Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет» (НИУ)
Институт естественных и точных наук
Кафедра «Физическая электроника»

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент:
к.ф.-м.н., доцент
_____________Л.М.Свирская
_____________________2017г

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой,
д.т.н. профессор
_______________С.Ю. Гуревич
_______________________2017г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СПИНОВЫХ ВОЛН В МАГНИТНЫХ СРЕДАХ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К ВЫПУСКНОЙ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЕ

ЮУрГУ 11.03.04.2017. 399.ПЗ ВКР (ВКП)

Руководитель проекта
к.ф.-м.н., доцент
_______________И.И. Клебанов
______________________2017 г.
Автор проекта
студент группы ЕТ-473
_______________И.О. Ермолаев
______________________2017 г.
Нормоконтролер
к.т.н., доцент
_______________Н.С. Колмакова
______________________2017 г.

Челябинск 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет» (НИУ)
Институт естественных и точных наук
Кафедра «Физическая электроника»
Специальность «Электроника и наноэлектроника»

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

_________________С.Ю. Гуревич
_______________________2017 г.
.

ЗАДАНИЕ
на выпускную квалификационную работу (проект) студента
Ермолаева Ильи Олеговича
Группа ЕТ-473

1. Тема работы (проекта):

   Математические модели спиновых волн в магнитных средах с пространственной дисперсией

   утверждена приказом по университету от _________2017 г. № _______
2. Срок сдачи студентом законченной работы (проекта) ________________
3. Исходные данные к работе:

   Модельное уравнение М.О. Корпусова, алгоритм группового анализа дифференциальных уравнений.
4. Содержание расчётно-пояснительной записки (перечень подлежащих разработке вопросов)
   - Изучение основ теории спиновых волн
   - Групповой анализ нового модельного уравнения
   - Построение и анализ инвариантного решения

					11.03.04.2017.399.ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ документа	Подпись	Дата		2

5. Дата выдачи задания_______________________________________

Руководитель И.И. Клебанов ______________________________________

Задание принял к исполнению И.О. Ермолаев ___________________________

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН

№ п/п	Наименование этапов выпускной квалификационной работы (проекта)	Срок выполнения этапов работы (проекта)	Отметка о выполнении руководителя
1	Изучение литературы	01.02.2017	
2	Составление обзора литературы	01.03.2017	
3	Глава 1	01.04.2017	
4	Глава 2	15.04.2017	
5	Глава 3	15.05.2017	
6	Оформление работы	01.06.2017	
7	Направление на рецензию	10.06.2017	
8	Защита проекта	22.06.2017	

Заведующий кафедрой С.Ю. Гуревич ____________________

Руководитель работы (проекта) И.И. Клебанов ____________________

Студент И.О. Ермолаев ____________________

АННОТАЦИЯ

Ермолаев И.О., Математические модели спиновых волн в магнитных средах с пространственной дисперсией. – Челябинск: ЮУрГУ, ИЕиТН, Ф; 2017, 45 с, 7 ил., библиогр. список – 27 наим., 1 прил.

Объектом исследования данной выпускной квалификационной работы являются математические модели спиновых волн в магнитных средах с пространственной дисперсией.

В ходе работы проведен теоретико-групповой анализ нового модельного уравнения теории спиновых волн в магнитных средах с пространственной дисперсией. Вычислена алгебра Ли, допускаемая модельным уравнением.

Найдено новое инвариантное решение, описывающее стационарное распределение магнитного поля.

Оглавление

Введение

Исследование спиновых волн представляет значительный интерес с точки зрения развития представлений о спинволновой спектроскопии и является важным для многочисленных приложений. Импульсы коротких ОСВ (обменные спиновые волны) позволяют осуществить зондирование магнитных слоев с целью получения информации об их локальных свойствах, могут найти применение в качестве нового носителя информации в электронных устройствах обработки сигналов. Отметим, что спиновые волны могут также применяться для эффективного возбуждения ультразвуковых волн очень высокой частоты (до 20 ГГц и выше).

Работа состоит из трех глав и приложения. В первой главе изучаются основы теории спиновых волн. Во второй главе рассматривается вывод нового модельного уравнения спиновых волн в магнитных средах с пространственной дисперсией. В третей главе проводится групповой анализ нового модельного уравнения и строится новое аналитическое инвариантное решение. В приложении кратко рассматриваются основы группового анализа дифференциальных уравнений.

1. Элементы теории спиновых волн

1.1 Уравнение движения намагниченности

Для описания динамических процессов в ферромагнетиках можно использовать континуальную модель [1]. В качестве величины, характеризующей ее состояние, используем намагниченность, при этом отвлекаясь от микроскопической картины ферромагнетика [2,3]:

$$M = \sum \mathfrak{M}/\Delta V, \tag{1.1}$$

где $\sum \mathfrak{M}$ - сумма магнитных моментов макроскопических объемов ΔV.

Вектор M входит в различные уравнения макроскопической электродинамики, в частности, в соотношение

$$B = H + 4\pi M, \tag{1.2}$$

где B — магнитная индукция.

H — магнитное поле.

Для растолкования поведения ферромагнетика при использовании континуальной модели может применяться классическая теория. Обменное взаимодействие, природа которого является квантовой, при этом должно постулироваться. В случае однородной намагниченности или при медленном изменении M в пространстве, для его учета достаточно молекулярного (внутреннего) поля Вейсса [6].

В случае классического описания процессов в ферромагнетике уравнения макроскопической электродинамики дополняются соотношениями, которые отражают необычную для данного вещества связь между векторами $\vec{\mathrm{H}}$ и $\vec{\mathrm{M}}$ или $\vec{\mathrm{H}}$ и $\vec{\mathrm{B}}$. Под таким соотношением разумно использовать уравнение движения намагниченности [10]. Ввиду того, что природа ферромагнетизма носит квантовый характер, в границах классической теории данное уравнение должно быть постулировано. Уравнение движения намагниченности впервые было записано в 1935 г. Ландау и Лифшицем. Для некоторых случаев в дальнейшем оно было обосновано квантовомеханически. Это уравнение будет рассмотрено в более общем виде ниже, а сейчас приведем его вывод (он не может быть строгим в рамках классической теории) для случая однородных колебаний намагниченности изотропного ферромагнетика [7].

Рассмотрим ферромагнетик в качестве набора классических волчков (в этом и есть нестрогие опущения в выводе) с моментом количества движения J и магнитным моментом $\mathfrak{M}$. Уравнение движения волчка (твердого тела, закрепленного в одной точке) запишется в виде

$$\hbar \frac{\partial J}{\partial t} = \mathfrak{M} \times H \tag{1.3}$$

(потому что J измеряется в единицах $\hbar$, $\mathfrak{M}$ —в абсолютных единицах). Преобразуя и умножая уже полученное уравнение на N число магнитных моментов в единице объема, придем к уравнению движения намагниченности $M \equiv N\mathfrak{M}$ [4,5]:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\gamma M \times H \tag{1.4}$$

Отметим, что данное уравнение справедливо только лишь для гипотетической среды «без потерь», где при изменении намагниченности не будет происходить диссипация магнитной энергии [9].

При выводе уравнения (1.4) не было применено во внимание обменное взаимодействие. Но очевидно, что молекулярное поле (при добавлении его к полю H) не войдет в это уравнение. А дополнительное поле, учитывающее увеличение энергии обменного взаимодействия при неоднородной намагниченности, войдет в уравнение движения. Следовательно, уравнение (1.4) справедливо только лишь при достаточно медленном изменении вектора M в пространстве [11].

Есть еще замечание, которое касается уравнения (1.4). Величина γ, входящая в него, является характеристикой коллективного движения магнитных моментов ферромагнетика. Ее значение в данном уравнении (1.4) не совпадает со значениями γ для точно тех же магнитных ионов, причем ни в парамагнитных кристаллах, ни в свободном состоянии. В рамках классической континуальной теории величина γ может рассматриваться в качестве феноменологической постоянной, значение которой определяется из эксперимента [13]. Разница величины γ от ее спинового значения вызвано вкладом орбитальных моментов. Значит в случаях, когда магнитные ионы ферромагнетика не имеют орбитальных моментов (то есть находятся в S - состоянии) или в случае, когда их орбитальные моменты очень сильно «заморожены», g - фактор, который соответствует величине γ в уравнении (1.4), получается близким к двум. Данное обстоятельство имеет место, например, для ферромагнетиков EuO и $CdCr_2Se_4$, для ферримагнетиков (или ферритов), в которых магнитными ионами являются только ионы железа Fe^{3+}, в частности, для иттриевого феррита со структурой граната $Y_3Fe_5O_{12}$ или литиевого феррита $Li_{0,5}Fe_{2,5}O_4$ со структурой шпинели [13,14].

Любопытно, что вклад орбитальных моментов, приводящий к значениям g-фактора свободного иона меньшим двух, а также вызывает уменьшение g-фактора (g'), который определяется из наблюдений гиромагнитных эффектов, в частности, Барнета или Эйнштейна — де Гааза, дает величины g-фактора в уравнении больше двух. Эти различия объяснили Ван Флек и Киттель. Соотношение g—2 = 2—g', полученное ими, хорошо подтверждается для металлов, в неметаллических ферро- и ферримагнетиках значения g—2 обычно превышают 2—g' [2,3].

Важным свойством уравнения (1.4) является то, что оно сохраняет длину вектора M. И вправду, скалярно умножая обе части уравнения (1.4) на M, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} M^2 = 0 \qquad (1.5)$$

Если рассматривать M в качестве вектора, один конец которого закреплен, тогда вследствие (1.5) другой конец будет двигаться по сфере. Данное движение называют прецессией намагниченности. В случае наличии цилиндрической симметрии конец вектора M будет описывать окружность (то есть круговую прецессия), а в других случаях траектория будет более сложной [15].

1.2 Уравнение Ландау—Лифшица

Ферромагнетики, как правило, представляют из себя кристаллы. Им свойственна магнитная кристаллографическая анизотропия. Ее выделенными направлениями являются оси кристаллической решетки, а также все характеристики, зависящие от углов, и которые образуют M_0 и переменное поле h с этими осями [8,9].

На практике в ферромагнетиках также имеется магнитоупругая анизотропия, причиной которой является магнитоупругое взаимодействие, а выделенные направления задаются механическими напряжениями. Существуют, но хоть и играют меньшую роль, и другие виды анизотропии, связанные, к примеру, с градиентами температуры или электрическими полями, и пр.

В случае классического описания ферромагнитного резонанса различные виды взаимодействия, которые приводят к анизотропии, могут быть учтены способом введения соответствующих членов внутренней (то есть при температуре $T=0$) или свободной (при $T>0$) энергии ферромагнетика. Пока не интересуясь явлениями на граничные поверхности (проявляющиеся для ферромагнитных тел малых размеров), будем иметь дело только с объемными плотностями внутренней энергии U_i и свободной энергии U_f. Они связаны между собой соотношением:

$$U_f = U_i - TS, \tag{1.6}$$

где S—объемная плотность энтропии. При записи величин U_f или U_i, зависящих от углов между вектором намагниченности и выделенными направлениями, принимаются во внимание в первую очередь требования симметрии; константы же, входящие в эти выражения, могут быть найдены из микроскопических теорий или из эксперимента. При этом член $(- TS)$ обычно в явном виде не выписывается, а «размазывается» по всему выражению для U_f; тогда входящая в это выражение намагниченность и все константы становятся функциями температуры [6-10].

1.3 Обобщение уравнения движения намагниченности.

Уравнение движения намагниченности анизотропного ферромагнетика впервые было записано Ландау и Лифшицем в 1935 г. Его строгий вывод в границах классической теории невозможен, и цель приводимых ниже рассуждений состоит в том, чтобы показать, что это уравнение является разумным обобщением уравнения движения намагниченности для изотропного ферромагнетика (1.4) (которое, впрочем, тоже не может быть выведено строго в рамках классической теории) [2,3].

Пренебрежем сначала диссипацией и заметим, что уравнение () можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \gamma M \times \frac{\partial U_{mag}}{\partial M}, \tag{1.7}$$

где

$$U_{mag} = -MH \tag{1.8}$$

— «энергия» (т. е. в соответствии со сделанными выше замечаниями— плотность энергии или свободной энергии) намагниченности в магнитном поле H. Напомним, что условие, определяющее равновесную ориентацию вектора намагниченности, для изотропного ферромагнетика имеет вид

$$M_0 \times H_0 = 0. \tag{1.9}$$

Тогда с учетом (1.8)

$$M \times \frac{\partial U_{mag}}{\partial M} = 0. \tag{1.10}$$

Теперь рассмотрим случай равновесия анизотропного ферромагнетика.

Его необходимым условием является стационарность энергии, или равенство нулю ее вариации:

$$\delta \int U(M)dV = 0. \qquad (1.11)$$

При этом нужно учесть условие (1.5) постоянства длины вектора M, которое, выполняется для изотропного ферромагнетика, во всяком случае в отсутствие диссипации [14]. Это постоянство является результатом сильного обменного взаимодействия, и поскольку все взаимодействия, приводящие к анизотропии, слабее обменного, можно предположить, что (1.5) справедливо и для анизотропного ферромагнетика. Известно условие стационарности из вариационного исчисления, интеграла $\int U(M)dV = 0$ при дополнительном условии, что $M^2 = const$ имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta M}(U + \lambda M^2) = \frac{\delta U}{\delta M} + 2\lambda M = 0, \qquad (1.12)$$

где λ — это произвольный множитель Лагранжа. Тогда из (1.12) следует, что

$$M \times \frac{\delta U}{\delta M} = 0. \qquad (1.13)$$

В том случае, если намагниченность неоднородна, то вариационная производная

$$\frac{\delta U}{\delta M} = \frac{\partial U}{\partial M} - \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_p}\left[\frac{\partial U}{\partial(\partial M/\partial x_p)}\right]. \qquad (1.14)$$

Сравнивая (1.13) с (1.10), видно, что в условии равновесия $\partial U_{mag}/\partial M$ поменялась на величину $\delta U/\delta M$ (в которую $\partial U_{mag}/\partial M$ входит как одно из слагаемых). Следовательно, точно такую же замену можно произвести в уравнении движения [16].

$$H_{ef} = -\frac{\delta U}{\delta M} \equiv -\frac{\partial U}{\partial M} + \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_p}\left[\frac{\partial U}{\partial(\partial M/\partial x_p)}\right]. \qquad (1.15)$$

И подходим к уравнению Ландау – Лифшица

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\gamma M \times H_{ef} + R. \qquad (1.16)$$

где R—диссипативный член.

Тогда условие равновесия примет вид

$$M_0 \times H_{ef_0} = 0. \qquad (1.17)$$

Диссипативный член остается без изменений, тогда уравнение принимает вид

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\gamma M \times H_{ef} + \frac{\alpha}{M} M \times \frac{\partial M}{\partial t}. \qquad (1.18)$$

Для анизотропного ферромагнетика параметр γ и g-фактор, связанный с ним соотношением $\widehat{\mathfrak{M}} = -\gamma\hbar\hat{J} = -\frac{g|e_e|\hbar}{2m_e c}\hat{J}$ следует считать, вообще говоря, тензорными величинами. Заметим, что при интерпретации результатов измерения парамагнитного резонанса вся анизотропия учитывается обычно при помощи тензорного g-фактора [12]. Имеются экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что для ферромагнетиков в некоторых случаях при большой анизотропии учет тензорного характера g-фактора вместе с членами энергии, ответственными за анизотропию, является необходимым. Однако вопрос об уравнении движения намагниченности, которое следует использовать в этом случае, не вполне ясен. И так как поправка, возникающая в результате учета анизотропии g-фактора, оказывается малой, можно считать величину γ в уравнении движения скалярной и учитывать всю анизотропию при помощи соответствующих членов энергии U [17].

1.4 Энергия анизотропного ферромагнетика

Для случая анизотропного ферромагнетика

$$U = U_{\text{сх}} + U_{mag} + U_{\text{а}} , \tag{1.19}$$

где $U_{\text{сх}}$ — обменная энергия, U_{mag} - магнитная энергия, $U_{\text{а}}$ - энергия анизотропии.

Обменную энергию, источником которой служит электростатическое обменное взаимодействие (по своей природе), можно представить в виде

$$U_{\text{сх}} = U_{\Lambda} + U_{q} , \tag{1.20}$$

где

$$U_{\Lambda} = -\frac{1}{2}\Lambda M^2 \tag{1.21}$$

— это однородная часть, а U_q – неоднородная. Эффективным полем, которое согласно (1.15) соответствует энергии U_{Λ}, является «молекулярным полем» ($H_{\Lambda} = \Lambda\text{M}$). Это поле не входит в уравнение движения для ферромагнетика, по крайней мере в основной его член и в диссипативные члены в форме Гильберта или Ландау - Лифшица. А неоднородная часть U_q, характеризующая увеличение обменной энергии в случае неоднородной намагниченности входит в данное уравнение движения. Но рассматриваются однородные магнитные колебания и можно позволить не учитывать эту неоднородную часть [18].

Магнитная энергия может быть представлена в виде

$$U_{mag} = U_Z + U_M , \tag{1.22}$$

где U_Z — зеемановская энергия, то есть энергия взаимодействия намагниченности с внешним полем H_c а U_M - это внутренняя магнитная энергия, источником которой является магнитное (диполь-дипольное) взаимодействие магнитных моментов образца [20].

Зеемановскую энергию можно представить в виде:

$$\mathrm{U_Z} = -\ \mathrm{MH}_e. \tag{1.23}$$

Для случая малого ферромагнитного эллипсоида эффективным полем диполь-дипольного взаимодействия должно быть размагничивающее поле (—NM). Нетрудно убедиться в том, что с учетом симметрии тензора $-N$, получим

$$U_M = \frac{1}{2} MNM. \tag{1.24}$$

Величина U_a учитывает все виды анизотропии [24].

2. Вывод нового модельного уравнения

2.1 Математические модели квазистационарных процессов в кристаллических электромагнитных средах с пространственной дисперсией

Для проводящих сред необходимо учитывать пространственную дисперсию рассматриваемых нестационарных процессов. Понятие пространственной дисперсией определяется, как нелокальная связь таких характеристик электромагнитной среды, как индукция электрического поля D и напряженность электрического поля E:

$$D_i(r) = E_i(r) + \int_\Omega \chi_{ij}(r, r')\, E_j(r')dr', \tag{2.1}$$

Магнитная индукция B и напряженность магнитного поля H:

$$B_i(r) = H_i(r) + \int_\Omega \chi_{ij}(r, r')\, H_j(r')dr', \tag{2.2}$$

Плотность тока в среде J и напряженность электрического поля E:

$$J_i(r) = \int_\Omega \sigma_{ij}(r, r')\, E_j(r')dr', \tag{2.3}$$

Стоит учесть, что ядра интегральных операторов из этих равенств зависят от разности $|r - r'|$, а область $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ – произвольная область [19].

Принципиальное свойство таких сред, как, например, полупроводники, заключается в том, что нестационарные процессы, наблюдаемые в них, описываются системой уравнений квазистационарного поля, уравнения неразрывности и материальных уравнений. Причем существенным в их описании является явный вид материальных уравнений, связывающих напряженность E и индукцию электрического поля D, с одной стороны, E и плотность тока в полупроводнике J – с другой [26].

Система уравнений в декартовой системе координат в общем случае примет вид

$$div\, D = -4\pi e n, \qquad rot\, E = 0, \qquad D = E + 4\pi P, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = div\, J + Q, \tag{2.5}$$

где P – вектор поляризации,

J – плотность электрического тока в среде,

Q – источники или стоки свободных зарядов (электронов).

В поверхностно – односвязной области Ω можно ввести потенциал φ электрического поля E: $E = -\nabla\varphi$ и потенциал ψ магнитного поля H :

$H = -\nabla\psi$ [25].

Спиновые волны в магнетиках в отсутствие внешнего магнитного поля описываются в квазистационарном приближении системой уравнений:

$$div\, D = 0, \qquad rot\, E = 0, \qquad D = E + 4\pi P, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \gamma[H, M] + R, \tag{2.7}$$

где M – вектор намагниченности,

R – вектор стоков (источников) магнитных доменов.

Данная система (2.6), (2.7) достаточно сложная, поэтому необходимо получить более простую. Сделаем некоторые физические предположения. Представим вектор намагниченности в виде суммы квазистационарного слагаемого $\mathfrak{M}$ и m [21].

$$M = \mathfrak{M} + m, \tag{2.8}$$

причем

$$|m| \ll |\mathfrak{M}|, \left|\frac{\partial m}{\partial t}\right| \gg \left|\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}\right|. \tag{2.9}$$

Тогда уравнение (2.7) представим в виде

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \gamma[H, \mathfrak{M}] + R. \tag{2.10}$$

Относительно величины $\mathfrak{M}$ можно предположить, что она связана с напряженностью магнитного поля H в среде некоторым нелинейным, локальным соотношением

$$\mathfrak{M}_i = \widehat{\chi_{ij}}(H)H_{j,} \tag{2.11}$$

где $\widehat{\chi_{ij}}$ — некоторые нелинейные интегральные операторы.

2.2 Модельные уравнения псевдопараболического типа в магнитных средах с пространственной дисперсией

Рассмотрим случай, когда связь квазистационарной намагниченности $\mathfrak{M}$ с вектором напряженности магнитного поля линейна:

$$\mathfrak{M}_i = a_i H_i. \tag{2.12}$$

Тогда из системы уравнений (2.6), (2.8) – (2.11) в отсутствие пространственной дисперсии и источников либо стоков магнитных доменов (R=0) с помощью известных формул векторного анализа получаем [22]:

$$div\ \frac{\partial m}{\partial t} = \gamma\ div[H, \mathfrak{M}] = -\gamma\ (H, rot\ \mathfrak{M}) = -\gamma\beta_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) -$$

$$-\gamma\beta_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) - \gamma\beta_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right), \tag{2.13}$$

где $\beta_1 = a_2 - a_3$, $\beta_2 = a_3 - a_1$, $\beta_3 = a_1 - a_2$.

Причем, что $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$, и предположим, что $|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| > 0$.

Тогда из этих систем уравнений получим существенно трехмерное уравнение спиновых волн [23]

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\left(\sum_{i=1}^{3}(1+\alpha_1)\frac{\partial^2\psi}{\partial {x^2}_i}\right) +$$

$$+4\pi\gamma\left[\beta_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)\right] = 0, \tag{2.14}$$

где $\alpha_i = 4\pi a_i$.

Преобразуем уравнение и получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \beta_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) = 0 \tag{2.15}$$

3. Групповой анализ модельного уравнения и построение инвариантного решения.

Вычислим алгебру Ли, допускаемую уравнением (2.15). Рассмотрим трехмерное уравнение спиновых волн (2.15).

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \beta_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) = 0\,,$$

где $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$ и $|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| > 0$.

Исключим β_3:

$$\beta_3 = -(\beta_1 + \beta_2) \tag{3.1}$$

Пусть

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z. \tag{3.2}$$

Тогда, подставляя (3.1), (3.2) в (2.15), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}\right) + \beta_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(U_y U_z\right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y}\left(U_x U_z\right) -$$

$$-(\beta_1 + \beta_2)\frac{\partial}{\partial z}\left(U_x U_y\right) = 0. \tag{3.3}$$

Раскрывая скобки, получаем

$$U_{xxt} + U_{yyt} + U_{zzt} + \beta_1\left(U_{xy}U_z + U_y U_{xz}\right) + \beta_2\left(U_{xy}U_z + U_x U_{yz}\right) -$$

$$-(\beta_1 + \beta_2)\left(U_{xz}U_y + U_x U_{yz}\right) = 0. \tag{3.4}$$

Упрощая уравнение, имеем

$$U_{xxt} + U_{yyt} + U_{zzt} + (\beta_1 + \beta_2)U_z U_{xy} - \beta_2 U_y U_{xz} - \beta_1 U_x U_{yz} = 0. \tag{3.5}$$

Расчет симметрий по стандартному алгоритму Ли – Овсянникова с применением специализированного математического пакета GeM [27] приводит к выводу, что уравнение (3.5), эквивалентное уравнению (2.15), допускает алгебру Ли с генераторами (см. Приложение А):

$$X_1 = \partial_x \tag{3.6}$$

$$X_2 = \partial_y \tag{3.7}$$

$$X_3 = \partial_z \tag{3.8}$$

$$X_4 = \partial_t \tag{3.9}$$

$$X_5 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z \tag{3.10}$$

$$X_6 = u\partial_u + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z \tag{3.11}$$

$$X_\infty = F_2(t)\partial_u, \tag{3.12}$$

где $F_2(t)$ – произвольная функция.

Генераторы X_1, X_2, X_3, X_4 соответствуют трансляциям, X_5, X_6 – растяжениям, X_∞ - калибровочному преобразованию.

Если $F_2(t) = 1,$ то $X_\infty \to X_7 = \partial_u$.

Далее рассмотрим инвариантное решение, порождаемое генератором X_6. Найдем базисные инварианты. Запишем уравнение характеристик:

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \tag{3.13}$$

Интегрируя систему (3.13), получим базисные инварианты:

$$\frac{u}{x}, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, t$$

Следовательно, решение будем искать в виде:

$$U(x, y, z) = xf(a, b, t), \tag{3.14}$$

где $a = \frac{y}{x}$, $\quad b = \frac{z}{x}$

Подставляя (3.14) в (3.5), получим уравнение:

$$(a^2+1)f_{aat}+(b^2+1)f_{bbt}-\left[(\beta_1+\beta_2)\big((a+1)f_a+af_{aa}+bf_{\alpha b}\big)f_b+\beta_2(af_{ab}+bf_{bb})f_a-\beta_1(f-af_a-bf_b)f_{ab}\right]=0. \qquad (3.15)$$

Рассмотрим стационарное решение данного уравнения (нет зависимости от времени t). В этом случае уравнение (3.15) имеет вид:

$$-\left[(\beta_1+\beta_2)\big((a+1)f_a+af_{aa}+bf_{\alpha b}\big)f_b+\beta_2(af_{ab}+bf_{bb})f_a-\beta_1(f-af_a-bf_b)f_{ab}\right]=0. \qquad (3.16)$$

Уравнение (3.16) допускает в свою очередь двумерную алгебру Ли с генераторами

$$X_1=f\partial_f,$$

$$X_2=b\partial_b.$$

Иными словами, уравнение (3.16) допускает группы растяжений по переменным f и b.

Рассмотрим инвариантное решение, порождаемое генератором X_1+X_2.

В этом случае уравнение однородно по переменным f и b.

Следовательно, функцию $f(a,b)$ можно искать в виде

$$f(a,b)=b\varphi(a) \qquad (3.17)$$

Тогда уравнение (3.16) преобразуется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-(\beta_1+\beta_2)\big((a+1)\varphi_a+a\varphi_{aa}+\varphi_\alpha\big)\varphi+\beta_2 a{\varphi_a}^2+\beta_1 a{\varphi_a}^2=0 \qquad (3.18)$$

Раскрыв скобки и упростив, получим

$$-a\varphi\varphi_{aa}+\varphi{\varphi_a}^2-(\alpha+2)\varphi\varphi_a=0 \qquad (3.19)$$

Уравнение (3.19) допускает максимально возможную для обыкновенного дифференциального уравнения II-го порядка восьмимерную алгебру Ли, которую ввиду громоздкости выражения мы не приводим. Следовательно, уравнение (3.19) может быть проинтегрировано в квадратурах путем перехода к каноническим переменным [25], для чего рассмотрим двумерную подалгебру, натянутую на генераторы $X_1 = x^2 e^x \partial_x$ и $X_2 = u\partial_u$.

Тогда новая переменная

$$T = \int \frac{da}{a^2 e^a} \tag{3.20}$$

Следовательно

$$\varphi_a = \varphi_T \frac{1}{a^2 e^a} \tag{3.21}$$

$$\varphi_{aa} = \varphi_{TT} \frac{1}{(a^2 e^a)^2} - \varphi_t \frac{2ae^a + a^2 e^a}{(a^2 e^a)^2} \tag{3.22}$$

Подставляя значения φ_a, φ_{aa} и упрощая, получим

$$-\varphi\varphi_{TT} + {\varphi_T}^2 = 0 \tag{3.23}$$

Пусть $\varphi_T = F(\varphi)$, $\varphi_{TT} = \frac{dF}{d\varphi} F$.

Тогда

$$-\varphi \frac{dF}{d\varphi} F + F^2 = 0$$

Или

$$\ln F = \ln \varphi + \ln C_1$$

То есть

$$F = C_1 \varphi = \frac{d\varphi}{dT}$$

Значит

$$\ln\varphi = C_1 T + C_2$$

$$\varphi = Ae^{BT},$$

где A, B – постоянные интегрирования.

Тогда, переходя к исходным переменным (x,y,z), окончательно получим инвариантное решение для стационарного распределения потенциала магнитного поля в среде:

$$U(x, y, z) = Aze^{B\int\frac{da}{a^2e^a}}, \tag{3.24}$$

где $a = \frac{y}{x}$.

Графики зависимости $U(x, y, z)$ приведены на рисунках 1, 2, 3. Графики зависимости плотности энергии магнитного поля $H^2(x, y, z)$ $(H = -\nabla U)$ Приведены на рисунках 4, 5, 6.

Заметим, что “материальные константы” $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ не входят в решение (3.24). Следовательно, данное распределение магнитного поля возможно при любых значениях физических характеристик среды.

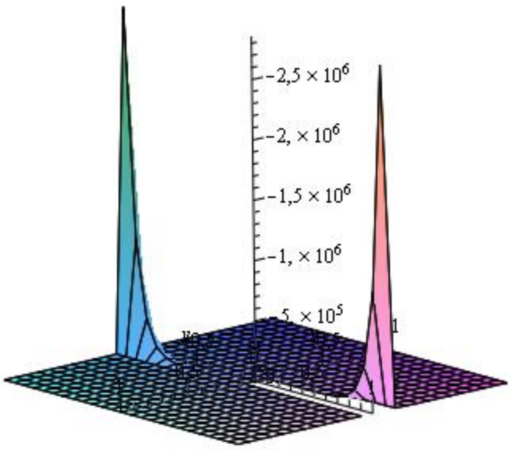


Рис. 1. График зависимости потенциала магнитного поля при z=1 в интервале

по осям X и Y от -1 до 1

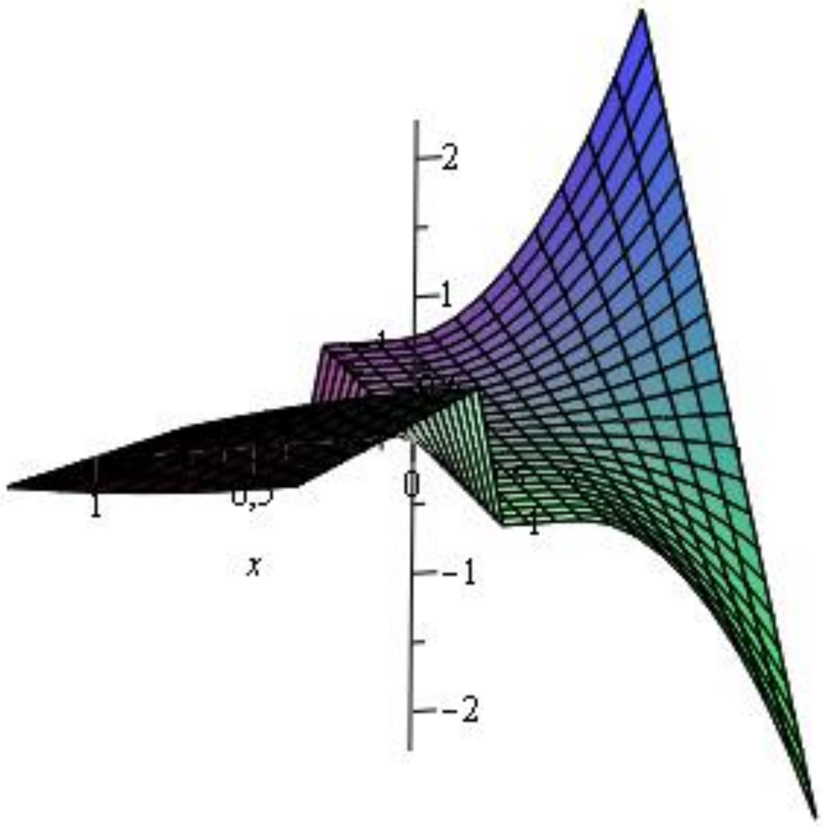
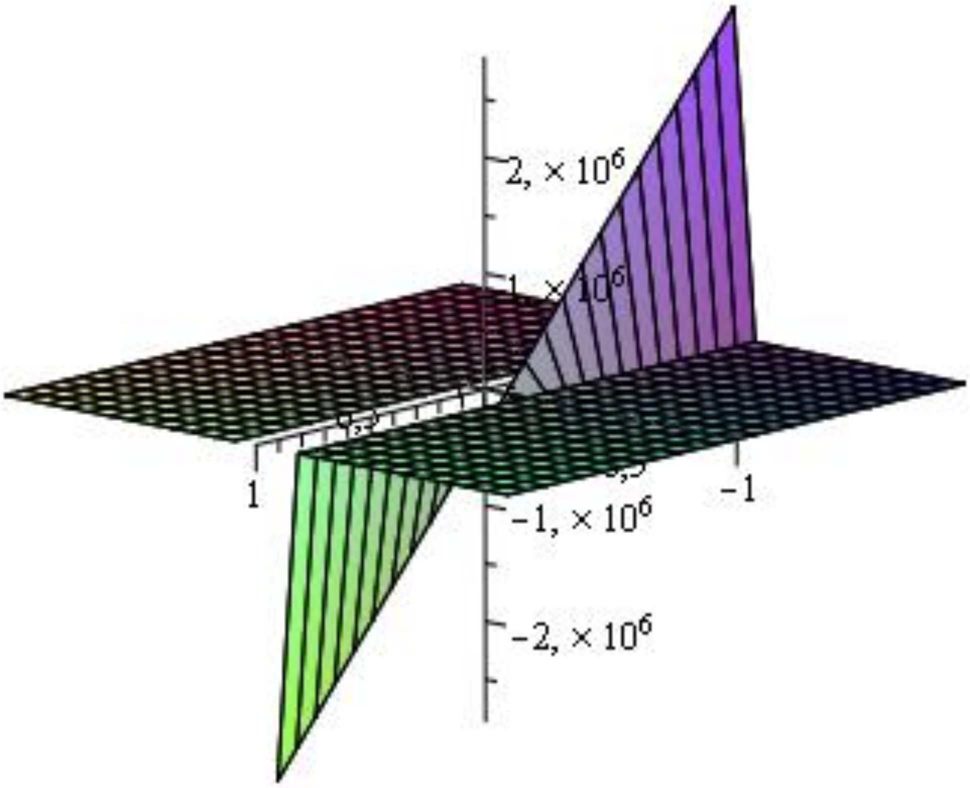


Рис. 2. График зависимости потенциала магнитного поля при y = 1 в интервале

по осям X и Z от -1 до 1



Ри

с. 3. График зависимости потенциала магнитного поля при x = 1 в интервале

по осям Y и Z от -1 до 1

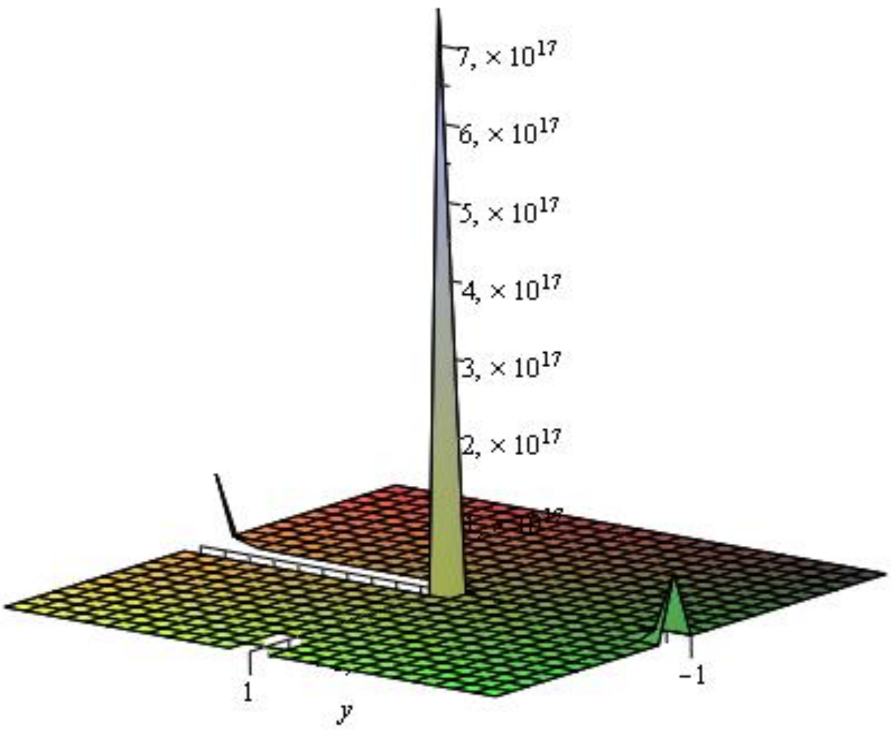


Рис. 4. График зависимости плотности энергии при z = 1 в интервале по осям X и Y от -1 до 1

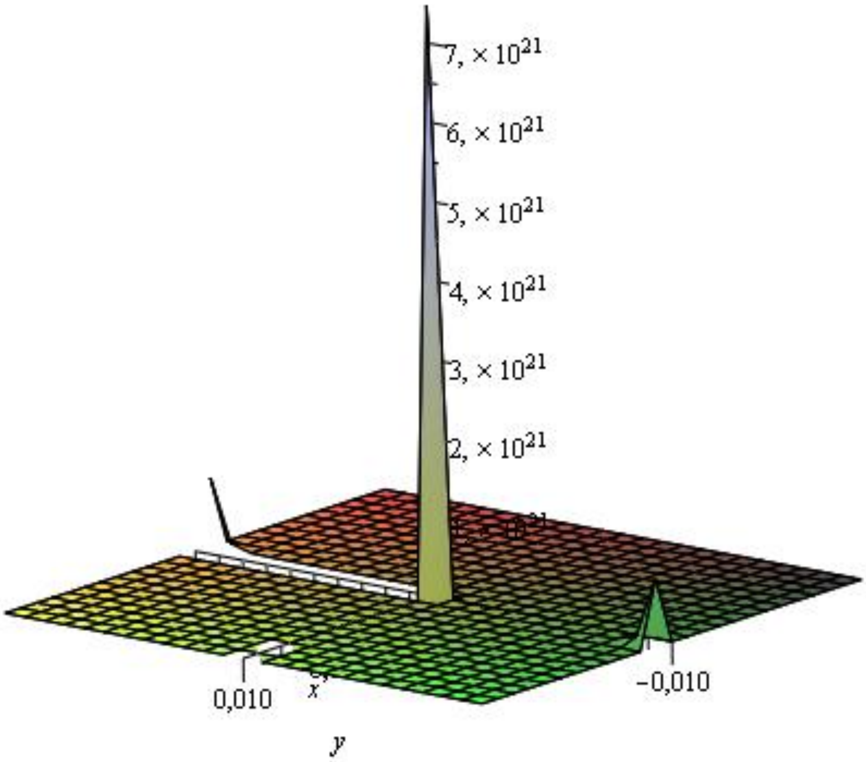


Рис. 5. График зависимости плотности энергии при z = 1 в интервале по осям X и Y от -0,01 до 0,01

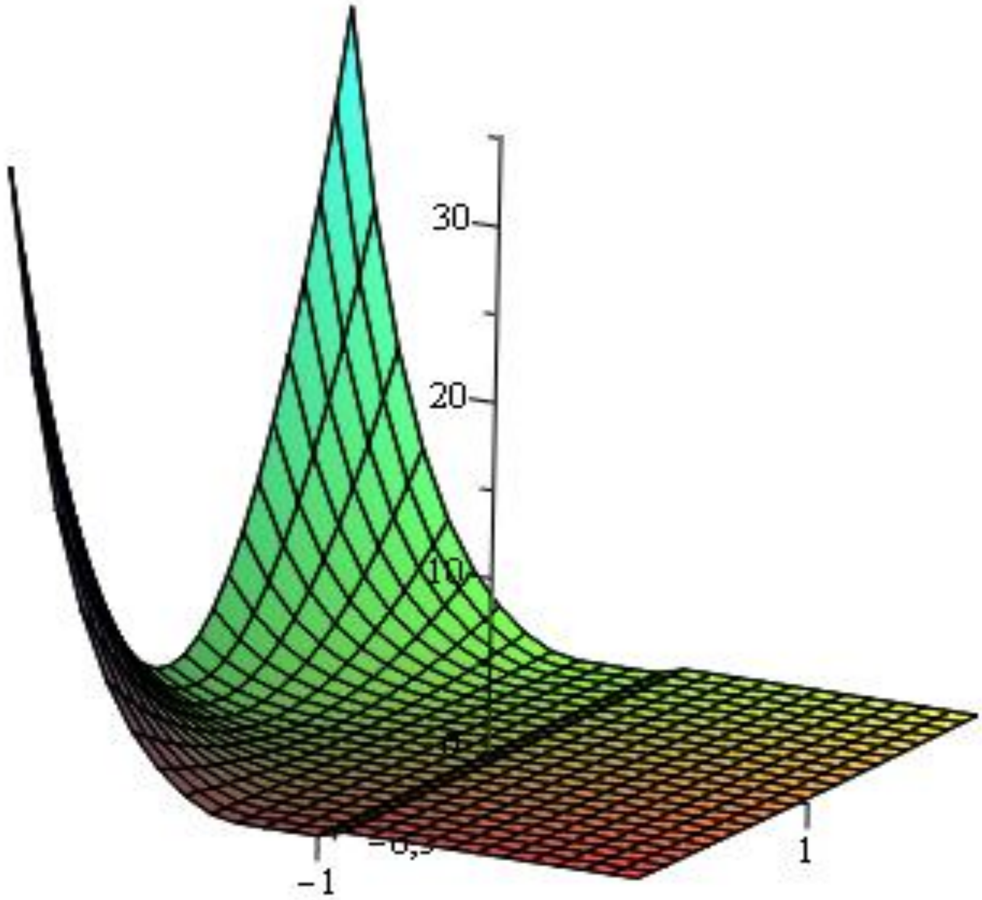


Рис. 6. График зависимости плотности энергии при y = 1 в интервале по осям X и Z от -1 до 1

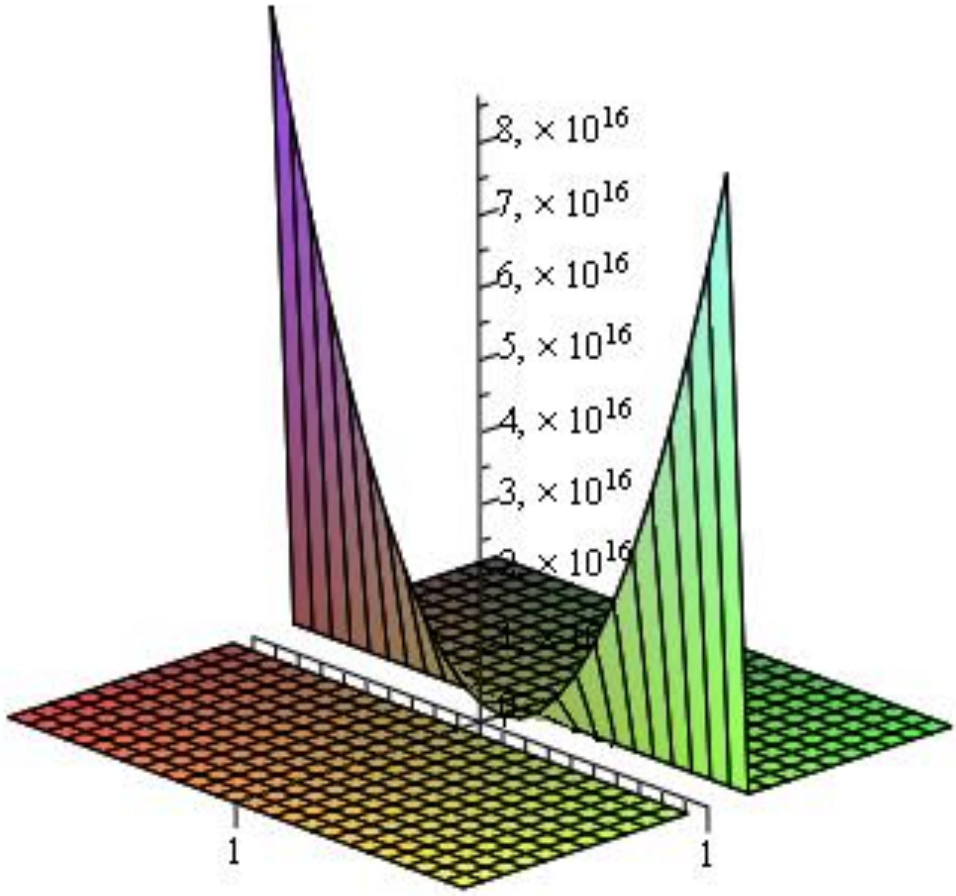


Рис. 4. График зависимости плотности энергии при x = 1 в интервале по осям Y и Z от -1 до 1

Мы видим, что пространственные распределения магнитного поля и плотности энергии поля содержат сингулярности. Это означает, что рассматриваемая модель, построенная в рамках электродинамики сплошных сред, на малых масштабах (порядка атомных) не применима. На макроскопических масштабах распределение магнитного поля обладает свойством перемежаемости, то есть концентрации поля с большим значением напряженности в малых областях пространства, в то время как в остальных областях пространства напряженность поля на много порядков меньше. Перемежаемость – характерное свойство многих макроскопических моделей, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. На атомных масштабах необходимо построение микроскопической модели, что является предметом дальнейших исследований.

Библиографический список

1. Ахиезер А. И . Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. М. Наука, 1967
2. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. — М.: Физматлит, 1994. — 464 с
3. Гуревич А.Г. Спиновые волны. — Русский переплет, 1997 — 9 с
4. Дедух Л. М., Кабанов Ю. /7., Никитенко В. И./ ЖЭТФ. 1990. Т. 97. № 2. С. 570.
5. Вонсовский С. В. Магнетизм. М.: Наука, 1971. — 1033 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел. Собрание трудов в 2 т. Под ред. Е. М Лифшица. М.: Наука, 1969 Т. 1. С 128
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. 5-е изд., стереотип. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 224 с.
8. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Статистическая физика. Часть 1: Учебное пособие для вузов. — М.: Физматлит, 2010. — 616 с.
9. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М., 2005. — («Теоретическая физика», том VIII)
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — Издание 5-е, стереотипное. — М.: Физматлит, 2007. — 259 с.
11. Львов В. С., Нелинейные спиновые волны, М., 1987 - 381
12. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.
13. Вашковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П. Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1993
14. Иванов Б. А., Ковалев А. С., Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны, К., 1983

15. Уайт Р., Квантовая теория магнетизма, пер. с англ., 2 изд., М., 1985

16. Мелков Г. А., Шолом С. В.//ЖТФ. 1990. Т. 60. № 8. С. 118.

17. Ожогин В. И., Фарзетдинова Р. М,, Михайлов А. С. ЦЖЭТФ. 1990. Т. 97. № 3. С. 863.

18. Зильберман П. £., Голубева Н С., Темирязев А. Г.ЦЖЭТФ. 1990. Т. 97. № 2. С. 634

19. Барышев Д. А., Вашковский А. В. Гречушкин К. В., Стазьмахов А. В.Ц Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. № 3. С. 5.

20. Барьяхтар В. Г., Богданов А. И., Яблонский Д. А.ЦУФН. 1988. Т. 156. № 1. С. 47.

21. Головин С. В., Чесноков А. А. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2009. - 119 с

22. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. ФИЗМАТЛИТ Москва 2007. - 736 с.

23. П. Оливер Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям М: Мир, 1989. – 639 с.

24. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности, Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2007. - 421с.

25. Chipot, M., Fila, M., and Quittner, P.. "Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions.." Acta Mathematica Universitatis Comenianae. New Series 60.1, 1991. – P. 35-103.

26. A. Eden, V. K. Kalantarov “On global behavior of solutions to an inverse problem for semi-linear hyperbolic equations”. J. math. analys. appl., 2005. – V. 307. – P. 120-133.

27. Shevyakov A.F. Symbolic Computation of Local Symmetries of Non-linear and Linear Partial and Ordinary Differential Equations, Math. Comput. Sci., 2010; 4, pp. 203-222.

Приложение А

Основные понятия группового анализа.

1.1 Локальная группа Ли. Оператор группы

Преобразования

$$\bar{q} = f(q, a), \tag{1}$$

при помощи которых точка $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ евклидова пространства

$\mathbb{R}^n(q \in R^n)$ переводится в новое положение $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n)$ того же пространства $\mathbb{R}^n$, а непрерывный параметр a принадлежит односвязному вещественному множеству a ∈ R, образуют локальную группу С. Ли G, в том и только в том случае, если выполнены следующие три аксиомы:

1) аксиома замыкания:

любые два последовательно приведенные преобразования (1)

$$\bar{q} = f(q, a); \quad \bar{q} = f(\bar{q}, b)$$

Могут быть заменены одним преобразованием (1)

$$\bar{q} = f(q, c)$$

в котором

$$c = \varphi(a, b) \tag{2}$$

- закон преобразования параметра $(a, b, c \in R$; существенно, что этот закон не может содержать координаты q);

2) аксиома тождественности:

существует единственное значение $a_0 \in R$, при котором любая точка q остается на месте, то есть выполняется условие

$$\bar{q} = f(q, a_0). \tag{3}$$

Закон преобразования параметра удовлетворяет условиям
$\varphi(a, b_0) = a;\ \varphi(a_0, b) = b$. Кроме того, выполнение аксиомы замыкания предполагается лишь в области параметров, достаточно близких к их значениям при тождественном преобразовании (локально);

3) аксиома инверсии:

существует единственное значение параметра $a_{-1} \in R$, которое соответствует возвращению точки $\bar{q}$ в точку q, что означает выполнение условия

$$\bar{q} = |f(\bar{q}, a_{-1}). \tag{4}$$

Последовательное проведение преобразований (1) и (4) в любом порядке эквивалентно тождественному преобразованию (3).

Функция f(q,f) в преобразованиях (1), а ток же функция $\varphi(a, b)$ (2) являются гладкими (функциями класса C^∞). Последнее условие может быть ослаблено: достаточно чтобы функции принадлежали классу C^3.

Разложим функцию $\bar{q} = f(q, a)$ (1) в ряд Тейлора по параметру a в малой окрестности тождественного преобразования (3). Для каждой координаты $q_i (i = 1, \dots, n)$ имеем:

$$\bar{q}_i = q_i + \left.\frac{\partial f_i(q, a)}{\partial a}\right|_{a=a_0} \Delta a + \frac{1}{2!} \left.\frac{\partial^2 f_i(q, a)}{\partial a^2}\right|_{a=a_0} \Delta a^2 + \dots$$

Существенным элементом этого разложения является слагаемое, линейное относительно Δa.

Величина

$$\xi_i(q) = \frac{\partial f_i(q,a)}{\partial a}\Big|_{a=a_0} \tag{6}$$

есть компонента вектора, касательного к кривой, описываемое точками $\bar{q}$ при фиксированном $\bar{q}$ преобразования группы Ли G (1) в малой окрестности тождественного преобразования (3).

Компоненты вектора $\xi(q)$

$$\xi(q) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

называют инфинитезималями.

Определение 1. Инфинитезимальным оператором[3] преобразования (1) называется дифференциальный оператор

$$X = \xi(q)\,\partial_q \tag{7}$$

или в более подробной записи

$$X = \xi_1(q)\,\partial_{q_1} + \xi_2(q)\,\partial_{q_2} + \dots + \xi_n(q)\,\partial_{q_n}$$

(принято обозначение $\partial_{q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}, i = 1, \dots, n$).

1.2 Уравнения С. Ли

Теорема 1. Пусть преобразования локальной однопараметрической группы G (1) $\bar{q}$ имеет канонический закон преобразования параметра (5). Тогда эти преобразования являются решением следующей задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений Ли):

$$\frac{\partial f}{da} = \xi(f); \quad f|_{a=0} = q. \tag{8}$$

Верно и обратное утверждение: векторное поле $\xi(q)$, являющееся решением задачи Коши (8) (в предположении, что решение существует и единственно), удовлетворяет групповому свойству

$$f(f(q,a),b) = f(q,a+b).$$

Определение 2. Инвариантом группы преобразований G (1) $\bar{q} = f(q,a)$ называют функцию I(q), которая не изменятся при этих преобразованиях. Это означает, что при любых допустимых значениях q и a выполняется условие

$$I(\bar{q}) = I\big(f(q,a)\big) = I(q). \tag{9}$$

Теорема 2. Функция I(q) является инвариантом группы G (1) тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$XI = \xi(q)\,\partial_q I = 0. \tag{10}$$

В более подробной записи имеем:

$$XI = \xi_1(q)\,\partial_{q_1} I + \xi_2(q)\,\partial_{q_2} I + \cdots + \xi_n(q)\,\partial_{q_n} I = 0. \tag{11}$$

Полученному линейному уравнению в частных производных первого порядка (ЧДУ-1) (11) соответствуют уравнения характеристик

$$\frac{dq_1}{\xi_1} = \frac{dq_2}{\xi_2} = \cdots = \frac{dq_n}{\xi_n}. \quad (12)$$

Константы интегрирования этих n – 1 уравнений являются функционально независимыми инвариантами $I_i(q), (i, \dots, n-1)$. Любые другие инварианты функционально зависят от базовых инвариантов $I_i(q)$. Общий инвариант является функцией базовых инвариантов и имеет вид

$$F\big(I_1(q), I_2(q), \dots, I_{n-1}(q)\big).$$

Определение 3. Инвариантное семейство группы преобразований (1) q=f(q,a) определяется функциями J(q), которые удовлетворяют условию

$$XJ = \xi(q)\,\partial_q = \Phi(J). \quad (13)$$

1.3 Канонические переменные

При групповом анализе дифференциальных уравнений нередко используется операций выпрямления векторного поля. При этом исходный оператор

$$X = \xi_1(q)\,\partial_{q_i}, \qquad i = 1, \dots, n$$

с помощью замены переменных

$$(q_1, q_2, \dots, q_n) \to (t, u_1, \dots, u_{n-1})$$

в малой окрестности тождественного преобразования превращается в оператор трансляции вдоль одной из новых координат: $\widetilde{X} = \partial_t$, и соответствующее векторное поле приобретает простейший вид $\tilde{\xi}(1,0, \dots ,0)$. При переходе к новым переменным инфинитезимальный оператор преобразуется следующим образом:

$$\widetilde{X} = X(t)\,\partial_t + X(u)\,\partial_u. \tag{15}$$

При вычислении $\widetilde{X}$ использовано свойство оператора X: $Xq_i = \xi_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Теорема 3 (теорема о выпрямлении векторного поля). Для выпрямления векторного поля локальной группы G (1) в пространстве $\mathbb{R}^n$ в качестве новых переменных достаточно использовать элемент инвариантного семейства (14) и n-1 инвариант группы, то есть функции, удовлетворяющие условию (10)

$$X(t) = 1, \quad X(u) = 0. \tag{16}$$

Полученная система двух уравнений в частных производных (16) эквивалента системе n ОДУ-1:

$$\frac{dq_1}{\xi_1(q)} = \frac{dq_2}{\xi_2(q)} = \dots = \frac{dq_n}{\xi_n(q)} = dt, \tag{17}$$

1.4 Алгебры Ли и многопараметрические группы. Коммутатор операторов.

Определение 4. Коммутатором двух операторов $X_1 = \xi_q(q)\,\partial_q$ и $X_2 = \xi_2(q)\,\partial_q$ называют бинарную операцию

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1. \quad (18)$$

При вычислении коммутатора $[X_1, X_2]$ (18) удобно использовать формулу

$$[X_1, X_2] = (X_1\xi_2 - X_2\xi_1)\,\partial_q.$$

Коммутатор двух линейных дифференциальных операторов первого порядка – оператор того же типа. Из определения коммутатора следуют его свойства:

- билинейность:

$$[cX_1, X_2] = [X_1, cX_2] = c[X_1, X_2], \quad c = const;$$

$$[X_1 + X_2, X_3] = [X_1, X_3] + [X_2, X_3]$$

$$[X_1, X_2 + X_3] = [X_1, X_2] + [X_1, X_3]$$

-антисимметричность

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1];$$

-тождество Якоби:

$$\big[X_1, [X_2, X_3]\big] + \big[X_2, [X_3, X_1]\big] + \big[X_3, [X_1, X_2]\big] = 0.$$

Определение 5. Операторы $X_1, X_2, \dots, X_r$ образуют алгебру Ли L_r, представляющую собой векторное линейное пространство, порожденное этими операторами $X_i, X_j \ni L_r$ $(i, j = 1, \dots, r)$ и всей совокупностью их коммутаторов $[X_i, X_j]$ (18).

Теорема 4. Векторное пространство L_r с базисом $X_1, X_2, \ldots, X_r$ образует алгебру Ли G в томи только в том случае, если и только если коммутаторы базисных операторов принадлежат L_r, т.е. выполнено условие

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$$

(структурные константы c_{ij}^k являются вещественными числами и образуют тензор третьего ранга).

Заключение

1) Впервые проведен теоретико-групповой анализ нового модельного уравнения спиновых волн в магнитных средах с пространственной дисперсией. Вычислена алгебра Ли, допускаемая изучаемым уравнением.
2) Установлено, что новое модельное уравнение допускает группы трансляций, растяжений, а также калибровочное преобразование зависимой переменной.
3) Получено новое автомодельное решение, описывающее стационарное распределение магнитного поля в среде. Установлено, что данное стационарное распределение обладает свойством перемежаемости, то есть концентрации сверхсильного поля в малых областях пространства.