Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра уравнений математической физики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, кандидат физ.- мат. наук,
доцент, кафедры математического
анализа и методики преподаваия
математики
__________ /А.А. Баязитова/

«____» __________ 2017 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой уравнений
математической физики,
доктор физ.- мат. наук, профессор
__________ /Г.А. Свиридюк/

«____» __________ 2017 г.

Исследование задачи Шоуолтера – Сидорова для одной модели из теории фильтрации жидкостей в пространстве дифференциальных форм, заданных на многообразии без края

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
01.04.01.2017.136.00.МД

Руководитель, кандидат физ.-мат.
наук, доцент
________________ /Д.Е. Шафранов/
«____» __________ 2017 г.

Автор, магистрант группы ЕТ-221
________________ /Н.В. Адукова/
«____» __________ 2017 г.

Нормоконтролер, кандидат физ.-мат.
наук, доцент
________________ /Д.Е. Шафранов/
«____» __________ 2017 г.

Челябинск
2017

УДК 517.95

Адукова Н. В.
Иследование задачи Шоуолтера – Сидорова для одной модели из теории фильтраци жидкостей в пространстве дифференциальных форм, заданных на многообразии без края / Н.В. Адукова. – Челябинск, 2017. – 37 с.

Выпускная квалификационна работа посвящена изучению задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в пространстве дифференциальных форм, определенных на компактных связных ориентируемых римановых многообразиях без края. Применяя теорию Г.А. Свиридюка для абстрактных уравнений соболевского типа и опираясь на теорию Ходжа – Кодаиры о расщеплении пространства дифференциальных форм, получены результаты по разрешимости задачи Шоуолтера – Сидорова и по расщеплению пространств дифференциальных форм.

Список лит. – 24 названия, иллюстраций нет.

Оглавление

Введение

Уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной [2]

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u, \tag{0.1}$$

которое моделирует динамику давления вязко-упругой жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористых средах, можно рассматривать как конкретную интерпретацию абстрактного линейного уравнения соболевского типа с нетривиальным ядром при производной

$$L\dot{u} = Mu. \tag{0.2}$$

Эти уравнения и различные начально-краевые задачи для них в банаховых пространствах широко исследуются в научной школе Г.А.Свиридюка. Общая теория разрешимости в различных случаях представлена в [9, 11, 24], она основана на различных вариантах расщепления банахова пространства.

В данной работе мы исследуем задачу Шоуолтера–Сидорова, в которой начальное условие задается в виде

$$L(u(0) - u_0) = 0, \tag{0.3}$$

для уравнения с операторами $L = \lambda - \Delta$, $M = \alpha\Delta$, где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами, действующий в пространствах дифференциальных k-форм $\mathbb{H}^k = \mathbb{H}^k(\Omega_n)$, определенных на римановом многообразии без края Ω_n, который обобщает оператор Лапласа. Впервые исследование задачи Коши для уравнений соболевского типа в пространствах k-форм, определенных на римановом многообразии без края, было проделено в работах Г.А. Свиридюка и Д.Е. Шафранова [?, 12]. Итогом первого этапа этих исследований к 2006 году стала кандидатская диссертация Д.Е. Шафранова [17].

Главными результатами, полученными в этой работе, стали теоремы о существовании и единственности решений задачи Коши для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной, линейного уравнения Осколкова и линейной системы Осколкова в пространстве гладких k-форм на компактном ориентированном связном римановом многообразии без края, теорема о морфологии фазового пространства задачи Коши для полулинейной системы уравнений Осколкова в пространстве гладких k-форм на компактном ориентированном связном римановом многообразии без края, теоремы о существовании инвариантных пространств и экспоненциальных дихотомий решений задачи Коши для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной и линейной системы Осколкова, заданных в пространствах k-форм на компактном ориентированном связном римановом многообразии без края, теорема о существовании устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий полулинейной системы уравнений Осколкова, заданной в пространстве k-форм на компактном ориентированном связном римановом многообразии без края.

Затем это направление получило дальнейшее развитие в работах Д.Е. Шафранова, А.И. Шведчиковой [18] – [21]. В данной работе будет рассматривается задача Шоуолтера – Сидорова, подробно описаная в [8].

Уравнения соболевского типа, где в качестве операторов L, M были использованы полиномы произвольного порядка с действительными и комплексными коэффициентами от оператора Лапласа исследовались в других пространствах в статьях А.А. Замышлевой [5] и М.А. Сагадеевой [6].

Выпускная квалификационна работа состоит из введения, двух глав и списка литературы. Глава 1 содержит необходимые предварительные сведения теории Г.А. Свиридюка – раздел 1.1 и описание задачи Шоуолтера – Сидорова – разделы 1.2 – 1.5 в абстрактном случае.

Глава 2 содержит предварительные сведения о дифференциальных k-формах – разделы 2.1, 2.2, описание операторов в пространстве k-форм – раздел 2.3 и их свойства – раздел 2.4.

Раздел 2.5 содержит сводку результотов о формально фредгольмовых операторах L и M, которые необходимы для дальнейшего. Часть этих результатов сведена в теорему, являющуюся аналогом теоремы Г.А. Свиридюка о расщеплении. На ней будут основаны результаты дальнейшего исследования.

В разделе 2.6 достаточно подробна изложена спектральная теория оператора Лапласа – Бельтрами в пространствах дифференциальных форм $\mathbb{H}^k$. В этом изложении мы следуем изложению теории, данном в монографии Ф. Уорнера [16].

Основные результаты работы содержаться в разделе 2.7. Здесь проведено расщепление задачи на две отдельные задачи, в соответствии с разложением Ходжа для пространства $\mathbb{H}^k$. Оказалось, что задача приводится к задаче отыскания решения без гармонической составляющей. Соответственно, начальные данные не должны сожержать гармонической составляющей для разрешимости задачи. В работе отдельно расмотрены частные случаи задачи Шоуолтера – Сидорова, когда $\lambda = 0$ или $\alpha = 0$.

В случае, когда параметр λ не совпадает ни с каким собственным значением оператора Лапласа – Бельтрами, оказалось, что задача Шоултера – Сидорова превращается в задачу Коши, а дальнейшее расщепление пространства $\mathbb{H}^k$

позволило свести задачу к решению разрешенного относительно производной уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной. В результате доказано, что если классическое решение задачи Шоултера – Сидорова существует, то оно единственно. Получен также вид этого решения. Введено понятие обобщенного решения задачи, показано, что оно всегда существует и единственно. Обобщенное решение задачи получено в явном виде в спектральных терминах оператора Лапласа – Бельтрами.

Также изучен случай, когда λ совпадает с каким-либо собственным значением оператора Лапласа – Бельтрами. Дополнительное расщепление пространства $\mathbb{H}^k$ позволило свести задачу к предыдущей. Решение также получено в явном виде.

Глава 1

Задача Шоуолтера – Сидорова для абстрактного линейного дифференциального уравнения соболевского типа

В работах Г.А. Свиридюка и его учеников была детально разработа схема решения различных задач для абстрактного линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве и даны многочисленные приложения этой схемы к конкретным уравнениям, возникающим в математической физики. Результаты этой работы опубликованы в монографии [24], учебнике [9], обзорных статьях [7], [8].

Основное внимание в этих работах было уделено исследованию задачи Коши для уравнения соболевского типа. Мы будем исследовать задачу Шоуолтера – Сидорова, которая является более общей, чем задача Коши. Поэтому в данной главе мы, руководствуясь указаниями из вышеупомянутых работ, самостоятельно восстановим подробные доказательства тех утверждений, которые необходимы для исследования задачи Шоуолтера – Сидорова.

Основная задача главы – нахождение достаточных условий, налагаемых на операторы L и M, которые гарантируют существование единственного решения задачи Шоуолтера – Сидорова. При выполнении этих условий будет приведена формула решения задачи с помощью аналитической разрешающей группы операторов уравнения.

1.1. Постановка задачи Шоуолтера – Сидорова для абстрактного уравнения соболевского типа

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства и операторы $L,\ M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. В пространстве $C^\infty(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ рассмотрим абстрактное линейное дифференциальное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{1.1}$$

Вектор-функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, которое обращает уравнение (1.1) в тождество, называется *решением* этого уравнения. Если решение $u = u(t)$ удовлетворяет условию $u(0) = u_0$, $u_0 \in \mathfrak{U}$, то оно называется решением *задачи Коши*.

Определение 1.1. *Задачей Шоуолтера – Сидорова* называется задача отыскания решения уравнения (1.1), удовлетворяющего условию

$$L(u(0) - u_0) = 0. \tag{1.2}$$

Задача Шоуолтера – Сидорова является более общей, чем задача Коши, поскольку любое решение задачи Коши является, очевидно, решением и задачи Шоуолтера – Сидорова. Кроме того, если оператор L непрерывно обратим или $\ker L = \{0\}$, то обе задачи совпадают. Поэтому далее предполагаем, что $\ker L \neq \{0\}$.

В обзорной статье Г.А. Свиридюка и С.А. Загребиной [8] показано, что для уравнений соболевского типа задача Шоуолтера – Сидорова является более естественной, чем задача Коши.

1.2. Решение абстрактного уравнения соболевского типа с помощью аналитической разрешающей группы

Источником приведенных ниже сведений является монография Г.А. Свиридюка [24] и его обзорная статья [7]. Там указано, что важным результатом в рамках рассматриваемого нами подхода стало открытие аналитических групп разрешающих операторов уравнения.

Адаптируем стандартные определения спектральной теории линейных ограниченных операторов на наш случай и введем понятие аналитических групп разрешающих операторов.

Определение 1.2. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства и операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$$

называется *L-резольвентным множеством* оператора M, *а множество*

$$\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$$

– L-спектром оператора M.

При этом множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, а $\sigma^L(M)$ – замкнуто.

Определение 1.3. Пусть резольвентное множество $\rho^L(M)$ оператора M не пусто. Определим оператор-функции

$$(\mu L - M)^{-1}, \quad R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu(M) = L(\,\mu L - M)^{-1}$$

и назовем их *L-резольвентой, правой L-резольвентой, левой L-резольвентой оператора M*,соответственно.

Введение этих понятий позволяет редуцировать уравнение (1.1) к паре эквивалентных ему уравнений, с операторами из алгебры $\mathcal{L}(\mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}$ или $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}$. Изучение таких уравнений технически более простая задача.

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$ и $\mu \in \rho^L(M)$. Умножив уравнение $L\dot{u} = Mu$ на обратимый оператор $(\mu L - M)^{-1}$, получим уравнение в банаховом пространстве $\mathfrak{U}$

$$R^L_\mu(M)\dot{u} = (\mu L - M)^{-1}Mu, \tag{1.3}$$

эквивалентное (1.1). Обратимая замена переменной $f = (\mu L - M)u$ приводит (1.1) к уравнению

$$L^L_\mu(M)\dot{f} = M(\mu L - M)^{-1}f, \tag{1.4}$$

в банаховом пространстве $\mathfrak{F}$. Оба эти уравнения являются абстрактными дифференциальными уравнениями соболевского типа в банаховом пространстве.

В стандартной спектральной теории операторов показано, что для любого линейного ограниченного оператора M любое комплексное число μ, удовлетворяющее неравенству $|\mu| > \|M\|$, принадлежит резольвентному множеству $\rho(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})\}$. Другими словами в данном случае резольвентное множество не пусто и содержит некоторую окрестность бесконечно удаленной точки. Для L-резольвентного множества такого свойства вообще говоря нет. Поскольку дальнейшее развитие теории невозможно без аналога этого свойства, введем следующий класс операторов.

Определение 1.4. Оператор M называется *спектрально ограниченным относительно оператора L*, или *коротко (L,σ)-ограниченным,* если

$$\exists\ a \in \mathbb{R}_+\ \forall \mu \in \mathbb{C}\ \left((|\mu| > a) \Rightarrow (\,\mu \in \rho^L(M)\right)\,.$$

Лемма 1.1. *Пусть оператор M является (L,σ)-ограниченным. Возьмем в качестве контура Γ окружность $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$, пробегаемую против часовой стрелки. Определим операторы $P : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ и $Q : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ с помощью интегралов типа Ф. Рисса:*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\mu d\mu, \ Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L^L_\mu d\mu, \tag{1.5}$$

Тогда эти операторы являются проекторами.

Очевидно, что $LP = QL$ и

$$\ker L \subseteq \ker P, \quad \mathrm{im} Q \subseteq \mathrm{im} L.$$

Пусть оператор M является (L, σ)-ограниченным. По аналогии со стандартной спектральной теорией определим аналоги операторной функции e^{At} с помощью интегралов *типа Данфорда – Тейлора*:

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R^L_\mu(M) e^{\mu t}\, d\mu, \; t \in \mathbb{R},$$

и

$$F^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} L^L_\mu(M) e^{\mu t}\, d\mu, \; t \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что $U^0 = P$ и $F^0 = Q$.

Теорема 1.1. *Операторы* U^t *удовлетворяют условиям*

(i) $U^s U^t = U^{s+t} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$*;*

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ *вектор-функция* $u(t) = U^t u_0$ *есть решение уравнения (1.3).*

Аналогично,

(iii) $F^s F^t = F^{s+t} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$*;*

(iv) при любом $f_0 \in \mathfrak{U}$ *вектор-функция* $f(t) = F^t u_0$ *есть решение уравнения (1.4).*

Эта теорема мотивирует следующее определение.

Определение 1.5. Пусть $\mathfrak{V}$– банахово пространство, $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$.

Отображение $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$ называется *группой разрешающих операторов* уравнения $A\dot{v} = Bv$, если

(i) $V^s V^t = V^{s+t} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathfrak{V}$ вектор-функция $v(t) = V^t v_0$ есть решение уравнения $A\dot{v} = Bv$.

Группу $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$ назовем *аналитической,*если она имеет аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость с сохранением свойств *(i)* и*(ii)*.

1.3. Решение задачи Шоуолтера – Сидорова

В предыдущем разделе были введены проекторы P, Q типа Рисса, причем они оказались единицами групп U^t, F^t в том смысле, что $U^0 = P$, $F^0 = Q$.

Положим

$$\mathfrak{U}^0 = \ker P, \quad \mathfrak{U}^1 = \mathrm{im}\, P, \quad \mathfrak{F}^0 = \ker Q, \quad \mathfrak{F}^1 = \mathrm{im}\, Q.$$

Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (оператора M) на подпространства $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$. Для дальнейшего изложения очень важна следующая теорема Г.А. Свиридюка о расщеплении.

Теорема 1.2. *Пусть оператор M является (L, σ)-ограниченным. Тогда*
(i) $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k, \mathfrak{F}^k), k = 0, 1$.
(ii) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$;
(iii) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$;

Эта теорема означает, что операторы L и M разлагаются в прямую сумму операторов:

$$L = L_0 \oplus L_1, \quad M = M_0 \oplus M_1,$$

т.е. если разложить произвольные элементы u, f пространств $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$: $u = u^0 + u^1$, $f = f^0 + f^1$, то $Lu = L_0 u^0 + L_1 u^1$, $Mf = M_0 f^0 + M_1 f^1$.

Из определения проектора P следует, что $\ker L \subseteq \ker P$. Поэтому каждое решение задачи Шоуолтера – Сидорова является решением следующей более общей задачи:

$$\begin{cases} L\dot{u} = Mu, \\ P\left(u(0) - u_0\right) = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Теорема 1.3. *Пусть оператор M является (L, σ)-ограничен.*
Тогда задача Шоуолтера – Сидорова (1.6)

$$\begin{cases} L\dot{u} = Mu, \\ P\left(u(0) - u_0\right) = 0. \end{cases}$$

для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ имеет единственное решение, которое можно найти по формуле

$$u(t) = U^t u_0. \tag{1.7}$$

Доказательство. ◀ По теореме 1.1 любое решение уравнения (1.1) имеет вид $u(t) = U^t w$, где $w \in \mathfrak{U}$ – произвольный вектор. Подберем его так, чтобы удовлетворить условию задачи Шоуолтера – Сидорова.

Поскольку $u(0) = U^0 w = Pw$, то должно выполняться условие

$$P(Pw - u_0) = 0,$$

т.е. $Pw = Pu_0$. Это означает, что компонента w, лежащая в $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, найдена и w имеет вид $w = Pu_0 + w^0$, где w^0 – произвольный элемент пространста $\mathfrak{U}^0 = \ker P$.

Тогда $u(t) = U^t P u_0 + U^t w^0$. Учтем теперь, что оператор P является единицей группы U^t. Это означает, что

$$U^t P = U^t U^0 = U^{t+0} = U^t.$$

Поэтому

$$U^t P u_0 = U^t u_0, \quad U^t w^0 = U^t P w^0 = 0,$$

т.е. $u(t) = U^t u_0$. Таким образом, если решение задачи Шоуолтера – Сидорова существует, то оно находится единственным образом по формуле (1.7).

Непосредственной проверкой легко убедится, что функция $u(t)$, определенная по формуле (1.7), удовлетворяет условиям задачи (1.6), т.е. решение задачи Шоуолтера – Сидорова действительно существует. ►

1.4. Решение задачи Шоуолтера – Сидорова в случае $\ker L = \ker P$

Предложение 1.1. *Равенство*

$$\ker L = \ker P$$

выполняется тогда и только тогда, когда $L_0 = 0$.

Доказательство. ◄ По определению $L_0 = L|\ker P$. Поэтому, если $\ker L = \ker P$, то $L_0 = L|\ker L = 0$.

Наоборот, пусть $L_0 = 0$, тогда $Lu = L_1 u^1$. Если $u \in \ker P = \mathfrak{U}^0$, то $u^1 = 0$ и $Lu = 0$, т.е. $\ker P \subseteq \ker L$. Обратное включение очевидно и, таким образом, $\ker P = \ker L$. ►

Применив теорему 1.3, приходим к следующему результату.

Следствие 1.1. *Пусть оператор M является (L,σ)-ограничен и*

$$L_0 = L|\ker P = 0.$$

Тогда задача Шоуолтера – Сидорова (1.1) –(1.2)

$$\begin{cases} L\dot{u} = Mu, \\ L\left(u(0) - u_0\right) = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ имеет единственное решение, которое можно найти по формуле

$$u(t) = U^t u_0. \tag{1.9}$$

1.5. Достаточные условия (L,σ)-ограниченности

В предыдущих разделах мы убедились какую значительную роль в теории играет условие (L,σ)-ограниченности оператора M. Оно используется при определении L-резольвент, проекторов P, Q, при построении решения уравнения с помощью разрешающих операторов. Проверить это условие по определению удается редко, поэтому крайне важно указать какие-либо простые достаточные признаки (L,σ)-ограниченности. Такие признаки были получены в рамках теории Г.А. Свиридюка в работах [7], [24].

Приведем только те результаты этих работ, которые необходимы для нашей задачи. Укажем достаточный признак для одновременного выполнения двух условий: оператор M является (L,σ)-ограниченным и справедливо равенство $\ker L = \ker P$.

В случае (L,σ)-ограниченности оператора M его L-резольвента раскладывается в кольце $|\mu| > a$ в ряд Лорана

$$\mathcal{R}^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q \quad (1.10)$$

Здесь $H = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$, $H^0 = \mathbb{I}$, если $H \not\equiv \mathbb{O}$, и $S^0 = \mathbb{I}$, если $S \not\equiv \mathbb{O}$, где тождественные операторы определены на пространствах $\mathfrak{U}^0$ и $\mathfrak{U}^1$ соответственно.

В предложении 1.1 было показано, что условие $\ker P = \ker L$ равносильно тому, что $L_0 = L|\ker P = 0$. Из формулы (1.10) видно, что последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда L-резольвента оператора M имеет в точке ∞ *устранимую особую точку*. По теореме 1.1.2 из работы Г.А. Свиридюка [7] для этого необходимо и достаточно, чтобы *для любого ненулевого вектора* $\varphi_0 \in \ker L$ *выполняется* $M\varphi_0 \notin \operatorname{im} L$.

Будем предполагать теперь, что оператор L является *фредгольмовым*. Это означает, что L нормально разрешим, т.е. линеал $\operatorname{im} L$ замкнут и пространство $\ker L$ имеет конечную размерность, а $\operatorname{im} L$ – конечную коразмерность и они равны между собой.

Коразмерность $\operatorname{im} L$ – это размерность любого прямого дополнения $\operatorname{im} L$ до всего пространства $\mathfrak{F}$. Известно, что в этом определении $\operatorname{codim} \operatorname{im} L$ можно заменить на $\dim \ker L^*$. Здесь L^* – сопряженный к L оператор.

Теорема 1.3.2 [7] вместе с фредгольмовостью L приводит теперь к следующему результату.

Теорема 1.4. *Пусть оператор L фредгольмов и для любого ненулевого вектора $\varphi_0 \in \ker L$ выполняется $M\varphi_0 \notin \operatorname{im} L$. Тогда оператор L является (L,σ)-ограниченным.*

Глава 2

Задача Шоуолтера – Сидорова для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной на компактном римановом многообразии без края

2.1. Риманова метрика на многообразии

Пусть Ω_n – n-мерное ориентированное гладкое компактное связное многообразие без края. Всюду в дальнейшем гладкость понимается как гладкость класса C^∞.

Введем понятие касательного пространства многообразия Ω_n в точке $p \in \Omega_n$. Перейдем к локальным координатам в окрестности точки p. Пусть (φ, M) – карта на Ω_n и $p \in M$. Тогда $x = \varphi(p) = (x_1, \ldots, x_n)$ – локальные координаты точки p. Определим функционалы $\partial_j|_p$, $j = 1, \ldots, n$, на $C^\infty(\Omega_n)$ формулой

$$\partial_j|_p(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})(x)}{\partial x_j}\bigg|_{x=\varphi(p)}, \quad f \in C^\infty(\Omega_n).$$

Функционалы $\partial_j|_p$, $j = 1, \ldots, n$, образуют базис пространства $T_p\Omega_n$, которое называется *касательным пространством* Ω_n в точке p. Таким образом, $T_p\Omega_n$ состоит из всех функционалов $X_p : C^\infty(\Omega_n) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

(1) $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g)$,

(2) $X_p(fg) = f(p)(X_p g) + g(p)(X_p f)$, $\quad (f, g \in C^\infty(\Omega_n); \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

Каждый функционал X_p называется *дифференцированием* в точке p, а также *касательным вектором* многообразия Ω_n в точке p.

Для гладкого многообразия Ω_n положим $T\Omega_n = \bigcup_{p \in \Omega_n} T_p\Omega_n$, где касательные пространства в разных точках рассматриваются как непересекающиеся множества. $T\Omega_n$ можно наделить структурой гладкого многообразия размерности $2n$. Это многообразие называется касательным расслоением многообразия $\mathfrak{M}$.

Векторным полем X на гладком многообразии Ω_n называется функция, сопоставляющая каждой точке $p \in \Omega_n$ касательный вектор $X_p \in T_p\Omega_n$ в этой точке и удовлетворяющая следующему условию гладкости: если $f \in C^\infty(\Omega_n)$, то числовая функция $p \to X_p(f)$ является гладкой.

Через $V(\Omega_n)$ обозначим множество всех векторных полей на Ω_n. На V определены алгебраические операции: векторные поля можно складывать и умножать на действительные числа и V становится действительным векторным пространством (бесконечной размерности). Кроме того, векторные поля можно умножать на гладкие функции: $(fX)(p) = f(p)X(p)$.

Определение 2.1. *Римановой метрикой на гладком многообразии* Ω_n называется функция g, сопоставляющая каждой точке $p \in \Omega_n$ скалярное произведение $g(p) = (\cdot, \cdot)_p$ на касательном пространстве $T_p\Omega_n$, которая гладко зависит от p в следующем смысле: если $X, Y \in V(\Omega_n)$ – два гладких векторных поля на Ω_n , то скалярное произведение $(X(p), Y(p))_p$ должно быть гладкой функцией точки $p \in \Omega_n$. Гладкое многообразие Ω_n вместе с зафиксированной на нем римановой метрикой g называется римановым многообразием и обозначается (Ω_n, g).

Таким образом, $g(p)$ есть положительно определенная симметричная билинейная форма на $T_p\Omega_n$, гладко зависящая от точки p.

Посмотрим, как риманова метрика выглядит в координатах. Перейдем к локальным координатам в окрестности точки p. Пусть (φ, M) – карта на Ω_n, $p \in M$, $x = \varphi(p) = (x_1, \dots, x_n)$. Определим функции $g_{ij}(x)$ как скалярные произведения базисных векторов равенством

$$g_{ij}(x) = (\partial_i|_p, \partial_j|_p)_p, \quad x = \varphi(p).$$

Тогда $(g_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ – симметричная положительно определенная $n \times n$-матрица, гладко зависящая от $x \in U$, где $U = \varphi(M)$. Далее продолжаем определение $g(p)$ по линейности. Возьмем любые два вектора $X, Y \in T_p\Omega_n$ и разложим их по базису: $X = \sum_{i=1}^n X_i\partial_i|_p$, $Y = \sum_{i=1}^n Y_i\partial_i|_p$. Тогда риманова метрика представляется положительно определенной квадратичной формой

$$g(p) = (X, Y)_p = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)X_iY_j.$$

Эта формула в локальных координатах записывается в виде

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}dx_idx_j,$$

где ds интерпретируется как линейный элемент, т.е. как дифференциал расстояния между близкими точками $(x_1, \dots, x_n)$, $(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n)$. В теории поверхностей эта квадратичная форма называется также *первой квадратичной формой* поверхности. Таким образом, риманова метрика на многообразии есть обобщение первой квадратичной формы на поверхности.

На любом гладком многообразии существует риманова метрика. Это доказывается с помощью теоремы Уитни, которая говорит, что любое гладкое n-мерное многообразие можно вложить в $\mathbb{R}^N$, $N \leq 2n$. Пусть $\nu : \Omega_n \to \mathbb{R}^N$ такое вложение и $d_p\nu : T_p\Omega_n \to \mathbb{R}^N$– дифференциал вложения. Возьмем на $\mathbb{R}^N$ евклидову метрику, порожденную скалярным произведением

$$(X, Y)_e = \sum_{i=1}^{N} X_i Y_i, \quad X, Y \in T_p\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$$

Тогда евклидова метрика на $\mathbb{R}^N$ индуцирует риманову метрику на Ω_n по формуле:

$$g(p) = (X, Y)_p = (d_p\nu(X), d_p\nu(Y))_e.$$

Запишем эту формулу в локальных координатах. Пусть

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \vdots \\ \nu_N(x) \end{pmatrix},$$

где $x = \varphi(p) = (x_1, \ldots, x_n)$.

Тогда

$$g_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \nu_k}{\partial x_i} \frac{\partial \nu_k}{\partial x_j}.$$

2.2. Пространство $\mathbb{H}^k$ внешних дифференциальных k-форм

Внешние k-формы

Пусть L – n-мерное вещественное пространство. В следующих разделах при определении внешних дифференциальных форм на многобразии в качестве L будет выступать касательное пространство многообразия в точке p.

Произвольное вещественное число назовем *внешней* 0*-формой.* Множество $\Lambda^0(L)$ всех 0-форм есть одномерное пространство $\mathbb{R}$.

Внешней 1*-формой* называется линейный функционал на L. Таким образом, внешняя 1-форма это линейная функция $\omega : L \to \mathbb{R}$ от вектора $\vec{u} \in L$:

$$\omega \left\langle \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \right\rangle = \lambda_1 \omega \left\langle \vec{u}_1 \right\rangle + \lambda_2 \omega \left\langle \vec{u}_2 \right\rangle.$$

Множество $\Lambda^1(L)$ всех 1-форм – линейное пространство и $\dim \Lambda^1(L) = \dim L$.

Обозначим через x_i 1-форму, которая ставит в соответствие вектору $\vec{u}$ его i-ю координату в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$:

$$x_i \left\langle \vec{u} \right\rangle = u_i.$$

Система 1-форм $x_1, \ldots, x_n$ является базисом $\Lambda^1(L)$ и любая 1-форма имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Это общий вид 1-форм.

Внешней k-формой называется функция $\omega : L^k \to \mathbb{R}$, зависящая от k векторов $\langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k \rangle$, которая полилинейна (т. е. линейна по каждому аргументу) и кососимметрична (т.е. меняет знак при перестановке любых двух аргументов):

$$\omega \left\langle \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \right\rangle = \lambda_1 \omega \left\langle \vec{u}, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \right\rangle + \lambda_2 \omega \left\langle \vec{v}, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \right\rangle,$$

$$\omega \left\langle \vec{u}_1 \ldots, \vec{u}_i, \ldots, \vec{u}_j, \ldots, \vec{u}_k \right\rangle = -\omega \left\langle \vec{u}_1 \ldots, \vec{u}_j, \ldots, \vec{u}_i, \ldots, \vec{u}_k \right\rangle.$$

Из кососимметричности k-формы следует, что форма принимает значение нуль, если какие-либо два аргумента совпадают. Поэтому, если $k > n$, то любые k векторов линейно зависимы и значение формы на них равно нулю: $\omega \equiv 0$.

На множестве $\Lambda^k(L)$ всех k-форм обычным образом определяются операции сложения форм и умножения формы на число. Таким образом, $\Lambda^k(L)$ есть действительное линейное пространство.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_k$ – 1-формы на L, $2 \leq k \leq n$.

Внешним произведением этих форм называется форма $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$, действующая по правилу

$$(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k) \left\langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k \right\rangle = \det \begin{pmatrix} \omega_1 \left\langle \vec{u}_1 \right\rangle & \cdots & \omega_k \left\langle \vec{u}_1 \right\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1 \left\langle \vec{u}_k \right\rangle & \cdots & \omega_k \left\langle \vec{u}_k \right\rangle \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Из определения 1-форм и свойств определителя легко следует, что форма $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$ является k-формой.

Формы $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \ldots \wedge x_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $1 \leq k \leq n$, являются линейно независимыми и образуют базис пространства $\Lambda^k(L)$, т.е. $\dim \Lambda^k(L) = C_n^k$. Кроме того, $\dim \Lambda^k(L) = 0$ при $k > n$.

Таким образом, мы имеем следующий общий вид k-форм на n-мерном линейном пространстве:

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \ldots \wedge x_{i_k}, \quad a_{i_1 i_2 \ldots i_k} \in \mathbb{R}. \qquad (2.2)$$

В силу кососимметричности формы ее можно также записать в виде

$$\omega = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \ldots \wedge x_{i_k}, \quad a_{i_1 i_2 \ldots i_k} \in \mathbb{R}.$$

Внешние дифференциальные k-формы на открытом подмножестве $\mathbb{R}^n$

Пусть U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Точку $x \in U$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$ будем обозначать $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Если рассматривать U как гладкое n-многообразие, то касательное пространство T_xU совпадает с линейным пространством $\mathbb{R}^n$.

По определению считаем любую гладкую функцию на U *внешней дифференциальной* 0-формой. Таким образом, множество $\Lambda^0(U)$ всех 0-форм на U есть линейное пространство $C^\infty(U)$. Можно также считать, что $\Lambda^0(U)$ есть линейное пространство всех отображений $\omega : U \to \Lambda^0(T_xU)$.

Будем рассматривать дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_n$ независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ как внешние дифференциальные 1-формы, которые действуют на пространстве $L = T_xU$ приращений $h = (h_1, \ldots, h_n)$ точки x по правилу:

$$dx_j \langle h \rangle = h_j.$$

Внешней дифференциальной 1*-формой* на U называется сумма

$$\omega(x) \langle h \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) h_i, \ x \in U,$$

или, с учетом определения базисных 1-форм $dx_1, \ldots, dx_n$

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i.$$

Здесь коэффициент $a_i(x) \in C^\infty(U)$. Таким образом, дифференциальная 1-форма – это отображение $\omega : U \to \Lambda^1(T_xU)$, множество $\Lambda^1(U)$ таких форм есть линейное пространство.

Определив внешнее произведение дифференциальных 1-форм $dx_1, \ldots, dx_n$ в соответствии с формулой (2.1), мы можем дать следующее определение.

Внешней дифференциальной k-формой на U называется сумма

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \ldots \wedge dx_{i_k}, \tag{2.3}$$

где $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) \in C^\infty(U)$.

Учитывая кососимметричность форм $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \ldots \wedge dx_{i_k}$ формулу (2.3) можно переписать в виде

$$\omega(x) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Таким образом, дифференциальная k-форма – это отображение $\omega : U \to \Lambda^k(T_x U)$. Поскольку $\Lambda^k(L) = 0$ при $k > n$, то $\omega \equiv 0$ в этом случае.

Заметим, что на пространстве $\Lambda^k(U)$ всех дифференциальных k-форм помимо линейных операций можно определить операцию умножения формы на функцию из $C^\infty(U)$.

Внешние дифференциальные k-формы на многообразии

Пусть Ω_n – n-мерное гладкое многобразие, $T_p\Omega_n$ – касательное пространство многообразия Ω_n в точке $p \in \Omega_n$, $\Lambda^k(T_p\Omega_n)$ – линейное пространство k-форм на пространстве $L = T_p\Omega_n$. Обозначим

$$\Lambda^k(\Omega_n) = \bigcup_{p\in\Omega_n} \Lambda^k(T_p\Omega_n).$$

Тогда известно (см., например, [16], гл. 2), что $\Lambda^k(\Omega_n)$ можно наделить структурой гладкого многообразия.

Внешней дифференциальной k-формой на многообразии Ω_n называется гладкое отображение $\omega : \Omega_n \to \Lambda^k(\Omega_n)$ такое, что $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p\Omega_n)$.

Локально это определение означает, что, если точка p принадлежит карте (φ, M) и $x = \varphi(p) = (x_1, \dots, x_n)$ – локальные координаты p на этой карте, то

$$\omega(p) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Здесь $a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) \in C^\infty(U)$, $U = \varphi(M)$.

Формы можно складывать и умножать на числа, т.е. множество всех внешних дифференциальных k-форм образует (бесконечномерное) пространство. Обозначим его $\mathbb{H}^k \equiv \mathbb{H}^k(\Omega_n)$, $1 \le k \le n$. Ясно, что $\mathbb{H}^k = \{0\}$ при $k > n$. Для удобства положим $\mathbb{H}^{-1} = \{0\}$.

2.3. Дифференциальные операторы на римановом многообразии

Оператор внешнего дифференцирования d

Пусть Ω_n – гладкое n-мерное многобразие, наличие римановой метрики на нем не требуется. *Оператором внешнего дифференцирования форм* называется линейное отображение $d : \mathbb{H}^k \to \mathbb{H}^{k+1}$, $0 \le k \le n$, которое имеет следующие свойства:

1. Если ω – 0-форма, т.е. функция из $C^\infty(\Omega_n)$, то $d\omega$ есть дифференциал функции;

2. $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1}\omega_1 \wedge d\omega_2$, для любых дифференциальных форм ω_1, ω_2 , k_1 – степень формы ω_1;

3. $d(d\omega) = 0$ – для любой формы ω.

Известно, что существует единственное линейное отображение d, удовлетворяющее условиям 1) – 3).

Если k-форма ω в локальных координатах $x = (x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид

$$\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \ldots \wedge dx_{i_k},$$

то

$$d\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} da_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Здесь $da_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)}{\partial x_j}\, dx_j$ – обычный дифференциал функции.

Оператор d называют также оператором градиента на дифференциальных формах.

Оператор Ходжа $*$

Пусть Ω_n – гладкое компактное ориентируемое n-мерное риманово многообразие с метрикой g.

Введем на нем дифференциальную n-форму объема (т.е. меру) dV. В локальных координатах она определяется как

$$\mathrm{dV} = \sqrt{\det g(x)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,\ x = \varphi(p).$$

Например, для двумерной единичной сферы $\mathbb{S}^2$ со сферической метрикой $g = (d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\phi)^2$ получаем

$$\mathrm{dV} = \sqrt{EG - F^2} d\theta d\phi = \sin\theta d\theta d\phi.$$

Т.к. Ω_n – компакт, то на пространстве 0-форм $C^\infty(\Omega_n)$ можно определить как в $L_2(\Omega_n, \mathrm{dV})$ скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Omega_n} f(p) g(p) \mathrm{dV}.$$

Пусть ξ, η – гладкие k-формы на многообразии Ω_n. Поскольку $\xi(p), \eta(p)$ лежат в конечномерном пространстве $T_p\Omega_n$, то можно определить скалярное произведение векторов $\langle \xi(p), \eta(p)\rangle_p$, для которого базисные формы будут ортонормированными. Например, если 2-формы при $n = 3$ в локальных координатах $x = (x_1, x_2, x_3) = \varphi(p)$ имеют вид

$$\xi(p) = a_1(x) dx_1 \wedge dx_2 + a_2(x) dx_1 \wedge dx_3 + a_3(x) dx_2 \wedge dx_3,$$

$$\eta(p) = b_1(x)dx_1 \wedge dx_2 + b_2(x)dx_1 \wedge dx_3 + b_3(x)dx_2 \wedge dx_3,$$

то

$$\langle \xi(p), \eta(p) \rangle_p = a_1(x)b_1(x) + a_2(x)b_2(x) + a_3(x)b_3(x).$$

Тогда формула

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_{\Omega_n} \langle \xi(p), \eta(p) \rangle_p \mathrm{dV} \tag{2.4}$$

определяет скалярное произведение на пространстве $\mathbb{H}^k(\Omega_n)$ дифференциальных k-форм. Таким образом, мы наделяем пространство k-форм структурой пространства со скалярным произведением типа L_2. Пример пространства 0-форм $\mathbb{H}^0(\Omega_n) = \big(C^\infty(\Omega_n), \langle \cdot\,, \cdot \rangle_{L_2}\big)$ показывает, что эти пространства не являются полными.

Оператор Ходжа позволяет записать формулу (2.4) в более удобной форме, в которой явно мера dV не используется.

Оператором Ходжа называется оператор $* : \mathbb{H}^k(\Omega_n) \to \mathbb{H}^{n-k}(\Omega_n)$, который удовлетворяет условиям:

1. $*(f\xi + g\eta) = f(*\xi) + g(*\eta)$ для любых $f, g \in C^\infty(\Omega_n)$, $\xi, \eta \in \mathbb{H}^k$ (линейность в широком смысле).
2. $(\xi \wedge *\eta)(p) = \langle \xi(p), \eta(p) \rangle_p \mathrm{dV}$ для любых k-форм $\xi(p), \eta(p)$;
3. $*(*\omega) = (-1)^{k(n-k)}\omega$ для любой дифференциальной k-формы ω;
4. $*1 = \mathrm{dV}$.

Этими условиями оператор Ходжа определяется однозначно.

Укажем как действует оператор Ходжа на базисные формы в локальных координатах:

$$*(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = \mathrm{sgn}(i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{n-k}) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-k}},$$

где $\{j_1 \ldots j_{n-k}\}$ – дополнение множества $\{i_1 \ldots i_k\}$ до $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $\mathrm{sgn}(i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{n-k})$ – знак перестановки. Вместе с линейностью оператора Ходжа $*$ это позволяет вычислять его действие в локальных координатах. Например, для 1-формы на $\mathbb{R}^3$ имеем

$$*\big(a(x)dx + b(x)dy + c(x)dz\big) = a(x)\, dy \wedge dz - b(x)\, dx \wedge dz + c(x)\, dx \wedge dy.$$

Кроме того, если метрика на $\mathbb{R}^3$ декартова, то $*1 = dx \wedge dy \wedge dz$.

Скалярное произведение (2.4) дифференциальных k-форм теперь можно с помощью оператора Ходжа записать в виде:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_{\Omega_n} \xi \wedge *\eta. \tag{2.5}$$

Оператор δ, сопряженный к d

Оператор $\delta : \mathbb{H}^k \to \mathbb{H}^{k-1}$ определяется формулой

$$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * d * .$$

С использованием свойства 2) оператора d легко проверяется равенство

$$d(\xi \wedge *\eta) = d\xi \wedge *\eta - \xi \wedge *\delta\eta \tag{2.6}$$

для любых $\xi \in \mathbb{H}^{k-1}$ и $\eta \in \mathbb{H}^k$.

Рассмотрим прямую сумму $\mathbb{H}(\Omega_n) := \bigoplus\limits_{k=0}^{n} \mathbb{H}^k$ всех дифференциальных форм на многообразии Ω_n. Наделим эту прямую сумму обычным образом скалярным произведением (см., например, [15] стр. 152):

для $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n), \eta = (\eta_0, \dots, \eta_n) \in \mathbb{H}(\Omega_n)$ считаем, что

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle \xi_k, \eta_k \rangle.$$

При таком определении скалярного произведения на $\mathbb{H}(\Omega_n)$ подпространства $\mathbb{H}^k$ и $\mathbb{H}^m$, $k \neq m$, ортогональны друг другу.

Из равенства (2.6) с помощью теоремы Стокса получается основное свойство оператора δ:

$$\langle d\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \delta\eta \rangle$$

для любых форм $\xi, \eta \in \mathbb{H}(\Omega_n)$.

Это равенство означает, что оператор δ является формально сопряженным к d (напомним, что $\mathbb{H}(\Omega_n)$ не является гильбертовым пространством).

Оператор Лапласа – Бельтрами Δ

Оператор Лапласа – Бельтрами на гладком компактном ориентируемом римановом многообразии Ω_n определяется по формуле

$$\triangle = \delta d + d\delta.$$

Этот оператор является линейным оператором на каждом пространстве $\mathbb{H}^k$, $0 \leq k \leq n$. Нетрудно проверить, что на $\mathbb{H}^0(\mathbb{R}^n)$, т.е. на гладких функциях на $\mathbb{R}^n$, справедливо

$$\triangle f = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

Поэтому оправданным является следующее

Определение 2.2. Любая дифференциальная форма $\omega \in \mathbb{H}^k$, удовлетворяющая уравнению
$$\triangle\omega = 0$$
называется *гармонической k-формой.*

Обозначим линейное пространство всех k-гармонических форм через H^k. Ясно, что это ядро оператора Лапласа – Бельтрами.

Перечислим простейшие свойства оператора Лапласа – Бельтрами в пространствах $\mathbb{H}^k$.

1. Оператор $\triangle$ является симметрическим оператором в любом пространстве $\mathbb{H}^k$, $0 \le k \le n$, в том смысле, что
$$\langle \triangle\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \triangle\eta \rangle$$
для любых форм $\xi, \eta \in \mathbb{H}^k$.

2. Оператор $\triangle$ является неотрицательным оператором в любом пространстве $\mathbb{H}^k$, $0 \le k \le n$, в том смысле, что
$$\langle \triangle\xi, \xi \rangle \ge 0$$
для любой формы $\xi \in \mathbb{H}^k$. Доказательство этого факта следует из определения $\triangle$ и формальной сопряженности операторов d, δ:
$$\langle \triangle\xi, \xi \rangle = \langle d\xi, d\xi \rangle + \langle \delta\xi, \delta\xi \rangle \ge 0.$$

3. $\triangle\omega = 0$ тогда и только тогда, когда $d\omega = 0$ и $\delta\omega = 0$.

4. Будем дополнительно считать, многообразие Ω_n связно. Тогда, если $f \in \mathbb{H}^0 = C^\infty(\Omega_n)$ – гармоническая функция, то f является постоянной функцией.

   Этот факт следует сразу же из свойства 2). Таким образом, $H^0 = \mathbb{R}$.

2.4. Теорема Ходжа о разложении

Теорема Ходжа (см., например, [16]) далее будет играть определяющую роль в изучении спектра оператора Лапласа – Бельтрами в пространствах $\mathbb{H}^k$.

Теорема 2.1. (Теорема Ходжа о разложении) *Для любого целого k, $0 \le k \le n$, пространство H^k конечномерно и справедливы следующие разложения пространства $\mathbb{H}^k \equiv \mathbb{H}^k(\Omega_n)$ в ортогональную прямую сумму:*
$$\mathbb{H}^k = \triangle(\mathbb{H}^k) \oplus H^k = \tag{2.7}$$
$$= d\delta(\mathbb{H}^k) \oplus \delta d(\mathbb{H}^k) \oplus H^k = \tag{2.8}$$
$$= d(\mathbb{H}^{k-1}) \oplus \delta(\mathbb{H}^{k+1}) \oplus H^k. \tag{2.9}$$

Следовательно, уравнение $\Delta\omega = \alpha$ имеет решение $\omega \in \mathbb{H}^k$ тогда и только тогда, когда k-форма α ортогональна пространству H^k гармонических k-форм.

2.5. Подготовительные результаты для применимости метода Г. А. Свиридюка

Основная трудность задачи, рассматриваемой в работе, заключается в том, что пространство дифференциальных форм $\mathbb{H}^k(\Omega_n)$ неполное пространство, а пополнение его по норме, порожденной естественным скалярным произведением $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, приводит к L_2-формам, т.е. формам, которые локально являются внешними дифференциальными формами с коэффициентами из $L_2(U)$. Для таких форм не определены дифференциальные операции, и теория Ходжа требует значительного расширения. Поскольку мы хотим остаться в рамках классической теории Ходжа мы будем развивать теорию в нормированном пространстве $\mathbb{H}^k$. Это требует некоторых модификации метода разложения.

В этом разделе мы перечислим основные свойства операторов $L = \lambda - \Delta$ и $M = \alpha\Delta$ в нормированном пространстве $\mathbb{H}^k$, которые потребуются для применимости метода Г.А. Свиридюка, либо используются при изучении спектральных свойств оператора Δ.

Прежде всего введем некоторые понятия, которые обычно используются в полных пространствах. Рассматриваются только линейные операторы, однако их ограниченность (непрерывность не предполагается.

Оператор A, действующий в пространстве H со скалярным произведением $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ назовем *формально самосопряженным*, если для любых $x, y \in H$ выполняется равенство

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

В функциональном анализе такой оператор после пополнения H до гильбертова пространства называется *симметрическим* с всюду плотной областью определения dom(A) (см., например, [1, 14, 23]).

Оператор A, действующий в нормированном пространстве H назовем *формально фредгольмовым*, если выполняются условия:

1. пространство $\operatorname{im} A$ замкнуто в H и допускает конечномерное прямое дополнение N до всего H: $H = \operatorname{im} A \oplus N$;

2. оператор A имеет конечномерное ядро $\ker A$;

3. $\dim\ker A = \dim N$.

Ясно, что это понятие является калькой с понятия фредгольмовости оператора в банаховом пространстве.

Перейдем к перечислению свойств операторов Δ, $\lambda-\Delta$ в пространствах $\mathbb{H}^k$, которые необходимы для дальнейшего.

Свойства оператора $M=\Delta$

1. Оператор Δ является неограниченным оператором.

   Пояснение: в следующем разделе будет показано, что собственные значения Δ имеют единственную предельную точку ∞, что невозможно для ограниченного оператора.

2. Оператор Δ является формально самосопряженным оператором.

   Пояснение: Легко следует из опеределения Δ и того, что δ является формально сопряженным к d.

3. Оператор Δ является формально фредгольмовым оператором.

   Пояснение: Разложение Ходжа говорит, что $\mathbb{H}^k=\operatorname{im}\Delta\oplus\ker\Delta$. Здесь $\oplus$ – знак ортогональной прямой суммы. Тогда $\operatorname{im}\Delta=(\ker\Delta)^{\perp}$. Ортогональное дополнение линеала является замкнутым подпространством и в неполном гильбертовом пространстве. Значит, $\operatorname{im}\Delta$ – замкнуто в $\mathbb{H}^k$. По теореме Ходжа $\ker\Delta$ – конечномерно. Это же пространство является прямым дополнением $\operatorname{im}\Delta$. Таким образом, Δ является формально фредгольмовым оператором.

4. Сужение оператора Δ на пространство $\operatorname{im}\Delta$ имеет ограниченный обратный.

   Пояснение: утверждение доказано в [16], гл. 6, в процессе доказательства теоремы Ходжа.

5. Оператор $G=(\Delta|\operatorname{im}\Delta)^{-1}P$, где P – ортопроектор из $\mathbb{H}^k$ на конечномерное подпространство $\ker\Delta$ является линейным ограниченным формально самосопряженным компактным оператором на $\mathbb{H}^k$.

   Пояснение: эти утверждения доказаны в [16]. Отметим, что ортопроектор P является линейным ограниченным оператором в силу конечномерности $\ker\Delta$. Оператор называется *компактным* в неполном нормированном пространстве, если он переводит любую ограниченную последовательность в последовательность содержащую фундаментальную подпоследовательность.

   Оператор G называется *оператором Грина*, он играет важную роль при изучении спектра Δ. Отметим, что $G\Delta=\Delta G=I-P$.

Свойства оператора $L = \lambda - \Delta$

1. Оператор $\lambda - \Delta$ является неограниченным оператором.

   Следует из соответствующего факта для Δ.

2. Оператор $\lambda - \Delta$ является формально самосопряженным оператором.

   Следует из соответствующего факта для Δ.

3. Оператор $\lambda - \Delta$ является формально фредгольмовым оператором.

   Доказательство теоремы 6.8 из [16] о разложении для оператора Δ дословно переносится на оператор $\lambda - \Delta$. Следовательно, справедливо разложение типа Ходжа $\mathbb{H}^k = \mathrm{im}\,(\lambda - \Delta) \oplus \ker(\lambda - \Delta)$, откуда и следует утверждение.

4. Сужение оператора $\lambda - \Delta$ на пространство $\mathrm{im}\,(\lambda - \Delta)$ имеет ограниченный обратный.

Подведем итог в виде теоремы, являющейся аналогом теоремы Свиридюка о расщеплении.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \mathbb{H}^k(\Omega_n)$ и $L = \lambda - \Delta$, $M = \Delta$. Запишем разложения Ходжа для $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$:*

$$\mathfrak{U} = \mathrm{im}\,(\lambda - \Delta) \oplus \ker(\lambda - \Delta), \quad \mathfrak{F} = \mathrm{im}\,\Delta \oplus \ker \Delta.$$

Положим

$$\mathfrak{U}^0 = \mathrm{im}\,(\lambda - \Delta),\ \mathfrak{U}^1 = \ker(\lambda - \Delta); \quad \mathfrak{F}^0 = \mathrm{im}\,\Delta,\ \mathfrak{F}^1 = \ker \Delta.$$

Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (оператора M) на подпространства $\mathfrak{U}^k$(на $\mathfrak{F}^k$), $k = 0, 1$. Тогда

(i) L_k (M_k) являются линейными операторами, действющими в пространствах $\mathfrak{U}^k$ (пространствах $\mathfrak{F}^k$), $k = 0, 1$;

(ii) существует линейный ограниченный оператор

$$M_0^{-1} = \big(\Delta |\, \mathrm{im}\,\Delta\big)^{-1},$$

действующий в пространстве $\mathfrak{F}^0 = \mathrm{im}\,\Delta$;

(iii) существует линейный ограниченный оператор

$$L_0^{-1} = \big((\lambda - \Delta) |\, \mathrm{im}\,(\lambda - \Delta)\big)^{-1},$$

действующий в пространстве $\mathfrak{U}^0 = \mathrm{im}\,(\lambda - \Delta)$.

2.6. Спектр оператора Лапласа – Бельтрами на римановом многобразии

Оператор Лапласа – Бельтрами мы рассматриваем на бесконечномерном пространстве $\mathbb{H}^k$, $0 \leq k \leq n$, дифференциальных k-форм. На $\mathbb{H}^k$ определено скалярное произведение $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, однако это пространство не является полным относительно нормы, порожденной данным скалярным произведением. Поэтому мы не можем использовать результаты теории самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах. Это же относится к терминологии, и мы начнем с перформулировки стандартных опеределений.

Определение 2.3. Действительное число λ, для которого существует ненулевая k-форма u, такая что $\Delta u = \lambda u$, называется *собственным значением* оператора Δ. Если λ – собственное значение, то любая ненулевая k-форма u, такая что $\Delta u = \lambda u$, называется *собственной фунцией,* соответствующей собственному значению λ. Множество собственных функций, соответствующих фиксированному λ, дополненное нулевой формой, образует подпространство в $\mathbb{H}^k$, называемое *собственным подпространством*, соответствующим собственному значению λ. Если это подпространство конечномерно, то его размерность называется *кратностью* собственного значения. Множество всех собственных значений оператора Δ назовем его *спектром.*

Лемма 2.1. *Пусть Ω_n – гладкое компактное связное ориентируемое риманово n-многообразие без края и $\triangle$ – оператор Лапласа – Бельтрами, действующий в пространстве $\mathbb{H}^k$ дифференциальных k-форм. Тогда*

(i) $\lambda = 0$ является собственным значением оператора $\triangle$ конечной кратности.

(ii) Собственные значения оператора $\triangle$ неотрицательны, причем существуют положительные собственные значения.

(iii) Существует счетное число собственных значений, причем множество собственных значений не имеет конечной предельной точки.

(iv) Собственные подпространства оператора $\triangle$ конечномерны.

(v) Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

(vi) Система собственных функций полна в $\mathbb{H}^k$.

2.7. Решение задачи Шоултера – Сидорова для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной для гладких форм

Расщепление уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной

Пусть Ω_n – n-мерное ориентированное гладкое компактное связное риманово многообразие без края, $\mathbb{H}^k \equiv \mathbb{H}^k(\Omega_n)$ – пространство гладких дифференциальных k-форм на Ω_n, $0 \le k \le n$, $\Delta = d\delta + \delta d : \mathbb{H}^k \to \mathbb{H}^k$ – оператор Лапласа – Бельрами на Ω_n. Здесь d – оператор внешнего дифференцирования и δ – оператор Бельтрами.

Пространство $\mathbb{H}^k$ наделяется скалярным произведением

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_{\Omega_n} \xi \wedge *\eta,$$

которое является обычным L_2-скалярным произведением, определяемым интегрированием по мере dV, порожденной римановой метрикой на многообразии.

Рассмотрим задачу Шоуолтера – Сидорова для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной на многообразии Ω_n:

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta)\dot{u} = \alpha \Delta u, \\ (\lambda - \Delta)\left(u(0) - u_0\right) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Здесь α, λ – заданные действительные числа, u_0 – заданный элемент пространства $\mathbb{H}^k$ и решение ищется в классе гладких отображений действительной оси в $\mathbb{H}^k$: $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{H}^k)$.

Поскольку оператор Лапласа – Бельтрами неограничен на нормированном пространстве $\mathbb{H}^k$, а оператор $\lambda - \Delta$ – необратим, применим для исследования поставленной задачи идеологию метода расщепления Г.А. Свиридюка.

Для этого используем ортогональное разложение Ходжа пространства $\mathbb{H}^k$:

$$\mathbb{H}^k = \operatorname{im} \Delta \oplus \ker \Delta.$$

Здесь $\ker \Delta$ – конечномерное пространство гармонических k-форм на Ω_n. Размерности этого пространства – это важные топологические инварианты (числа Бетти) многообразия. При $k = 0$ имеем размерность 1. Обозначим через P ортопроектор на $\ker \Delta$. Каждую функцию $u = u(t)$ со значениями в $\mathbb{H}^k$ единственным образом разложим в сумму:

$$u(t) = v(t) + w(t),$$

где $Pv(t) = 0$, $\Delta w(t) = 0$.

Подставив это разложение в уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной, приходим к соотношению

$$(\lambda - \Delta)\dot{v} - \alpha\Delta v = -\lambda\dot{w}.$$

Поскольку левая часть этого равенства лежит в $\operatorname{im}\Delta$, а правая в $\ker\Delta$, то это возможно только при

$$(\lambda - \Delta)\dot{v} = \alpha\Delta v, \quad \lambda\dot{w} = 0.$$

Представив $u_0 = v_0 + w_0$, аналогично получаем $(\lambda - \Delta)(v(0) - v_0) = 0$, $\lambda(w(0) - w_0) = 0$.

Таким образом, мы получаем, что в силу разложения Ходжа задача (2.10) «покоординатно» расщепляется на две задачи: одна для гладких функций со значениями в пространстве $\mathfrak{F}^0 = \operatorname{im}\Delta$, другая – в дополнительном пространстве $\mathfrak{F}^1 = \ker\Delta$:

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta)\dot{v} = \alpha\Delta v, \\ (\lambda - \Delta)\left(v(0) - v_0\right) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda\dot{w}(t) = 0, \\ \lambda(w(0) - w_0) = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Рассмотрим задачу для гармонической составляющей решения. При $\lambda \neq 0$ получаем $\dot{w}(t) \equiv 0$ и $w(0) = w_0$. Таким образом, в этом случае $w(t) = w(0) = w_0$. Задача (2.10) имеет постоянную гармоническую составляющую $w(t) = w_0$, где $w_0 = Pu_0$ – гармоническая составляющая параметра u_0, входящего в начальные данные задачи.

При $\lambda = 0$ на компоненту $w(t)$ не накладывается никаких условий и решение задачи (2.10) находится с точностью до произвольного слагаемого – гладкого отображения $w(t) : \mathbb{R} \to \ker\Delta$. В частности, при $k = 0$ – с точностью до произвольной константы, т.к. гармонические 0-формы – это константы.

Решение задачи Шоултера – Сидорова для частных значений параметров λ, α

Рассмотрим подробнее случай $\lambda = 0$. Решим задачу

$$\begin{cases} \Delta\dot{v} = -\alpha\Delta v, \\ \Delta\left(v(0) - v_0\right) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Поскольку $\dot{v} + \alpha v$ и $v(0) - v_0$ принадлежат $\operatorname{im}\Delta \bigcap \ker\Delta$, то это возможно только при $\dot{v} + \alpha v = 0$, $v(0) = v_0$. Решением этой задачи является гладкое отображение $v = v_0 e^{-\alpha t}$. Произвольное решение задачи (2.10) вид

$$u(t) = v_0 e^{-\alpha t} + w(t),$$

где $w(t)$ – произвольная гладкая функция со значениями в конечномерном пространстве гладких гармонических k-форм и $v_0 = u_0 - Pu_0$.

Пусть теперь $\lambda \neq 0$ и $\alpha = 0$.

Если λ не является собственным значением Δ, то $\ker(\lambda - \Delta) = \{0\}$ и $\dot{v} = 0$, $v(0) - v_0 = 0$. Значит, $v(t) = v(0) = v_0$. Итак, в этом случае $u(t) = v(t) + w(t) = v_0 + w_0 = u_0$. Задача имеет только постоянное решение $u(t) = u_0$.

Пусть $\lambda = \lambda_k$ совпадает с каким-либо собственным значением. В этом случае решением задачи для компоненты $v(t)$ является функция $v(t) = t\phi + v_0$, где ϕ – любой элемент пространства $\ker(\lambda_k - \Delta)$. Итак, в этом случае произвольное решение задачи (2.10) имеет вид:

$$u(t) = t(c_1\phi_k + \ldots + c_r\phi_{k+r}) + u_0,$$

где r – кратность собственного значения λ_k, $\phi_k, \ldots, \phi_{k+r}$ – собственные функции, соответствующие этому собственному значению, $c_1, \ldots, c_r$ – произвольные константы.

Классическое решение задачи Шоултера – Сидорова при λ, не равном собственному значению

Решение задачи Шоултера – Сидорова в классе $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{H}^k)$ будем называть *классическим.* В этом разделе мы выясним условия существования такого решения при $\alpha \neq 0$, $\lambda \neq 0$ и λ не совпадающем с собственным значением оператора Лапласа – Бельтрами.

Теорема 2.3. *Пусть в задаче Шоуолтера – Сидорова (2.10) $\alpha \neq 0$, $\lambda \neq 0$ и λ не совпадает с собственным значением оператора Лапласа – Бельтрами.*

Если задача Шоуолтера – Сидорова имеет классическое решение, то оно единственно и находится по формуле:

$$u(t) = w_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_0, \phi_i \rangle e^{\frac{\alpha\lambda_i}{\lambda - \lambda_i}t} \phi_i, \tag{2.13}$$

где $u_0 = v_0 + w_0$.

Доказательство. ◀ Как показано выше, гармоническая компонента является постоянной $w(t) = w_0$, $w_0 = Pu_0$. Таким образом, нам нужно решать задачу только для компоненты v. Т.к. λ не совпадает с собственным значением оператора Δ, то $\ker(\lambda - \Delta) = \{0\}$ и начальное условие задачи Шоултера – Сидорова $(\lambda - \Delta)\,(v(0) - v_0) = 0$ превращается в начальное условие задачи Коши. Таким образом, мы приходим к следующей задаче Коши для компоненты v:

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta)\dot{v} = \alpha\Delta v, \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Пронумеруем собственные значения оператора $\triangle$ в порядке их возрастания, причем каждое собственное число учтем столько раз какова его кратность:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_p \leq \ldots \ .$$

Пусть $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – соответствующая ортонормированная последовательность собственных функций. Как отмечалось выше, система $\{\phi_i\}$ полна в $\mathbb{H}^k$, т.е. линейная оболочка этой системы плотна в $\mathbb{H}^k$ по норме, порожденной скалярным произведением $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Отметим, что $\phi_i \in \operatorname{im}\Delta$ и $\operatorname{im}\Delta$ – замкнутое подпространство $\mathbb{H}^k$. Тогда каждый элемент $v \in \operatorname{im}\Delta$ может быть разложен в ряд Фурье:

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, \phi_i \rangle \phi_i.$$

Ясно, что оператор $(\lambda - \Delta)|\operatorname{im}\Delta$ необратим, т.к. на собственных функциях он равен нулю. Поэтому, кажется, что уравнение $(\lambda - \Delta)\dot{v} = \alpha \Delta v$ нельзя разрешить относительно производной.

Однако, оператор $L_0 = (\lambda - \Delta)|\operatorname{im}(\lambda - \Delta)$ имеет линейный ограниченный обратный. Перепишем уравнение в виде

$$(\lambda - \Delta)\dot{v} = \alpha\lambda v - \alpha\big((\lambda - \Delta)v$$

или

$$(\lambda - \Delta)(\dot{v} + \alpha v) = \alpha\lambda v. \tag{2.15}$$

Отсюда видно, что любое решение уравнения (2.14) принадлежит пространству $\mathfrak{U}^0 = \operatorname{im}(\lambda - \Delta)$. Но тогда и $\dot{v} + \alpha v \in \operatorname{im}(\lambda - \Delta)$. Значит, уравнение (2.15) является уравнением с обратимым оператором и может быть разрешено относительно производной. Рассмотрим эквивалентное ему дифференциальное уравнение

$$\dot{v} + \alpha v = \alpha\lambda\big((\lambda - \Delta)|\operatorname{im}(\lambda - \Delta)\big)^{-1} v = \alpha\lambda L_0^{-1} v, \tag{2.16}$$

где оператор L_0^{-1} ограничен. Поэтому

$$L_0^{-1} v = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, \phi_i \rangle L_0^{-1} \phi_i.$$

Найдем $\psi_i = L_0^{-1}\phi_i$. Для этого решим уравнение

$$L_0 \psi_i = \phi_i$$

или

$$(\lambda - \Delta)\psi_i = \phi_i.$$

Из этого соотношения легко следует, что

$$\langle \psi_i, (\lambda - \lambda_i)\phi_j \rangle = \delta_{ij}$$

откуда получаем, что

$$\psi_i = \frac{\phi_i}{\lambda - \lambda_i}.$$

Итак,

$$L_0^{-1} v = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle v, \phi_i \rangle}{\lambda - \lambda_i} \phi_i.$$

Задачу Коши для уравнения (2.16) теперь можно записать в виде

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle \dot{v} + \alpha v, \phi_i \rangle \phi_i = \alpha\lambda \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\langle v, \phi_i \rangle}{\lambda - \lambda_i} \phi_i, \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle v(0), \phi_i \rangle \phi_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle v_0, \phi_i \rangle \phi_i. \end{cases}$$

Для коэффициентов Фурье $\langle v, \phi_i \rangle$ получаем обычную скалярную задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{d\langle v, \phi_i \rangle}{dt} + \alpha \langle v, \phi_i \rangle = \alpha\lambda \frac{\langle v, \phi_i \rangle}{\lambda - \lambda_i}, \\ \langle v(0), \phi_i \rangle = \langle v_0, \phi_i \rangle, \end{cases}$$

решение которой есть $\langle v, \phi_i \rangle = \langle v_0, \phi_i \rangle e^{\frac{\alpha\lambda_i}{\lambda - \lambda_i} t}$. Таким образом,

$$v(t) = \sum_{i=1}^{n} \langle v_0, \phi_i \rangle e^{\frac{\alpha\lambda_i}{\lambda - \lambda_i} t} \phi_i. \tag{2.17}$$

Итак, если классическая задача имеет решение, то оно обязательно находится по формуле (2.17). ►

Обобщенное решение задачи Шоултера – Сидорова при λ, не равном собственному значению

Классическое решение задачи может не существовать, т.к. в общем случае ряд в формуле (2.17) может не сходится в неполном пространстве $\mathbb{H}^k$. Для того, чтобы гарантировать существование решения уравнения (2.16) необходимо использовать полные пространства.

Обозначим через $\widetilde{\mathbb{H}}^k$ пополнение пространства $\mathbb{H}^k$ по норме, порожденной скалярным произведением $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Ясно, что

$$\widetilde{\mathbb{H}}^k = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i : \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty,\ a_i \in \mathbb{R} \right\},$$

т.е является аналогом пространства L_2.

Однако на формы из этого пространства нельзя продолжить оператор Δ. Поэтому мы введем линеал

$$\mathbb{W}_2^{1,k} = \left\{ \omega \equiv \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i : \sum_{i=1}^{\infty} (1 + {\lambda_i}^2) a_i^2 < \infty,\ a_i \in \mathbb{R} \right\},$$

который наделим нормой $\|\omega\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (1 + {\lambda_i}^2) a_i^2}$.

Легко видеть, что $\mathbb{W}_2^{1,k}$ становиться банаховым пространством, причем в силу неравенства $\|\omega\|_{\widetilde{\mathbb{H}}^k} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} \leq \|\omega\|_1$ оно непрерывно вложено в $\widetilde{\mathbb{H}}^k$. В нашей задаче это пространство является аналогом пространства Соболева. Продолжим по непрерывности оператор Лапласа – Бельтрами Δ на пространство $\mathbb{W}_2^{1,k}$. Это означает, что продолженный оператор $\widetilde{\Delta}$ действует следующим образом:

$$\widetilde{\Delta} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i \phi_i.$$

Очевидно, что $\widetilde{\Delta}$ действует из пространства $\mathbb{W}_2^{1,k}$ в $\widetilde{\mathbb{H}}^k$ и является линейным ограниченным оператором.

Обобщенным решением задачи Шоултера – Сидорова назовем функцию $u(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{W}_2^{1,k})$, являющуюся решением задачи

$$\begin{cases} (\lambda - \widetilde{\Delta}) \dot{u} = \alpha \widetilde{\Delta} u, \\ (\lambda - \widetilde{\Delta}) \left(u(0) - u_0 \right) = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Теорема 2.4. *Пусть в задаче Шоуолтера – Сидорова (2.18) $\alpha \neq 0$, $\lambda \neq 0$ и λ не совпадает с собственным значением оператора Лапласа – Бельтрами.*

Тогда для $u_0 = v_0 + w_0$, где v_0 любой элемент пространства $\mathbb{W}_2^{1,k}$ и w_0 – любая гармоническая k-форма, задача Шоуолтера – Сидорова имеет единственное обобщенное решение, которое находится по формуле:

$$u(t) = w_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_0, \phi_i \rangle e^{\frac{\alpha \lambda_i}{\lambda - \lambda_i} t} \phi_i.$$

Доказательство. ◀ Для любого $v_0 \in \mathbb{W}_2^{1,k}$ определим $v(\cdot) : \mathbb{R} \to W_2^{1,k}$ по формуле:

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_0, \phi_i \rangle e^{\frac{\alpha \lambda_i}{\lambda - \lambda_i} t} \phi_i.$$

Условие $v_0 \in \mathbb{W}_2^{1,k}$ гарантирует существование производной любого порядка по t и возможность применения к этой функции оператора $\widetilde{\Delta}$. Теперь легко проверить, что $v(t)$ является единственным решением задачи Коши для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной. ▶

Решение задачи Шоултера – Сидорова при λ, равном собственному значению

Пусть теперь $\alpha \neq 0$, $\lambda \neq 0$ и λ совпадает с некоторым собственным значением оператора Лапласа – Бельтрами: $\lambda = \lambda_k$.

Будем считать, что λ_k имеет кратность r, т.е.

$$\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{k-1} < \lambda_k = \ldots = \lambda_{k+r} < \lambda_{k+r+1} \leq \ldots$$

и собственные функции $\phi_k, \ldots, \phi_{k+r}$ образуют ортонормированный базис пространства $\mathcal{N} = \ker(\lambda_k - \Delta)$. Обозначим через $\mathcal{M} = \mathcal{N}^{\perp}$ ортогональное дополнение $\mathcal{N}$ в $\operatorname{im}\Delta = (\ker\ \Delta)^{\perp}$:

$$\operatorname{im}\Delta = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}.$$

Проведем в соответствии с эти разложением расщепление задачи (2.14) при $\lambda = \lambda_k$

$$\begin{cases} (\lambda_k - \Delta)\dot{v} = \alpha\Delta v, \\ (\lambda_k - \Delta)(v(0) - v_0) = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Пусть $v(t) = \mu(t) + \nu(t)$. Тогда

$$(\lambda_k - \Delta)\dot{v} = \frac{d}{dt}(\lambda_k - \Delta)(\mu + \nu) = (\lambda_k - \Delta)\dot{\mu}$$

и уравнение (2.19) принимает вид

$$(\lambda_k - \Delta)\dot{\mu} - \alpha\Delta\mu = \alpha\Delta\nu = 0.$$

Условие $\Delta\nu = 0$ выполняется только при $\nu(t) \equiv 0$, т.к. $\operatorname{im}\Delta \bigcap \ker\Delta = \{0\}$.

Разложим $v(0) - v_0 = (\mu(0) - \mu_0) + (\nu(0) - \nu_0)$. Начальное условие задачи (2.19) означает, что должно выполняться условие $(\lambda_k - \Delta)(v(0) - v_0) = (\lambda_k - \Delta)(\mu(0) - \mu_0) = 0$, что равносильно условию $\mu(0) - \mu_0 = 0$.

Таким образом мы получили, что составляющая $\nu(t)$ решения $v(t)$, лежащая в $\mathcal{N}$, должна быть равна нулю тождественно, а для составляющей $\mu(t)$ мы получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} (\lambda_k - \Delta)\dot{\mu} = \alpha\Delta\mu, \\ \mu(0) = \mu_0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Решение этой задачи (классическое или обобщенное) ничем не отличается от решения, полученного в предыдущем разделе. Нужно только отбросить слагаемые, содержащие $(\phi_k, \ldots, \phi_{k+r})$. Таким образом мы получаем следующую теорему, получим

$$v(t) = {\sum_{i=1}^{\infty}}' \langle \mu_0, \phi_i \rangle e^{-\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_i}t}\phi_i.$$

Поскольку $\langle \nu_0, \phi_i \rangle = 0$, то в этой формуле можно заменить $\langle \mu_0, \phi_i \rangle$ на $\langle v_0, \phi_i \rangle$. Добавив к $v(t)$ постоянную гармоническую составляющую $w(t) = w_0$, получим утверждение теоремы.

Теорема 2.5. *Пусть в задаче Шоуолтера – Сидорова (2.10) $\alpha \neq 0$, $\lambda \neq 0$ и λ совпадает с собственным значением λ_k кратности r оператора Лапласа – Бельтрами.*

Если задача Шоуолтера – Сидорова имеет классическое решение $u(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{H}^k)$, то оно единственно и находится по формуле:

$$u(t) = w_0 + {\sum_{i=1}^{\infty}}' \langle v_0, \phi_i \rangle e^{\frac{\alpha \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} t} \phi_i. \tag{2.21}$$

Здесь штрих в знаке суммы означает, что при суммировании пропускаются все слагаемые, для которых $\lambda_i = \lambda_k$ и $u_0 = v_0 + w_0$.

Обобщенное решение $u(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, W_2^{1,k})$ задачи существует, единственно и находится по той же формуле.

Подведем итог и сформулируем основные результаты, полученные в данной работе.

1. Задача Шоуолтера – Сидорова изучена в классе $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{H}^k)$, где $\mathbb{H}^k$ – прострнство гладких k-форм на многообразии Ω_n. Решение в этом классе мы называем *классическим.* Показано что, если классическая задача Шоуолтера – Сидорова имеет решение, то оно единственно. Найден явный вид классических решений (см. формулы (2.13) и (2.21)).

2. Для дифференциальных k-форм определены аналоги соболевских пространств $\mathbb{W}_2^{1,k}$, соответствующие оператору Лапласа – Бельтрами. Решение задачи Шоуолтера – Сидорова в классе $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{W}_2^{1,k})$ мы называем *обобщенным* решением.

3. Показано существование и единственность обобщенного решения задачи Шоуолтера – Сидорова при любых начальных данных. Получены явные формулы обобщенных этих решений.

Список литературы

1. Ахиезер, Н.И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве/Н. И. Ахиезер, И.М. Глазман – М.: Наука, – 1966. – 544 с.

2. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // ПММ.– 1960.– Т.24, № 5.– С.58 – 73.

3. Вуазен, Л. Теория Ходжа и комплексная алгебраическая геометрия. Т.1/ К. Вуазен – М.: МЦНПО, – 2011. – 368 с.

4. Дезин, А.А. Многомерный анализ и дискретные/А.А. Дезин – М.: Наука, – 1990. – 240 с.

5. Замышляева А.А., On Some Properties of Solutions to One Class of Evolution Sobolev Type Mathematical Models in quasi-Sobolev Spaces / А.А. Замышляева, Дж.К. Аль Исави // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 113 – 119.

6. Сагадеева, М.А. Ограниченные решения модели Баренблатта – Желтова – Кочиной в квазисоболевских пространствах / М.А. Сагадеева, Ф.Л. Хасан // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 138 – 144.

7. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов/Г.А. Свиридюк//Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49, вып. № 49 (298). – С. 47 – 74.

8. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа/Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина//Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2010. – Т.3, № 1. – С. 104 – 125.

9. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения соболевского типа/Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров – Челябинск: Издательство челябинского государственного университета, – 203. – 179 с.

10. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для линейного уравнения Осколкова на гладком многообразии / Г.А. Свиридюк, Д.Е. Шафранов // Вестн. Челяб. ун-та. Сер. мат., мех., информатика.– 2003.– № 1.– С.146 – 153.

11. Свиридюк, Г. А. Обратная задача для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе/Г.А. Свиридюк, А. А.Баязитова // Неклассические уравнения математической физики: Тр. междунар. конф. кДифференциальные уравнения, теория функций и приложениянь, посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И. Н. Векуа. – Новосибирск:Изд-во Ин-т математики, 2007. С. 244 – 250.

12. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для уравнения Баренблата – Желтова – Кочиной на гладком многобразии/Г.А. Свиридюк, Д.Е. Шафранов//Вестник Челябинского университета. Серия «Математика. Механика. Информатика». – 2003. – № 3. – С. 171 – 177.

13. Свиридюк, Г.А. Уравнения Осколкова на многообразии без края / Г.А. Свиридюк, Д.Е. Шафранов // Неклассические уравнения математической физики: Тр. междунар. семинара посвященного 60-летию профессора В.Н. Врагова.– Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005.– С.263 – 267.

14. Кириллов, А.А. Теоремы и задачи функционального анализа/А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани – М.: Наука, – 1979. – 384 с.

15. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин – М.: Наука, – 1972. – 496 с.

16. Уорнер, Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли/Ф. Уорнер – М.: Мир, – 1987. – 304 с.

17. Шафранов, Д.Е. Задача Коши для уравнений соболевского типа на римановых многобразиях. Дисс. канд. физ.-матем. наук. Челябинск: ЧелГУ, 2006.

18. Шафранов, Д.Е. Фазовое пространство и устойчивость системы Осколкова на римановом многообразии / Д.Е. Шафранов // Вестник МаГУ. Математика.– Вып. № 9.– Магнитогорск: МаГУ, 2006.– С.97 – 106.

19. Шафранов, Д.Е. О задаче Коши для уравнения свободной поверхности фильтрующейся жидкости на многобразии / Д.Е. Шафранов // Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование.– № 27(127).– Челябинск, Издательский центр ЮУрГУ, 2008.– С.117 – 120.

20. Шафранов, Д. Е. Уравнение Хоффа как модель упругой оболочки / Д. Е. Шафранов, А. И. Шведчикова // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Матема-

тическое моделирование и программирование. – 2012. – № 18 (277), вып. 12. – С.77 – 81.

21. Шафранов, Д.Е. О моделях соболевского типа в пространствах дифференциальных k-форм на сфере/ Д.Е. Шафранов // "Наука ЮУрГУ". Материалы 66-й научной конференции. Секция естественных наук:– Челябинск, Издательский центр ЮУрГУ, 2014.– С.234 – 238.

22. Шафранов, Д.Е. Расщепление области определения эллмптического самосопряженного псевдодифференциального оператора в пространстве гладких дифференциальных k-форм, определенных на римановом многообразии без края / Е.А. Богонос, Д.Е. Шафранов, // "Наука ЮУрГУ". Материалы 67-й научной конференции. Секция естественных наук:– Челябинск, Издательский центр ЮУрГУ, 2015.– С.83 – 87.

23. Шубин, М. А. Лекции об уравнениях математической физики/М.А. Шубин – М.: МЦНМО, – 2003. – 303 с.

24. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators/ G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003.