модели по сравнению со случаем, когда подвод тепла отсутствует: — абсолютное приращение скорости поршня; --- δ относительное приращение скорости поршня в случае массы газа: 1 $\delta m=0.04$, 2 $\delta m=0.1$, 3 $\delta m=0.4$

1.4. Математическое моделирование пневматической системы

В данной работе вводится в рассмотрение пневматическая система (рис. 1.7), состоящая из цилиндрической трубы длины l , один конец которой закрыт, а другой – открыт.

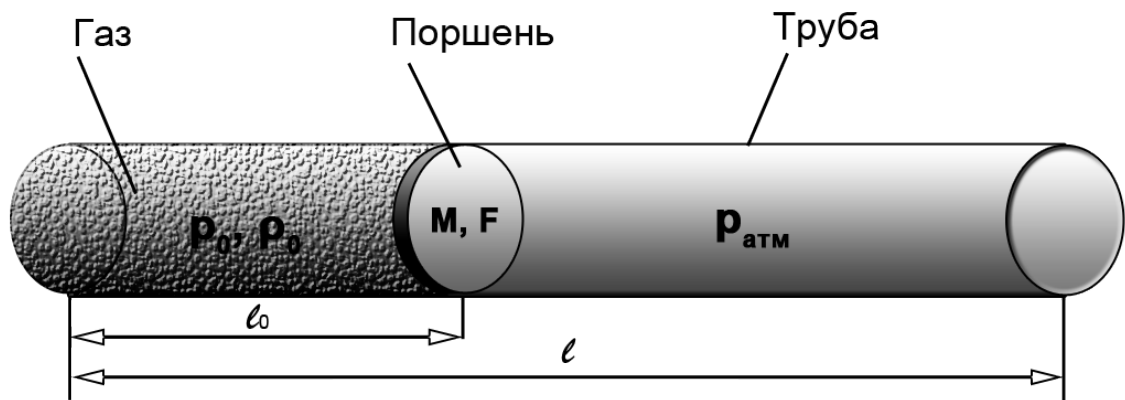


Рис. 1.7. Пневматическая система

В трубе на расстоянии l_0 от ее закрытого конца находится поршень. Пространство между закрытым концом трубы и поршнем заполнено газом, при этом газ и поршень находятся в состоянии покоя. Начальные параметры, характеризующие газ: давление (p_0) и плотность (ρ_0). Параметры поршня: масса (M) и площадь поперечного сечения (F). Кроме того, в трубе может действовать противодействие на поршень ($p_{атм}$) – например, атмосферное давление.

В начальный момент времени $t_0 = 0$ поршень прекращает находиться в состоянии покоя и движется в сторону незакрытого конца трубы, при этом необходимо рассмотреть случаи, при которых газ расширяется:

- а) равномерно;
- б) неравномерно.

Требуется найти скорость поршня на выходе из трубы (т. е. в момент, когда путь, пройденный поршнем, равен $l - l_0$), сравнить результаты, полученные в пунктах а) и б) при одних и тех же входных параметрах. Сравнить математические модели, разработанные на основе каждого метода, по сложности построения. На основании данных, полученных в результате этих двух сравнений, сделать вывод о целесообразности рассмотрения каждого случая. В процессе решения задачи необходимо помнить, что рассматриваются только изэнтропийные процессы, то есть в случае, когда энтропия системы по каким-либо причинам перестает быть постоянной (при этом происходящий процесс

называется неизоэнтропийным), происходит теплообмен между системой и окружающей средой. А поскольку все быстропротекающие процессы следует считать изоэнтропийными, то и процесс расширения газа и последующего движения поршня предполагается таковым.

Итак, в данном разделе рассмотрен тот факт, что при разработке математических моделей пневматических систем широкий класс газодинамических течений может быть описан системами квазилинейных уравнений в частных производных с одной пространственной переменной. Такие уравнения в настоящее время, как правило, решаются численно, поскольку точное аналитическое решение можно получить лишь для некоторых частных случаев задачи.

В настоящее время уже получены результаты расчетов влияния сил трения на движущийся в трубе поршень, данные по изменению скорости поршня с отверстием относительно такого же поршня без отверстия, кроме того имеются данные о движении деформируемого поршня, о движении поршня вследствие давления нагреваемого газа, о построении многоступенчатых баллистических (пневматических) систем. И на основании этого анализа можно сделать выводы о том, что все недостатки расчетов таких систем кроются в недостаточно точных или слишком сложных численных методах, использующихся при расчетах параметров движения поршня. Исходя из этого факта, следует направить изыскания в данной области на улучшение существующих численных методов или отыскании новых способов расчета.

Известно, что численный метод решения такой математической модели можно построить далеко не единственным образом. Кроме аппроксимации и устойчивости в последнее время на разностные уравнения накладывается ряд дополнительных условий. Схема должна быть: 1) монотонной, то есть переводить монотонные профили в монотонные; 2) полностью консервативной, то есть на разностной сетке должны точно выполняться не только разностные аналоги

интегральных законов сохранения массы, импульса и полной энергии, но и аналоги законов сохранения внутренней и кинетической энергии, а также разностный аналог закона сохранения объема; 3) надежной в смысле возможности расчета по ней с достаточной для практики точностью широкого класса задач; 4) экономичной в смысле затрат машинного времени; 5) простой для программирования и т. д.

Заметим, что одними из самых важных параметров расчета высокоскоростных метательных устройств будут скорости поршней. Эти данные с достаточной для практики точностью можно получить, производя расчет по разностной схеме. Ясно, что предложить разностные уравнения, удовлетворяющие всем перечисленным выше требованиям, вряд ли возможно, так как каждое дополнительное условие резко сужает класс схем, аппроксимирующих исходные соотношения, и поэтому для расчета течений газа в высокоскоростных метательных установках удалось построить некоторые схемы, удовлетворяющие лишь некоторым из перечисленных выше требованиям. Эти схемы прошли тестирование на задачах, которые имеют надежные приближенные или точные решения, однако, как ясно из вышесказанного, многие задачи в данной области все еще ждут своего решения [5].

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Подходы к изучению движения жидкости

Жидкость представляет собой физическое тело, состоящее из бесконечно большого числа бесконечно малых частиц. С большой степенью точности можно рассматривать жидкое тело как сплошную среду, эта модель позволяет значительно упростить решение большинства гидравлических задач. Действительно, для описания движения подобной сплошной среды достаточно элементарных знаний физики. Тем не менее, нередки случаи, когда уровень исследования движения жидкого тела требует глубокого знания физических процессов происходящих в движущейся жидкости на молекулярном уровне. В таких случаях вполне удобная модель сплошной среды может оказаться неприемлемой, необходимы дополнительные уравнения движения каких-либо «слоев», частей жидкой среды. Для каждой конкретно взятой задачи необходимо проводить исследования в целях сравнения математических моделей [17].

Отметим еще один важный нюанс: все приведенные рассуждения, справедливые для движения жидкости, справедливы и для движения газа. Несмотря на то, что газ и жидкость – разные фазовые состояния вещества, специальная наука гидроаэромеханика (механика текучих веществ), в изучении этих фаз вещества, не разделяет их, а изучает их механические свойства, взаимодействие этих свойств между собой и с граничащими с ними твёрдыми телами.

Цель данной науки – улучшить форму летательных аппаратов, автомобилей; добиться наибольшей эффективности устройств, использующих жидкость или газ (двигателей реактивных самолётов или впрыскивателей топлива в двигателях внутреннего сгорания); оптимизировать производственные процессы, связанные с использованием жидкости или газа (аэрозольное нанесение покрытий, создание оптических волокон, т. д.) [22].

Исходя из практики изучения гидроаэромеханики как прикладной дисциплины, можно упомянуть два метода изучения движения жидкости: метод Лагранжа и метод Эйлера [15].

1.2.1. Переменные Лагранжа

С точки зрения, предложенной Лагранжем, изучается сама жидкость, точнее – отдельные ее частицы (рис. 2.1), рассматриваемые как материальные частицы, заполняющие некоторый движущийся объем («жидкий объем»).

При этом рассматривается:

- изменения, которые претерпевают различные векторные и скалярные величины, характеризующие движение некоторой фиксированной частицы жидкого объема (например, скорость, плотность и др.) в наблюдаемые моменты времени;

- изменения тех же величин при переходе от одной частицы жидкого объема к другой: величины, характеризующие движение, рассматриваются как функции от времени и от декартовых или криволинейных координат частицы – t , a , b , c , которые и называются переменными Лагранжа.

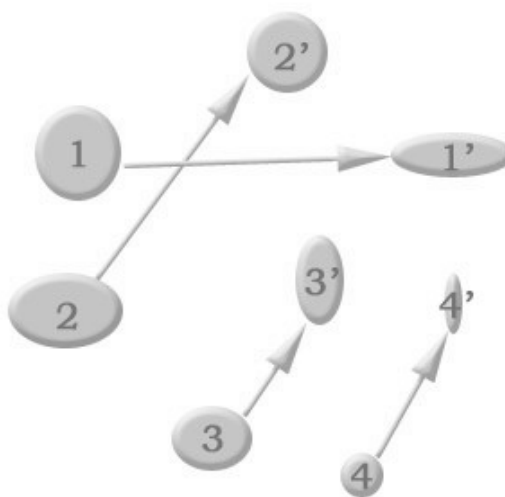


Рис. 2.1. Иллюстрация перемещения частиц

Таким образом, можно утверждать, что описание движения жидкости методом Лагранжа сводится к рассмотрению положения частиц жидкости (в полном смысле слова) в любой момент времени (рис. 2.1).

Так в начальный момент времени частицы находились в точках 1, 2, 3 и 4 (рис.2.1). По истечении некоторого времени они переместились в точки: 1', 2', 3' и 4', причём это перемещение сопровождалось изменением объёмов и форм частиц (упругой деформацией). Тогда можно утверждать, что частицы жидкости при своём движении участвуют в трёх видах движения (поступательном, вращательном и деформации) [2].

В итоге координаты x, y, z любой частицы жидкого объема:

$$\begin{cases} x=f_1(a,b,c,t), \\ y=f_2(a,b,c,t), \\ z=f_3(a,b,c,t). \end{cases} \quad \begin{cases} x=f_1(a,b,c,t), \\ y=f_2(a,b,c,t), \\ z=f_3(a,b,c,t). \end{cases}$$

Проекции скорости и ускорения на координатные оси:

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1(a,b,c,t)}{\partial t}, \\ v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t}, \\ v_z = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f_3}{\partial t}, \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}, \\ \omega_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}, \\ \omega_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2}, \end{cases}$$

Плотность: $\rho=f(a,b,c,t)$ [12].

1.2.2. Переменные Эйлера

С точки зрения Эйлера изучается не сама жидкость, а пространство, в котором она находится, при этом рассматривается:

- изменение различных элементов движения в фиксированной точке пространства с течением времени и
- изменение этих элементов при переходе к другим точкам пространства.

Различные векторные и скалярные элементы движения рассматриваются как функции точки и времени, т. е. аргументов x, y, z, t , называемых переменными Эйлера.

$$\begin{cases} v_x = F_1(x, y, z, t), \\ v_y = F_2(x, y, z, t), \\ v_z = F_3(x, y, z, t), \\ \rho = F_4(x, y, z, t) \text{ и т. д.} \end{cases}$$

С точки зрения Эйлера, объектами изучения являются различные векторные и скалярные поля, характеризующие движение жидкости, например, поле скоростей, поле ускорений, поле плотностей и др [12].

Построение поля скоростей осуществляется следующим образом:

На некоторый момент времени (например, t_0) произвольным образом выберем необходимое число точек, в которых находятся частицы жидкости. Приписав их скорости $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3, \dot{u}_4, \dot{u}_5, \dot{u}_6$ точкам неподвижного пространства (1, 2, 3, 4, 5 и 6), сделаем «моментальную фотографию» поля скоростей на выбранный момент времени (рис. 2.2).

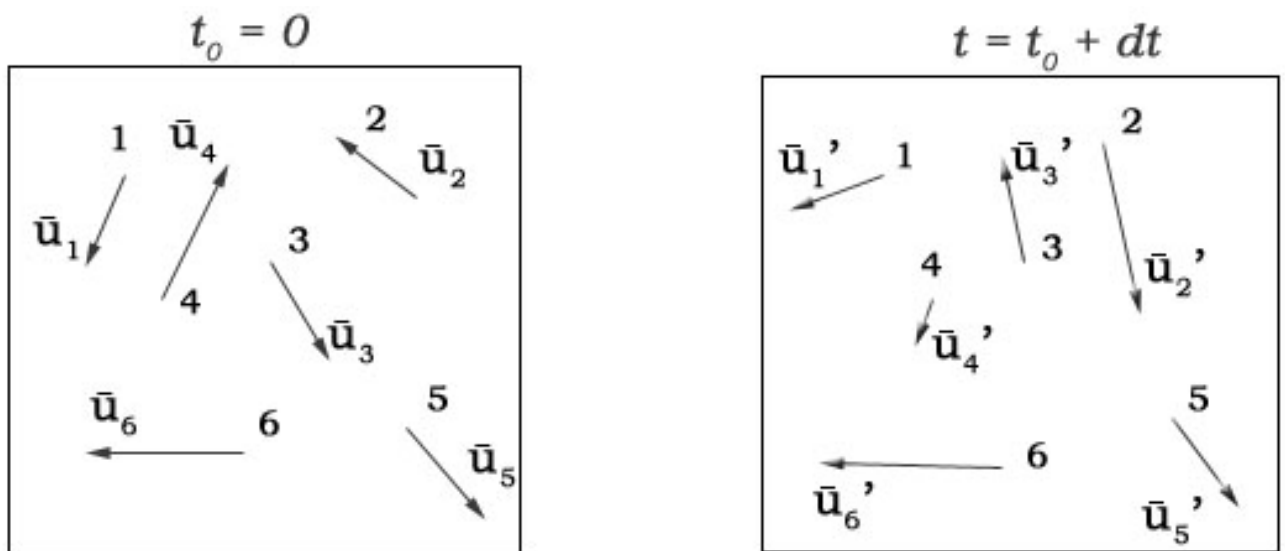


Рис. 2.2. Состояние поля скоростей в разные моменты времени

В следующий момент времени $t=t_0+dt$ в тех же выбранных точках неподвижного пространства будут находиться другие частицы жидкости, имеющие другие скорости (рис. 2.2) $u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, u'_5, u'_6$. Выполнив уже известную процедуру второй раз, получим новую «моментальную фотографию» поля скоростей на момент времени $t=t_0+dt$. Теперь вместо изучения траекторий частиц жидкости будем сравнивать поля скоростей [15].

Рассмотренные подходы к изучению движения жидкости справедливы и в случае рассмотрения движения газа – это начала гидродинамики, науки, в рамках которой рассматривается движение жидкостей и газов.

Переменные Лагранжа удобнее использовать в том случае, когда рассматривается одномерное движение, а переменные Эйлера используют при рассмотрении многомерного движения. Это обусловлено тем, что при использовании переменных Лагранжа в одномерном случае краевые условия задач газовой динамики записываются в более простой и более удобной для решения форме, нежели краевые условия в переменных Эйлера [2]. В нашем случае движение поршня и расширение газа за поршнем происходит в одном и только в одном направлении, поэтому для решения задачи целесообразно пользоваться переменными Лагранжа.

2.2. Математическая модель пневматической системы, построенная с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений

На рис. 2.3 изображена модель пневматической системы, в которой поршень с площадью F и массой M ограничивает участок длины l_0 цилиндрической трубы длины l . Газ имеет постоянный объем V_0 и давление газа постоянно (p_0), $V_0 = Fl_0$.

После того, как поршень начинает двигаться, и при этом газ за поршнем расширяется равномерно, для данной системы становится справедливым второй закон Ньютона:

$$M \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = pF, \quad (2.1)$$

где $x=(x^1, x^2, x^3)$ – координаты поршня по пространству (поршень движется вдоль продольной оси трубы, начало оси совпадает с закрытым концом поршня), t – время, p – давление газа в данный момент времени t .

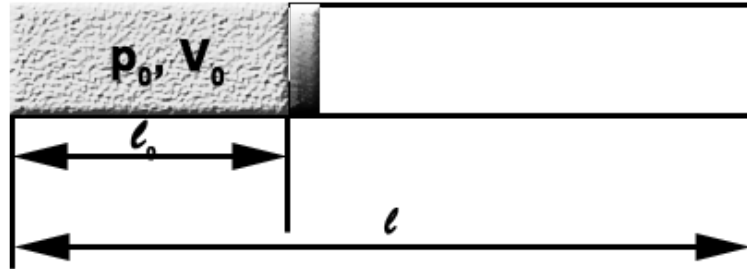


Рис. 2.3. Пневматическая система

Также при этом справедливо уравнение состояния идеального газа:

$$pV=RT, \quad (2.2)$$

адиабата Пуассона:

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma. \quad (2.3)$$

Здесь $\gamma=\frac{c_p}{c_v}=\frac{i+2}{i}$, i – число степеней свободы молекулы.

Текущий объем газа удовлетворяет соотношению: $V=Fx$.

Вследствие формул (2.1) и (2.3):

$$M\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=p_0\left(\frac{V_0}{Fx}\right)^\gamma.$$

После применения операции приведения переменных к безразмерному виду (подробнее данная операция рассмотрена в подразделе 2.4.1), получим:

$$x^\gamma\frac{d^2 x}{dt^2}=1.$$

Вследствие того, что $x=(x^1, x^2, x^3)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Выполним замену переменных:

$$\frac{dx}{dt}=U,$$

тогда:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dU}{dx} \cdot U, \text{ после подстановки получим:}$$
$$x^\gamma \cdot \frac{dU}{dx} \cdot U = 1.$$

Это уравнение решается методом разделения переменных:

$$\int U dU = \int \frac{dx}{x^\gamma},$$
$$\frac{U^2}{2} = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} + C.$$

Из начальных условий (в тот момент, когда поршень еще не начал движение, его перемещение U в координатах Лагранжа равно 0 , а координата x имеет значение единицы, поскольку переменные приведены к безразмерному виду) находим константу C :

$$C = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

Подставим это значение в предыдущую формулу и выразим U :

$$U = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} (1 - x^{1-\gamma})}. \quad (2.4)$$

Выполним обратную замену переменных:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} (1 - x^{1-\gamma})},$$

приведем к удобному для интегрирования виду:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} (1 - x^{1-\gamma})}} = dt,$$

проинтегрируем:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} (1 - x^{1-\gamma})}}. \quad (2.5)$$

Полученный интеграл берется с помощью какого-либо численного метода: составляется сетка значений переменной t , каждому из которых соответствует

одно и только одно значение x . Затем полученное значение подставляется в формулу (2.4) и находится значение скорости U в данной точке пространства.

Процесс завершается, если на $i+1$ – м шаге значение скорости меньше, чем значение скорости на i – м шаге: это означает, что поршень замедляется, за поршнем возникает ударная волна, и уравнение (2.3) перестает быть справедливым для происходящего неизоэнтропийного процесса. Кроме того, рассматривать неизоэнтропийные процессы применительно к разработке математической модели пневматической системы бессмысленно: если поршень начинает замедляться прежде, чем достигнет правого, открытого конца трубы, то длину трубы попросту можно уменьшить и взять, например, меньшее количество газа или, что сложнее, – газ с другими физическими свойствами. Если же замедления поршня не произошло, то процесс завершается при $x \geq l$, при этом находится искомое значение U при $x=l$.

2.3. Уравнения газовой динамики

Уравнения газовой динамики составляют основу многих математических моделей, применяемых для решения задач в таких областях науки и техники, как аэродинамика летательных аппаратов, астрофизика, прогноз погоды, проектирование магнетогидродинамических генераторов электрической энергии, теория реактивных двигателей, управляемый термоядерный синтез и многие другие. Одним из важных вопросов при таких обстоятельствах является разработка эффективных методов решения этих уравнений. В силу нелинейного характера уравнений газовой динамики фактически единственным универсальным и эффективным способом их решения являются численные методы, основанные на использовании быстродействующих ЭВМ.

На сегодняшний день существует большое количество численных методов решения уравнений газовой динамики. Их число продолжает расти, пополняясь всё новыми разработками. С одной стороны, это свидетельствует о важности

численного решения уравнений газовой динамики в различных приложениях, а с другой, такое обилие методов численного решения говорит о том, что пока не существует универсального метода, удовлетворяющего всем предъявляемым к нему требованиям [6]. Однако, с помощью сравнения методов, необходимо выбирать и отметить заведомо «проигрышные».

В данном разделе будут рассмотрены основные уравнения газовой динамики, позволяющие построить математическую модель рассматриваемой задачи (используются уравнения в частных производных), а затем полученные уравнения необходимо будет представить в удобном для вычислений на ЭВМ виде с помощью какого-либо численного метода.

2.3.1. Используемые обозначения

В декартовой системе координат нет разницы между ковариантными (с нижними индексами) и контравариантными (с верхними индексами) компонентами тензора, то свободные индексы будут, как правило, верхними. Если же какой-то индекс встретится вверху и внизу, то по этой паре индексов происходит суммирование от 1 до 3. У координат, например, x^1, x^2, x^3 индексы всегда вверху. Введем обозначения:

ρ – плотность газа в данной точке пространства, определенная в данный момент времени t ;

p – давление в данной точке пространства, определенное в данный момент времени t ;

u_1, u_2, u_3 – скорость газа в данной точке пространства, определенная в данный момент времени t ;

T – температура газа в данной точке пространства, определенная в данный момент времени t ;

c_p, c_v – теплоемкости единицы массы газа при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно (это постоянные величины).

$R = c_p - c_v$ – универсальная газовая постоянная.

$\operatorname{div} u$ – дивергенция скорости.

Если $f(x, t) = f(x^1, x^2, x^3, t)$ – дифференцируемая функция и $x^i = x^i(t)$ – уравнения линии тока газа, то:

$$\frac{dx^i}{dt} = u_i, \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u^k \cdot \frac{\partial f}{\partial x^k}, \quad (2.6)$$

где $\frac{df}{dt}$ – полная производная по времени вдоль линии тока,

$\frac{\partial f}{\partial t}$ – частная производная по времени в данной точке пространства в данный момент времени t ;

$\frac{\partial f}{\partial x^i}$ – частная производная по координате x^i в данной точке пространства в данный момент времени t ;

Обозначим также:

$$u^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2,$$

$$C_p = \frac{c_p}{R}, \quad C_v = \frac{c_v}{R}.$$

Для газовой динамики имеет место **уравнение Эйлера**:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \operatorname{div} u \text{ или } \frac{\partial J}{\partial t} = J \frac{\partial u^k}{\partial x^k}, \quad (2.7)$$

где $J = \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial \zeta^i} \right)$ – якобиан преобразования.

2.3.2. Уравнение неразрывности

Введем обозначения:

D – данное множество точек (частиц) движущегося газа,

D^* – множество тех же частиц в начальный момент времени,

∂D – граница множества D .

Множество D меняет свое расположение в пространстве с течением времени, а множество D^* остается неизменным. Связь между координатами $(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ множества D^* и координатами (x^1, x^2, x^3) множества D такова:

$$x^i = x^i(t, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$$

Поскольку масса m множества D частиц постоянна, а масса есть интеграл от плотности по данному множеству частиц, то:

$$\int_D \rho dx = \text{const}.$$

Производная по времени от величины, сохраняющей вдоль траектории постоянное значение, равна нулю. Область D зависит от времени, однако область D^* неизменна, отсюда:

$$\int_D \rho dx = \int_{D^*} \rho J d\zeta = \text{const},$$

$$\frac{d}{dt} \int_{D^*} \rho J d\zeta = \int_{D^*} \frac{d(\rho J)}{dt} d\zeta = 0.$$

Ввиду произвольности области D^* и непрерывности подынтегральной функции, получим:

$$\frac{d(\rho J)}{dx} = 0, \rho J = \text{const}.$$

Дифференцируя, имея ввиду (2.6), получим:

$$J \cdot \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} u \right) = 0.$$

Сокращаем на J :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} u = 0. \quad (2.8)$$

Учитывая соотношение (2.6), получим **уравнение неразрывности** газа в дивергентной (консервативной) форме [18]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho u^k) = 0. \quad (2.9)$$

2.3.3. Уравнение движения

Из второго закона Ньютона следует, что производная по времени от количества движения равна сумме действующих сил. В нашем случае действующие на движущийся объем газа силы – давление против нормали n^i к поверхности.

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho u^i dx = - \int_{\partial D} p n^i ds.$$

Из условия (2.3.4), формулы Остроградского-Гаусса и произвольности объема D , получим:

$$\rho \cdot \frac{d}{dt} u^i + \frac{\partial}{\partial x^i} p = 0.$$

Ввиду (2.6) получаем:

$$\rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} u^i + \rho \cdot u^k \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^i} p = 0. \quad (2.10)$$

Здесь по индексу k происходит суммирование. Отсюда:

$$\begin{aligned} (\rho u^i) + \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho u^k u^i) + \frac{\partial}{\partial x^i} p - u^i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho u^k) \right) = 0. \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho \end{aligned}$$

Теперь, имея ввиду (2.8), получаем **уравнение движения** в дивергентной форме [18]:

$$\begin{aligned} (\rho u^i) + \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho u^k u^i) + \frac{\partial}{\partial x^i} p = 0. \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho \end{aligned}$$

2.3.4. Уравнение энергии (сохранения массы)

Исходным для получения уравнения энергии является уравнение Клапейрона:

$$p = R \rho t.$$

Ввиду отсутствия теплообмена работа внешних сил (давления на границе) идет на изменение внутренней и кинетической энергий, поэтому мощность внешних сил равна производной по времени от суммы этих энергий:

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \left(c_v \cdot T + \frac{u^2}{2} \right) dx = - \int_{\partial D} p \cdot u_n ds,$$

где u_n – проекция вектора скорости на внешнюю нормаль.

Ввиду условия (2.3.4), формулы Остроградского-Гаусса и произвольности объема D , получим:

$$\rho \cdot \frac{d}{dt} \left(c_v \cdot T + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} (p \cdot u^k) = 0.$$

Преобразуем с учетом формул (2.3.3), (2.3.4), (2.3.5) и уравнения Клапейрона:

$$\begin{aligned} 0 &= \rho \cdot \frac{d}{dt} \left(c_v \cdot T + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} (p \cdot u^k) = \frac{d}{dt} (\rho \cdot c_v \cdot T) - \dot{\iota} \\ &\quad - c_v \cdot T \cdot \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial}{\partial x^k} (p \cdot u^k) + u^k \cdot \rho \cdot \frac{d u^k}{dt} \frac{c_v}{R} \cdot \frac{dp}{dt} - \dot{\iota} \\ &\quad - \frac{c_v \cdot p}{R \cdot \rho} \cdot \left(-\rho \frac{\partial u^k}{\partial x^k} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} (p \cdot u^k) - u^k \cdot \frac{\partial p}{\partial x^k} = \dot{\iota} \\ &\quad \dot{\iota} \frac{c_v}{R} \cdot \left(\frac{dp}{dt} + u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} \right) + \frac{c_v \cdot p}{R} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^k} (p \cdot u^k) - u^k \cdot \frac{\partial p}{\partial x^k} = \dot{\iota} \\ &\quad \dot{\iota} \frac{c_v}{R} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c_v}{R} \cdot \frac{\partial (p \cdot u^k)}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^k} (p \cdot u^k) + \rho \cdot u^k \cdot \frac{\partial u^k}{\partial t} + \dot{\iota} \\ &\quad \frac{u}{\partial \frac{(\dot{\iota} \dot{\iota} 2/2)}{\partial t}} + \dot{\iota} \\ &\quad + \rho \cdot u^k \cdot u^i \cdot \frac{\partial u^k}{\partial x^i} = \dot{\iota} \frac{c_v}{R} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c_p}{R} \cdot \frac{\partial (p \cdot u^k)}{\partial x^k} + \rho \cdot \dot{\iota} \\ &\quad + \rho \cdot u^k \cdot \frac{\partial u^k}{\partial x^k} = 0. \end{aligned}$$

Обозначим: $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.

Полученное выражение умножим на $\frac{R}{c_v}$.

С учетом (2.3.4) получим **уравнение энергии** в дивергентной форме [18]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(p + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\gamma \cdot p \cdot u^k + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \rho \cdot u^k \cdot u^2 \right) = 0.$$

Итак, в данном подразделе были получены уравнения газовой динамики, необходимые для решения задачи. Математическая модель задачи представляет собой систему уравнений в частных производных, содержащую уравнение движения, уравнение неразрывности (сохранения массы) и уравнение энергии, а также краевые условия, рассматривающие поведение системы на концах трубки. Решение, полученное в данном случае, является более точным в сравнении с предыдущим случаем, поскольку рассматривается не общее значение параметров газа, а значения параметров для каждого движущегося «слоя» газа, которые могут двигаться по-разному вследствие неравномерности расширения.

2.4. Математическая модель пневматической системы, построенная с использованием уравнений в частных производных

В предыдущем разделе были рассмотрены основные уравнения газовой динамики. В таком виде их совершенно неудобно решать с помощью ЭВМ, и можно использовать только для получения аналитических решений некоторых частных задач. Целью же данного исследования является автоматизация процесса вычисления параметров движения поршня, поэтому необходимо привести уравнения газовой динамики (а это, как выяснилось, уравнения в частных производных) к более удобному виду, для чего необходимо выполнить следующие действия:

- для общности вычислений, а также для уменьшения погрешностей расчетов отдельных величин, привести все переменные в уравнениях газовой динамики к безразмерному виду;

- представить уравнения газовой динамики в виде разностных схем, а вычисления проводить с использованием какого-либо численного метода. В данном случае был выбран метод конечных разностей, поскольку на основе

анализа существующих решений он признан самым оптимальным и дифференциально-разностный метод, который будет впервые применен для решения подобной задачи;

- определить краевые условия, поскольку без данного действия математическая модель задачи не является полной;

- привести подробную схему алгоритма решения задачи дифференциально-разностным методом, что является особенно важным в свете того, что данный метод не применялся для решения данной задачи, и, следовательно, без подробного алгоритма затрудняется внедрение этого метода в электронно-вычислительную машину.

2.4.1. Безразмерные переменные в уравнениях газовой динамики

Значения параметров, получаемые с помощью методов численного решения дифференциальных уравнений, как правило несколько отличаются от их истинных значений из-за наличия ошибки аппроксимации. Так, погрешности при определении параметров, порядки которых велики, могут быть не значимы для них самих, но в то же время они будут сильно искажать значения параметров меньших порядков. Поэтому прежде чем перейти к созданию алгоритма для решения уравнений математической модели, необходимо привести эти уравнения к безразмерному виду, т.е. провести операцию *приведения переменных к безразмерному виду*, в результате которой все переменные математической модели будут иметь одинаковый порядок [7].

Приведем переменные к безразмерному виду, используя:

$$\rho_0 - \text{начальная плотность газа} \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right),$$

$$l - \text{длина участка с газом} (\text{м}),$$

$$p_0 - \text{начальное давление газа} \left(\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} \right).$$

Новые переменные:

$$\tau = \frac{t}{l} \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} Y \left(\frac{c}{m} \cdot \sqrt{\frac{\kappa \mathcal{E} \cdot M^3}{m \cdot c^2 \cdot \kappa \mathcal{E}}} = c \right), \quad (2.11)$$

$$\xi = \frac{x}{l} \left(\frac{M}{m} \right), \quad (2.12)$$

$$v = \frac{u}{\sqrt{Y \frac{p_0}{\rho_0}}} \left(\frac{m/c}{\sqrt{\frac{\kappa \mathcal{E}}{m \cdot c^2} \cdot \frac{M^3}{\kappa \mathcal{E}}}} = \frac{m/c}{m/c} \right). \quad (2.13)$$

1) Уравнение неразрывности:

Выразим новые переменные через имеющиеся:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{Y \frac{p_0}{\rho_0}} \cdot \rho_0 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho u = \frac{\partial \tilde{\rho} v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{l} \cdot \rho_0 \cdot \sqrt{Y \frac{p_0}{\rho_0}} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\rho} v.$$

Подставим полученные выражения в уравнение неразрывности:

$$\frac{\rho_0}{l} \sqrt{Y \frac{p_0}{\rho_0}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\rho} + \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\rho} v \right) = 0.$$

Сокращая на полученный множитель, получим уравнение неразрывности с новыми переменными:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\rho} + \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\rho} v = 0.$$

2) Уравнение движения:

$$\frac{1}{l} \sqrt{Y \frac{p_0}{\rho_0}} \cdot \rho_0 \cdot \sqrt{Y \frac{p_0}{\rho_0}} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\rho} v + \frac{1}{l} \rho_0 \cdot \left(Y \frac{p_0}{\rho_0} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\rho} v^2 + \frac{p_0}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{p} = 0,$$

$$\frac{Y p_0}{l} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\rho} v + \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\rho} v^2 + \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{p} \right) = 0.$$

Сокращая на получившийся ненулевой множитель, получим уравнение движения с новыми переменными:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\rho} v + \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\rho} v^2 + \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{p} = 0.$$

3) Уравнение энергии:

Аналогичным образом получается уравнение энергии:

$$\frac{1}{l} Y p_0 \sqrt{Y \frac{p_0}{\rho_0}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tilde{p} + \frac{Y-1}{2} \tilde{\rho} v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(Y \tilde{p} v + \frac{Y-1}{2} \tilde{\rho} v^3 \right) \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tilde{p} + \frac{Y-1}{2} \tilde{\rho} v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(Y \tilde{p} v + \frac{Y-1}{2} \tilde{\rho} v^3 \right) = 0.$$

Процесс приведения переменных к безразмерному виду можно выполнять несколькими способами, и в данном подразделе рассматривается пример этого процесса.

При этом вид каждого из уравнений не изменился, поэтому при решении задачи удобно сначала заменить переменные с помощью выражений (2.11), (2.12), (2.13), а затем решать уравнения газовой динамики каким-либо методом, например, методом конечных разностей, рассмотренным в следующем подразделе.

2.4.2. Метод конечных разностей

В предыдущем разделе были получены уравнения газовой динамики, представляющие собой уравнения в частных производных. В таком виде их представить в вычислительной машине достаточно сложно, поэтому, используя метод конечных разностей, заменим производные разностными схемами.

Построим шаблон (рис. 2.4).

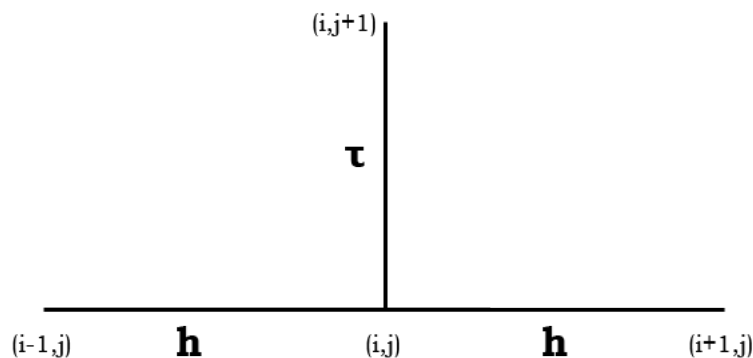


Рис. 2.4. Шаблон

Обозначения, используемые на рис. 2.4:

$$u_i = i h, i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$t^j = j \tau, j = 0, 1, 2, \dots,$$

где h, τ – соответствующие шаги (рис.2.4).

Вместо записи u_i^j будем использовать запись \bar{u}_i .

1) Уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho u^k u^i) + \frac{\partial}{\partial x^i} p = 0.$$

Поскольку для решения задачи требуется рассматривать движение газа только вдоль одной оси, то уравнение примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial x} p = 0.$$

Применим метод конечных разностей:

$$\dot{\rho}_i \bar{u}_i = \rho_i u_i + \frac{\rho_{i+1} u_{i+1} + \rho_{i+1} - \rho_{i-1} u_{i-1} - \rho_{i-1}}{2h} \cdot \tau. \quad (2.14)$$

2) Уравнение неразрывности (сохранения массы)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho u^k) = 0.$$

Это же уравнение применительно к решаемой задаче имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0.$$

Применим к данному уравнению метод конечных разностей:

$$\dot{\rho}_i = \rho_i + \frac{\rho_{i+1} u_{i+1} - \rho_{i-1} u_{i-1}}{2h} \cdot \tau. \quad (2.15)$$

3) Уравнение энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(p + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\gamma \cdot p \cdot u^k + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \rho \cdot u^k \cdot u^2 \right) = 0.$$

При движении газа вдоль одной оси уравнение энергии имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(p + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \cdot p \cdot u + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \rho \cdot u^3 \right) = 0.$$

Применим к данному уравнению метод конечных разностей:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i + \frac{\gamma-1}{2} \dot{p}_i \theta = p_i + \frac{\gamma-1}{2} p_i u_i^2 + \dot{\zeta} \\ + \frac{\gamma p_{i+1} u_{i+1} + \frac{\gamma-1}{2} p_{i+1} u_{i+1}^3 - \gamma p_{i-1} u_{i-1} - \frac{\gamma-1}{2} p_{i-1} u_{i-1}^3}{2h} \cdot \tau. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Таким образом, все необходимые для решения задачи уравнения газовой динамики были приведены к виду, удобному для представления в ЭВМ и численного решения: частные производные, входящие в уравнения, были заменены явными разностными схемами. С помощью полученной разностной схемы можно найти приближенное решение исходной дифференциальной задачи. Кроме того, в таком случае можно точно оценить погрешность измерений, если это станет необходимым. В процессе же данного сравнения математических моделей и методов, лежащих в их основе, погрешности измерения имеют один порядок, а потому не играют существенной роли.

2.4.3. Краевые условия

Для решения уравнений в частных производных потребуются краевые условия.

При использовании переменных Лагранжа $u = u(l, t)$ – смещение частицы относительно состояния покоя, тогда:

При $x = 0$ газ и поршень находятся в состоянии покоя, поэтому $u = 0$.

При $x = l$ в соответствии с вторым законом Ньютона (на рис. 2.5 показаны силы, действующие на поршень):

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = pF - p_{атм} F. \quad (2.17)$$

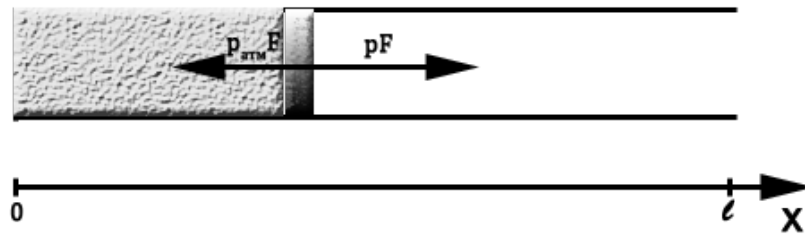


Рис. 2.5. Схема сил, действующих на поршень в трубке с газом

В данной формуле выражение $p_{atm} F$ может отсутствовать (т. е. быть равным нулю), поскольку оно имеет место только в том случае, когда имеется противодействие на поршень (например, атмосферное давление). Однако, если противодействие присутствует, то в какой-то момент оно становится больше, чем давление газа на поршень, вследствие этого в соответствии с данным краевым условием, ускорение станет отрицательным, и это будет означать, что поршень замедляется. В этом случае за поршнем возникают ударные волны, при этом энтропия газа меняется, и адиабата Пуассона перестает иметь место, а сам процесс перестает быть изоэнтропийным. В процессе решения данной задачи рассматриваются только изоэнтропийные процессы, поэтому скорость поршня, достигнутая до момента его замедления, будет решением данной задачи.

Математическая модель поставленной задачи при неравномерном расширении газа за поршнем представляет собой систему уравнений в частных производных. Для уменьшения погрешности вычислений, а также для расширения общности задачи все переменные, входящие в уравнения газовой динамики, были приведены к безразмерному виду.

Полученная система в оригинальном виде сложна для представления в ЭВМ, поэтому она была приведена к более удобному виду при помощи метода конечных разностей. Этот метод подразумевает замену частных производных разностными схемами, однако при такой замене будет получено приближенное решение системы.

2.5. Сравнение математических моделей системы, построенных с помощью ОДУ и уравнений газовой динамики с точки зрения физики

Любое вещество – твёрдое, жидкое или газообразное – состоит из миллионов и миллионов крошечных молекул, расположенных, казалось бы, вплотную друг к другу. В действительности, однако, расстояния между молекулами не так уж малы по сравнению с их размерами, и молекулы удерживаются на этих расстояниях друг от друга благодаря действию сил, которое можно сравнить с действием пружин. Твёрдое вещество отличается от жидкости или газа только тем, что его молекулы образуют более или менее неизменную конфигурацию, а действующие между ними молекулярные силы велики.

Из сказанного становится ясно, каким образом твёрдые тела, жидкости и газы проявляют упругость при приложении напряжения – молекулы либо теснее сдвигаются, либо расходятся, а их пружиноподобные связи сжимаются или растягиваются. Как только напряжение снимается, "пружины" вернут молекулы в исходное положение равновесия. О молекулах газа правильнее сказать, что "пружины" не оттягивают их в прежнее положение, а раздвигают друг от друга на прежнее расстояние.

Теперь представим себе длинную, наполненную воздухом трубу, с одного конца которой вставлен поршень.

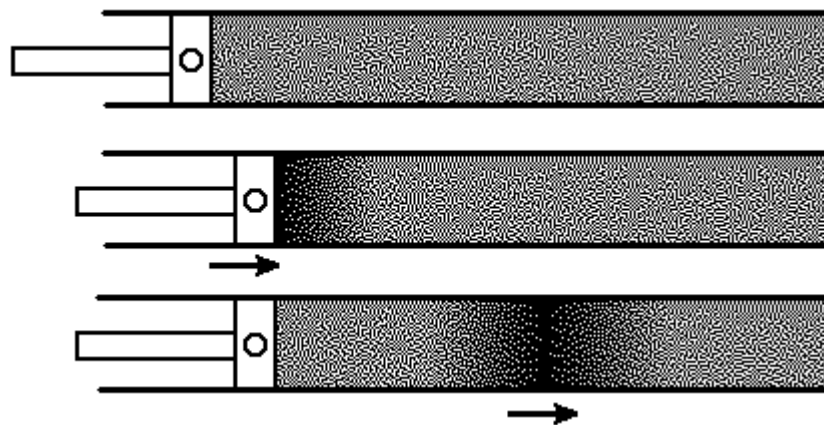


Рис. 2.6. Взаимодействие газа в трубе с поршнем

Можно было бы предположить, что если поршень быстро вдвинуть внутрь трубы, то весь столб воздуха одновременно продвинется вперед, освобождая место для поршня. Однако произойдет нечто совсем другое. Молекулы воздуха, удерживаемые на некотором расстоянии друг от друга силами упругого типа, — это мельчайшие частицы вещества, и, следовательно, они обладают массой. Каждая молекула всё-таки кое-что весит, а поскольку она обладает массой, она проявляет инерционные свойства. Припомним первый закон Ньютона: каждое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока внешняя сила не выведет его из этого состояния. Например, как бы хорошо ни были смазаны петли тяжелой дубовой двери, чтобы закрыть её, обязательно нужно приложить известное усилие, потому что из-за своей массивности она как бы сопротивляется и не приходит сразу в движение. Когда же она придет в движение, понадобится почти такое же усилие, чтобы её остановить.

Подобным образом, но в малом масштабе сопротивляются изменению движения молекулы воздуха, ближайšie к поверхности поршня. Когда поршень вдвигается, инерция не позволяет этим молекулам мгновенно прийти в движение, поэтому "пружины", отделяющие их от поверхности поршня, сожмутся. Потенциальная энергия, сообщенная поршнем этим "пружинам", заставит молекулы двигаться вперед. Придя в движение, молекулы, обладающие определенной массой, приобретут кинетическую энергию: потенциальная энергия "пружин" превратится в кинетическую энергию молекул. Затем этот процесс повторится, молекулы первого слоя начнут толкать молекулы следующего слоя; вследствие инерции те также сопротивляются и приходят в движение только после того, как сожмутся "пружины", действующие между молекулами первого и второго слоёв.

Теперь легко понять, почему при быстром вдвигании поршня в трубу на небольшое расстояние весь воздушный столб в целом не приходит в движение

мгновенно: каждому молекулярному слою нужно время, чтобы сдвинуть с места следующий слой.

Все эти рассуждения вполне применимы и при движении поршня назад. В этом случае он не сжимает "пружины", а растягивает их до тех пор, пока ближайший к нему молекулярный слой не начнёт также двигаться назад. Молекулы первого слоя, кинетическая энергия которых обусловлена этим движением, в свою очередь растянут "пружины", связывающие их со следующим слоем, и так далее. В результате, после того как поршень сдвинулся сначала вперёд, а потом назад, все молекулы вернуться на свои исходные места; при этом они, подобно палке, передадут "толчок", не получив в итоге никакого остаточного перемещения.

Всё вышесказанное применительно и к рассматриваемой в данной работе задаче: математическая модель движения поршня в трубе, построенная с помощью уравнений газовой динамики, в точности учитывает все особенности молекул газа, их связи и, вследствие уже одного этого факта, вычисления по данной модели гораздо более точны, нежели вычисления, проводимые с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, уже на данном этапе работы можно сделать вывод, что уравнения газовой динамики представляют собой более сложную математическую модель – и в плане представления, и в плане понимания. Задача дальнейшего исследования – выяснить, насколько именно одна математическая модель точнее описывает происходящие в пневматической системе процессы и насколько быстрее или медленнее происходит процесс вычисления параметров движения поршня [20].

2.6. Использование дифференциально-разностного метода для построения математической модели пневматической системы

Рассмотрим другой способ решения исходной задачи при помощи уравнений в частных производных:

$$\rho_0 U_{tt} = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.18)$$

Из уравнения адиабаты Пуассона получим:

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (2.19)$$

$$\rho_0 dx = \rho d(x+U), \text{ отсюда:}$$

$$\rho_0 = \rho(1+U_x).$$

Подставим полученное выражение в (2.18):

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{(1+U_x)^\gamma}.$$

Результат подставим в уравнение (2.17), получим:

$$\rho_0 U_{tt} = p_0 \gamma \frac{U_{xx}}{(1+U_x)^{\gamma+1}}. \quad (2.20)$$

Как показано ранее, все переменных, входящие в уравнение, следует привести к безразмерному виду. Для стройности изложения не будем повторять эти выкладки, оставив данную процедуру для программирования. Однако, следует помнить, что в дальнейшем переменные времени и пространства становятся безразмерными величинами в соответствии со следующими формулами:

$$\tau = \sqrt{\gamma \frac{\rho_0}{\rho_0} \frac{t}{l}},$$

$$\xi = \frac{x}{l}.$$

Преобразуя выражение (2.20), получим:

$$U_{\tau\tau} = \frac{U_{\xi\xi}}{(1+U_\xi)^{\gamma+1}}.$$

Аналогично уже рассмотренному методу применим к данному уравнению в частных производных метод конечных разностей:

$$U_{\tau\tau}^i = \frac{U^{i+1} - 2U^i + U^{i-1}}{h^2 \left(1 + \frac{U^{i+1} - U^{i-1}}{2h} \right)^{\gamma+1}}.$$

Приведем полученное выражение к более удобному виду:

$$U_{\pi}^i + \frac{2U^i}{h^2 \left(1 + \frac{U^{i+1} - U^{i-1}}{2h}\right)^{\gamma+1}} = \dot{z}$$

$$\dot{z} = \frac{2}{h^2 \left(1 + \frac{U^{i+1} - U^{i-1}}{2h}\right)^{\gamma+1}} \cdot \frac{U^{i+1} + U^{i-1}}{2}.$$

и выполним замену:

$$\omega^2 = \frac{2}{h^2 \left(1 + \frac{U^{i+1} - U^{i-1}}{2h}\right)^{\gamma+1}},$$

$$f^i = \frac{U^{i+1} + U^{i-1}}{2}.$$

В результате получим:

$$U_{\pi}^i + \omega^2 U^i = \omega^2 f^i.$$

Решив это дифференциальное уравнение, получим систему уравнений:

$$U^i = c_1^i \cos(\omega t) + c_2^i \sin(\omega t) + f^i. \quad (2.21)$$

Найдем производные уравнений, входящих в эту систему:

$$\dot{U}^i = -c_1^i \omega \sin(\omega t) + c_2^i \omega \cos(\omega t) + \dot{f}^i. \quad (2.22)$$

В начальный момент времени $t=0$ найдем константы c_1 и c_2 :

$$c_1^i = -f^i,$$

$$c_2^i = \frac{-\dot{f}^i}{\omega} + \lambda (\dot{U}^i)^2.$$

Здесь λ – коэффициент устойчивости системы.

Краевое условие:

$$M U_{\pi} = pF - p_1 F. \quad (2.23)$$

Пусть $Q = \frac{pF - p_1 F}{M}$, тогда:

$$\hat{U}_t = U_t + Qt,$$

$$\hat{U} = U h^2 + Q t^2.$$

Отсюда U_t^{n+1} и U^{n+1} на каждом шаге находится с помощью следующих соотношений:

$$\hat{U}_t = \frac{U_t^{n+1} + U_t^n}{2},$$

$$\hat{U} = \frac{U^{n+1} + U^n}{2},$$

А именно:

$$U_t^{n+1} = 2\hat{U}_t - U_t^n, \quad (2.24)$$

$$U^{n+1} = 2\hat{U} - U^n. \quad (2.25)$$

Рассмотрим алгоритм программной реализации данной математической модели:

1. Вычислить величину шага по пространству, находим:

$$h = \frac{l - l_0}{n}.$$

2. Добавляем к получившимся n узлам еще два (для использования разностной схемы), рис. 2.7:

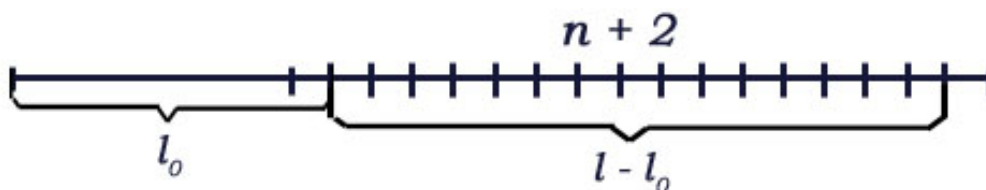


Рис. 2.7. Нахождение шага по пространству h

На рис. 2.7 обозначены узлы, полученные при разбиении части пространства, соответствующей свободной от газа части трубы на узлы, в которых будут происходить вычисления.

3. Привести переменные к безразмерному виду.
4. Создаем и инициализируем нулями массивы: U_{prev} и U_{next} размерностью $n+2$, аналогично массивы производных: Ut_{prev} и Ut_{next} той же размерности, $флаг = false$.
5. Цикл пока $Ut_{next}^n - Ut_{prev}^n \geq 0$:

а) если флаг == false,

1) Заполнить массив U_{next} от 1 до n в соответствии с выражением (2.21), используя для расчетов массив U_{prev} , аналогично используется (2.22) для массива Ut_{prev} ;

$$2) \quad Ut_{next}^0 = Ut_{next}^1, U_{next}^0 = U_{next}^1;$$

3) Вычислить U_{next}^{n+1} и Ut_{next}^{n+1} из условий (2.24), (2.25).

б) если флаг == true,

1) Заполнить массив U_{prev} от 1 до n в соответствии с выражением (2.21), используя для расчетов массив U_{next} , аналогично используется (2.22) для массива Ut_{next} ;

$$2) \quad Ut_{prev}^0 = Ut_{prev}^1, U_{prev}^0 = U_{prev}^1;$$

3) Вычислить U_{prev}^{n+1} и Ut_{prev}^{n+1} из условий (2.24), (2.25).

флаг = отрицание(флаг);

6. Вывод окончательного результата:

$$U = \frac{Ut_{prev}^n + Ut_{next}^n}{2}.$$

Порядок решения задачи наглядно представлен на рис. 2.8.

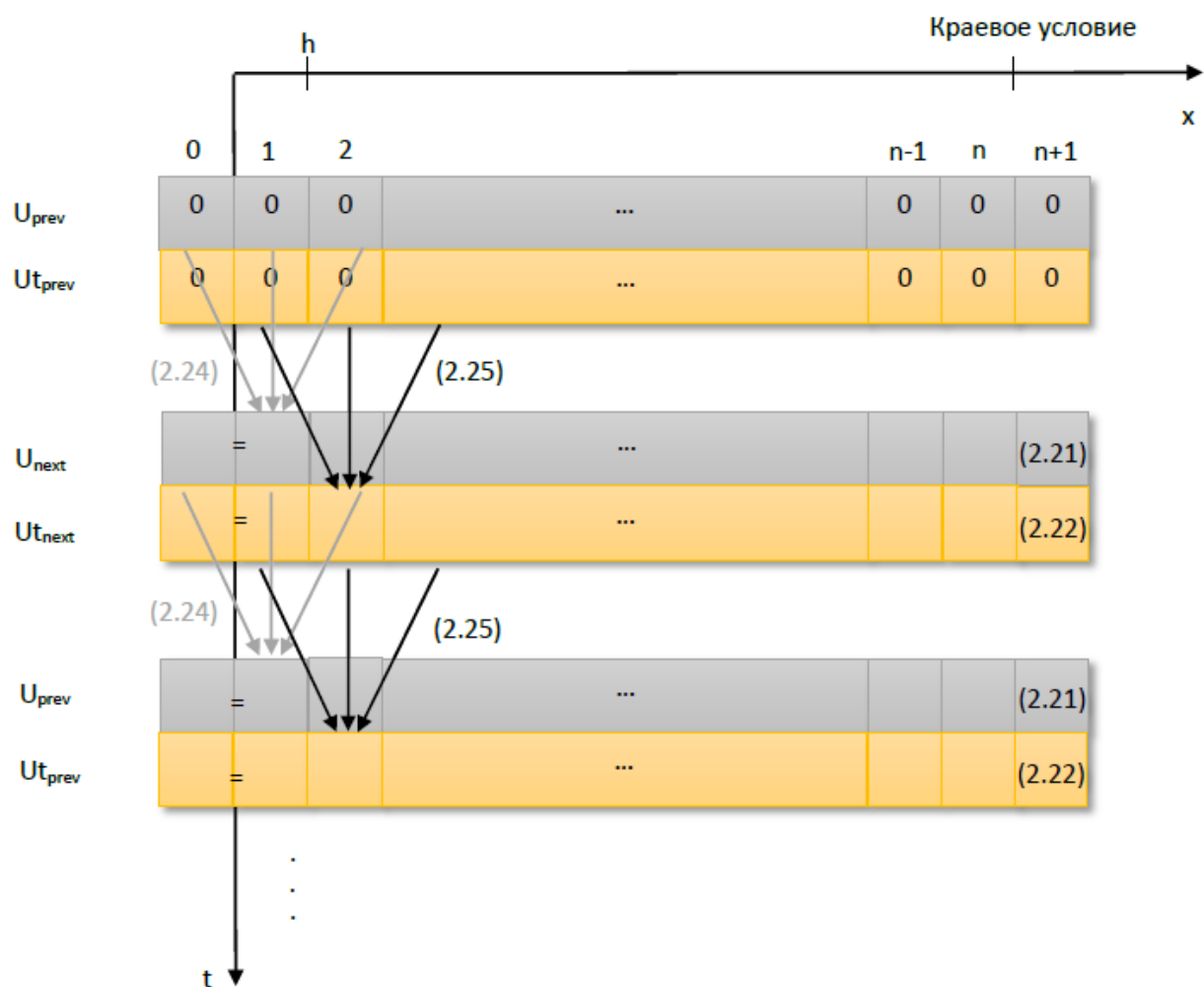


Рис. 2.8. Иллюстрация алгоритма

В данном случае используются переменные Лагранжа, поэтому полученное значение U – расстояние, на котором достигается максимальная скорость поршня (в координатах Лагранжа U есть перемещение частицы относительно заданного начала координат), U_t – скорость поршня.

Итак, в данной главе приведен процесс построения математической модели рассматриваемой задачи. Математическая модель, построенная с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, содержит довольно простые умозаключения и основывается в большей мере на школьном курсе физики (исключая, быть может, одно уравнение). В конечном итоге она представляет

собой ни что иное как систему интегральных уравнений, значение которых рассчитывается дискретно, по узлам разбиения.

Модель задачи, построенная на основе уравнений математической физики, гораздо более сложна в рассмотрении: здесь используются уравнения в частных производных, называемые иначе уравнениями газовой динамики. Кроме того, рассматривается состояние системы на границе устойчивости. Однако к преимуществам этого метода в сравнении с первым следует отнести большую точность: если в предыдущем случае газ представлялся сплошной средой, то есть одним целым, пренебрегая тем, что газ состоит из молекул, и эти молекулы двигаются с разными физическими параметрами в зависимости от расстояния от них до поршня, то в данном случае газ разбивается на цилиндрические «слои» (слои отсекаются параллельно поршню), и учитываются параметры движения каждого слоя.

Кроме того, в данном разделе рассмотрен дифференциально-разностный способ построения математической модели. Этот способ интересен тем, что он рассматривает «пограничный» случай: исследование поведения системы на границе устойчивости, а кроме того в данной математической модели проводятся расчеты с использованием тригонометрических функций, что позволяет более наглядно и быстро отследить выход системы за границу устойчивости. В следующем разделе будет приведено резюме: возможно ли построение математической модели с помощью данного метода или такой способ расчета является неустойчивым. В случае пригодности данного метода для решения поставленной задачи необходимо сравнить этот метод по параметру точности с рассмотренными ранее методами.

3.

4. ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ РАССМОТРЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

4.1. Программа для ЭВМ, разработанная для вычисления параметров математических моделей

В рамках данной научно-исследовательской работы была реализована программа на языке программирования C, реализующая математические модели, описанные в подразделах 2.2, 2.4 и 2.6. Входной файл в формате .txt (рис. 3.1) представляет собой список параметров пневматической системы, физических констант, величину шагов по времени и пространству. В выходном файле представлена распечатка полученных значений скорости поршня при $x=l$ или при достижении поршнем максимума скорости. Схемы алгоритмов модулей программы приведены в приложении 3.

Модуль 1 программы реализует математические модели, решающие задачу методом обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. На основании данных, полученных в результате работы данного модуля, далее проводится сравнение методов (по критерию точности и по критерию скорости вычислений), лежащих в основе рассмотренных математических моделей решаемой задачи.

Модуль 2 программы реализует дифференциально-разностный метод решения задачи, затем проводится сравнение результатов, полученных с помощью этого метода, с результатами других ранее рассмотренных методов. На основании такого сравнения формируется вывод о пригодности дифференциально-разностного метода для решения данной задачи.

Программы были протестированы на разных наборах данных: использовались различные параметры трубки, поршня и рассматривались различные сжатые газы. Для примера выбрана задача, решение которой с помощью метода Ньютона-Рафсона приведено в [5].

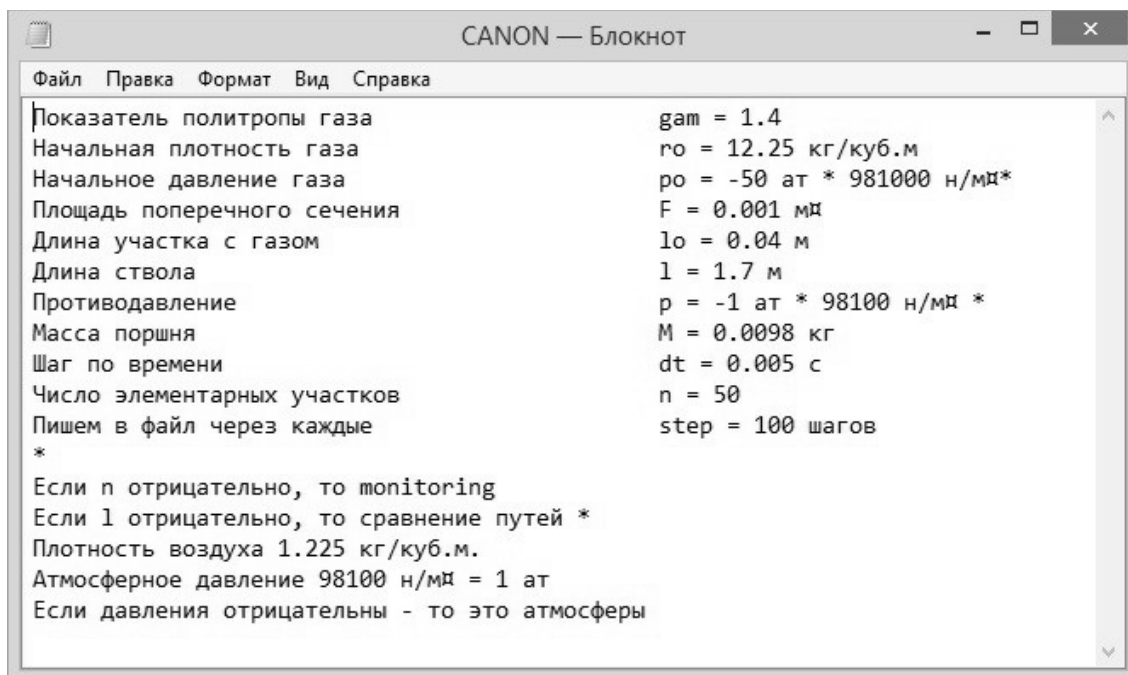


Рис. 3.1. Пример входного файла

В следующем подпункте будет рассмотрено сравнение результатов вычислений с точным решением.

4.2. Сравнение математических моделей, в основе которых лежат обыкновенные ДУ и уравнения газовой динамики

Известно, что для некоторых частных случаев пневматических систем имеются точные аналитические решения. Тестирование программы проводилось именно на таких, простейших, системах. В этом случае в зависимости от задачи отклонение значения скорости поршня на выходе из трубы от точного аналитического решения составило:

- в случае метода обыкновенных дифференциальных уравнений: 0,004 – 0,016 %;
- в случае метода уравнений газовой динамики: 0,003 – 0,011 %.

Если не учитывать сугубо технические особенности, то вычисления по методу ОДУ в зависимости от сложности задачи проводились на 2 – 3,2 % быстрее, чем вычисления по методу уравнений в частных производных.

После тестирования на простейших моделях необходимо было сравнить результаты вычислений с уже существующими: для примера была взята задача из [5], решенная точным аналитическим методом. Исходные данные к задаче:

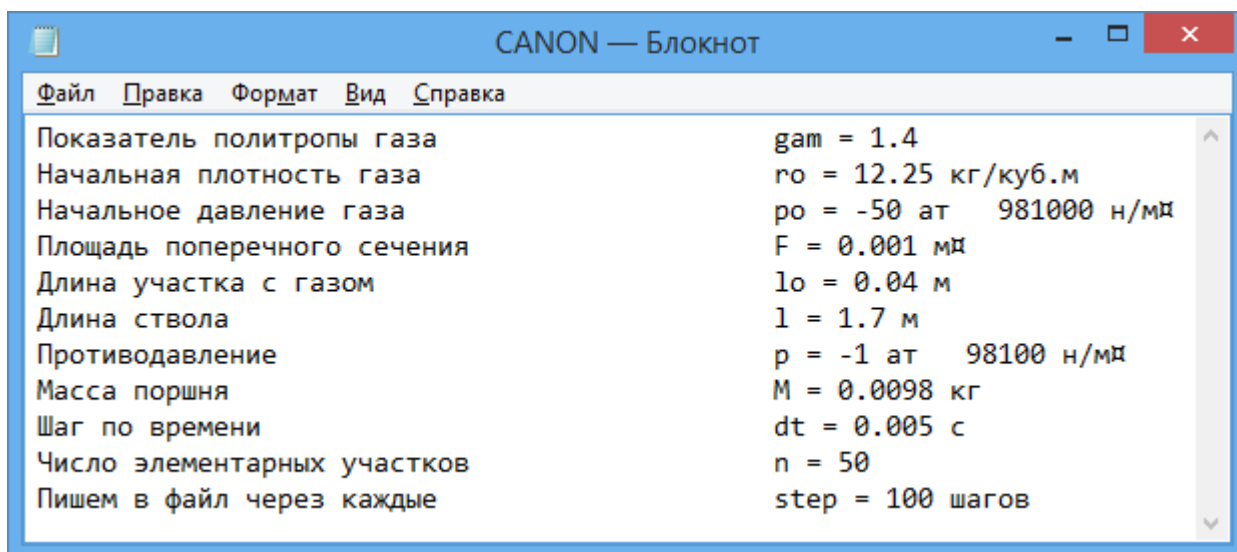
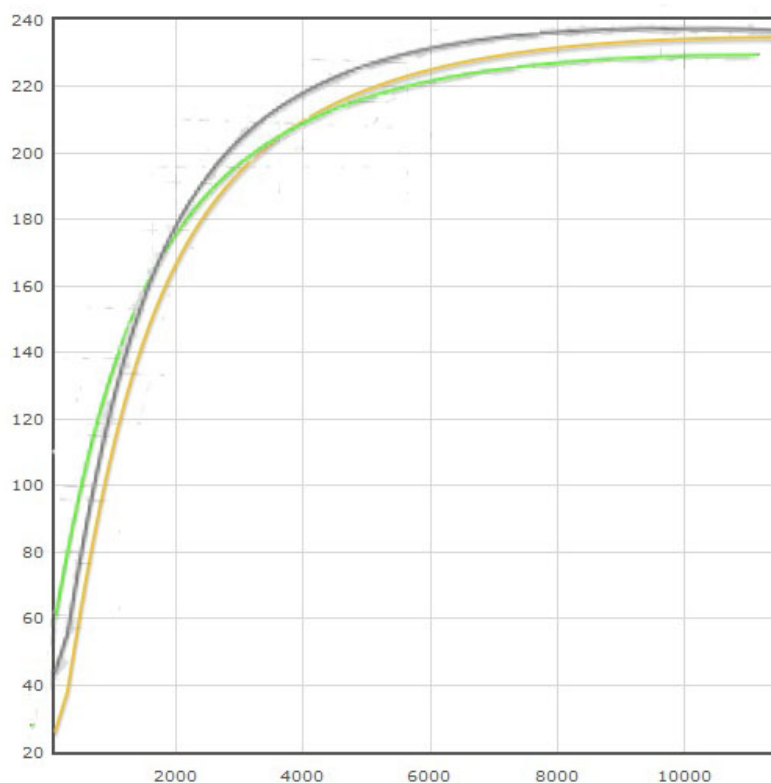


Рис. 3.2. Исходные данные к задаче

Полученные результаты и сравнение рассматриваемых методов с точным аналитическим представлено на графике (рис. 3.3).



После тестирования на моделях, имеющих точное аналитическое решение, можно сделать вывод, что данные методы работоспособны. Затем было выполнено сравнение методов для задачи с исходными данными на рис. 3.1. Сравнение полученных в результате данных о скорости поршня удобно представить в таблице (таблица 3.1). При этом следует помнить, что все используемые величины безразмерные, при этом шаг по времени равен 0.005, этому значению соответствует $2.67 \cdot 10^{-7}$ сек.

Таблица 3.1

Данные о скорости поршня, полученные с помощью ОДУ
и уравнений в частных производных

Шаг по времени	100	500	900	1300	1700	2100	2500	2900	3300
Скорость поршня (ОДУ)	12.9888	61.0981	101.438	131.662	153.798	170.140	182.499	192.069	199.628
Скорость поршня (уравн. газовой динамики)	13.0282	61.9327	101.868	131.834	153.828	170.149	182.504	192.073	199.634

После тестирования программы при различных наборах входных данных можно сделать вывод о сравнительной точности и скорости работы каждого метода. Метод уравнений газовой динамики позволяет получить значение скорости поршня на выходе из трубы, и это решение на 0,4 – 0,9% точнее значения, полученного с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Если не учитывать сугубо технические особенности, то вычисления по методу ОДУ в зависимости от сложности задачи проводились на 2 – 3,2 % быстрее, чем вычисления по методу уравнений в частных производных.

4.3. Преимущества и недостатки дифференциально-разностного подхода к построению математической модели

В предыдущем пункте выполнено сравнение методов решения задачи о движении поршня в трубе. Методы были опробованы на простейших задачах и обоснована их работоспособность. Дифференциально-разностный же метод является новым методом решения рассматриваемой задачи, и после получения данных с помощью этого метода требуется сделать вывод не о точности и скорости, а о пригодности метода.

По математической модели, построенной с помощью дифференциально-разностного метода, была написана программа на языке С. Эта программа была протестирована на задачах, имеющих точное аналитическое решение. Выяснилось, что, хотя данное решение имеет отклонение от точного на 0,4 – 0,6%, но полученные в результате работы данные показывают, что поршень при достижении им максимального значения скорости начинает «колебаться»: происходят скачки значений скорости поршня. При усложнении параметров задачи (рассмотрение системы с противодавлением) с помощью данного метода получаются значения, сильно отличающиеся от точного решения, то есть метод расходится. На рис. 3.4 представлен пример работы метода (для исходных данных с рис. 3.2).

Для стабилизации вычислений было принято решение ввести коэффициент устойчивости в уравнения:

$$U^i = c_1^i \cos(\omega t) + c_2^i \sin(\omega t) + f^i, \quad (2.21)$$

$$\dot{U}^i = -c_1^i \omega \sin(\omega t) + c_2^i \omega \cos(\omega t) + \dot{f}^i. \quad (2.22)$$

В данные уравнения вводится λ – коэффициент устойчивости системы:

$$c_1^i = -f^i,$$
$$c_2^i = \frac{-\dot{f}^i}{\omega} + \lambda (\dot{U}^i)^2.$$

В данном случае λ – число, много меньшее \dot{f}^i (обычно $\lambda = 0,001$).

Проведено повторное тестирование метода на простейших задачах. Отклонение от точного решения в данном случае составило 0,4 – 0,6%, но при этом «колебания» скорости поршня полностью устранены, процесс стабилизируется. При усложнении задачи метод на некотором круге задач расходится.

Исходя из вышесказанного, уже на данном этапе работы можно сказать, что дифференциально-разностный метод непригоден для решения задачи о движении поршня в трубе при действии давления газа в общем случае. С его помощью можно проводить лишь некоторые частные вычисления, например, без учета противодействия, в вакууме.

Математическая модель пневматической системы с использованием уравнений газовой динамики точнее описывает процесс движения поршня в трубе, однако в данном случае полученные решения отличаются не более чем на 1%, следовательно, преимущество уравнений в частных производных теряется. Кроме того, метод уравнений газовой динамики сложнее для изучения, программирования и восприятия, имеет скорость на 2 – 3,2 % ниже, чем метод обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты, полученные при тестировании программ на различных наборах входных данных, позволяют сделать вывод: поскольку в случаях равномерного и неравномерного расширения газа за поршнем полученные значения скорости поршня отличаются незначительно 10^{-3} , то для рассматриваемой задачи о движении поршня в трубе в большинстве случаев удобнее использовать математическую модель с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является наиболее простой из рассмотренных. Математическая модель системы, построенная с помощью уравнений математической физики, будет более востребованной при построении

высокоточных систем, для которых отклонение значения скорости поршня на выходе из трубы на 1% является существенным.

Кроме того, в работе был предложен новый метод решения задачи, а именно – дифференциально-разностный метод. В ходе проведения исследования выяснилось, что предложенный метод применим лишь для узкого круга задач (без рассмотрения противодействия), а в других классах задач неустойчив, следовательно, он не может быть рекомендован для использования в расчетах параметров работы пневматических систем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривалась пневматическая система: поршень, движущийся в цилиндрической трубе под действием давления ограниченного этим поршнем объема газа. Подобные системы широко используются в технике в самых разных областях человеческой деятельности. Принципиально важным параметром такой системы является скорость поршня на выходе из трубы. В настоящее время уже получен широкий круг приложений к задаче: исследованы зависимости параметров движения поршня с отверстием (или зазором) от движения такого же поршня без отверстия, влияние ввода тепла и сил трения на систему и др.

Построены математические модели задачи с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, кроме того был предложен новый, дифференциально-разностный, метод. При равномерном расширении газ представляется единым целым, и поэтому математическая модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, а при неравномерном расширении газа необходимо использовать уравнения газовой динамики, представляющие собой уравнения в частных производных. Такие уравнения позволяют наиболее точно описать процесс расширения газа за поршнем с учетом движения молекул газа. Использование обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет решить поставленную задачу быстрее на 2 – 3,2 % в зависимости от сложности задачи. Решение, полученное в другом случае, является более точным: отклонения от точных аналитических решений в простых задачах составляет не более 0,4 – 1,1% (тогда как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений: до 1,2%), но сама математическая модель сложнее в плане построения и восприятия. Кроме того, метод уравнений газовой динамики в ряде случаев позволяет решить задачу точнее, чем рассмотренные в главе 1 подходы к решению задач о движении поршня, например, в сравнении с методом Ньютона-Рафсона при решении задач с учетом противодействия решение с

помощью уравнений математической физики эффективнее в смысле точности на 4,6%. В результате сравнения можно сделать вывод: математическую модель задачи, построенную с помощью уравнений газовой динамики, имеет смысл применять лишь для узкого круга задач, связанных с проектированием высокоточных пневматических систем, в остальных же случаях достаточно расчетов, проведенных с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений.

Что касается дифференциально-разностного метода, то данный метод может быть применим только в рассмотрении крайне узкого круга задач, а именно – проектировании пневматических систем без учета противодействия. При применении данного метода к решению более сложных задач, метод расходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бетехтин, С. А. Газодинамические основы внутренней баллистики / С. А. Бетехтин, А. М. Веницкий, М. С. Горохов и др. – М.: Оборонгиз, 1957 – 386 с.
2. Волков К.Н. Течения газа с частицами / Волков К.Н., Емельянов В.Н. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2008. – 600 с.
3. Дубровская, Л.И. Об осесимметричном нестационарном взаимодействии ударной волны с препятствием в цилиндрической трубе / Л. И. Дубровская, Л. В. Комаровский – Известия вузов, Авиационная техника, 1977, №2, с. 122-124.
4. Дубровская, Л.И. Осесимметричное нестационарное обтекание преград в цилиндрической трубе / Л. И. Дубровская, Л. В. Комаровский – Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1978, №4, с. 81 – 86.
5. Жаровцев, В. В. Математическое моделирование и оптимальное проектирование баллистических установок / В. В. Жаровцев, Л. В. Комаровский, Е. И. Погорелов. – Томск. Издательство Томского университета, 1989. – 256 с.
6. Исаков, В. А. Квазиакустическая схема для уравнений Эйлера газовой динамики: автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (05.13.18) / Исаков Виктор Александрович; Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова. – М.: 2013, – 127 с.
7. Кольцова, Э. М. Численные методы решения уравнений математической физики и химии / Э. М. Кольцова, Л. С. Гордеев, А. С. Скичко, А. В. Женса // Электронный учебник – Кафедра ИКТ РХТУ им. Д.И. Менделеева – <http://cs.muctr.ru/html2/>
8. Комаровский, Л. В. Аналитические аппроксимации реальных уравнений состояния водорода и гелия в широкой области изменения термодинамических

величин / Л. В. Комаровский, С. В. Синяев // Газовая динамика. – Томск: Издательство Томского университета, 1977, с. 71 – 82.

9. Комаровский, Л. В. Задача Лагранжа с подводом массы, импульса и энергии / Л. В. Комаровский // Доклад 3-й Сибирской конференции по математике и механике. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1964. с. 314 – 316.

10. Комаровский, Л. В. О движении свободного тела в трубе под действием сжатого газа / Л. В. Комаровский // Труды НИИ прикладной математики и механики. – Томск: Изд-во Томского университета, 1973, т. 2, с. 97 – 102.

11. Комаровский, Л. В. О решении обратной задачи Лагранжа с учетом теплопроводности рабочего газа / Л. В. Комаровский // Труды НИИ прикладной математики и механики. – Томск: Изд-во Томского университета, 1974, т. 6, с. 1103—105.

12. Кочин, Н. Е. Теоретическая гидромеханика / Под ред. И. А. Кибеля / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе – М: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 584 с.

13. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Т. 6. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. 736 с.

14. Левин, В. И. Профессии сжатого воздуха и вакуума / В. И. Левин – М.: Машиностроение, 1989. – 256 с.

15. Лукашевич, Д. Течения с постоянным ускорением их использование в высокоскоростных пушках / Д. Лукашевич // Ракетная техника и космонавтика. – 1987. – № 11. – с. 44 – 55.

16. Насибуллаев, И. Ш. Исследование различных видов сил трения, возникающих при движении поршня в трубе / И. Ш. Насибуллаев, Э. Ш. Насибуллаева // «Естественные науки: актуальные вопросы и тенденции развития»: материалы международной заочной научно-практической конференции. (30 ноября 2011 г.) — Новосибирск: Издательство «Сибирская ассоциация консультантов», 2011. — 188 с.

17. Олдер, Б. Вычислительные методы в гидродинамике / Б. Олдер, С. Фернбах, Н. Ротенберг. – М.: Мир, 1967.—384 с.
18. Рахматулин, Х. А. Газовая динамика / Х. А. Рахматулин, А. Я. Сагомоян, А. И. Бунимович, И. Н. Зверев. – М.: Высшая школа, 1965. – 724 с.
19. Станюкович, К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды / К. П. Станюкович. – М.: Наука, 1971, – 854 с.
20. Тэйлор, Р. Шум / Р. Тэйлор. – М.: Мир. Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы, 1978. – 308 с.
21. Филиппов, И. В. Математическое моделирование пневматических сетей / И. В. Филиппов // [Горный информационно-аналитический бюллетень \(научно-технический журнал\)](#). – 1998. – №1. – с. 106 – 111.
- Эрдеди, Н. А. Теоретическая механика, сопротивление материалов / Н. А. Эрдеди, А. А. Эрдеди. – М.: Высшая школа, 2002, – 306 с.

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика»**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ПОРШНЯ
В ТРУБЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА
ММиКН010501.15.079.02.00ПЗ**

Пример выходного файла

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Пример выходного файла

Нормоконтролер,
доцент каф. ПРИМА
_____ Д. А. Дрозин
«__» _____ 2015 г.

Руководитель,
к. ф.-м. н., доцент каф. ПРИМА
_____ А. В. Геренштейн
«__» _____ 2015 г.

Автор работы,
студент группы ММиКН-552
_____ Н. С. Кастрюлина
«__» _____ 2015 г.

Челябинск, 2015

Отношение массы газа к массе поршня 0.05
Отношение противодавления к начальному 0.02
Относительный шаг по времени 93.5891
Относительная длина ствола 42.5

Теперь относительный шаг по времени равен 0.005, а реальный - 2.67125e-007 сек.

При элементарных вычислениях (при равномерном расширении газа за поршнем)
максимальная скорость 234.676 м/с достигается на расстоянии 0.654049 м.
В дальнейшем деформацией называется величина $1 + \epsilon$.

метод конечных разностей

200.	Деформация	1.0349	Скорость	25.5692	Путь	0.0407	Скорость1	25.8325
400.	Деформация	1.0701	Скорость	49.9391	Путь	0.0427	Скорость1	50.3698
600.	Деформация	1.169	Скорость	72.3141	Путь	0.046	Скорость1	72.8975
800.	Деформация	1.2724	Скорость	92.0303	Путь	0.0504	Скорость1	92.8651
1000.	Деформация	1.4098	Скорость	109.398	Путь	0.0558	Скорость1	110.24
1200.	Деформация	1.5759	Скорость	124.156	Путь	0.062	Скорость1	125.189
1400.	Деформация	1.745	Скорость	136.789	Путь	0.069	Скорость1	137.982
1600.	Деформация	1.9222	Скорость	147.728	Путь	0.0766	Скорость1	148.941
1800.	Деформация	2.1443	Скорость	157.113	Путь	0.0848	Скорость1	158.364
2000.	Деформация	2.369	Скорость	165.146	Путь	0.0934	Скорость1	166.497
2200.	Деформация	2.5972	Скорость	172.106	Путь	0.1024	Скорость1	173.555
2400.	Деформация	2.8258	Скорость	178.195	Путь	0.1118	Скорость1	179.715
2600.	Деформация	3.0577	Скорость	183.57	Путь	0.1214	Скорость1	185.122
2800.	Деформация	3.2987	Скорость	188.341	Путь	0.1314	Скорость1	189.894
3000.	Деформация	3.5684	Скорость	192.569	Путь	0.1415	Скорость1	194.128
3200.	Деформация	3.8406	Скорость	196.311	Путь	0.1519	Скорость1	197.9
3400.	Деформация	4.1136	Скорость	199.65	Путь	0.1625	Скорость1	201.276
3600.	Деформация	4.3875	Скорость	202.643	Путь	0.1733	Скорость1	204.309
3800.	Деформация	4.6642	Скорость	205.34	Путь	0.1842	Скорость1	207.042
4000.	Деформация	4.9395	Скорость	207.78	Путь	0.1952	Скорость1	209.514
4200.	Деформация	5.2183	Скорость	209.994	Путь	0.2063	Скорость1	211.756
4400.	Деформация	5.496	Скорость	212.011	Путь	0.2176	Скорость1	213.795
4600.	Деформация	5.7763	Скорость	213.852	Путь	0.229	Скорость1	215.653
4800.	Деформация	6.0562	Скорость	215.538	Путь	0.2405	Скорость1	217.35
5000.	Деформация	6.3378	Скорость	217.084	Путь	0.252	Скорость1	218.902
5200.	Деформация	6.622	Скорость	218.504	Путь	0.2637	Скорость1	220.325
5400.	Деформация	6.9118	Скорость	219.809	Путь	0.2754	Скорость1	221.63
5600.	Деформация	7.2088	Скорость	221.008	Путь	0.2871	Скорость1	222.829
5800.	Деформация	7.5156	Скорость	222.108	Путь	0.299	Скорость1	223.931
6000.	Деформация	7.8244	Скорость	223.117	Путь	0.3109	Скорость1	224.945
6200.	Деформация	8.1336	Скорость	224.043	Путь	0.3228	Скорость1	225.878
6400.	Деформация	8.4385	Скорость	224.893	Путь	0.3348	Скорость1	226.737
6600.	Деформация	8.7419	Скорость	225.676	Путь	0.3469	Скорость1	227.528
6800.	Деформация	9.0463	Скорость	226.395	Путь	0.3589	Скорость1	228.256
7000.	Деформация	9.3528	Скорость	227.057	Путь	0.371	Скорость1	228.926
7200.	Деформация	9.6616	Скорость	227.665	Путь	0.3832	Скорость1	229.542
7400.	Деформация	9.9684	Скорость	228.223	Путь	0.3954	Скорость1	230.109
7600.	Деформация	10.2726	Скорость	228.735	Путь	0.4076	Скорость1	230.629
7800.	Деформация	10.5784	Скорость	229.205	Путь	0.4198	Скорость1	231.106
8000.	Деформация	10.8837	Скорость	229.635	Путь	0.4321	Скорость1	231.542
8200.	Деформация	11.1908	Скорость	230.027	Путь	0.4443	Скорость1	231.941
8400.	Деформация	11.4983	Скорость	230.385	Путь	0.4566	Скорость1	232.305
8600.	Деформация	11.8033	Скорость	230.709	Путь	0.469	Скорость1	232.635
8800.	Деформация	12.1069	Скорость	231.004	Путь	0.4813	Скорость1	232.935
9000.	Деформация	12.4119	Скорость	231.269	Путь	0.4936	Скорость1	233.205
9200.	Деформация	12.7179	Скорость	231.508	Путь	0.506	Скорость1	233.447
9400.	Деформация	13.0231	Скорость	231.721	Путь	0.5184	Скорость1	233.664
9600.	Деформация	13.328	Скорость	231.91	Путь	0.5308	Скорость1	233.856
9800.	Деформация	13.6319	Скорость	232.076	Путь	0.5432	Скорость1	234.024
10000.	Деформация	13.9345	Скорость	232.22	Путь	0.5556	Скорость1	234.171
10200.	Деформация	14.2378	Скорость	232.344	Путь	0.568	Скорость1	234.297
10400.	Деформация	14.5414	Скорость	232.449	Путь	0.5804	Скорость1	234.403
10600.	Деформация	14.8447	Скорость	232.536	Путь	0.5928	Скорость1	234.491
10800.	Деформация	15.1481	Скорость	232.605	Путь	0.6052	Скорость1	234.56
11000.	Деформация	15.4506	Скорость	232.657	Путь	0.6177	Скорость1	234.613
11200.	Деформация	15.7506	Скорость	232.693	Путь	0.6301	Скорость1	234.649
11400.	Деформация	16.0509	Скорость	232.715	Путь	0.6425	Скорость1	234.67

Ускорение: предиктор -6.84867e-009, корректор -5.32479e-008.
Достигнута максимальная скорость поршня. В дальнейшем скорость падает. При отрицательном ускорении (т.е. уменьшении скорости) за поршнем зарождается обратная ударная волна. Используемый численный метод теряет связь с физикой процесса.

11598. Деформация 16.3521 Скорость 232.721 Путь 0.6549 Скорость1 234.676
Относительный путь 16.3723. Разность скоростей 1.95431 = 0.839764
Длительность процесса 0.00309812 сек.

Рис. 1. Пример выходного файла

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика»**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ПОРШНЯ
В ТРУБЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА
ММиКН010501.15.079.02.00ПЗ**

Пример выходного файла

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Пример схемы баллистической установки

Нормоконтролер,
доцент каф. ПРИМА
_____ Д. А. Дрозин
«__» _____ 2015 г.

Руководитель,
к. ф.-м. н., доцент каф. ПРИМА
_____ А. В. Геренштейн
«__» _____ 2015 г.

Автор работы,
студент группы ММиКН-552
_____ Н. С. Кастрюлина
«__» _____ 2015 г.

Челябинск, 2015

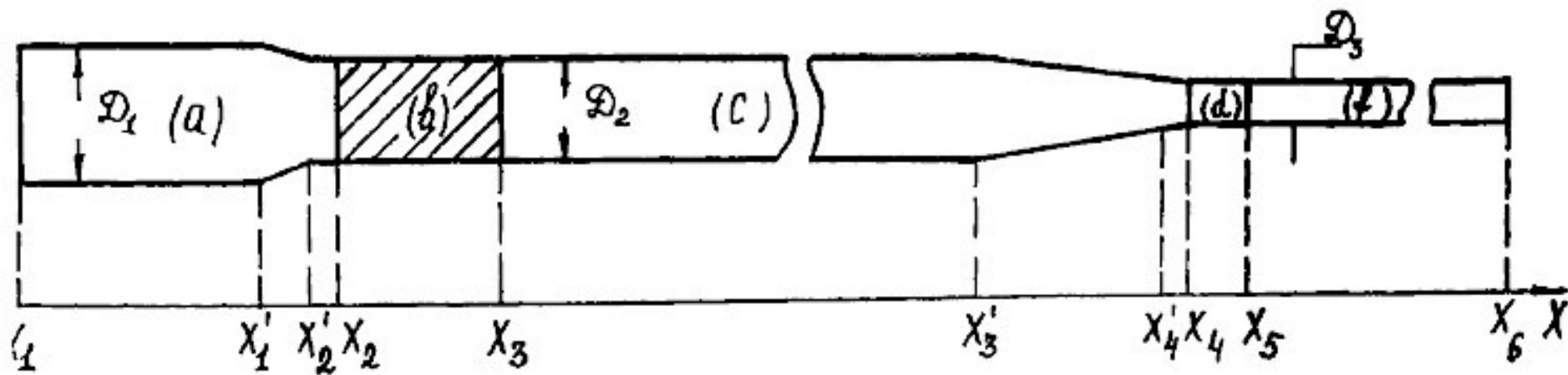


Рис. 2. Схема двухступенчатой легкогазовой баллистической установки. а – камера высокого давления, б – деформируемый поршень, с – легкогазовая камера, d – модель; f – пусковая труба.

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика»**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ПОРШНЯ
В ТРУБЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА
ММиКН010501.15.079.02.00ПЗ**

Пример выходного файла

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Схемы алгоритмов модулей 1 и 2 программы

Нормоконтролер,
доцент каф. ПРИМА

Руководитель,
к. ф.-м. н., доцент каф. ПРИМА

_____ Д. А. Дрозин
«__» _____ 2015 г.

_____ А. В. Геренштейн
«__» _____ 2015 г.

Автор работы,
студент группы ММиКН-552
_____ Н. С. Кастрюлина
«__» _____ 2015 г.

Челябинск, 2015

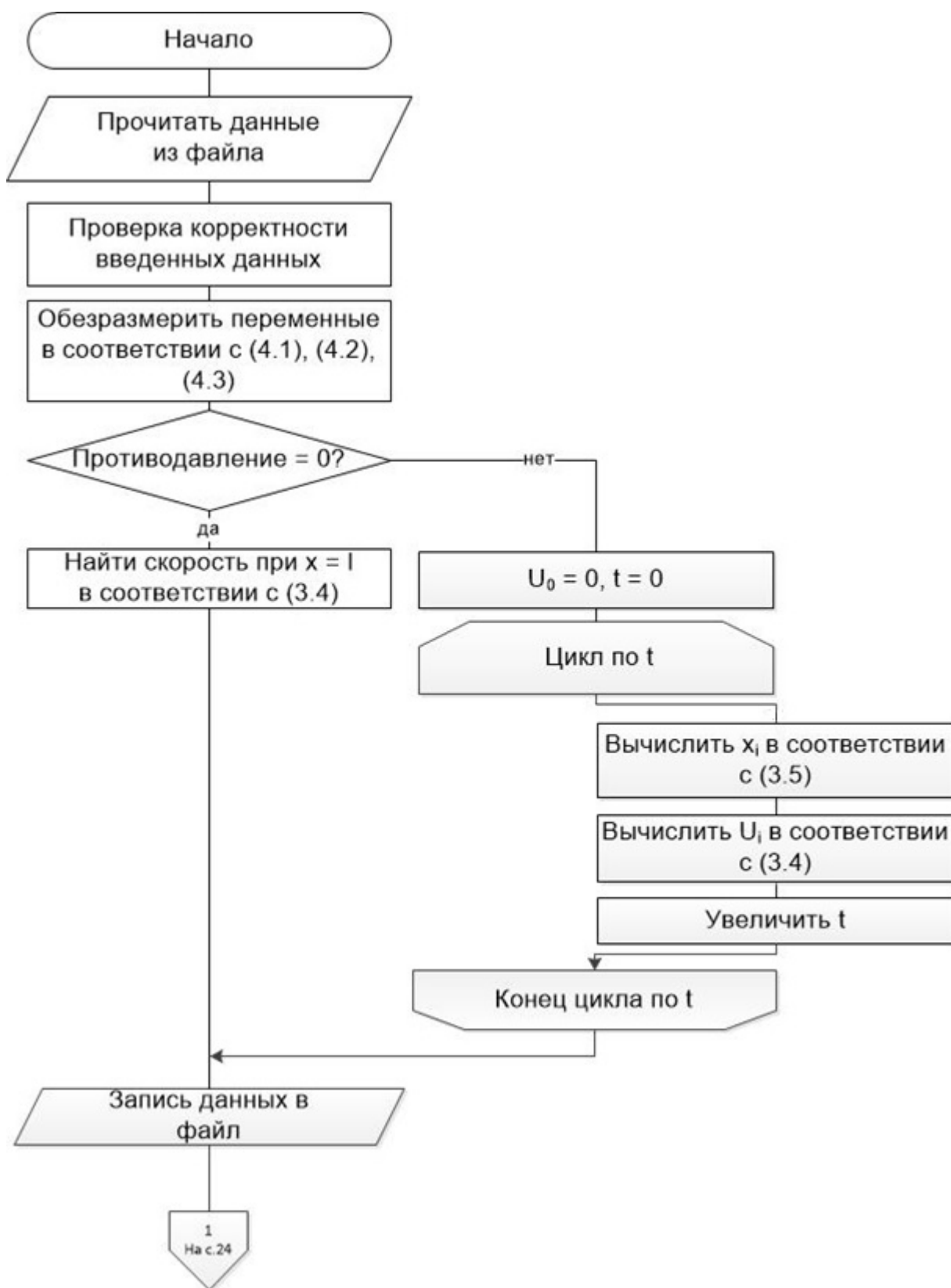


Рис. 3.1. Алгоритм работы модуля 1 программы. Начало

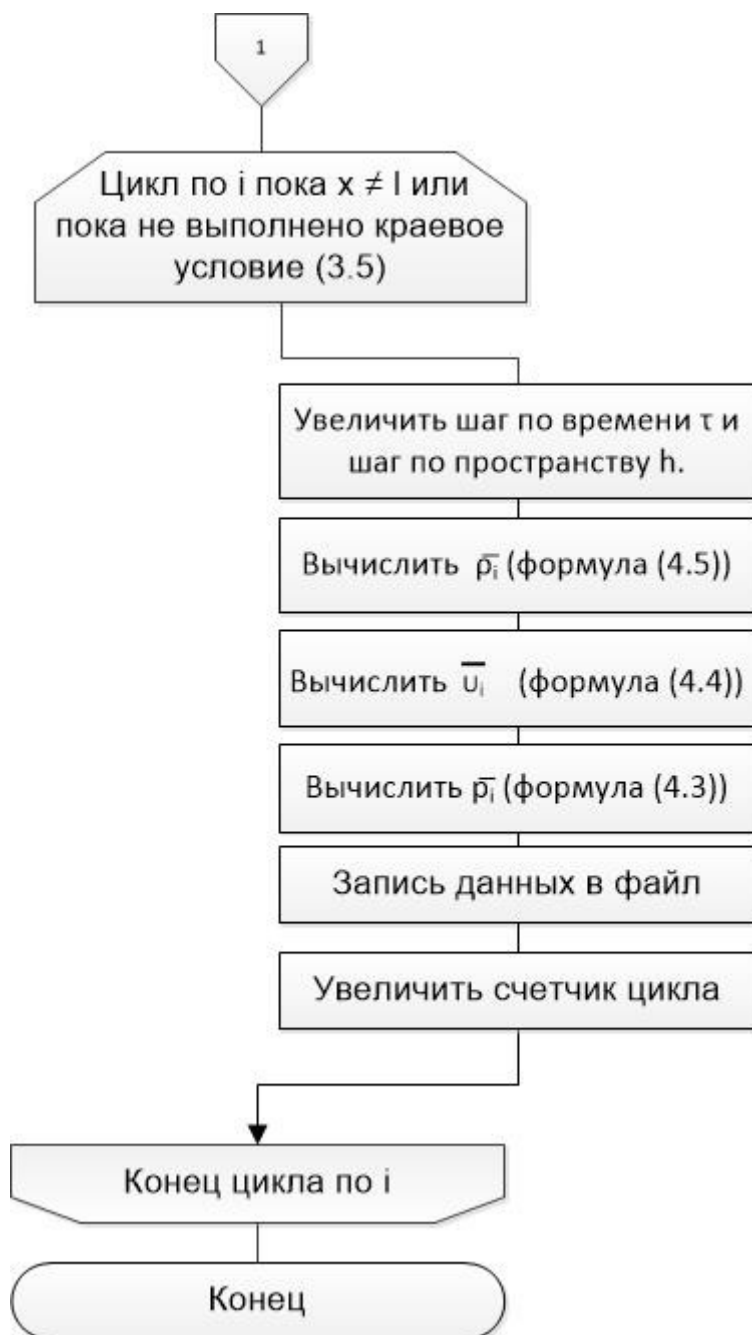


Рис. 3.2. Алгоритм работы модуля 1 программы. Окончание

На рис. 3.1 – 3.2 представлен алгоритм работы модуля 1 программы: на рис. 3.1 описывается ввод данных, приведение переменных к безразмерному виду, реализация математической модели, описанной в подразделе 2.2, на рис. 3.2 – реализация математической модели, описанной в разделе 2.4.

Алгоритм работы модуля 2 программы

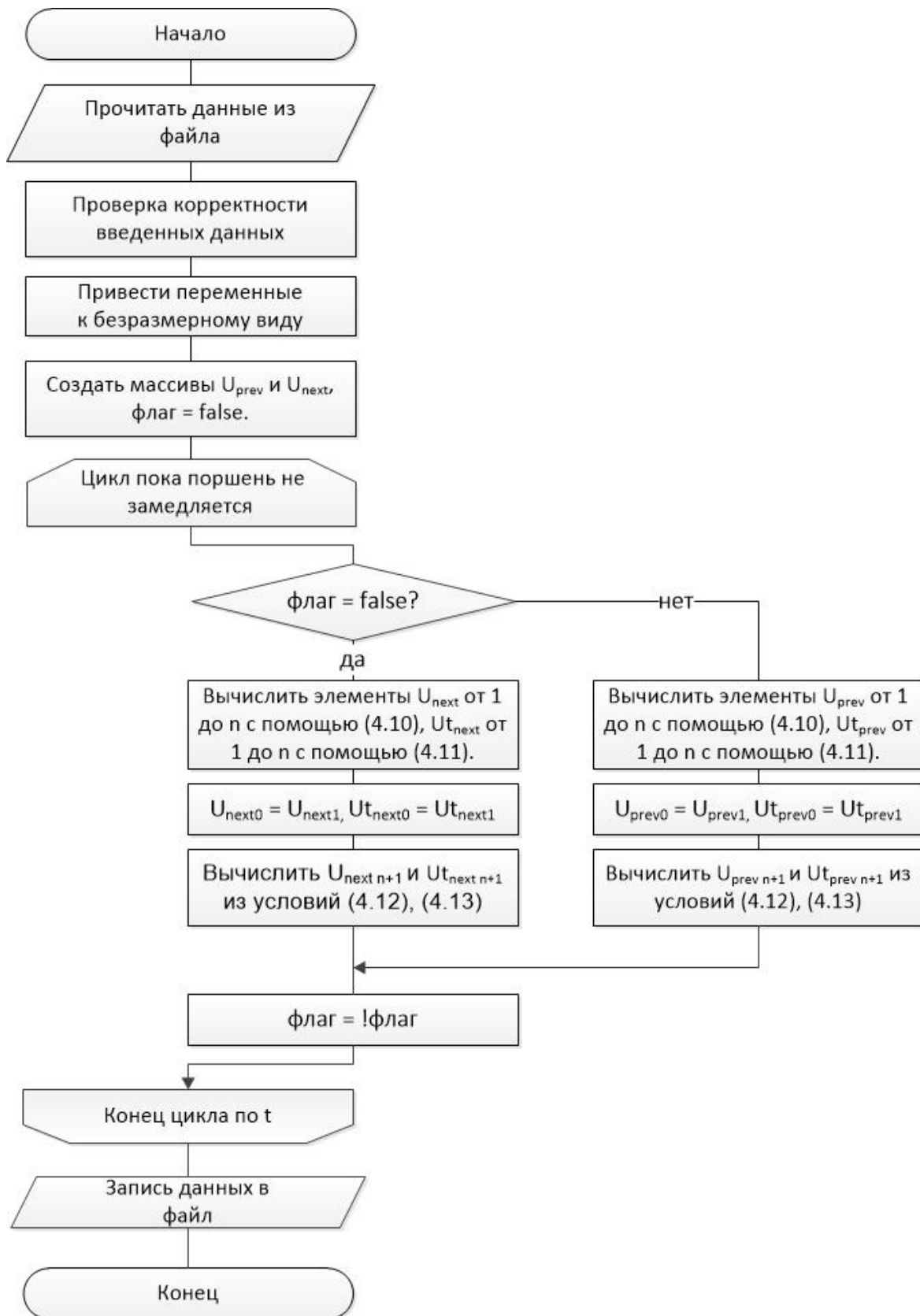


Рис. 3.3. Схема алгоритма модуля 2 программы