Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра прикладной математики и программирования
Направление подготовки Прикладная математика

РАБОТА ПРОВЕРЕНА	ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Рецензент,	Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н., доцент
_________________________	________________А.А.Замышляева
«____»_____________2017г.	«____»_____________2017 г.

Улучшение метода Ньютона

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–01.03.04.2017.89.ПЗ ВКР

Руководитель работы, доцент
__________/Ю.С. Васильев
«____»_____________2017 г.
Автор работы
Студент группы ЕТ-483
_____________/ М.В. Чехова
«____»_____________2017 г.
Нормоконтролер, доцент
_________/Т.Ю. Оленчикова
«____»_____________2017 г.

Челябинск 2017

АННОТАЦИЯ

Чехова М.В. Улучшение метода Ньютона.– Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-483, 35 с., 14 ил.,2 табл., библиогр. список – 10 наим., 1 прил.

В работе рассмотрены классический метод Ньютона и его модификации. Выведена формула, которая уточняет корень уравнения, полученный по методу Ньютона, без дополнительной работы. На языке Maple реализована программа для проверки порядка уточнения. На примере модельных уравнений проверена оценка погрешности выведенной формулы. Разработанный прием имеет порядок сходимости лучше, чем метод Ньютона, и может применяться в расчетах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ....6
1 МЕТОД НЬЮТОНА....7
1.1 Классический метод Ньютона....7
1.2 Модификации метода Ньютона....12
1.3 Выводы по разделу....19
2 ОБОСНОВАНИЕ ПРИЕМА УТОЧНЕНИЯ КОРНЯ....20
2.1 Вывод уточняющей формулы....20
2.2 Выводы по разделу....26
3 ЧИСЛЕННАЯ ПРОВЕРКА ПОРЯДКА УТОЧНЕНИЯ....28
3.1 Исходные данные и замечания....28
3.2 Полученные результаты эксперимента....29
3.3 Выводы по разделу....32
ЗАКЛЮЧЕНИЕ....33
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК....35
ПРИЛОЖЕНИЕ 1....36

ВВЕДЕНИЕ

Задачи решения уравнений постоянно возникают на практике. Например, в задачах оптимизации часто необходимо определить точки, в которых производная функции обращается в нуль, это является необходимым условием локального экстремума. Или, например, в статистике при построении оценок методом максимального правдоподобия или методом наименьших квадратов также приходится решать нелинейные уравнения и системы уравнений. Возникает целый класс задач, связанных с нахождением решений уравнений.

Метод Ньютона является одним из используемых на практике методом для нахождения корней уравнения $f(x)=0$. Важнейшей характеристикой итерационных методов является скорость сходимости. Чем выше скорость сходимости, тем меньше итераций придется сделать для достижения требуемой точности. Как известно, сходимость метода Ньютона квадратичная.

Можно ли имея три последних приближения, полученных по методу Ньютона, уточнить положение корня? Цель данной работы – показать и доказать, что такой прием возможен.

В этой работе будет произведен обзор существующих известных модификаций метода Ньютона. Для достижения поставленной цели будет доказано обоснование приема уточнения корня. Для проверки полученных выводов будет создана программа на языке Maple, проверяющая теоретический порядок сходимости уточняющей формулы, будет проведена численная проверка.

Актуальность данной работы заключается в том, что с разрабатываемым приемом без дополнительной работы возможно уточнить положение корня уравнения, полученного по методу Ньютона.

1 МЕТОД НЬЮТОНА

1.1 Классический метод Ньютона

Пусть корень ξ уравнения

$$f(x)=0 \tag{1.1}$$

отделен на отрезке $[a,b]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки при $x\in[a,b]$. После нахождения какого-нибудь n–го приближенного значения корня $x_n\approx\xi(x_n\in[a,b])$, мы можем уточнить его по методу Ньютона следующим образом. Положим

$$\xi=x_n+h_n, \tag{1.2}$$

где h_n считаем малой величиной.

Применим формулу Тейлора:

$$0=f(x_n+h_n)\approx f(x_n)+h_n f'(x_n).$$

Следовательно,

$$h_n=\frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Внесем эту поправку в формулу (1.2) и найдем следующее (по порядку) приближение корня

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(n=0,1,2,\ldots). \tag{1.3}$$

Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене небольшой дуги кривой $y=f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке кривой. Действительно, положим для определенности, что $f''(x)>0$ при $x\in[a,b]$ и $f(b)>0$ (Рисунок 1.1).

Выберем, например, $x_0=b$, для которого $f(x_0)f''(x_0)>0$. Проведем касательную к кривой $y=f(x)$ в точке $B_0[x_0,f(x_0)]$. качестве первого приближения x_1 корня ξ возьмем абсциссу пересечения этой касательной с осью Ox. Через точку $B_1[x_1,f(x_1)]$ снова проведем касательную. Абсцисса точки пересечения этой касательной с осью Ox даст нам второе приближение x_2 корня ξ и т.д. (Рисунок 1.1).

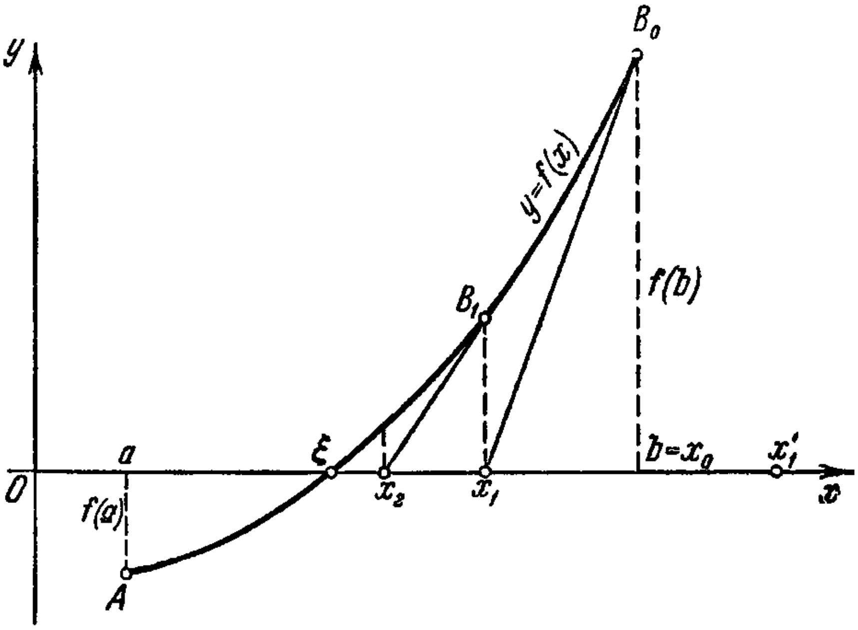


Рисунок 1.1 Геометрическое представление метода Ньютона

Уравнение касательной в точке $B_n[x_n, f(x_n)]$ $(n=0,1,2,\ldots)$ есть

$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$.

Полагая $y=0$, $x=x_{n+1}$, получим формулу (1.3)

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Можно заметить в нашем случае, что если положить $x_0=a$ и, следовательно, $f(x_0)f''(x_0)<0$ то, проведя касательную к кривой $y=f(x)$ в точке $A[a, f(a)]$, мы получили бы точку $x_1(\textit{Рисунок}\ 1.1)$, лежащую вне отрезка $[a,b]$, т.е. при этом выборе начального значения метод Ньютона оказывается непрактичным. Таким образом, в данном случае «хорошим» начальным приближением x_0 является то, для которого выполнено неравенство

$$f(x_0)f''(x_0)>0 \quad . \tag{1.4}$$

Это правило является общим. Если $f(a)f(b)<0,$ причем $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют определенные знаки при $x\in[a,b]$, то, исходя из начального приближения $x_0\in[a,b],$ удовлетворяющего неравенству (1.4), можно вычислить методом Ньютона (формула (1.3)) единственный корень ξ уравнения (1.1) с любой степенью точности.

Докажем это правило. Пусть, например, $f(a)<0, f(b)>0$, $f'(x)>0,$ $f''(x)>0$ при $a\le x\le b$ (аналогично рассматриваются остальные случаи). Согласно неравенству (1.4) имеем $f(x_0)>0$ (например, можно принять $x_0=b$).

Методом математической индукции докажем, что все приближения $x_n>$¿ ¿$\xi(n=0,1,2,\ldots)$ и, следовательно, $f(x_n)>0$. В самом деле, прежде всего, $x_0=\xi$.

Пусть теперь $x_n > \xi$. Положим
$\xi = x_n + (\xi - x_n)$.

Применим формулу Тейлора и получим:

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(c_n)(\xi - x_n)^2, \qquad (1.5)$$

где $\xi < c_n < x_n$.

Так как $f''(x) > 0$, то имеем:
$f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) < 0$

и, следовательно,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \xi,$$

что и требовалось доказать.

Из формулы (1.3), учитывая знаки $f(x_n)$ и $f'(x_n)$, имеем $x_{n+1} < x_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$, т. е. последовательные приближения $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность. Следовательно, существует $\acute{\xi} = \lim_{n \to \infty} x_n$.

Переходя к пределу в равенстве (1.3), будем иметь:

$$\acute{\xi} = \acute{\xi} - \frac{f(\acute{\xi})}{f'(\acute{\xi})},$$

т. е. $f(\acute{\xi}) = 0$. Отсюда $\acute{\xi} = \xi$, что и требовалось доказать.

При применении метода Ньютона следует руководствоваться следующим правилом: в качество исходной точки x_0 выбирается тот конец интервала (a, b), которому отвечает ордината того же знака, что и знак $f''(x)$.

Если:

1) Функция $f(x)$ определена и непрерывна при $-\infty < x < +\infty$;
2) $f(a) f(b) < 0$;
3) $f'(x) \neq 0$ при $a \leq x \leq b$;
4) $f''(x)$ существует всюду и сохраняет постоянный знак,

то при применении метода Ньютона для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$, лежащего в интервале (a, b), за начальное приближение x_0 можно принять любое значение $c \in [a, b]$. В частности, можно взять $x_0 = a$ или $x_0 = b$.

В самом деле, пусть, например, $f'(x) > 0$ при $a \leq x \leq b, f''(x) > 0 \, и \, x_0 = c, где \, a \leq c \leq b$.

Если $f(c) = 0$, то корень $\xi = c$ и задача, таким образом, решена.

Если $f(c) > 0$, то справедливо приведенное выше рассуждение и процесс Ньютона с начальным значением c сходится к корню $\xi \in (a, b)$.

Наконец, если $f(c) < 0$, то находим значение

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)} > c.$$

Применяя формулу Тейлора, имеем:

$$f(x_1)=f(c)-\frac{f(c)}{f'(c)}f'(c)+\frac{1}{2}\left[\frac{f(c)}{f'(c)}\right]^2 f''(\acute{c})=\frac{1}{2}\left[\frac{f(c)}{f'(c)}\right]^2 f''(\acute{c})>0,$$

где $\acute{c}$ – некоторое промежуточное значение между c и x_1.

Таким образом,

$$f(x_1)f''(x_1)>0.$$

Кроме того, из условия $f''(x)>0$ вытекает, что $f'(x)$ – возрастающая функция и, значит, $f'(x)>f'(a)>0$ при $x>a$. Следовательно, x_1 можно принять за начальное значение для метода Ньютона, сходящегося к некоторому корню $\acute{\xi}$ функции $f(x)$ такому, что $\acute{\xi}>c\geq a$. Так как в силу положительности производной $f'(x)$ при $x>a$ функция $f(x)$ имеет единственный корень на интервале $(a,+\infty)$, то

$$\acute{\xi}=\xi\in(a,b).$$

Аналогичное рассуждение можно провести для других комбинаций знаков производных $f'(x)$ и $f''(x)$.

Из формулы (1.3) можно заметить, что чем больше численное значение производной $f'(x)$ в окрестности данного корня, тем меньше поправка, которую нужно прибавить к n-му приближению, чтобы получить $(n+1)$ -е приближение. Поэтому метод Ньютона особенно удобно применять тогда, когда в окрестности данного корня график функции имеет большую крутизну. Но если численное значение производной $f'(x)$ близ корня мало, то поправки будут велики, и вычисление корня по этому методу может оказаться очень долгим, а иногда и вовсе невозможным. Поэтому, если кривая $y=f(x)$ вблизи точки пересечения с осью Ox почти горизонтальна, то применять метод Ньютона для решения уравнения $f(x)=0$ не рекомендуется.

Для оценки погрешности n -го приближения x_n можно воспользоваться формулой

$$|\xi-x_n|\leq\frac{|f(x_n)|}{m_1}, \tag{1.6}$$

где m_1 – наименьшее значение $|f'(x_n)|$ на отрезке $[a,b]$.

Выведем еще одну формулу для оценки точности приближения x_n.

Применим формулу Тейлора, имеем:

$$f(x_n)=f[x_{n+1}+(x_n-x_{n-1})]=¿$$

$$¿f(x_{n-1})+f'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})+\frac{1}{2}f''(\xi_{n-1})(x_n-x_{n-1})^2, \tag{1.7}$$

где $\xi_{n-1}\in(x_{n-1},x_n)$. Так как в силу определения приближения x_n имеем

$$f(x_{n-1})+f'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})=0,$$

то из (1.7) находим:

$$|f(x_n)|\leq\frac{1}{2}M_2(x_n-x_{n-1})^2,$$

где M_2 —наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a,b]$. Поэтому, на основании формулы (1.6) окончательно получаем:

$$|\xi - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2. \qquad (1.8)$$

Если процесс Ньютона сходится, то $x_n - x_{n-1} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому при $n \ge N$ имеем:

$$|\xi - x_n| \le |x_n - x_{n-1}|,$$

т. е. «установившиеся» начальные десятичные знаки приближений x_{n-1} и x_n, начиная с некоторого приближения, являются верными.

Следует заметить, что в общем случае совпадение с точностью до ε двух последовательных приближений x_{n-1} и x_n совсем не гарантирует, что с той же точностью совпадает значение x_n и точный корень ξ (Рисунок 1.2).

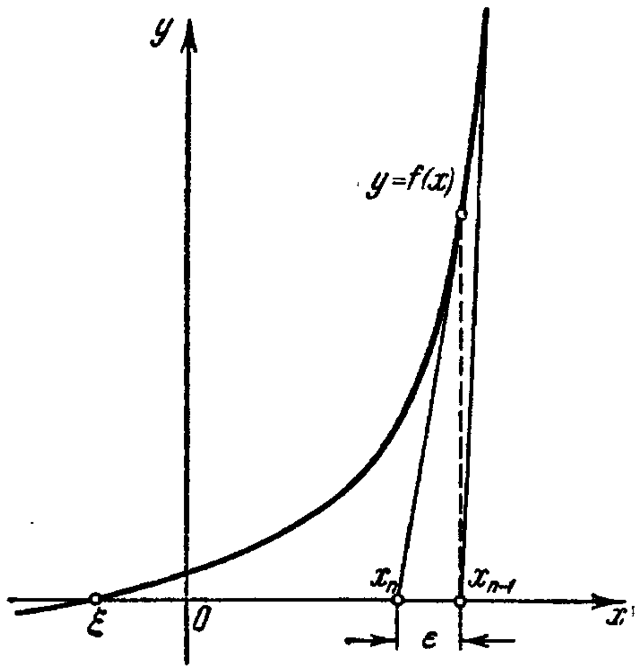


Рисунок 1.2 Совпадение двух последовательных приближений с точностью до

Получим также формулу, связывающую абсолютные погрешности двух последовательных приближений x_n и x_{n+1}. Из формулы (1.5) получаем:

$$\xi = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2,$$

где $c_n \in (x_n, \xi)$.

Отсюда, учитывая формулу (1.3), имеем:

$$\xi - x_{n+1} = \frac{-1}{2}\frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$$

и, следовательно,

$$|\xi - x_{n+1}| \le \frac{M_2}{2m_1}(\xi - x_n)^2. \qquad (1.9)$$

Формула (1.9) обеспечивает быструю сходимость метода Ньютона, если начальное приближение x_0 таково, что

$$\frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_0| \le q < 1.$$

В частности, если

$$\mu = \frac{M_2}{2m_1} \le 1 \text{ и } |\xi - x_n| < 10^{-m},$$

то из формулы (1.9) получаем:

$$|\xi - x_{n+1}| < 10^{-2m},$$

т. е. в этом случае, если приближение x_n имело m верных десятичных знаков после запятой, то следующее приближение x_{n+1} будет иметь по меньшей мере $2m$ верных знаков; иными словами, если $\mu \le 1$, то с помощью метода Ньютона число верных знаков после запятой искомого корня ξ удваивается на каждом шаге.

1.2 Модификации метода Ньютона

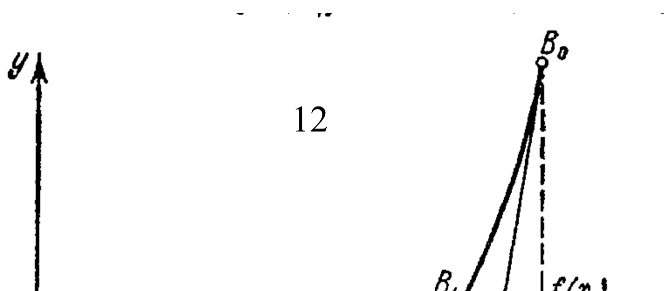
В качестве недостатка метода Ньютона можно отметить необходимость вычисления значения производной $f'(x)$ на каждой итерации. Рассмотрим некоторые модификации метода Ньютона, которые не имеют этого недостатка. Нужно заметить, что, по существу итерационные методы решения нелинейного уравнения на каждой итерации используют некоторую процедуру его линеаризации, т. е. исходное нелинейное уравнение заменяется приближенно более простым линейным уравнением.

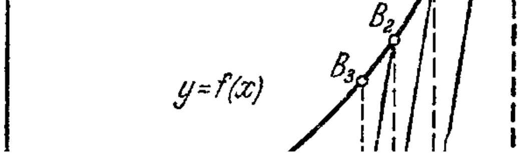
1.2.1 Упрощенный метод Ньютона

Если производная $f'(x)$ непрерывна, то ее значение вблизи простого корня x почти постоянно. Поэтому можно попытаться вычислить $f'(x)$ лишь один раз в точке x_0, а затем заменить в формуле метода Ньютона значение $f'(x_n)$ постоянной $f'(x_0)$. В результате получим рабочую формулу упрощенного метода Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

Геометрическое представление метода приведено на рисунке 3.1. Упрощение вычислений по сравнению с методом Ньютона достигается ценой резкого падения скорости сходимости. Сходимость этого метода является уже не квадратичной, а линейной.





Этот метод можно рассматривать как метод простой итерации с итерационной функцией $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x_0)}$. Так как $\varphi'(x)=1-\frac{f'(x)}{f'(x_0)}$, то для знаменателя q соответствующей геометрической прогрессии имеем $q\approx\left|1-\frac{f'(\acute{x})}{f'(x_0)}\right|$. Следовательно, скорость сходимости тем выше, чем ближе начальное приближение x_0 к решению $\acute{x}$.

1.2.2 Метод ложного положения

В основе этой и следующих двух рассмотренных модификаций метода Ньютона лежит приближенное равенство

$$f'(x_n)\approx\frac{f(z_n)-f(x_n)}{z_n-x_n}.$$

Оно верно при условии $z_n\approx x_n$ и следует из определения производной:

$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

Пусть c — фиксированная точка, расположенная в окрестности простого корня $\acute{x}$. Заменим в расчетной формуле метода Ньютона производную $f'(x_n)$ правой частью приближенного равенства, полагая $z_n=c$. Получим рабочую формулу метода ложного положения:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{c-x_n}{f(c)-f(x_n)}f(x_n).$$

Геометрическое представление метода приведено на рисунке 1.4. Очередное приближение x_{n+1} получается здесь как абсцисса точки пересечения с осью Ox прямой, проведенной через расположенные на графике функции $y=f(x)$ точки $M u M_n$ с координатами $(c, f(c)) u (x_n, f(x_n))$.

Этот метод обладает только линейной сходимостью. Его можно рассматривать как метод простой итерации с итерационной функцией $\varphi(x)=x-\frac{c-x}{f(c)-f(x)}$. Так как скорость сходимости определяется вблизи корня величиной $q \approx |\varphi'(\acute{x})| = 1 - \frac{-(c-x) f'(\acute{x})}{f(c)-f'(x)}$, то она тем выше, чем ближе окажется выбранная точка c к $\acute{x}$.

1.2.3 Метод секущих

Заменяя в формуле метода Ньютона производной $f'(x_n)$ приближением $\frac{f(x_{n-1})-f(x_n)}{x_{n-1}-x_n}$, мы получим к рабочую формулу метода секущих:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_{n-1}-x_n}{f(x_{n-1})-f(x_n)} f(x_n).$$

Заметим, что этот метод двухшаговый: здесь для нахождения очередного приближения x_{n+1} требуется знание двух предыдущих приближений x_n и x_{n-1} . В частности, для того чтобы начать вычисления, необходимо задать два начальных приближения x_0 и x_1 .Все рассмотренные ранее методы требовали для вычисления x_{n+1} только знание x_n , т. е. эти методы были одношаговыми.

На рисунке 1.5 приведена геометрическая интерпретация метода. Очередное приближение x_{n+1} получается здесь как абсцисса точек пересечения с осью

Ox секущей, соединяющей точки $M_{n-1} u M_n$ графика функции $f(x)$ с координатами $(x_{n-1}, f(x_{n-1})) u$ $(x_n, f(x_n))$.

Примечательно то, что эта модификация метода Ньютона сохраняет свойство сверхлинейной сходимости, если вычисляется простой корень $\acute{x}$. Точнее, верно следующее утверждение: пусть $\acute{x}$ – простой корень уравнения $f(x)=0$ в некоторой окрестности которого функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, причем $f''(\acute{x}) \neq 0$. Тогда существует -окрестность корня $\acute{x}$ такая, что при произвольном выборе приближений x_0 и x_1 из этой σ -окрестности метод секущих сходится с порядком $p=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$, т.е. для $n \geq 1$ справедлива оценка

$$|x_{n+1}-\acute{x}| \leq c |x_n - \acute{x}|^p, \; p=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Так как одна итерация метода секущих требует только одного нового вычисления значения функции $f(x)$, а метод Ньютона — двух вычислений значений функций $(f(x) u f'(x))$, то трудоемкость двух итераций метода секущих приблизительно эквивалентна трудоемкости одной итерации по Ньютону. Две итерации метода секущих дают порядок $p^2 \approx 2.618 > 2$, поэтому его можно расценивать как более быстрый по сравнению с методом Ньютона.

К сожалению, метод обладает, вообще говоря, только локальной сходимостью. Он требует выбора двух близких к $\acute{x}$ (в общем случае — очень близких) начальных приближений $x_0 u x_1$. Если эти приближения выбраны неудачно, то метод расходится (Рисунок 1.6).

1.2.4 Метод Стеффенсена

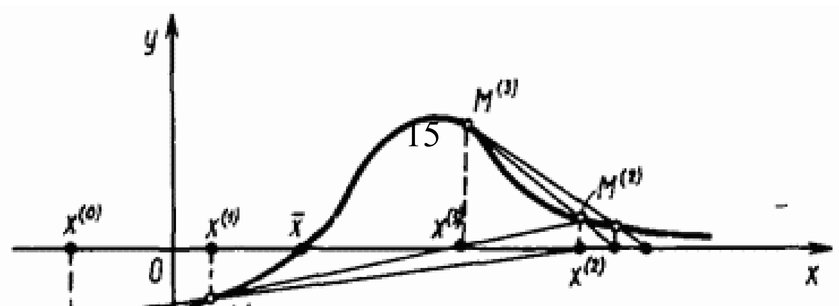


Рисунок 1.6 Пример расходимости метода секущих

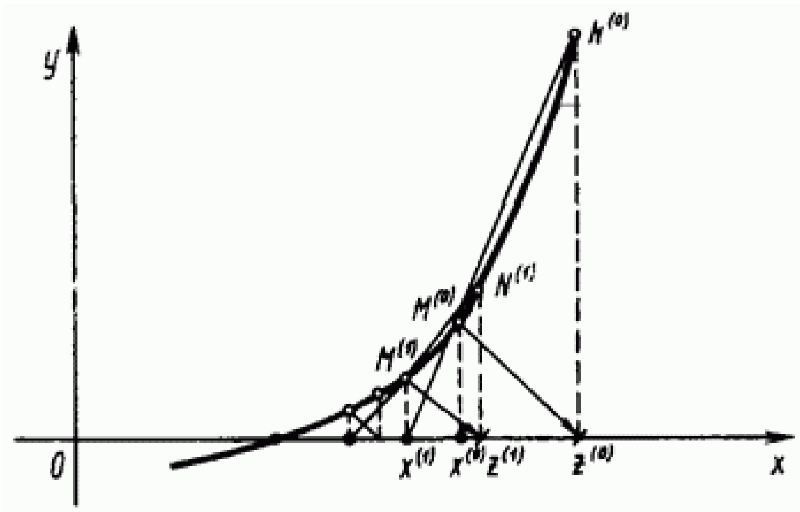
Рабочая формула метода Стеффенсена имеет вид

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f\left(x_n+f\left(x_n\right)\right)-f\left(x_n\right)}f\left(x_n\right).$$

Можно считать, что она получена в результате замены производной $f'\left(x_n\right)$, входящей в расчетную формулу метода Ньютона, приближением $f'\left(x_n\right)\approx\approx\frac{f\left(z_n\right)-f\left(x_n\right)}{z_n-x_n}$, где $z_n=x_n+f\left(x_n\right)$.

Метод Стеффенсена интересен тем, что он является одношаговым, не требует вычисления производной $f'\left(x\right)$ и при этом, как и метод Ньютона, сходится квадратично, если корень $\acute{x}$ – простой, функция $f\left(x\right)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности корня, а начальное приближение x_0 выбрано близко к $\acute{x}$.

Геометрическое представление метода Стеффенсена приведено на рисунке 1.7. Приближение x_{n+1} находится как абсцисса точки пересечения с осью Ox секущей, проходящей через точки M_n и N_n с координатами $\left(x_n,f\left(x_n\right)\right)$ и $\left(z_n,f\left(z_n\right)\right)$. Значение z_n отвечает абсциссе точки пересечения с осью Ox прямой $y=f\left(x_n\right)-\left(x-x_n\right)$, проходящей через точку M_n и параллельной прямой $y=-x$.



Несмотря на свойство квадратичной сходимости, метод Стеффенсена уступает методу секущих, так как требует большей вычислительной работы для достижения той же точности ε. Это связано с тем, что на каждой итерации метода Стеффенсена вычисление функции производится дважды, а в методе секущих лишь один раз.

1.2.5 Уточнение метода Ньютона для случая кратного корня

Рисунок 1.2 Метод Стеффенсена

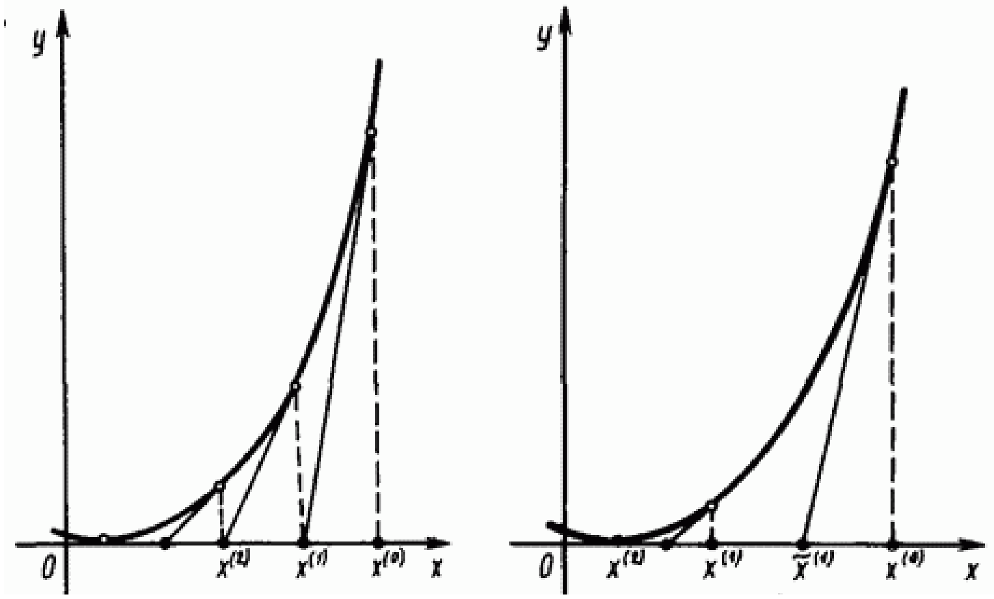
В принципе для вычисления корня уравнения $f(x)=0$ кратности $m>1$ можно использовать и стандартный метод Ньютона. Однако в этом случае скорость его сходимости является только линейной. Можно показать, что знаменатель q соответствующей геометрической прогрессии приближенно равен $1-\frac{1}{m}$.

Для того чтобы сохранить квадратичную скорость сходимости, метод Ньютона необходимо модифицировать следующим образом:

$$x_{n+1}=x_n-m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Можно показать (это достигается раскрытием неопределенностей с помощью формулы Тейлора), что при таком выборе итерационной функции $\varphi(x)=x--m\frac{f(x)}{f'(x)}$ получим $\varphi'(\acute{x})=0$, и сходимость снова окажется квадратичной.

На Рисунке 1.8 проиллюстрировано поведение последовательных приближений стандартного метода Ньютона и его модификации для случая отыскания корня кратности $m=2$.



Для этого метода значение x_{n+1} получим следующим образом: в точке M_n с координатами $(x_n, f(x_n))$ к графику функции проводится касательная. Пересечение ее с осью Ox дает вспомогательную точку $\tilde{x}_{n+1}$. Для получения точки x_{n+1} нужно воспользоваться равенством $x_{n+1}-x_n=m(\tilde{x}_{n+1}-x_n)$.

Рассмотренные одношаговые методы можно интерпретировать как различные варианты метода простой итерации.

Рисунок 1.3 Сравнение классического и уточненного метода

Высокая скорость сходимости метода секущих делает его привлекательным для применения. Но вызывает беспокойство тот факт, что в его формулу входит величина $\frac{f(x_{n-1})-f(x_n)}{x_{n-1}-x_n}$, аппроксимирующая производную. Вблизи корня, когда $x_n \approx x_{n-1}$ и $f(x_n) \approx f(x_{n-1}) \approx 0$, погрешность вычисления функции начинает существенно сказываться на точности этой величины, и метод секущих теряет устойчивость. Этим он существенно отличается от методов простой итерации и Ньютона, для которых приближения x_n равномерно устойчивы к погрешности независимо от числа итераций n.

Однако при грамотном использовании метод секущих дает возможность получить почти столько же верных значащих цифр корня $\acute{x}$, сколько вообще позволяет обусловленность задачи. Возможная (но не обязательная) потеря точности составляет 1—2 верные цифры. Необходимо лишь прервать итерационный процесс в тот момент, когда приближения окажутся в опасной близости к интервалу неопределенности.

Стоит отметить, что при попадании очередного приближения в малую окрестность решения теряет устойчивость и метод Стеффенсена.

1.3 Выводы по разделу

В данном разделе был рассмотрен классический метод Ньютона, был проведен обзор существующих известных модификаций метода Ньютона. Рассмотрены их свойства и характеристики.

Рабочая формула метода Ньютона:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Метод сходится с квадратичной скоростью.

Были рассмотрены следующие модификации: упрощенный метод Ньютона, метод ложного положения, метод секущих, метод Стеффенсена, уточнение метода Ньютона для случая кратного корня.

Упрощенный метод Ньютона прост в вычислении из-за замены производной константой, но скорость сходимости линейная. Формулы метода ложного положения, метода секущих и метода Стеффенсена получены путем замены производной приближенным равенством:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(z_n)-f(x_n)}{z_n-x_n},$$

где z_n у методов разные. Метод ложного положения имеет линейную сходимость. Метод секущих сходится с порядком $p=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$, при этом метод является двухшаговым. Метод Стеффенсона сходится с квадратичной скоростью. Уточнение метода Ньютона для случая кратного корня сохраняет квадратичную сходимость.

2 ОБОСНОВАНИЕ ПРИЕМА УТОЧНЕНИЯ КОРНЯ

1.4 Вывод уточняющей формулы

Возникает мысль, можно ли уточнить корень по трем последним приближениям? Попытаемся вывести формулу, по которой по трем последним приближениям можно уточнить положение корня. Для упрощения выкладок будем считать, что корень функции $f(x)$ расположен в нуле: $f(0)=0$. Функция $f(x)$ четырежды дифференцируема, её первая и вторая производные неотрицательны, начальное приближение обозначим x : $x>0$. Следующие приближения x_1 и x_2 получены по рабочей формуле (Рисунок 2.1).

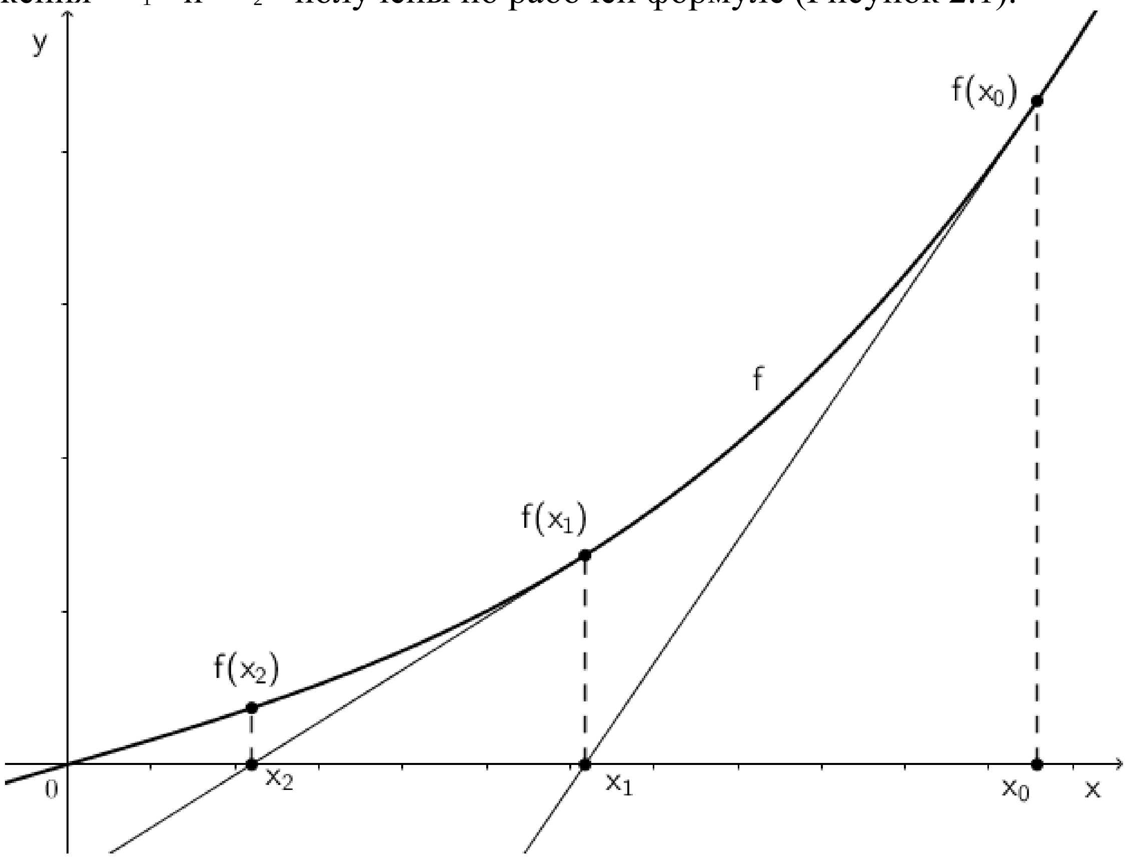


Рисунок 2.1 Итерации по методу Ньютона

Рабочая формула метода Ньютона:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}.$$

Будем представлять приближения в виде ряда Маклорена:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Для упрощения выкладок будем полагать $f^{(k)}(0)=f_k$.

Запишем x_1 в виде ряда Маклорена:

$$x_1 = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{f_1 x + \frac{f_2}{2}x^2 + \frac{f_3}{6}x^3 + O\left(x^4\right)}{f_1 + f_2 x + \frac{f_3}{2}x^2 + O\left(x^3\right)}.$$

Приведем к общему знаменателю и приведем подобные слагаемые:

$$x_1 = \frac{f_1 x + f_2 x^2 + \frac{f_3}{2}x^3 - f_1 x - \frac{f_2}{2}x^2 - \frac{f_3}{6}x^3 + O\left(x^4\right)}{f_1 + f_2 x + \frac{f_3}{2}x^2 + O\left(x^3\right)} = \text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{\frac{f_2}{2}x^2 + \frac{f_3}{3}x^3 + O\left(x^4\right)}{f_1 + f_2 x + \frac{f_3}{2}x^2 + O\left(x^3\right)}.$$

Вынесем в числителе и знаменателе члены наименьшей степени за скобку:

$$x_1 = \frac{f_2}{2f_1}x^2 \frac{1 + \frac{2f_3}{3f_2}x + O\left(x^2\right)}{1 + \frac{f_2}{f_1}x + \frac{f_3}{2f_1}x^2 + O\left(x^3\right)}.$$

Используем формулу $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \ldots$ для переноса знаменателя в числитель:

$$x_1 = \frac{f_2}{2f_1}x^2\left(1 + \frac{2f_3}{3f_2}x + O\left(x^2\right)\right) \times$$

$$\times\left(1 - \left(\frac{f_2}{f_1}x + \frac{f_3}{2f_1}x^2 + O\left(x^3\right)\right) + \left(\frac{f_2}{f_1}x + \frac{f_3}{2f_1}x^2 + O\left(x^3\right)\right)^2\right)$$

Раскроем квадрат и скобки, приведем подобные, учитывая соотношения между символами о-большое:

$$x_1 = \frac{f_2}{2f_1}x^2\left(1 + \frac{2f_3}{3f_2}x + O\left(x^2\right)\right)\left(1 - \frac{f_2}{f_1}x - \frac{f_3}{2f_1}x^2 + O\left(x^3\right) + \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 x^2\right) = \text{¿}\,\frac{f_2}{2f_1}x^2\left(1 + \frac{2f_3}{3f_2}x + O\left(x^2\right)\right) \times$$

$$\times\left(1 - \frac{f_2}{f_1}x + \left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 - \frac{f_3}{2f_1}\right)x^2 + O\left(x^3\right)\right) = \frac{f_2}{2f_1}x^2 \times$$

$$\times\left(1 + \frac{2f_3}{3f_2}x + O\left(x^2\right) - \frac{f_2}{f_1}x\right) = \frac{f_2}{2f_1}x^2\left(1 + \left(\frac{2f_3}{3f_2} - \frac{f_2}{f_1}\right)x + O\left(x^2\right)\right).$$

Таким образом, получили, что:

$$x_1 = \frac{f_2}{2f_1}x^2\left(1 + \left(\frac{2f_3}{3f_2} - \frac{f_2}{f_1}\right)x + O\left(x^2\right)\right). \qquad (2.1)$$

Аналогичным образом представим в виде разложения в ряд Маклорена следующее приближение x_2, выраженное через x_1:

$$x_2=\frac{f_2}{2f_1}x_1^{\,2}\left(1+\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x_1+O\left(x_1^{\,2}\right)\right). \qquad (2.2)$$

Для получения выражения (2.2) через x, подставим выражение (2.1) в (2.2):

$$x_2=\frac{f_2}{2f_1}\left(\frac{f_2}{2f_1}x^2\left(1+\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x+O\left(x^2\right)\right)\right)^2\times\times\left(1+\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}x^2\left(1+\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x+O\left(x^2\right)\right)\right)\right).$$

Раскроем квадрат, скобки, учитывая соотношения между символами о-большое:

$$x_2=\frac{f_2}{2f_1}\left(\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^2x^4+2\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^2x^5+O\left(x^6\right)\right)\times\times\left(1+\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}x^2+\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\frac{f_2}{2f_1}x^3+O\left(x^4\right)\right)\right)=$$

Получили оценку последнего приближения x_2 через начальное приближение x:

$$x_2=\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^4\left(1+2\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x+O\left(x^2\right)\right). \qquad (2.3)$$

В практических вычислениях мы знаем три числа, обозначенные как $x, x_1 u\, x_2$. Удобно при практических вычислениях использовать $d=x_1-x_2 u\, \Delta=x-x_2$. Выведем представление чисел $d\, u\, \Delta$ через x в виде отрезков ряда.

Подставим в d выражения (2.1) и (2.3):

$$d=x_1-x_2=\frac{f_2}{2f_1}x^2\left(1+\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x+O\left(x^2\right)\right)-¿$$

$$-\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^4\left(1+2\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x+O\left(x^2\right)\right).$$

Раскроем скобки, сокращаем:

$$d=\frac{f_2}{2f_1}x^2+\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\frac{f_2}{2f_1}x^3+O\left(x^4\right)=\frac{f_2}{2f_1}x^2\left(1+\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x+O\left(x^2\right)\right).$$

Получили:

$$d=\frac{f_2}{2f_1}x^2\left(1+\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x+O\left(x^2\right)\right).$$

Подставим в Δ выражение (2.3):

$$\Delta=x-x_2=x-\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^4\left(1+2\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x+O\left(x^2\right)\right)=¿\,x-\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^4-2\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^5+O\left(x^6\right)=¿\,x\left(1\right.$$

Пусть $\eta=d\left(\frac{d}{\Delta}\right)^2$ или $\eta=\frac{d^3}{\Delta^2}$. Запишем выражение для η в виде ряда:

Выразим d^3:

$$d^3=\left(\frac{f_2}{2f_1}x^2+\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\frac{f_2}{2f_1}x^3+O\left(x^4\right)\right)^3=\text{¿}\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^6+2\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^7+O\left(x^8\right)+\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^7=\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^6+3\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^7+O\left(x^8\right)=\text{¿}\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^6\left(1+3\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x+O\left(x^2\right)\right).$$

(2.4)

Выразим Δ^2 :

$$\Delta^2=\left(x-\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^4-2\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^5+O\left(x^6\right)\right)^2=\text{¿}\,x^2-\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^5-2\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^6+O\left(x^7\right)-\left(\frac{f_2}{2f_1}\right.$$

$$-2\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^6=x^2-2\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^5-4\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^6++O\left(x^7\right)=x^2\left(1-2\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^3-4\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right.\right.$$

(2.5)

Подставляя (2.4) и (2.5) в η , запишем выражение η в виде ряда:

$$\eta=\frac{d^3}{\Delta^2}=\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^4\frac{1+3\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x+O\left(x^2\right)}{1-2\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^3-4\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^4+O\left(x^5\right)}.$$

Используем формулу $\frac{1}{1+u}=1-u+\ldots$ для переноса знаменателя в числитель:

$$\eta=\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^4\left(1+3\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x+O\left(x^2\right)\right)\times\times\left(1-2\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^3-4\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^4+O\left(x^5\right)\right)=\text{¿}$$

$$\text{¿}\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^4\left(1+3\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x+O\left(x^2\right)\right).\qquad(2.6)$$

При этом из (2.3):

$$x_2=\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^4\left(1+2\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)x+O\left(x^2\right)\right).$$

Первые члены выражений $\eta\,и\,x_2$ совпадают. Поэтому уточнение будем подсчитывать по следующей формуле:

$$x_{уточ}=x_2-\eta.$$

Найдем разложение выражения $x_{уточ}$, подставляя в него (2.3) и (2.6):

$$x_{уточ}=\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^4+2\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^5+O\left(x^6\right)-\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^4-\text{¿}$$

$$-3\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^5+O\left(x^6\right)=-\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3x^5+O\left(x^6\right)=\text{¿}$$

$$¿-\left(\frac{2f_3}{3f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3 x^5(1+O(x)).$$

Получили, что $x_{уточ}=O(x^5)$, что лучше, чем оценка погрешности для приближения по методу Ньютона $x_2=O(x^4)$.

Опишем алгоритм уточнения корня:

1) Следовать алгоритму метода Ньютона, пока выполняется условие $|x_n--x_{n-1}|>\varepsilon$ (правило остановки);
2) Получить последние три приближения $x_{n-2}, x_{n-1}, x_n;$
3) Вычислить $d=x_{n-1}-x_n и \Delta=x_{n-2}-x_n$;
4) Вычислить $\eta=d\left(\frac{d}{\Delta}\right)^2$;
5) Вычислить уточнение $x_{уточ}=x_n-\eta$ и подать его в качестве решения уравнения $f(x)=0$.

Уточнение положения корня уравнения $f(x)=0$ наглядно представлено на рисунке 2.2.

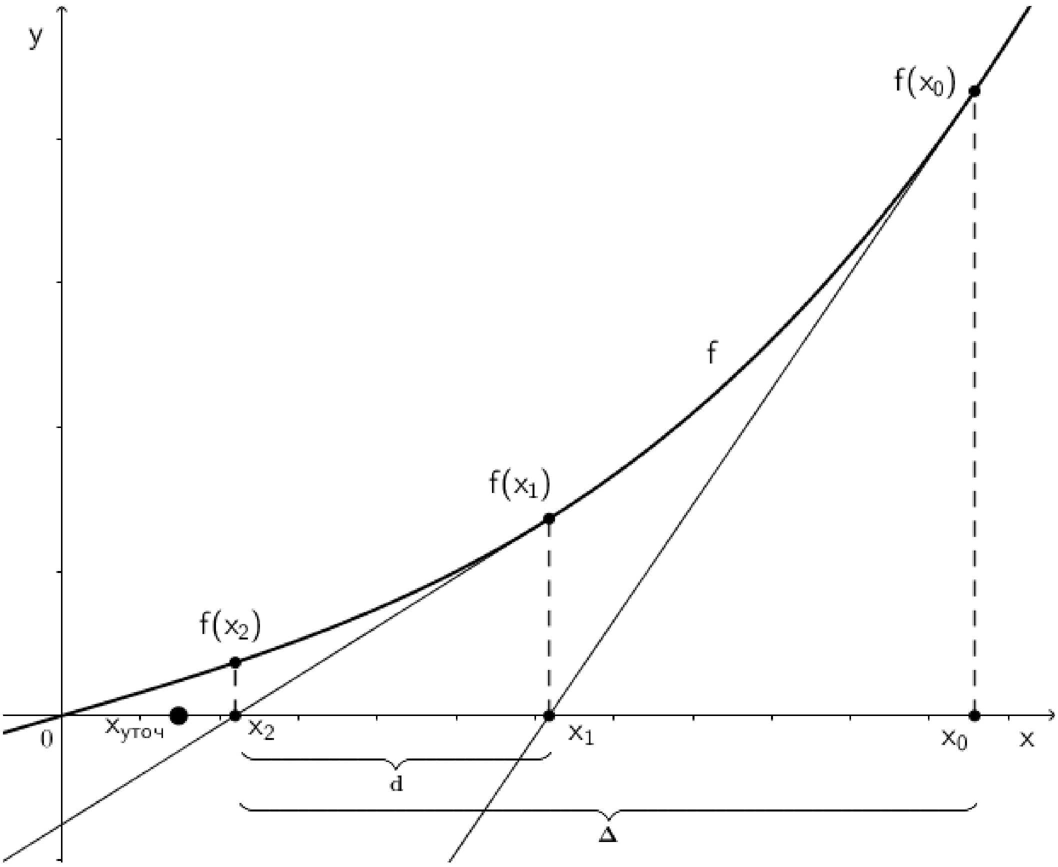


Рисунок 2.2 Итерации по Ньютону с уточнением

1.5 Выводы по разделу

В данном разделе был проведен вывод формулы для уточнения итераций по методу Ньютона без дополнительной вычислительной работы. Разработанное уточнение метода Ньютона:

$$x_{уточ} = x_n - \eta,$$

где x_n – последнее приближение, полученное по методу Ньютона;

$\eta = d\left(\frac{d}{\Delta}\right)^2$ – поправка;

$d = x_{n-1} - x_n$;

$\Delta = x_{n-2} - x_n$.

Доказано, что уточнение имеет порядок погрешности $x_{уточ} = O\left(x_{n-2}^5\right)$, что больше, чем оценка погрешности по методу Ньютона $x_n = O\left(x_{n-2}^4\right)$.

Также был приведен алгоритм уточнения положения корня, найденного по методу Ньютона:

1) Следовать алгоритму метода Ньютона, пока выполняется условие $|x_n - -x_{n-1}| > \varepsilon$ (правило остановки);
2) Получить последние три приближения x_{n-2}, x_{n-1}, x_n;
3) Вычислить $d = x_{n-1} - x_n u \Delta = x_{n-2} - x_n$;
4) Вычислить $\eta = d\left(\frac{d}{\Delta}\right)^2$;

5) Вычислить уточнение $x_{уточ}=x_n-\eta$ и подать его в качестве решения уравнения $f(x)=0$.

3 ЧИСЛЕННАЯ ПРОВЕРКА ПОРЯДКА УТОЧНЕНИЯ

1.6 Исходные данные и замечания

В предыдущей главе мы вывели формулу, которая, используя три последних приближения, уточняет положение корня уравнения $f(x)=0$. Для проверки составим программу на языке Maple, которая бы выводила таблицу, состоящую из приближений, полученных методом Ньютона и формулой улучшения. Также программа должна подтвердить правильность выведенной зависимости $x_{уточ}=O(x_{n-2}^{5})$.

Для удобства оценку погрешности для уточненного приближения $x_{уточ}$ представим в виде:

$$x_{уточ}=O\left(x_n^{\frac{5}{4}}\right). \tag{3.1}$$

Это получено из того, что оценка погрешности для приближения по методу Ньютона $x_n=O(x_{n-2}^{4})$.

Поправка η вычисляется так для уменьшения возможности исчезновения порядка для чисел, близких к нулю:

$$\eta=d\left(\frac{d}{\Delta}\right)^2.$$

Попытаемся найти зависимость между полученными данными в виде:

$$X_{уточ}=A\,X^{B}\ , \tag{3.2}$$

где $X_{уточ}$ – список значений приближений, полученных с помощью улучшения;
X – список значений приближений, полученных методом Ньютона.

Необходимо найти показатель B, он должен приблизительно быть равным 1.25 (по формуле (3.1)).

Прологарифмируем выражение (3.2):

$$\ln A+B\ln X=\ln X_{уточ}.$$

Введем новые неизвестные переменные $a_1 и\, a_2$ по формулам:

$$\ln A=a_1, B=a_2\, или\, A=e^{a_1}, B=a_{2.}$$

Получаем систему, которую можно записать в матричном виде так:

$$\begin{pmatrix}1 & \ln x_1\\ \vdots & \vdots\\ 1 & \ln x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln x_{1\,уточ}\\ \vdots\\ \ln x_{nуточ}\end{pmatrix}.$$

Для вывода графика зависимости значений итераций по методу Ньютона и уточнением заготовим два списка $X_{ньют}\, и\, X_{уточ}$, в которых содержатся приближения, полученные методом Ньютона и уточнением, начиная с третьей итерации.

В качестве примера возьмем функции $f(x)=x(x+1)\, и\, f(x)=x(x+1)++0.5\,x^3.$ Их производные соответственно $f'(x)=2x+1\, и\, f'(x)=2x+1++1.5\,x^2$.

Начальное приближение для обоих примеров положим $x_0=1$, допустимая погрешность 2^{-52}.

1.7 Полученные результаты эксперимента

Проверим правильность выведенной формулы и порядка уточнения на первом модельном уравнении $f(x)=x(x+1)$. График функции $f(x)$ представлен на рисунке 3.1.

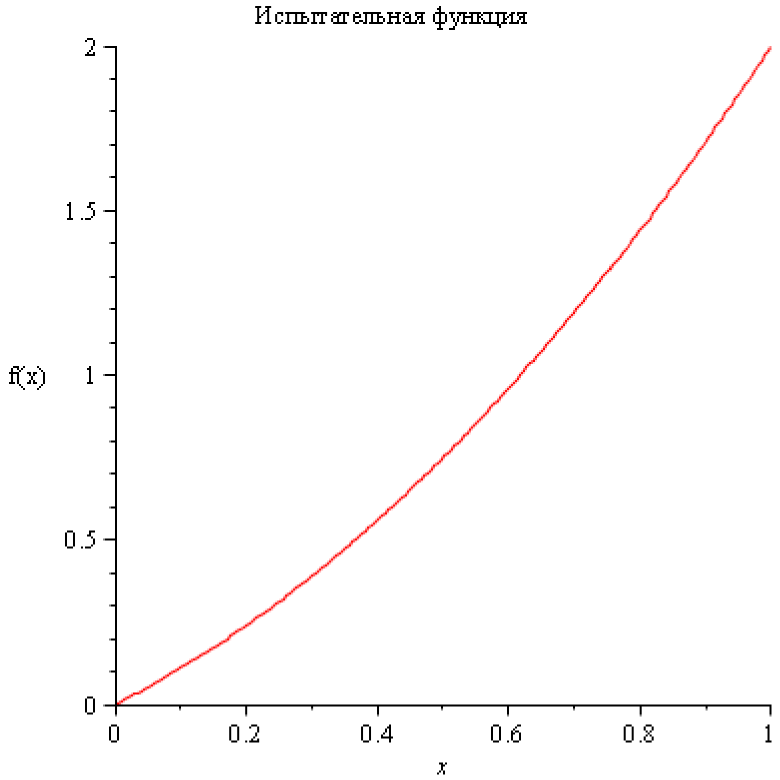


Рисунок 3.1 График испытательной функции

Результаты работы программы для первого примера приведены в таблице 1.

Также мы получили, что $B=1.24710484862622$, что близко к теоретическому показателю 1.25.

Представим эти данные на графике в логарифмическом масштабе и на этом же изображении полученную экспериментальную зависимость $X_{уточ}=A X_{ньют}{}^{B}$ (Рисунок 3.2). График подтверждает правильность найденного показателя B.

Таблица 1

Полученные значения для уравнения $x(x+1)=0$

Номер итерации, i	Приближения, найденные методом Ньютона, x_i	Приближения, найденные улучшенным методом, $x_{i\,уточ}$
1	1	-
2	0.333333333333333	-
3	0.0666666666666667	0.0448979591836735
4	0.00392156862745098	0.00164510248543862
5	0.0000152590218966964	0.00000184122132212952
6	$2.32830643708080\ 10^{-10}$	$1.81540915112858\ 10^{-12}$
7	$5.42101086242752\ 10^{-20}$	$1.65434860294640\ 10^{-24}$
8	$2.93873587705572\ 10^{-39}$	$1.36845553140789\ 10^{-48}$

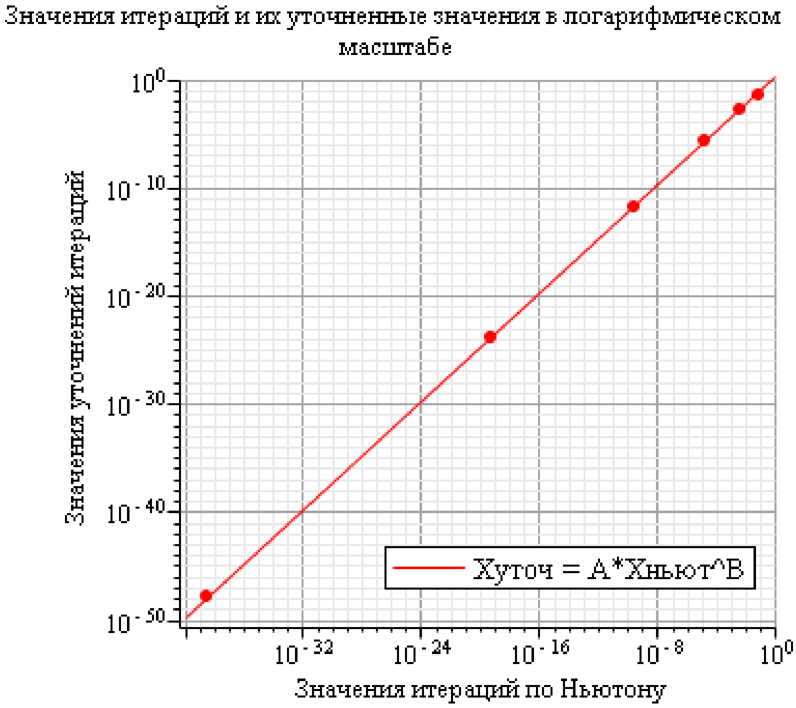


Рисунок 3.2 График значений в логарифмическом масштабе

Теперь рассмотрим второе модельное уравнение $f(x)=x(x+1)+0.5x^3$. График функции представлен на рисунке 3.3.

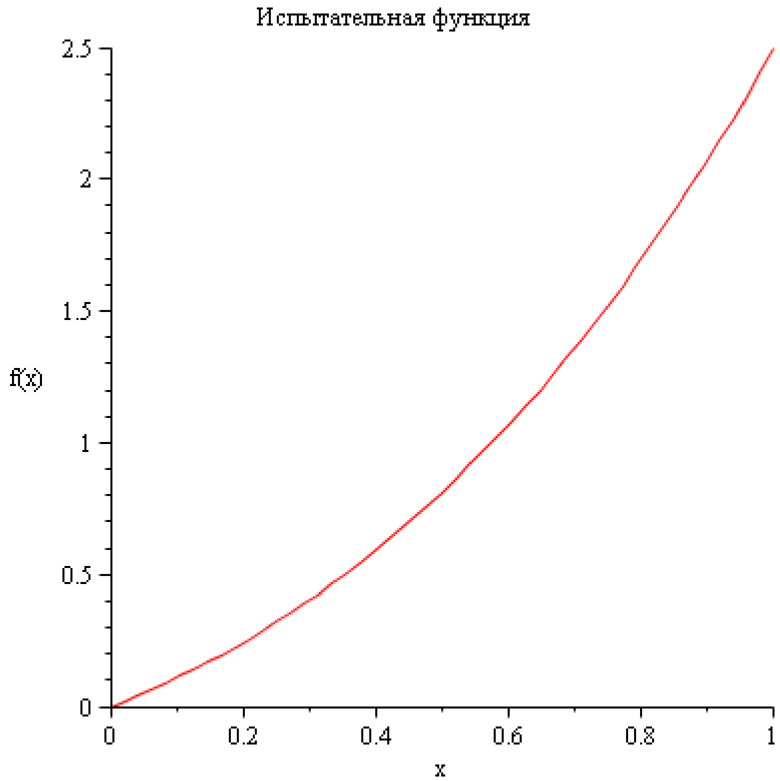


Рисунок 3.3 График испытательной функции $f(x)=x(x+1)++0.5x^3$

В результате работы программы для второго примера получаем таблицу (Таблица 2):

Таблица 2

Полученные значения для уравнения $x(x+1)+0.5x^3=0$

Номер итерации, i	Приближения, найденные методом Ньютона, x_i	Приближения, найденные улучшенным методом, $x_{i\,уточ}$
1	1	-
2	0.444444444444444	-
3	0.130571249215317	0.0896645261732955
4	0.014979952280908	0.00660618504566650
5	0.0002210630197607	0.000031855797131474
6	4.8858056802 10^{-8}	7.472898246391 10^{-10}
7	2.3871090 10^{-15}	5.2727866233 10^{-19}
8	0	-5.69828767236979 10^{-30}
9	0	0

Мы получили для второго примера, что $B=1.25633663432063$, что близко к теоретическому показателю 1.25.

Аналогично первому примеру представим эти данные на графике в логарифмическом масштабе и на этом же изображении полученную экспериментальную зависимость $X_{уточ}=A\,X_{ньют}^{B}$ (Рисунок 3.4). График подтверждает правильность найденного показателя В.

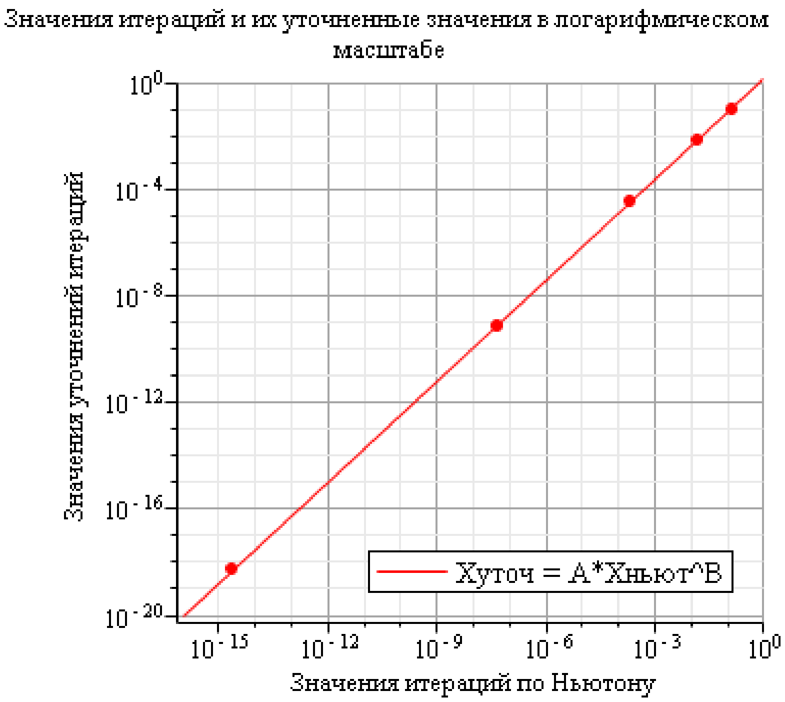


Рисунок 3.4 График значений в логарифмическом масштабе

1.8 Выводы по разделу

В данном разделе экспериментально подтверждено, что теоретически полученный порядок погрешности уточнения соответствует наблюдаемому на практике. Для проверки была подготовлена программа, которая выводит таблицу, содержащую приближения, полученные по методу Ньютона и разработанному уточнению. Также вычисляет порядок сходимости, строит зависимость между приближениями, полученные по методу Ньютона и уточнению. Были построены графики модельных уравнений и графики зависимости значений итерации и значений уточнений итерации логарифмическом масштабе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной работы была показать, что имея три последних приближения, полученных по методу Ньютона, можно уточнить положение корня.

Нами были выведены разложения приближения x_n и поправки η в ряд Маклорена:

$$x_n = \left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3 x_{n-2}^4 \left(1 + 2\left(\frac{2f_3}{3f_2} - \frac{f_2}{f_1}\right) x_{n-2} + O\left(x_{n-2}^2\right)\right),$$

$$\eta = \left(\frac{f_2}{2f_1}\right)^3 x_{n-2}^4 \left(1 + 3\left(\frac{2f_3}{3f_2} - \frac{f_2}{f_1}\right) x_{n-2} + O\left(x_{n-2}^2\right)\right),$$

где $f_k = f^{(k)}(0)$.

Поэтому уточнение будет подсчитываться следующей формулой:

$$x_{уточ} = x_n - \eta,$$

где x_n – последнее приближение, полученное по методу Ньютона;

$\eta = d\left(\frac{d}{\Delta}\right)^2$ – поправка;

$d = x_{n-1} - x_n$;

$\Delta = x_{n-2} - x_n$.

Было показано, что такой прием имеет порядок погрешности $x_{уточ} = O\left(x_{n-2}^5\right)$, что лучше и быстрее, чем сходимость по методу Ньютона.

Также был описан алгоритм уточнения положения корня:

1) Следовать алгоритму метода Ньютона, пока выполняется условие $\left|x_n - -x_{n-1}\right| > \varepsilon$ (правило остановки);
2) Получить последние три приближения x_{n-2}, x_{n-1}, x_n;
3) Вычислить $d = x_{n-1} - x_n u \Delta = x_{n-2} - x_n$;
4) Вычислить $\eta = d\left(\frac{d}{\Delta}\right)^2$;
5) Вычислить уточнение $x_{уточ} = x_n - \eta$ и подать его в качестве решения уравнения $f(x) = 0$.

Для проверки полученного теоретического порядка погрешности была разработана программа на языке Maple.

Для проверки использовались два модельных уравнения. Программа составляет таблицу, которая содержит номер итерации, приближения, полученные по методу Ньютона, и приближения, полученные разработанной формулой уточнения.

Также программа находит коэффициенты $A u B$ в зависимости $X_{уточ} = A X^B$, где $X_{уточ}$ – список значений приближений, полученных с помощью улучшения, X – список значений приближений, полученных методом Ньютона. В двух примерах показатель B был приблизительно равен 1.25, что соответствует теоретическому показателю.

В работе также приведен обзор классического метода Ньютона и его модификаций.

Цели и задачи данной работы выполнены.

Разработанное уточнение можно использовать в задачах и расчетах для нахождения более точного корня уравнения $f(x)=0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — М. : Наука, 1966. — 664 с.
2. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие / А. А Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. — М. : Высш. шк., 1994. — 544 с.
3. Бахвалов, Н. С., Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. Г. Кобельков. — М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2000. – 623 с.
4. Волков, Е. А. Численные методы / Е. А. Волков. — М. : Физматлит, 2003. – 476 с.
5. Гилл, Ф. Практическая оптимизация Пер. с англ / Ф Гилл, У. Мюррей, М. Райт. — М. : Мир, 1985. – 417 с.
6. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т.Корн. — М. : Наука, 1970. – 812 с.
7. Говорухин, В. Н. Введение в Maple. Математический пакет для всех / В. Н. Говорухин, В. Г. Цибулин. — М. : Мир, 1997. - 208 с
8. Матросов, А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики / А. В Матросов. — СПб. : BHV-Санкт-Петербург, 2001. - 528 с
9. Дьяконов, В. П. Maple 9.5 10 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов. — М. : Солон-Пресс, 2006. — 720 с.
10. Maple Soft: online help [Электронный ресурс] . URL http://www.maplesoft.com/support/help/index.aspx (дата обращения: 02.03.2017)

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

П1.1 Листинг программы для первого модельного уравнения:

Численная проверка порядка уточнения
Мы вывели формулу, которая, используя три последних приближения, уточняет положение корня уравнения f(x)=0. Для этого необходимо составить программу, которая бы выводила таблицу, состоящая из приближений, полученных методом Ньютона и улучшенным методом, показала правильность выведенной зависимости хуточ=O(x_n-2^5).

```
> restart
> Digits := 15 :
> with(LinearAlgebra) :
      #нужно, чтобы вывести правильно результирующую матрицу
> with(plots) :
```

В качестве примера рассмотрим модельное уравнение x(x+1)=0. Запишем функцию и её производную

```
> f := x→x·(x + 1);
```

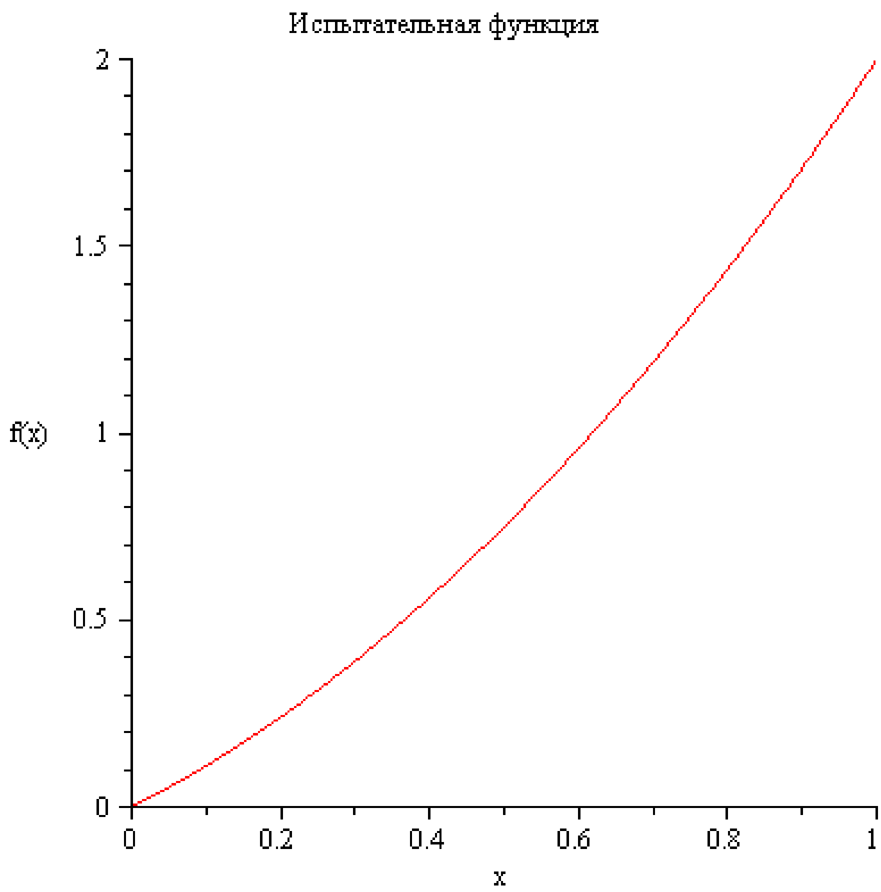
$$f := x \rightarrow x\,(x + 1)$$

```
> fstr := x→2·x + 1;
```

$$fstr := x \rightarrow 2\,x + 1$$

Построим график функции

```
> plot(f(x), x = 0 ..1, title = "Испытательная функция", labels = ["x",
      "f(x)"])
```



> $x0 := 1;$ *#начальное приближение*

$$x0 := 1$$

> $x := 1;$

$$x := 1$$

> $E := evalhf(DBL\_EPSILON);$ *#допустимая погрешность*

$$E := 2.22044604925031308\,10^{-16}$$

Для улучшения нам необходимы первые три точки

> $x1 := x - \frac{f(x)}{fstr(x)} : x2 := x1 - \frac{f(x1)}{fstr(x1)} :$

> $\mathrm{delta} := x0 - x2 : d := x1 - x2 : \mathrm{eta} := \frac{d^3}{\delta^2} :$ *#улучшение*

> $xb := x2 - \mathrm{eta} :$ *# x-улучшенное*

> $xx := [x0, x1, x2];$
 # первые три приближения, полученные методом Ньютона

$$xx := \left[1, \frac{1}{3}, \frac{1}{15}\right]$$

> $xxb := [0, 0, xb];$
 # первые три приближения, полученные улучшенным методом

$$xxb := \left[0, 0, \frac{11}{245}\right]$$

> $x := x2 : i := 3 :$

while $\mathrm{abs}(xx[i]-xx[i-1]) > E$ **do**
#пока не выполняется правило останова
$i := i+1 : xprev := x :$
$x := xprev - \dfrac{f(xprev)}{fstr(xprev)}$; *#вычисляем методом Ньютона*
$xx := [op(xx), x]$;
#добавляем новое приближение, полученное методом Ньютона
delta $:= xx[i-2] - xx[i] :\; d := xx[i-1] - xx[i] :$
eta $:= d\cdot\left(\dfrac{d}{\delta}\right)^2$;
$xxb := [op(xxb), xx[i] - \mathrm{eta}]$;
#добавляем новое приближение, полученное улучшенным методом Ньютона
od:

\>

Выведем матрицу результрующую +(1 столбец - номер итерации, 2 и 3 столбцы - приближения методом Ньютона и улучшенным методом)

\> $S := evalf(Transpose(Matrix([[seq(t, t = 1..i)], xx, xxb])))$;

$$S := \begin{bmatrix} 1. & 1. & 0. \\ 2. & 0.333333333333333 & 0. \\ 3. & 0.0666666666666667 & 0.0448979591836735 \\ 4. & 0.00392156862745098 & 0.00164510248543862 \\ 5. & 0.0000152590218966964 & 0.00000184122132212952 \\ 6. & 2.32830643708080\,10^{-10} & 1.81540915112858\,10^{-12} \\ 7. & 5.42101086242752\,10^{-20} & 1.65434860294640\,10^{-24} \\ 8. & 2.93873587705572\,10^{-39} & 1.36845553140789\,10^{-48} \end{bmatrix}$$

Рассчитаем b в формуле: хуточ = а*хньют^b

\> $\boldsymbol{xxln} := [\ln(xx[3])]$:

\> **for** i **from** 4 **to** 8 **do** $xxln := [op(xxln), \ln(xx[i])]$ **end**:

\> $xxbln := [\ln(xxb[3])]$:

\> **for** i **from** 4 **to** 8 **do** $xxbln := [op(xxbln), \ln(xxb[i])]$ **end**:

\> $V := evalf(Transpose(Matrix([[1\$6], xxln])))$;

$$V := \begin{bmatrix} 1. & -2.70805020110221 \\ 1. & -5.54126354515843 \\ 1. & -11.0903396300536 \\ 1. & -22.1807097776854 \\ 1. & -44.3614195558365 \\ 1. & -88.7228391116730 \end{bmatrix}$$

\> $C := evalf(Transpose(Matrix([xxbln])))$;

$$C := \begin{bmatrix} -3.10336293774636 \\ -6.40995259552695 \\ -13.2050814445090 \\ -27.0347102459977 \\ -54.7586348938921 \\ -110.210401709148 \end{bmatrix}$$

> $A := evalm(MatrixInverse(V).C);$

$$A := \begin{bmatrix} 0.504687773221981 \\ 1.24710484862622 \end{bmatrix}$$

Подготовим списки значений для графика в логарифмическом масштабе

> $xxp := [xx[3]]:$

for i **from** 4 **to** 8 **do** $xxp := [op(xxp), xx[i]]$ **end**:
#Список приближений, полученных по методу Ньютона

>

> $xxbp := [xxb[3]]:$

for i **from** 4 **to** 8 **do** $xxbp := [op(xxbp), xxb[i]]$ **end**:
#Список приближений, полученных с помощью улучшения

>

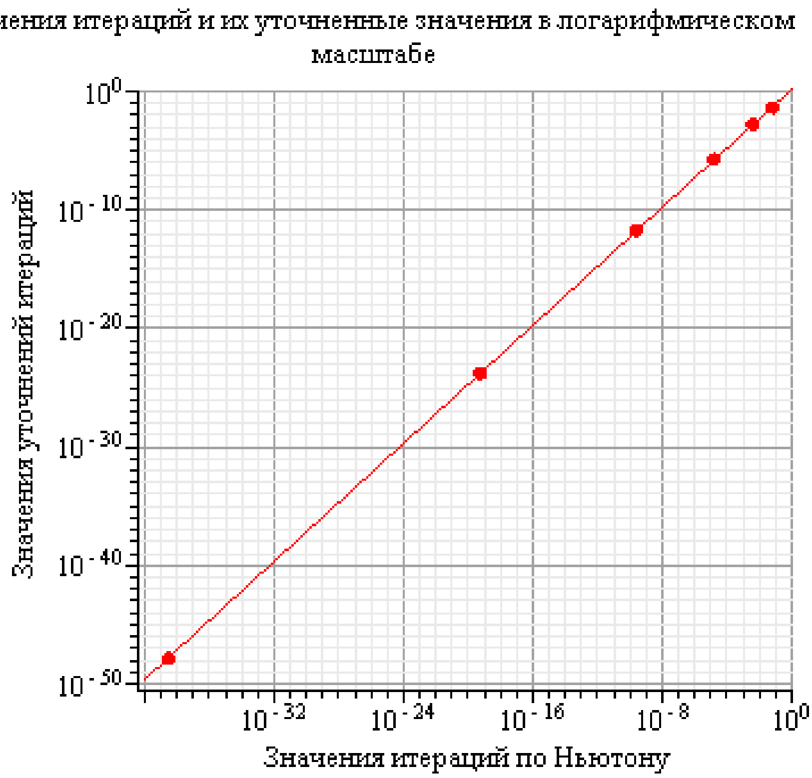
График значений итерации в логарифмическом масштабе

$p1 := loglogplot\left(xxp, xxbp, 10^{-40}..1, 10^{-50}..1, style = point, symbol = solidcircle, symbolsize = 15, gridlines = true, title\right.$ = "Значения итераций и их уточненные значения в логарифмическом масштабе", $labels$ = ["Значения итераций по Ньютону," "Значения уточнений итераций"], $labeldirections$ = $\left.[HORIZONTAL, VERTICAL]\right):$

>

> $p2 := loglogplot\left(\exp(A[1, 1]) \cdot xxx^{A[2, 1]}, xxx = 10^{-40}..1, 10^{-50}..1\right):$

> $display(p1, p2)$



П1.2 Листинг программы для второго модельного уравнения:

Численная проверка порядка уточнения

Мы вывели формулу, которая, используя три последних приближения, уточняет положение корня уравнения f(x)=0. Для этого необходимо составить программу, которая бы выводила таблицу, состоящая из приближений, полученных методом Ньютона и улучшенным методом, показала правильность выведенной зависимости xуточ=O(x_n-2^5).

```
> restart
> Digits := 15 :
  with(LinearAlgebra) :
      #нужно, чтобы вывести правильно результирующую матрицу
> with(plots) :
```

В качестве примера рассмотрим модельное уравнение x(x+1)+0.5x^3=0. Запишем функцию и её производную

```
> f := x→x·(x + 1) + 0.5·x^3;
```

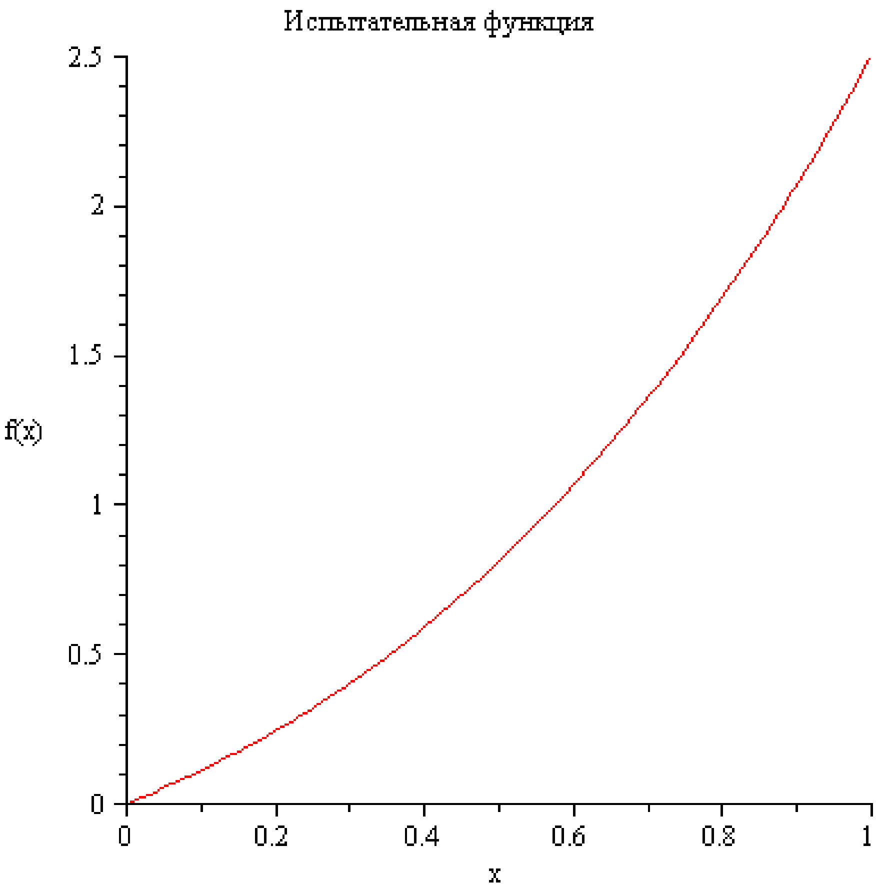
$$f := x \to x\,(x+1) + 0.5\,x^3$$

```
> fstr := x→2·x + 1 + 1.5·x^2;
```

$$fstr := x \to 2\,x + 1 + 1.5\,x^2$$

Построим график функции

```
> plot(f(x), x = 0 ..1, title = "Испытательная функция", labels = ["x",
      "f(x)"])
```




```
> x0 := 1; #начальное приближение
```

$$x0 := 1$$

> $x := 1;$

$$x := 1$$

> $E := evalhf(DBL\_EPSILON);$ *#допустимая погрешность*

$$E := 2.22044604925031308\,10^{-16}$$

Для улучшения нам необходимы первые три точки

> $x1 := x - \frac{f(x)}{fstr(x)} : x2 := x1 - \frac{f(x1)}{fstr(x1)} :$
>
> $\mathrm{delta} := x0 - x2 : d := x1 - x2 : \mathrm{eta} := \frac{d^3}{\delta^2} :$ *#улучшение*

> $xb := x2 - \mathrm{eta} :$ *# x-улучшенное*

> $xx := [x0, x1, x2];$
> *# первые три приближения, полученные методом Ньютона*

$$xx := [1, 0.444444444444444, 0.130571249215317]$$

> $xxb := [0, 0, xb];$
> *# первые три приближения, полученные улучшенным методом*

$$xxb := [0, 0, 0.0896645261732955]$$

> $x := x2 : i := 3 :$

> **while** $\mathrm{abs}(xx[i] - xx[i-1]) > E$ **do**
> *#пока не выполняется правило останова*
> $i := i + 1 : xprev := x :$
> $x := xprev - \frac{f(xprev)}{fstr(xprev)};$ *#вычисляем методом Ньютона*
> $xx := [op(xx), x];$
> *#добавляем новое приближение, полученное методом Ньютона*
> $\mathrm{delta} := xx[i-2] - xx[i] : \ d := xx[i-1] - xx[i] :$
> $\mathrm{eta} := d \cdot \left(\frac{d}{\delta}\right)^2;$
> $xxb := [op(xxb), xx[i] - \mathrm{eta}];$
> *#добавляем новое приближение, полученное улучшенным методом Ньютона*
> **od**:

Выведем матрицу результрующую (1 столбец - номер итерации, 2 и 3 столбцы - приближения методом Ньютона и улучшенным методом)

> $S := evalf(Transpose(Matrix([[seq(t, t = 1..i)], xx, xxb])));$

$$S := \begin{bmatrix} 1. & 1. & 0. \\ 2. & 0.444444444444444 & 0. \\ 3. & 0.130571249215317 & 0.0896645261732955 \\ 4. & 0.014979952280908 & 0.00660618504566650 \\ 5. & 0.0002210630197607 & 0.000031855797131474 \\ 6. & 4.8858056802\ 10^{-8} & 7.472898246391\ 10^{-10} \\ 7. & 2.3871090\ 10^{-15} & 5.2727866233\ 10^{-19} \\ 8. & 0. & -5.69828767236979\ 10^{-30} \\ 9. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

Рассчитаем b в формуле: хуточ = a*xньют^b

```
> xxln := [ln(xx[3])] :
> for i from 4 to 7 do xxln := [op(xxln), ln(xx[i])] end:
> xxbln := [ln(xxb[3])] :
> for i from 4 to 7 do xxbln := [op(xxbln), ln(xxb[i])] end:
> V := evalf(Transpose(Matrix([[1 $5], xxln])));
```

$$V := \begin{bmatrix} 1. & -2.03583623020873 \\ 1. & -4.20104248641830 \\ 1. & -8.41706273980790 \\ 1. & -16.8343465426404 \\ 1. & -33.6686933845832 \end{bmatrix}$$

```
> C := evalf(Transpose(Matrix([xxbln])));
```

$$C := \begin{bmatrix} -2.41168006000662 \\ -5.01974894064890 \\ -10.3542911789615 \\ -21.0145680212511 \\ -42.0865577730591 \end{bmatrix}$$

```
> A := evalm(MatrixInverse(V).C);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0.194451344021981 \\ 1.25633663432063 \end{bmatrix}$$

Подготовим списки значений для графика в логарифмическом масштабе

```
> xxp := [xx[3]] :
  for i from 4 to 7 do xxp := [op(xxp), xx[i]] end:
     #Список приближений, полученных по методу Ньютона
>
> xxbp := [xxb[3]] :
  for i from 4 to 7 do xxbp := [op(xxbp), xxb[i]] end:
     #Список приближений, полученных с помощью улучшения
>
```

График значений итерации в логарифмическом масштабе

$p1 := loglogplot\left(xxp, xxbp, 10^{-16}..1, 10^{-20}..1, style = point, symbol = solidcircle, symbolsize = 15, gridlines = true, title = \text{"Значения итераций и их уточненные значения в логарифмическом масштабе"}, labels = [\text{"Значения итераций по Ньютону"}, \text{"Значения уточнений итераций"}], labeldirections = [HORIZONTAL, VERTICAL]\right):$

\>

\> $p2 := loglogplot\left(\exp(A[1,1]) \cdot xxx^{A[2,1]}, xxx = 10^{-16}..1, 10^{-20}..1\right):$

\> $display(p1, p2)$