

# ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОТНОСТЕЙ, ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА МЕЖДУ СЛОЯМИ И УРОВНЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ В РЕЗЕРВУАРЕ

*Е.Н. Абросимов, А.Л. Шестаков*

## MEASUREMENT OF THE DENSITIES, THE INTERFACE BETWEEN LAYERS AND THE LEVEL OF TWO-LAYER LIQUID IN THE TANK

*E.N. Abrosimov, A.L. Shestakov*

Предлагается метод измерения плотностей, положения границы раздела между слоями и уровня двухслойной жидкости, основанный на применении движущейся штанги с закрепленными на ней двумя датчиками давления, которые находятся в разных слоях жидкости. Приводятся результаты моделирования предлагаемого метода измерения.

*Ключевые слова:* измерение плотности, измерение уровня, определение положения границы между слоями.

The article proposes a method of measuring densities, interface position between layers and level of two-layer liquid, based on application of moving rod with two pressure sensors, which fixed on rod. Simulation results of the proposed measurement method are given.

*Keywords:* density measurement, level measurement, position estimation of interface between layers.

### Введение

Повышение Задача измерения уровня и плотности жидкости широко распространена в различных технологических приложениях. Существует большое количество методов решения этой задачи [1]. Однако в некоторых технологических процессах (отстой товарной воды в нефтехранилищах, пенная сепарация) возникает задача измерения уровня и плотности жидкости, состоящей из двух слоев.

В таких случаях большинство существующих подходов к измерению уровня и плотности являются непригодными, так как не могут обеспечить контроль всех параметров, а только, как правило, одного – или плотности [2], или уровня [3, 4], или границы раздела слоев [5].

В связи с вышеизложенным возникает задача рассмотрения иных подходов к измерению параметров двухслойной среды, позволяющих достичь измерения как плотностей слоев жидкости, так и уровня жидкости и положения границы раздела между слоями.

Наиболее широкое применение для измерения как плотности, так и уровня жидкостей получили гидростатические датчики давления. В данной статье

предлагается способ измерения, в основе которого лежит применение датчиков давления, и алгоритм обработки данных, получаемых с этих датчиков.

### 1. Описание способа

Рассмотрим открытый резервуар, в котором находится двухслойная жидкость, плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$  слоев которой различаются существенно, то есть имеется ярко выраженная граница раздела между слоями (рис. 1).

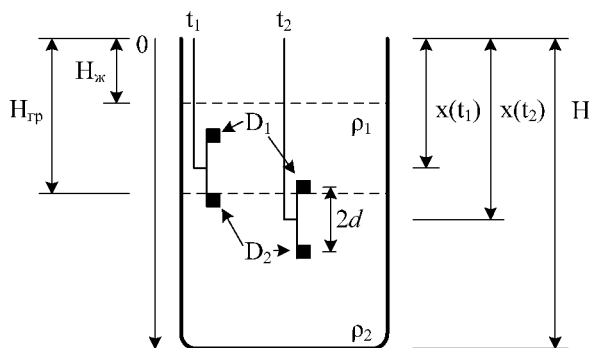


Рис. 1. Резервуар с датчиками давления на штанге

Абросимов Евгений Николаевич – ассистент кафедры информационно-измерительной техники, Южно-Уральский государственный университет; abrosimov@imit.susu.ac.ru

Шестаков Александр Леонидович – д-р техн. наук, профессор, ректор, Южно-Уральский государственный университет; admin@urc.ac.ru

Abrosimov Evgeniy Nikolaevich – assistant lecturer of the Equipment for information and measuring department of South Ural State University; abrosimov@imit.susu.ac.ru

Shestakov Aleksandr Leonidovich – PhD, professor, rector of South Ural State University; admin@urc.ac.ru

Для измерения плотности слоя жидкости применяют дифференциальный метод с двумя приемниками давления, расположенными на разной глубине. Это позволяет исключить влияние на точность измерения колебаний уровня жидкости. Тогда для измерения плотности двух слоев жидкости необходимо использовать четыре датчика давления, по два датчика на слой. Однако число датчиков можно сократить вдвое, если закрепить их не на резервуаре, а на движущейся штанге так, что датчики окажутся в разных слоях.

Опустим в резервуар штангу, на которой на расстоянии  $2d$  закреплены два датчика давления  $D_1$  и  $D_2$ , находящиеся в разных слоях жидкости. Будем считать, что штанга движется по известному закону  $x(t)$ . Примем, что начало координат находится в верхней граничной плоскости резервуара.

Поставим задачу: по показаниям датчиков давления определить плотности слоев  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , положение границы раздела между слоями  $H_{гр}$  и общий уровень двухслойной жидкости  $H_{ж}$ .

Рассмотрим два момента времени  $-t_1$  и  $t_2$ . Давление  $P_1$ , измеряемое датчиком  $D_1$ , и давление  $P_2$ , измеряемое датчиком  $D_2$ , в эти моменты времени определим следующим образом:

$$\begin{cases} P_1(t_1) = \rho_1 g(x(t_1) - d - H_{ж}) + P_{атм}; \\ P_1(t_2) = \rho_1 g(x(t_2) - d - H_{ж}) + P_{атм}; \\ P_2(t_1) = \rho_2 g(x(t_1) + d - H_{гр}) + \\ + \rho_1 g(H_{гр} - H_{ж}) + P_{атм}; \\ P_2(t_2) = \rho_2 g(x(t_2) + d - H_{гр}) + \\ + \rho_1 g(H_{гр} - H_{ж}) + P_{атм}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho_1$  – плотность верхнего слоя;  $\rho_2$  – плотность нижнего слоя;  $g$  – ускорение свободного падения;  $P_{атм}$  – атмосферное давление.

Вычтем из второго уравнения системы (1) первое:

$$P_1(t_2) - P_1(t_1) = \rho_1 g[(x(t_2) - d - H_{ж}) - (x(t_1) - d - H_{ж})],$$

отсюда

$$\rho_1 = \frac{P_1(t_2) - P_1(t_1)}{g[x(t_2) - x(t_1)]}. \quad (2)$$

Вычтем из четвертого уравнения системы (1) третье:

$$P_2(t_2) - P_2(t_1) = \rho_2 g[(x(t_2) + d - H_{гр}) - (x(t_1) + d - H_{гр})],$$

отсюда

$$\rho_2 = \frac{P_2(t_2) - P_2(t_1)}{g[x(t_2) - x(t_1)]}. \quad (3)$$

Из первого и второго уравнений системы (1) получим выражения, которые определяют уровень двухслойной жидкости:

$$H_{ж} = (x(t_1) - d) - \frac{P_1(t_1) - P_{атм}}{\rho_1 g} = (x(t_2) - d) - \frac{P_1(t_2) - P_{атм}}{\rho_1 g}. \quad (4)$$

Для определения положения границы раздела между слоями перепишем 3-е и 4-е выражения из системы (1) в виде:

$$\begin{cases} P_2(t_1) = \rho_2 g(x(t_1) + d - H_{гр}) + \\ + \rho_1 g(H_{гр} - (x(t_1) - d)) + P_1(t_1); \\ P_2(t_2) = \rho_2 g(x(t_2) + d - H_{гр}) + \\ + \rho_1 g(H_{гр} - (x(t_2) - d)) + P_1(t_2). \end{cases} \quad (5)$$

Из системы (5) получим

$$H_{гр} = x(t_1) + d \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} - \frac{P_2(t_1) - P_1(t_1)}{g(\rho_2 - \rho_1)} = x(t_2) + d \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} - \frac{P_2(t_2) - P_1(t_2)}{g(\rho_2 - \rho_1)}. \quad (6)$$

Таким образом, получили выражения для всех четырех искоемых параметров двухслойной жидкости.

## 2. Оценка погрешностей

Будем считать, что в системе, изображенной на рис. 1, измерение давления происходит с погрешностью  $\xi_{P_i}$ :

$$P_1 = P_{1и} + \xi_{P_1}, P_2 = P_{2и} + \xi_{P_2}, \quad (7)$$

где  $P_{1и}$  и  $P_{2и}$  – истинные значения давления датчиков  $D_1$  и  $D_2$ , а  $\xi_{P_1}$  и  $\xi_{P_2}$  – полные погрешности измерения соответствующих давлений.

Оценим погрешности измерения плотностей  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , уровня  $H_{ж}$  двухслойной жидкости и положения границы раздела  $H_{гр}$  через погрешности измерения датчиков давления  $\xi_{P_1}$  и  $\xi_{P_2}$ . Атмосферное давление  $P_{атм}$  будем считать постоянной известной величиной.

Так как выражения (2) и (3) линейны относительно измеряемых параметров, то согласно [6] среднеквадратические отклонения результатов косвенных измерений плотностей при линейной зависимости плотности от давления определятся следующим образом:

$$\sigma_{\rho_1} = \frac{1}{g(x(t_2) - x(t_1))} \sqrt{(\sigma_{P_1(t_2)}^2 + \sigma_{P_1(t_1)}^2)}; \quad (8)$$

$$\sigma_{\rho_2} = \frac{1}{g(x(t_2) - x(t_1))} \sqrt{(\sigma_{P_2(t_2)}^2 + \sigma_{P_2(t_1)}^2)},$$

где  $\sigma$  – это среднеквадратическое отклонение величины, обозначенной нижним индексом.

Но  $\sigma_{P_1(t_2)}^2 = \sigma_{P_1(t_1)}^2$  и  $\sigma_{P_2(t_2)}^2 = \sigma_{P_2(t_1)}^2$ , так как это дисперсии датчиков давления в разные моменты времени, тогда можно записать:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_1} &= \sigma_{P_1} \sqrt{2} \frac{1}{g(x(t_2) - x(t_1))}; \\ \sigma_{\rho_2} &= \sigma_{P_2} \sqrt{2} \frac{1}{g(x(t_2) - x(t_1))}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из выражений (9) можно заключить, что на величину погрешности будет оказывать влияние расстояние, пройденное штангой в интервале времени  $[t_1; t_2]$ .

Для оценки погрешности измерения общего уровня  $H_{ж}$  двухслойной жидкости перепишем выражение (4), подставив в него значение для  $\rho_1$ :

$$H_{ж} = (x(t_2) - d) - \frac{P_1(t_2) - P_{атм}}{P_1(t_2) - P_1(t_1)} (x(t_2) - x(t_1)). \quad (10)$$

Так как выражение (10) нелинейно относительно измеряемых параметров, то согласно [6]

для оценки  $H_{ж}$  применим метод линеаризации, который предполагает разложение нелинейной функции в ряд Тейлора:

$$f(a_1, \dots, a_m) = f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial a_i} \Delta a_i + R,$$

где  $f(a_1, \dots, a_m)$  – нелинейная функциональная зависимость измеряемой величины  $f$  от измеренных аргументов  $a_i$ ;  $\frac{\partial f}{\partial a_i}$  – первая производная от функции  $f$  по аргументу  $a_i$ , вычисленная в точках  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m$ ;  $R = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_j} \Delta a_i \Delta a_j$  – остаточный член, которым можно пренебречь.

Тогда среднеквадратическое отклонение погрешности измерения общего уровня двухслойной жидкости определится следующим образом:

$$\sigma_{H_{ж}} = \sqrt{\left(\frac{\partial H_{ж}}{\partial P_1(t_1)}\right)^2 \sigma_{P_1(t_1)}^2 + \left(\frac{\partial H_{ж}}{\partial P_1(t_2)}\right)^2 \sigma_{P_1(t_2)}^2}. \quad (11)$$

При этом

$$\frac{\partial H_{ж}}{\partial P_1(t_1)} = -(x(t_2) - x(t_1)) \frac{P_1(t_2) - P_{атм}}{(P_1(t_2) - P_1(t_1))^2},$$

$$\frac{\partial H_{ж}}{\partial P_1(t_2)} = (x(t_2) - x(t_1)) \frac{P_1(t_1) - P_{атм}}{(P_1(t_2) - P_1(t_1))^2},$$

отсюда

$$\sigma_{H_{ж}} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{(P_1(t_2) - P_1(t_1))^2} \times \left[ (P_1(t_1) - P_{атм})^2 \sigma_{P_1(t_2)}^2 + (P_1(t_2) - P_{атм})^2 \sigma_{P_1(t_1)}^2 \right]^{1/2}. \quad (12)$$

Тогда, так как  $\sigma_{P_1(t_2)}^2 = \sigma_{P_1(t_1)}^2$ , выражение (12) примет вид

$$\sigma_{H_{ж}} = \sigma_{P_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{(P_1(t_2) - P_1(t_1))^2} \times \sqrt{(P_1(t_1) - P_{атм})^2 + (P_1(t_2) - P_{атм})^2}. \quad (13)$$

Для оценки погрешности определения положения границы раздела  $H_{гп}$  перепишем выражение (6), подставив в него значения для  $\rho_1$  и  $\rho_2$ :

$$H_{гп} = x(t_2) + d \frac{P_2(t_2) - P_2(t_1) + P_1(t_2) - P_1(t_1)}{P_2(t_2) - P_2(t_1) - P_1(t_2) + P_1(t_1)} - \frac{P_2(t_2) - P_1(t_2)}{P_2(t_2) - P_2(t_1) - P_1(t_2) + P_1(t_1)} (x(t_2) - x(t_1)). \quad (14)$$

По аналогии с рассуждениями для оценки погрешности измерения  $H_{ж}$  среднеквадратическое отклонение погрешности определения положения границы раздела  $H_{гп}$  определится выражением

$$\sigma_{H_{гп}} = \left[ \left(\frac{\partial H_{гп}}{\partial P_1(t_1)}\right)^2 \sigma_{P_1(t_1)}^2 + \left(\frac{\partial H_{гп}}{\partial P_1(t_2)}\right)^2 \sigma_{P_1(t_2)}^2 + \left(\frac{\partial H_{гп}}{\partial P_2(t_1)}\right)^2 \sigma_{P_2(t_1)}^2 + \left(\frac{\partial H_{гп}}{\partial P_2(t_2)}\right)^2 \sigma_{P_2(t_2)}^2 \right]^{1/2}. \quad (15)$$

При этом

$$\frac{\partial H_{гп}}{\partial P_1(t_1)} = \frac{(x(t_2) - x(t_1))(P_2(t_2) - P_1(t_2)) - 2d(P_2(t_2) - P_2(t_1))}{(P_2(t_2) - P_2(t_1) - P_1(t_2) + P_1(t_1))^2},$$

$$\frac{\partial H_{гп}}{\partial P_1(t_2)} = -\frac{(x(t_2) - x(t_1))(P_2(t_1) - P_1(t_1)) - 2d(P_2(t_2) - P_2(t_1))}{(P_2(t_2) - P_2(t_1) - P_1(t_2) + P_1(t_1))^2},$$

$$\frac{\partial H_{гп}}{\partial P_2(t_1)} = -\frac{(x(t_2) - x(t_1))(P_2(t_2) - P_1(t_2)) - 2d(P_1(t_2) - P_1(t_1))}{(P_2(t_2) - P_2(t_1) - P_1(t_2) + P_1(t_1))^2},$$

$$\frac{\partial H_{гп}}{\partial P_2(t_2)} = \frac{(x(t_2) - x(t_1))(P_2(t_1) - P_1(t_1)) - 2d(P_1(t_2) - P_1(t_1))}{(P_2(t_2) - P_2(t_1) - P_1(t_2) + P_1(t_1))^2},$$

тогда, учитывая, что  $\sigma_{P_1(t_2)}^2 = \sigma_{P_1(t_1)}^2$  и  $\sigma_{P_2(t_2)}^2 = \sigma_{P_2(t_1)}^2$ , запишем:

$$\sigma_{H_{гп}}^2 = \left( \frac{1}{(P_2(t_2) - P_2(t_1) - P_1(t_2) + P_1(t_1))^2} \right)^2 \times \left( \sigma_{P_1}^2 \left( \left( (x(t_2) - x(t_1))(P_2(t_2) - P_1(t_2)) - 2d(P_2(t_2) - P_2(t_1)) \right)^2 + \left( (x(t_2) - x(t_1))(P_2(t_1) - P_1(t_1)) - 2d(P_2(t_2) - P_2(t_1)) \right)^2 \right) + \sigma_{P_2}^2 \left( \left( (x(t_2) - x(t_1))(P_2(t_2) - P_1(t_2)) - 2d(P_1(t_2) - P_1(t_1)) \right)^2 + \left( (x(t_2) - x(t_1))(P_2(t_1) - P_1(t_1)) - 2d(P_1(t_2) - P_1(t_1)) \right)^2 \right) \right). \quad (16)$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия величины, обозначенной нижним индексом.

### 3. Движение штанги

В общем случае в качестве закона движения штанги принята гармоника вида

$$x(t) = y + A \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $y$  – смещение штанги;  $A$  – амплитуда колебаний штанги;  $\omega$  – частота колебаний;  $\varphi$  – фаза. Эти параметры определяются по характеру технологического процесса. Данный способ можно назвать «следающим», потому как штанга следит за границей раздела между слоями и учитывает ее в дальнейшей работе.

На протяжении всего процесса «слежения» амплитуда колебаний и смещение штанги корректируются алгоритмом. Коррекция амплитуды и смещения при слежении происходит следующим образом: после очередного расчета параметров системы получаем известное положение границы раздела  $H_{гп}$ , при этом штанга находится в крайнем положении ( $\sin(\omega t + \varphi) = \pm 1$ ). Тогда новая амплитуда и смещение колебаний штанги определяются следующим образом:

$$y_i = H_{гп_i}; \quad (17)$$

$$A_i = A_{i-1} - (H_{гп_i} - H_{гп_{i-1}}) \sin(\omega t + \varphi), \quad (18)$$

где  $A_i$  – амплитуда колебаний штанги на интервале, который предстоит пройти;  $A_{i-1}$  – амплитуда штанги на предыдущем интервале;  $H_{гп_i}$  – положение границы раздела, рассчитанное по данным с датчика за предыдущий интервал времени, но ис-

пользуемое на текущем интервале;  $H_{гр\,i-1}$  – положение границы раздела, используемое на предыдущем интервале (рис. 2).

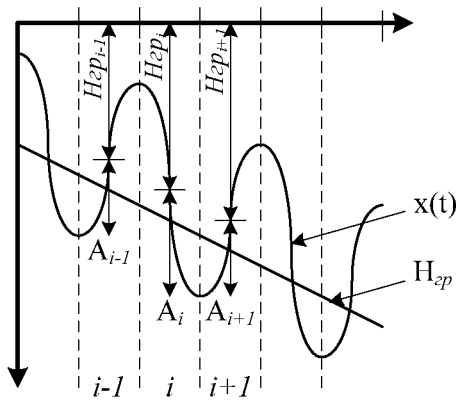


Рис. 2. Схема движения штанги

Важно то, что из-за запаздывания штанги может произойти попадание обоих датчиков штанги в один слой. Во избежание подобной ситуации нужно подобрать параметры движения штанги так, чтобы  $A_i < d$ , а в случаях, когда технологический процесс протекает с большими изменениями,  $A_i \ll d$ .

#### 4. Моделирование алгоритма

Предложенный метод измерения плотностей слоев, границы раздела между слоями и уровня двухслойной жидкости был смоделирован в пакете Matlab 7.7.0 со следующими параметрами:

- время моделирования 5000 с;
- высота резервуара 500 см;
- плотность верхнего слоя 150 кг/м<sup>3</sup> и за время моделирования увеличивается до 250 кг/м<sup>3</sup>;
- плотность нижнего слоя 800 кг/м<sup>3</sup> и за время моделирования увеличивается до 1000 кг/м<sup>3</sup>;
- граница раздела находится на глубине 250 см;
- колебание границы раздела слоев задавалось выражением

$$H_{гр} = 10(\sin(0,003t) + 0,4 \cos(0,004t)),$$

где  $t$  – время, с;

- уровень двухслойной жидкости находится на расстоянии 150 см от верхней граничной плоскости бака;

– колебания уровня двухслойной жидкости задавалось выражением

$$H_{ж}(t) = 4(0,4 \sin(0,004t) + 0,8 \cos(0,006t)),$$

где  $t$  – время, с;

- предполагалось, что погрешности датчиков представляют собой белый шум с амплитудой 2 % от предельного значения показания датчиков с учетом атмосферного давления;

– положение границы раздела слоев задавалось выражением

$$H_{гр} = 10(\sin(0,003t) + 0,4 \cos(0,004t)),$$

где  $t$  – время, с.

Для простоты моделирования начальное зна-

чение координаты штанги было принято равным координате положения границы раздела между слоями.

Данные со штанги снимались в моменты, когда штанга отклонялась на максимальное расстояние от расчетного значения  $H_{гр}$ . Делалась выборка из 10 измерений давлений датчиков. По полученной выборке оценивались математические ожидания и дисперсии давлений. По каждому измерению выборки рассчитывались плотности слоев, уровень двухслойной жидкости и положение границы раздела, для которых в свою очередь также рассчитывались математические ожидания и дисперсии.

В результате моделирования получили, что предельное значение давления для датчика  $D_1$  составляет 5 кПа, а для датчика  $D_2$  – 15 кПа. Тогда амплитуда белого шума датчика  $D_1$  составит  $3\sigma_{p_1} = 100$  Па, а амплитуда белого шума датчика  $D_2$  составит  $3\sigma_{p_2} = 300$  Па. Поскольку в выражения (9), (13) и (16) входят текущие значения давлений и координаты штанги, то для теоретической оценки СКО возьмем эти значения для моментов времени  $t_1 = 2796$  с и  $t_2 = 2812$  с. В эти моменты  $P_1(t_1) = 4,300$  кПа,  $P_1(t_2) = 2,253$  кПа,  $P_2(t_1) = 13,258$  кПа и  $P_2(t_2) = 4,263$  кПа с учетом атмосферного давления, координаты штанги  $x(t_1) = 4,094$  м,  $x(t_2) = 3,094$  м, уровень двухслойной жидкости  $H_{ж}(t_1) = 1,469$  м,  $H_{ж}(t_2) = 1,472$  м, а уровень границы раздела  $H_{гр}(t_1) = 3,59357$  м,  $H_{гр}(t_2) = 3,59352$  м. Подставив эти значения в выражения (9), (13) и (16), получим:

- СКО плотности  $\rho_1$  верхнего слоя  $\sigma_{\rho_1}^p = 4,805$  кг/м<sup>3</sup>;
- СКО плотности  $\rho_2$  нижнего слоя  $\sigma_{\rho_2}^p = 14,416$  кг/м<sup>3</sup>;
- СКО положения границы раздела  $\sigma_{H_{гр}}^p = 1,571 \cdot 10^{-3}$  м;
- СКО уровня двухслойной жидкости  $\sigma_{H_{ж}}^p = 4,312 \cdot 10^{-3}$  м.

По результатам моделирования определили, что:

- СКО плотности  $\rho_1$  верхнего слоя  $\sigma_{\rho_1}^m = 4,571$  кг/м<sup>3</sup>;
- СКО плотности  $\rho_2$  нижнего слоя  $\sigma_{\rho_2}^m = 14,247$  кг/м<sup>3</sup>;
- СКО положения границы раздела  $\sigma_{H_{гр}}^m = 1,504 \cdot 10^{-3}$  м;
- СКО уровня двухслойной жидкости  $\sigma_{H_{ж}}^m = 4,179 \cdot 10^{-3}$  м.

На рис. 3–6 представлены графики результатов моделирования.

Данный метод измерения не требует определения момента перехода датчика через границу раздела сред, что позволяет применять его в технологических процессах, где граница раздела не выражена ярко.

