Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"ЮЖНО–УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)"
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра уравнений математической физики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Заведующий кафедрой математического
анализа и методики преподавания математики
доктор физ.-мат.наук., доцент
_______________/В.Л. Дильман/
"______"__________ 2017 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой
уравнений математической физики,
доктор физ.-мат.наук., профессор
_____________/Г.А. Свиридюк/
"______"___________ 2017 г.

Исследование свойств некоторых операторов заданных в виде дифференциальных форм

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
01.04.01.2017.138.МД

Руководитель, канд.физ.-мат., наук,
доцент
______________/Д.Е. Шафранов/
"______"_____________ 2017 г.

Автор, магистрант группы ЕТ-221
___________________/Т.Н. Мхавес/
"_____"__________ 2017 г.

Нормоконтролер, канд.физ.-мат., наук,
доцент
________________/Д.Е. Шафранов/
"______"____________ 2017 г.

Челябинск
2017

УДК 517.9

Мхавес Т. Н.

Исследование свойств некоторых операторов заданных в виде дифференциальных форм / Т.Н. Мхавес. –Челябинск, 2017. 22 с.

Получен результат о расщеплении области определения одного эллиптического самосопряженного псевдодифференциального оператора, в пространстве гладких дифференциальных k–форм, определенных на гладком ориентированном компактном римановом многообразии без края. Для простоты понимания описана редукция уравнений с псевдодифференциальными операторами к уравнениям с абстрактными операторами. Данный результат можно использовать для развития теории уравнений и моделей соболевского типа.

Библиография 19 названий; 0 иллюстраций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Обозначения и сокращения

Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Исключения составляют множества с уже устоявшимися названиями, например:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;

$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$;

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Вводятся также пространства:

$\mathbb{E}_k$ – пространство гладких дифференциальных k-форм;

$\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ – пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{F}$.

Введение

В настоящее время широко исследуются различные математические модели на основе уравнений соболевского типа вида

$$L\dot{u} = Mu \tag{0.1}$$

с необратимым оператором L при производной [1-6]. Стоит отметить, что исследования ведутся как для абстрактных уравнений, так и по конкретным приложениям такого вида [2]. Имеются качественные и численные исследования решений данных уравнений в самых различных постановках. Нас будет интересовать один из аспектов разрешимости начально-краевых задач в пространстве дифференциальных k-форм, определенных на римановом многообразии без края, например задачи Коши

$$u(0) = u_0, \tag{0.2}$$

для уравнений вида (0.1), а именно требующееся в теории относительных операторов расщепление области определения оператора $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, F)$ в прямую сумму подпространств

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1. \tag{0.3}$$

Для одних пространств эти расщепления естественны, а для других приходится постараться, что бы их получить. Мы говорим здесь о дифференцируемых k-формах [7,8], определенных на гладких компактных ориентируемых связных римановых многообразиях без края [9]. Ранее в челябинской научной школе в работах Свиридюка, Шафранова и других в пространствах дифференциальных k-форм исследования проводились в области разрешимости уравнений соболевского типа [10–12] и в области устойчивости решений [5,12,13]. Также в работах Шафранова и Богонос [14,15] начаты исследования свойств псевдодифференциальных операторов в пространствах дифференциальных форм. Одним из наиболее значимых среди этих операторов является оператор Лапласа–Бельтрами на дифференциальных формах, который с точностью до знака обобщает оператор Лапласа. Эти исследования достаточно эффективны в силу известности свойств этого оператора[16]. Переход в банаховы пространства возможен благодаря результатам Ленга [17].

Целью данной работы является исследование свойст псевдодифференциального оператора

$$L = \lambda + \Delta,$$

где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами в пространстве дифференцируемых k-форм, определенных на гладких компактных ориентируемых связных римановых многообразиях без края. Для достижения этой цели должны быть решены следующие **задачи**:

– ввести в рассмотрение римановы многообразия без края;

– построить дифференциальные k-формы на римановых многообразиях без края;

– ввести псевдодифференциальные операторы над этими дифференциальными k-формами, например Лаплас–Бельтрами плюс младшие коэффициенты;
– исследовать свойства полученных операторов.

Основой полученных результатов явилась теория Ходжи–Кодаиры о расщеплении пространства дифференциальных форм в прямую сумму подпространств [16] и теорема Свиридюка о расщеплении [18].

Работа помимо оглавления, введения, заключения и списка литературы содержит 3 параграфа.

Во введении приводится постановка задачи и описывается ее связь с математическими моделями соболевского типа. В первом пункте содержаться предварительные сведения, из теории относительно ограниченных операторов Свиридюка [1], во втором пункте вводятся пространства дифференциальных k-форм [7,8,19], определенных на многообразии без края и сведения из теории Ходжа—Кодаиры [8] о расщеплении таких пространств. Далее во втором пункте представлен результат Богонос и Шафранова [14] на который опирается основной результат работы. Во третьемм пункте приведены: основной результат о расщеплении области определения линейного ограниченного оператора $L = (\lambda + \Delta)$, с пояснениями. В заключении делается вывод по полученным результатам.

Полученный результат важен для дальнейших исследований уравнений соболевского типа, связанных с расщеплением пространств и расщеплением действий операторов при производной. Эти исследования также важны для поиска инвариантных подпространств для различных псевдодифффеpенциальных операторов.

1 Относительно p-ограниченные операторы

Пусть операторы $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C}; (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})\} \tag{1.1}$$

называется L-резольвентным множеством оператора M.

Множество $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ называется L-спектром оператора M.

Если $\rho^L(M) \neq \emptyset$, то можно определить оператор-функции

$$(\mu L - M)^{-1}, R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L, L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}, \tag{1.2}$$

которые называются соответственно L-резольвентой, правой L резольвентой, левой L-резольвентой оператора M. В случае, когда существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})\}$, L-резольвента, правая L-резольвента и левая L-резольвента оператора M совпадают с резольвентами операторов M, $L^{-1}M$ и ML^{-1} соответственно.

Определение 1.1. *Оператор M называется ограниченным относительно оператора L(короче, (L, σ)–ограниченным), если*

$$\exists a \in R_+, \forall \mu \in C(|\mu| > \alpha).$$

Пусть $p^L(M) \neq \emptyset$. Уравнение (0.1) редуцируются [1] к паре эквивалентных ему уравнений

$$R^L_\mu(M)\dot{u} = (\mu L - M)^{-1} M u, \tag{1.3}$$

$$L^L_\mu(M)\dot{f} = M(\mu L - M)^{-1} f, \tag{1.4}$$

где $\mu \in p^L(M)$.

Оба уравнения можно понимать согласно [1] как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{1.5}$$

где операторы $A, B \in \mathcal{L}(W)$, а W – некоторое банахово пространство.
Решением уравнения (1.5) называется вектор-функция $v \in C^\infty(\mathbf{R}, W)$ удовлетворяющая уравнению (1.5).

Замечание 1.1. *Если существует оператор* $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, *то оператор* $M(L,\sigma)$*-ограничен. Если оператор* L *компактен, то оператор* M *не будет* (L,σ) *-ограничен.*

Определение 1.2. *Отображение* $V \in C^{\infty}(\mathbf{R}, \mathcal{L}(W))$ *называется разрешающей группой уравнения (1.5), если*
(i) $V^sV^t = V^{s+t}$ *для любых* $s,t \in R$ *;*
(ii) для любого $v_0 \in W$ *вектор-функция* $v(t) = V^tv_0$ *является решением уравнения (1.5).*

Лемма 1.1. *Пусть оператор* M (L,σ)*-ограничен, а контур* Γ $=(\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a)$. *Тогда операторы* $P\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ *и* $Q\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ *определяемые через интегралы типа* Φ. *Рисса*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^L_{\mu}(M)d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} L^L_{\mu}(M)d\mu, \tag{1.6}$$

являются проекторами.

Положим

$$\mathfrak{U}^0 = \ker P, \mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P, \tag{1.7}$$

$$\mathfrak{F}^0 = \ker Q, \mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q, \tag{1.8}$$

обозначим через L_k (M_k) сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0,1$.

$$E = M_0^{-1}L_0, E \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0), \tag{1.9}$$

и оператор

$$S = L_1^{-1}M_1, S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1), \tag{1.10}$$

посредством которых L-резольвента оператора M раскладывается в кольце$|\ \mu\ |> a$ в ряд Лорана.

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k E^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - \mathrm{Q}) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} \mathcal{L}_1^{-1} Q \tag{1.11}$$

Здесь $E^0 = \mathbb{I}$, если $E \neq 0$, и $S^0 = \mathbb{I}$ $S^0 \neq \emptyset$, где тождественные операторы определены на пространства $\mathfrak{U}^0$ и $\mathfrak{U}^1$ соответственно.

Определение 1.3. *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен.*

Точка ∞ называется

(i) устранимой особой точкой L-резольвенты оператора M, если $E \equiv 0$;

(ii) полюсом порядка p L-резольвенты оператора M, если $E^P \neq 0$, $E^{P+1} \equiv 0$;

(iii) существенно особой точкой L-резольвенты оператора M, если $E^k \neq 0$ при любом $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Условимся в дальнейшем устранимую особую точку называть полюсом порядка нуль.

Определение 1.4. *Оператор M называется (L,p)-ограниченным, если оператор $M(L, \sigma)$-ограничен и ∞ является полюсом порядка $p \in \{0\} \cup N$.*

Условимся в дальнейшем любой вектор $\varphi \in \ker \setminus \{0\}$ называть собственным вектором оператора L. Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\} \subset \mathfrak{U}$ назовем цепочкой M-присоединенных векторов собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi + 1 = M\varphi_q, \varphi_q \notin \ker L, q = 0, 1, ...$$

цепочка конечна, если существует такой -присоединенный вектор φ_p что либо $\varphi_p \notin domM$, либо $M\varphi_p \notin \operatorname{im} L$. В частности, собственный вектор φ_0 не имеет M- присоединенных векторов, если либо $\varphi_0 \notin domM$, либо $M\varphi_0 \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечная цепочка называется ее длиной. Когда цепочка бесконечна, то мы говорим что у нее бесконечная длина. Линейная оболочка всех собственные и М-присоединенные векторов оператора L называется M корневым линеалом оператора L. Если M-корневой линеал замкнут, то он называется M-корневым пространством оператора L.

Теорема 1.1. *Пусть оператор L-фредгольмов. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) Оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

(ii) Длина любой цепочки M-присоединенных векторов оператора L не превосходит p.

Определение 1.5. *Фредгольмовым называется оператор L, если его индекс* $\mathrm{ind}L$ *=0.*

Теорема 1.2. *Пусть оператор $M(L,p)$–ограничен. Тогда существуют аналитические разрешающие группы уравнений (1.3) и (1.4), представимые интегралами Данфорда – Тейлора*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \tag{1.12}$$

$$F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \tag{1.13}$$

соответственно.

2 Дифференциальные формы на римановых многообразиях без края

Введем необходимые нам в дальнейшем

Определение 2.1. *Назовем дифференциальной формой ранга k (коротко k-формой) конечную сумму*

$$\omega = \sum_{i_1 \ldots, i_k = 1}^{n} a_{i_1 \ldots, i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \tag{2.1}$$

где $a_{i_1 \ldots, i_k}(x)$ — коэффициенты этой формы — будут функциями, заданными на множестве $\Omega \subset R^n$ и которые непрерывно дифференцируемы столько раз, сколько необходимо; $dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_k}$ набор дифференциалов, если сумма будет подчиняться условиям:

(i) Перемена местами двух слагаемых в (2.1) не изменит сумму;

(ii) Замена слагаемого вида $a_{i_1 \ldots, i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ суммой $a^1_{i_1 \ldots, i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} + a^2_{i_1 \ldots, i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ и наоборот не изменит сумму (2.1), если $a_{i_1 \ldots, i_k}(x) = a^1_{i_1 \ldots, i_k}(x) + a^2_{i_1 \ldots, i_k}(x)$;

(iii) При перемене местами двух дифференциалов каком-либо слагаемого $a_{i_1 \ldots, i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ происходит смена знака этого слагаемого.

Определение 2.2. *Пусть U – открытое подмножество $\mathbb{R}^d$, и пусть $f{:}U \to \mathbb{R}$. Мы будем говорить, что функция f – дифференцируема и класса C^k на U (короче f принадлежит C^k), где k – неотрицательное целое число, если в U существуют частные производные $\partial^a f / \partial a^r$ непрерывные для всех $[\alpha] \leq k$ и, в частности, f принадлежит классу C^0, в случае непрерывности. Если $f : U \to \mathbb{R}^n$, то назовем f дифференцируемым отображением класса C^k, если каждая компонента $f_i = r_i \circ f$ лежит в C^k. Мы далее будем говорить, что f лежит в классе C^∞, если f лежит в C^k для любого $k \geq 0$.*

Определение 2.3. *Локально евклидовым пространством M размерности d будет такое хаусдорфово топологическое пространство M, что каждая его точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной открытому подмножеству в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Если φ это гомеоморфное отобра-*

жение открытого связного множества $U \subset M$ в открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^d$, то φ назовем координатным отображением, а функции $x_i = r_i \circ f$ назовем координатными функциями. Пару (U, φ) (иногда обозначаемую как $(U, x_1, ..., x_d)$ назовем системой координат. Систему координат (U, φ) назывем кубической, если $\varphi(U)$ будет открытым кубом с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^d$.

Определение 2.4. *Дифференцируемой структурой $\mathcal{F}$ класса C^k*
$1 \leq k \leq \infty$ в локально евклидовом пространстве M называется набор систем координат $\{U_\alpha, \varphi_\alpha : \alpha \in A\}$, которые удовлетворяют трем условиям:
(i) $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha = M$;
(ii) отображения $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ принадлежат классу C^k для всех $\alpha, \beta \in A$;
(iii) семейство $\mathcal{F}$ максимально, в том смысле, что если (U, φ) это система координат, такая, что $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ и $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ принадлежат классу C^k для всех $\alpha \in A$, то и $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.

Взяв $\mathcal{F}_0$=$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ – произвольный набор систем координат, которые удовлетворяют условиям (i) и (ii), получим, что существует ровно одна дифференцируемая структура $\mathcal{F}$, которая содержит $\mathcal{F}_0$.

Зададим $\mathcal{F}_0 = \{(U, \varphi) : \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ и $\varphi_\alpha \circ \varphi_{-1}$ принадлежат классу C^k при всех $\varphi_\alpha \in \mathcal{F}_0\}$. Тогда $\mathcal{F}$ содержит $\mathcal{F}_0$; очевидно, что наша структура удовлетворяет условию (i), и нетрудно показать, что она же удовлетворяет и условию (ii). Этот набор $\mathcal{F}$ будет максимальным по построению. Он также будет дифференцируемой структурой, содержащей $\mathcal{F}_0$. Ясно, что это будет единственно возможная такая структура.

Опишем еще два типа дифференцируемых структур в локально евклидовых пространствах, которые можно в них определить. Это структура класса C^ω и комплексно-аналитическая структура. Если взять дифференцируемую структуру класса C^ω, то дополнительно потребуется, чтобы композиции функций в пункте (ii) локально были заданы, через сходящиеся степенные ряды. У комплексно-аналитической структуры в локально евклидовом пространстве размерности $2d$ потребуется, чтобы координатные системы задавались наборами функций со значениями в пространстве $\mathbb{C}^d$, а в пересечении координатных областей все преобразования координат являлись голоморфными.

Дифференцируемым многообразием размерности d класса C^k назовем пару $(M, \mathcal{F})$ состоящую из локально евклидова пространства M размерности d, который удовлетворяют второй аксиоме счетности, и с дифференцируемой структурой класса C^k . Часто опускают символ дифференциальной структуры и обозначают дифференцируемое многообразие $(M, \mathcal{F})$ одной буквой M, подразумевая, что когда мы говорим о «дифференцируемом многообразии M», то имеем ввиду локально евклидово пространство M с заданной на нем дифференцируемой структурой $\mathcal{F}$. Далее мы должны отметить, что рассматриваем случай класса C^k, а под термином «дифференцируемое» мы всегда будем понимать «дифференцируемость класса C^∞». Дифференцируемость класса C^∞ также часто называют гладкостью, и мы не будем их различать. Также называя гладкие многообразия просто многообразиями, здесь неявно предполагаем дифференцируемость класса C^∞. Можно понимать многообразие как тройку, содержащую: основное точечное множество, локально евклидову топологию на этом множестве, с выполняеющейся второй аксиомой счетности, и дифференцируемую структуру. Структура многообразия на множестве X подразумевает, как выбор локально евклидовой топологии, для которой выполняется вторая аксиома счетности, так и выбор фиксированной дифференцируемой структуры.

Хотя мы и ограничиваемся случаем C^∞, но многие результаты имеют аналоги для случая C^k, где $k < \infty$, которые не намного сложнее, чем те, которые мы получили. В случае C^k, $k < \infty$, необходимо просто следить за степенью дифференцируемости, потому что, дифференцируя один раз функцию класса C^k, мы получим функцию класса C^{k-1}, если $1 \leq k < \infty$.

На дифференцируемом многообразии Ω_n можно задать риманову структуру – выбрать скалярное произведение $(.,.)_m$ на каждом касательном пространство Ω_n (для всех точек $m \in \Omega_n$), таким образом, что если X и Y-гладкие векторные поля на Ω_n то (X, Y) -гладкая функция на Ω_n. Римановым многообразием называется дифференцируемое многообразие, вместе с римановой структурой.

Пусть заданно некоторое n-мерное многообразие без края Ω_n и над ним введено пространство гладких дифференциальных k-форм на Ω_n, которое обозначим

$$E_k = E_k(\Omega_n), 0 \leq k \leq n.$$

Замечание 2.1. В частности $E_0(\mathbb{R}^n)$ будет пространством функций n переменных.

Существует линейный оператор, называемый оператором Ходжа

$$* : E_k \to E_{n-k},$$

который сопоставляет каждой k-форме на Ω_n некоторую $(n-k)$-форму.

Замечание 2.2. Для оператра Ходжа выполняется равенство $** = (-1)^{k(n-k)}$.

Имеется также оператор взятия внешнего дифференциала $d : E_k \to E^{k+1}$ и определим на основе предшествующих оператор $\delta : E_k \to E_{k-1}$, следующим образом

$$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * d * .$$

Замечание 2.3. В случае 0-форм оператор δ является просто нулевым линейным функционалом.

Определение 2.5. *Оператор Лапласа–Бельтрами $\Delta : E_k \to E_k$ (короче лапласиан) мы определим равенством*

$$\Delta = \delta d + d\delta$$

и он, очевидно, является линейным оператором на пространстве $E_k, 0 \leq k \leq n$.

Замечание 2.4. На гладких функциях в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (т.е. в $E_k(\mathbb{R}^n)$) лапласиан совпадает с $(-1)\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Определение 2.2. Назовем пространством гармонических k-форм следующее

$$H^k = \{\omega \in E_k : \Delta\omega = 0\}.$$

Определим также формулой

$$(\xi,\eta)_0=\int \xi\wedge *\eta, \xi,\eta\in E_k \tag{2.2}$$

скалярное произведение в нашем пространстве E_k, k=0,1,...,n, а соответствующая норма обозначается $\|\cdot|_0$. Пополнение пространства E_k по этой норме мы обозначим E_k^0. Пополнение линеалов E_{kd}, $E_{k\delta}$, и $E_{k\Delta}$ по ней обозначим соответственно через E_{kd}^0, $E_{k\delta}^0$, $E_{k\Delta}^0$.

Теорема 2.1. *(теорема Ходжа – Кодаиры) Для любого $k=0,1,...,n$ существует расщепление пространства E_k^0 в прямую ортогональную сумму*

$$E_k^0=E_{kd}^0\oplus E_{k\delta}^0\oplus E_{k\Delta}^0. \tag{2.3}$$

причем пространство $E_{k\Delta}^0$ конечномерно.

Введем следующими формулами

$$(\xi,\eta)_1=(-\Delta\xi,\eta)_0+(\xi,\eta)_0, \tag{2.4}$$

$$(\xi,\eta)_2=(\Delta\xi,\Delta\eta)_0+(\xi,\eta)_1, \tag{2.5}$$

еще два скалярных произведения пространстве $E_k, k=0,1,....,n$,
а соответствующие нормы обозначим $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Пополнение пространства E_k по этим нормам обозначим E_k^1, E_k^2 .
Рассмотрим в E_k^0 ортопроектор

$$P_\Delta, \ker P_\Delta=E_{k\Delta}^0.$$

Он будет ортопроектором и в E_k^1, E_k^2, причем в силу конечномерности их ядра совпадут и $E_{k\Delta}^0=E_{k\Delta}^1=E_{k\Delta}^2$.

Положим пространства

$$\mathbf{E}_k^l=(\mathbf{E}_{k\Delta}^l)^\perp, l=0,1,2$$

т.е. ортогональное дополнение к гармоническим k-формам.

Пространства $\mathbf{E}_k^l, l=1,2$ – банаховы, причем в силу непрерывности и плотности вложений

$$\mathbf{E}_k^0\subseteq\mathbf{E}_k^1\subseteq\mathbf{E}_k^2,$$

а также конечности ранга оператора $P_{k\Delta}$ и $k = 0, 1, ..., n$ справедливо следующее

Следствие 2.1. *Для любого $k = 0, 1, ..., n$ существуют расщепления пространств*

$$\mathbf{E}_k^l = \mathbf{E}_{k\Delta}^{l1} \oplus \mathbf{E}_{k\Delta}, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{E}_{k\Delta}^{l1} = I - P_{k\Delta}\mathbf{E}_{k\Delta}, l = 1, 2.$

Пусть пространства $\tilde{\mathfrak{U}}$ и $\tilde{\mathfrak{F}}$ являются векторными расслоениями дифференциальных k-форм на многообразии Ω_n. Обозначим $\mathfrak{U} = C^\infty(\tilde{\mathfrak{U}}), \mathfrak{F} = C^\infty(\tilde{\mathfrak{F}})$ векторные пространства гладких сечений $\tilde{\mathfrak{U}}, \tilde{\mathfrak{F}}$ соответственно.

Определение 2.6. *Линейный дифференциальный оператор L порядка 2, действующий из $\tilde{\mathfrak{U}}$ в $\mathfrak{F}$, – это линейное отображение из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$. Оператор L называется эллиптическим, если он эллиптический локально (в каждой тривиализации).*

Теорема 2.2. [14] *Оператор L линейный непрерывный из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$, а пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ расщепляются в прямые суммы*

$$\mathfrak{U} = \operatorname{im} L^* \oplus \ker L, \tag{2.7}$$

$$\mathfrak{F} = \operatorname{im} L \oplus \ker L^*. \tag{2.8}$$

3 Свойства псевдодифференциального оператора определенного в пространстве дифференциальных форм

Пусть Ω_n – гладкое ориентированное компактное риманово многообразие без края. Используя приведенную выше теорию, определим пространства:

$$\tilde{\mathfrak{U}} = \oplus_{k=0}^{n} \mathbf{E}_k^2, \tilde{\mathfrak{F}} = \oplus_{k=0}^{n} \mathbf{E}_k^0. \tag{3.1}$$

Пространства $\tilde{\mathfrak{U}}$ и $\tilde{\mathfrak{F}}$ являются векторными расслоениями дифференциальных k-форм на многообразии Ω_n. Обозначим $\mathfrak{U} = C^\infty(\tilde{\mathfrak{U}}), \mathfrak{F} = C^\infty(\tilde{\mathfrak{F}})$ векторные пространства гладких сечений $\tilde{\mathfrak{U}}, \tilde{\mathfrak{F}}$ соответственно.

Рассмотрим оператор $(\lambda + \Delta)$. Очевидно, что это эллиптический оператор второго порядка из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$. Он самосопряженный как сумма самосопряженных операторов.

Тогда справедлива следующая

Теорема 3.1. *Оператор* $(\lambda + \Delta)$ *линейный непрерывный из* $\mathfrak{U}$ *в* $\mathfrak{F}$ *для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$, *а пространства* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{F}$ *расщепляются в прямые суммы*

$$\mathfrak{U} = \mathrm{im}(\lambda + \Delta)^* \oplus \ker(\lambda + \Delta), \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{F} = \mathrm{im}(\lambda + \Delta) \oplus \ker(\lambda + \Delta)^*. \tag{3.3}$$

Замечание 3.1. В теореме (3.1) знак звездочка означающий сопряженный оператор в силу самосопряженности оператора $\lambda + \Delta$ можно не использовать, но это затруднило бы понимание результата.

Доказательство Результат получается непосредственным применением теоремы 2.2 к оператору $L = (\lambda + \Delta)$ на построенных пространствах.

Заключение

Были решены следующие задачи: рассмотрели определения римановых многообразий без края; построили дифференциальные k-формы на римановых многообразиях без края; ввели псевдодифференциальный оператор $L = (\lambda + \Delta)$ в пространстве дифференциальных k-форм и исследовали расщепление области определения этого оператора.

Список литературы

[1] Pyatkov, S.G. Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht etc.: VSP, 2002. – 348 p.

[2] Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov.– Utrecht etc.: VSP, 2003. – 268 p.

[3] Чистяков, В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова; Ин-т динамики систем и теории управления. – Новосибирск: Наука, 2004. – 320 с.

[4] Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. – 88с.

[5] Загребина, С.А. Устойчивые и неустойчивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа: монография / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. – 121 с.

[6] Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка // А.А. Замышляева. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.

[7] Дезин, А.А. Многомерный анализ и дискретные модели / А.А. Дезин. – Новосибирск: Наука, 1990. – 239 с.

[8] Уорнер, Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли / Ф. Уорнер. – Мир,1987/ – 302 с.

[9] Спивак, М. Математический анализ на многобрзиях/ М. Спивак. – М: Мир, 1968. – 164 с.

[10] Свиридюк, Г.А. Задача Коши для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной на гладком многообразии / Г.А. Свиридюк, Д.Е. Шафранов // Вестн. Челяб. ун-та. Сер. мат., мех., информатика, 2003. – №3. – С.171–177.

[11] Шафранов, Д.Е. Уравнение Хоффа как модель упругой оболочки / Д.Е. Шафранов, А.И. Шведчикова // Вестник ЮУрГУ, Сер. Мат. Моделирование и программирование. -– Челябинск, 2012. -– №18 (277), Вып. 12. — С. 77—81.

[12] Шафранов, Д.Е. Задача Коши для уравнений соболевского типа на римановых многообразиях: Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. – Челябинск, 2006. – 96 с.

[13] Шафранов, Д.Е. Исследование устойчивости решений линейной системы Осколкова в пространстве -форм, определенных на римановом многообразии // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия, 2007. – №6 (56). – С.155–161.

[14] Богонос, Е. А. Расщепление области определения эллиптического самосопряженного псевдодифференциального оператора в пространстве гладких дифференциальных k-форм, определенных на римановом многообразии без края / Е.А. Богонос; Д.Е. Шафранов // Наука ЮУрГУ. Секции естественных наук : материалы 67-й науч. конф. / отв. за вып. С. Д. Ваулин ; Юж.-Урал. гос. ун-т. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015.- С. 83-87.

[15] Шафранов, Д.Е. Псевдодифференциальные операторы и дифференциальные формы // Д.Е. Шафранов, Е.А. Богонос. – Обозрение прикладной и промышленной математики, 2015. – Т.22, Вып.4. – С.508–509.

[16] Морен, К. Методы гильбертова простанства/ К. Морен. – М :Мир, 1965. – 570 с.

[17] Ленг, С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг. – Волгоград: Платон, 1996. – 203 с.

[18] Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2012. — №40 (299), Вып. 14. – С. 7–18.

[19] Duff, G. Differential forms in manifolds with boundary / G.Duff //Anal. of Math.-1952.- Vo1.56, № 1.-C.115-127