УДК 537.86

# НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ – СТОКСА

*С.А. Загребина*

# THE INITIAL-FINISH PROBLEM FOR THE NAVIER – STOKES LINEAR SYSTEM

*S.A. Zagrebina*

Установлена однозначная разрешимость начально-конечной задачи для линейной системы Навье – Стокса.

*Ключевые слова: относительно p-секториальные операторы, начально-конечная задача, линейная система Навье – Стокса.*

The unique solvability of the initial-finish problem for the Navier – Stokes linear system is established.

*Keywords: relatively p-sectorial operators, the initial-finish problem, the Navier – Stokes linear system.*

## Введение

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен) и $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен). Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{0.1}$$

Пусть вдобавок оператор $M$ $(L,p)$-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (терминология и результаты см. гл. 3 [1]), тогда существуют вырожденные аналитические полугруппы операторов

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu \quad \text{и} \quad F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu,$$

определенные на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Введем в рассмотрение ядра $\ker U^\cdot = \mathfrak{U}^0$, $\ker F^\cdot = \mathfrak{F}^0$ и образы $\mathrm{im}U^\cdot = \mathfrak{U}^1$, $\mathrm{im}F^\cdot = \mathfrak{F}^1$ этих полугрупп. Нетрудно показать, что $\overline{\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1} = \overline{\mathfrak{U}^0} \oplus \overline{\mathfrak{U}^1} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\overline{\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1} = \overline{\mathfrak{F}^0} \oplus \overline{\mathfrak{F}^1} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$. Нам потребуется более сильное утверждение

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U} \quad (\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}), \tag{A1}$$

которое имеет место либо в случае сильной $(L,p)$-секториальности оператора $M$ справа (слева), $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, либо рефлексивности пространства $\mathfrak{U}$ $(\mathfrak{F})$ [2]. Обозначим через $L_k$ $(M_k)$ сужение оператора $L$ $(M)$ на $\mathfrak{U}^k$ $(\mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^k)$, $k = 0,1$. И если оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален справа и слева, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $M_k \in Cl(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0,1$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$, а также проектор $P = s - \lim\limits_{t\to 0+} U^t$, $Q = s - \lim\limits_{t\to 0+} F^t$) расщепляющий пространство $\mathfrak{U}$ $(\mathfrak{F})$ согласно (A1), причем $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im}P$ $(\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im}Q)$. Введем еще одно условие –

$$\text{существует оператор} \quad L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1), \tag{A2}$$

которое имеет место в случае сильной $(L,p)$-секториальности оператора $M$, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. (Кстати, в [3] показано, что (A1) вместе с условием $(L,p)$-секториальности оператора $M$, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, дает сильную $(L,p)$-секториальность оператора $M$ справа (слева), $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, а если к ним добавить условие (A2), то получим сильную $(L,p)$-секториальность оператора $M$, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$).

Наконец, введем еще одно важное условие –

$$\begin{array}{l} L - \text{спектр } \sigma^L(M) \text{ оператора } M \text{ представим в виде} \\ \sigma^L(M) = \sigma^L_{fin}(M) \cup \sigma^L_{in}(M), \text{ причем } \sigma^L_{fin}(M) \\ \text{содержится в ограниченной области } D \subset \mathbb{C} \\ \text{с кусочно гладкой границей } \gamma, \text{ причем } \gamma \cap \sigma^L(M) = \emptyset. \end{array} \tag{A3}$$

Построим относительно спектральный проектор [4]

$$P_{fin} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R^L_\mu(M) d\mu,$$

причем оказывается, что при условии сильной $(L,p)$-секториальности оператора $M$ справа $P_{fin}P = PP_{fin} = P_{fin}$. Значит, в данном случае существует проектор $P_{in} = P - P_{fin}$. Итак, пусть выполнены условия (A1) – (A3), фиксируем $\tau \in \mathbb{R}_+$, $u_0$, $u_\tau \in \mathfrak{U}$, и для уравнения (0.1) рассмотрим начально-конечную задачу: найти вектор-функцию $v \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (0.1) и условиям

$$P_{in}(u(0) - u_0) = 0, \; P_{fin}(u(\tau) - u_\tau) = 0. \tag{0.2}$$

Заметим, что если $\sigma^L_{fin}(M) = \emptyset$, то задача (0.2) превращается в задачу Шоуолтера – Сидорова $P(u(0) - u_0) = 0$ и поэтому считается естественным обобщением последней [5].

В настоящее время активно изучаются начально-конечные задачи для неклассических уравнений математической физики [6 – 9]. Нашей целью является постановка начально-конечной задачи для классической линейной системы уравнений Навье – Стокса и нахождение ее решения. Правда, рассмотреть эту систему нам придется несколько с иной, чем предложенная в классических монографиях [10, 11], точки зрения. Наш подход, основанный на [12], был развит в [13, 14].

## 1. Абстрактная схема

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства; операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор $M$ $(L,p)$-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и выполнены условия (A1) – (A3). Тогда существуют аналитические полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и группа $\{U^t_{fin} : t \in \mathbb{R}\}$, где

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \quad U^t_{fin} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu$$

такие, что $s - \lim\limits_{t \to 0+} U^t = P$ и $U^0_{fin} = P_{fin}$. Построим аналитическую полугруппу $\{U^t_{in} : t \in \mathbb{R}_+\}$, где $U^t_{in} = U^t - U^t_{fin}$. Очевидно, $s - \lim\limits_{t \to 0+} U^t_{in} = P_{in}$. Положим $\operatorname{im} P_{in(fin)} = \mathfrak{U}^1_{in(fin)}$; очевидно, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^1_{in} \oplus \mathfrak{U}^1_{fin}$. Справедлива

**Теорема 1.** *Пусть оператор $M$ $(L,p)$-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и выполнены условия (A1) – (A3). Тогда при любых $\tau \in \mathbb{R}_+$, $u_0$, $u_\tau \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение задачи (0.1), (0.2), которое к тому же имеет вид $u(t) = U^t_{in}u_0 + U^{t-\tau}_{fin}u_\tau$.*

Тот факт, что вектор-функция $u(t) = U^t_{in}u_0 + U^{t-\tau}_{fin}u_\tau$ удовлетворяет уравнению (0.1), проверяется непосредственно. Выполнение условия (0.2) следует из соотношений $P_{in}U^t_{fin} =$

$\mathbb{O}$ и $P_{fin}U^t_{in} = \mathbb{O}$, а также $U^t_{in} = P_{in}U^t_{in} = U^t_{in}P_{in}$ и $U^t_{fin} = P_{fin}U^t_{fin} = U^t_{fin}P_{fin}$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ в случае $U^t_{in}$ и при всех $t \in \mathbb{R}$ в случае $U^t_{fin}$. Единственность решения вытекает из эквивалентности уравнения (0.1) системе уравнений

$$u^0 = 0, \quad \dot{u}^1_{in} = S_{in}u^1_{in}, \quad \dot{u}^1_{fin} = S_{fin}u^1_{fin},$$

где $S_{in} = L^{-1}_{in}M_{in} \in Cl(\mathfrak{U}^1_{in}; \mathfrak{F}^1_{in})$ – секториальный оператор, $S_{fin} = L^{-1}_{fin}M_{fin} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1_{fin}; \mathfrak{F}^1_{fin})$; подпространства $\mathfrak{F}^1_{in}$ и $\mathfrak{F}^1_{fin}$ строятся аналогично пространствам $\mathfrak{U}^1_{in}$ и $\mathfrak{U}^1_{fin}$, только вместо полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и группы $\{U^t_{fin} : t \in \mathbb{R}\}$ надо взять полугруппу $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и группу $\{F^t_{fin} : t \in \mathbb{R}\}$, где соответственно,

$$F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad F^t_{fin} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu;$$

операторы $L_{in(fin)}$ $(M_{in(fin)})$ есть сужение операторов $L_1$ $(M_1)$ на $\mathfrak{U}^1_{in(fin)}$ $(\mathrm{dom}\ M \cap \mathfrak{U}^1_{in(fin)})$.

## 2. Конкретная интерпретация

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^\infty$. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим задачу Дирихле

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+$$

для системы уравнений

$$v_t = \nu\nabla^2 v - \nabla p, \quad \nabla \cdot v = 0, \tag{2.1}$$

которая моделирует в линейном приближении динамику вязкой несжимаемой жидкости. Прежде чем редуцировать систему (2.1) к уравнению (0.1), представим ее в виде

$$v_t = \nu\nabla^2 v - p, \quad \nabla(\nabla \cdot v) = 0. \tag{2.2}$$

Система (2.2) получена из (2.1) после замены $\nabla p \to p$ [14].

Для редукции уравнений (2.2) к уравнению (0.1) нам потребуются функциональные пространства из [12]. Пусть $\mathbb{H}^2_\sigma$ и $\mathbb{H}^2_\pi$ ($\mathbb{H}_\sigma$ и $\mathbb{H}_\pi$) – подпространства соленоидальных и потенциальных вектор-функций пространства $\mathbb{H}^2 = (W^2_2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^n$ ($\mathbb{L}^2 = (L^2(\Omega))^n$). Формулой $A = \mathrm{diag}\{\nabla^2, \ldots, \nabla^2\}$ задается линейный непрерывный оператор с дискретным конечнократным отрицательным спектром $\sigma(A)$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Обозначим через $A_{\sigma(\pi)}$ сужение оператора $A$ на $\mathbb{H}^2_{\sigma(\pi)}$.

**Лемма 1** (теорема Солонникова – Воровича – Юдовича). *Оператор* $A_{\sigma(\pi)} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^2_{\sigma(\pi)}, \mathbb{H}_{\sigma(\pi)})$, *причем* $\sigma(A_{\sigma(\pi)}) = \sigma(A)$ *и* $A = A_\sigma\Sigma + A_\pi\Pi$.

Здесь через $\Pi \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^2, \mathbb{H}^2_\pi)$ обозначен проектор вдоль $\mathbb{H}^2_\sigma$, $\Sigma = \mathbb{I} - \Pi$.

**Лемма 2** (теорема Капитанского – Пилецкаса). *Формулой* $B : u \to \nabla(\nabla \cdot u)$ *задается оператор* $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^2, \mathbb{H}_\pi)$, *причем* $\ker B = \mathbb{H}^2_\sigma$.

Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} \equiv \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_p$, $\mathbb{H}_p = \mathbb{H}_\pi$. Вектор $u \in \mathfrak{U}$ имеет вид $u = (u_\sigma, u_\pi, u_p)$. Формулами

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu A_\sigma & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \nu A_\pi & -\mathbb{I} \\ \mathbb{O} & B & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

задаются операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $\mathrm{im}L = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\}$, $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{H}_p$ и $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $\mathrm{dom}\ M = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}^2_\pi \times \mathbb{H}_p$. Итак, редукция уравнений (2.2) к уравнению (0.1) закончена.

**Лемма 3** [13]. *При любых $\nu \in \mathbb{R}_+$ оператор $M$ сильно $(L,1)$-секториален.*

Построим подпространства $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{F}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_p$, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{F}^1 = \mathbb{H}_\sigma \times \{0\} \times \{0\}$. Выполнение условий (A1) и (A2) очевидно, причем

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & B_\pi^{-1} \\ -\mathbb{I} & \nu A_\pi B_\pi^{-1} \end{pmatrix},$$

где $B_\pi$ – сужение оператора $B$ на $\mathbb{H}_\pi^2$ (из леммы 2 вытекает, что $B_\pi : \mathbb{H}_\pi^2 \to \mathbb{H}_\pi$ – топлинейный изоморфизм). Нетрудно также проверить, что

$$M_0^{-1} L_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} -$$

нильпотентный оператор степени 1.

Спектр $\sigma(A) = \{\lambda_k\}$, где $\lambda_k \in \mathbb{R}_-$ – собственные значения, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, тогда $\sigma^L(M) = \{\nu^{-1}\lambda_k\}$. Понятно, что для такого множества можно подобрать контур $\gamma \in \mathbb{C}$, который бы удовлетворял условию (A3).

Теперь построим

$$U^t_{in(fin)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\nu^{-1}\lambda_k \in \sigma^L_{in(fin)}(M)} e^{\nu\lambda_k t}\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Тогда в силу теоремы 1 и леммы 3 справедлива следующая

**Теорема 2**. *При любых $\nu \in \mathbb{R}_+$, $u_0, u_\tau \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение задачи (0.2) для системы уравнений (2.2), причем это решение $u = u(t)$ имеет вид*

$$u_\sigma(t) = U_1^{t-\tau} u_{\tau\sigma} + U_2^t u_{0\sigma}, \ u_\pi \equiv 0, \ u_p \equiv 0.$$

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность Г.А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе.

## Литература

1. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
2. Федоров, В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В.Е. Федоров // Алгебра и анализ. – 2000. – Т.12, вып. 3. – С. 173 – 200.
3. Федоров, В.Е. О некоторых соотношениях в теории вырожденных полугрупп операторов / В.Е. Федоров // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Мат. моделирование и программирование». – Челябинск, 2008. – №15 (115), вып. 1. – С. 89 – 99.
4. Келлер, А.В. Исследование ограниченных решений линейных уравнений типа Соболева: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 1997.
5. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – Иркутск, 2010. – Т. 3, №1. – С. 51 – 72.
6. Загребина, С.А. Задача Шоуолтера – Сидорова – Веригина для линейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина // Неклассические уравнения математической физики: сб. тр. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И.Н. Векуа. – Новосибирск, 2007. – С. 150 – 157.

7. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для эволюционных уравнений соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Мат. моделирование и программирование». – Челябинск, 2008. – №15 (115), вып. 1. – С. 23-26.
8. Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява на графе / А.А. Замышляева, А.В. Юзеева // Известия Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – Иркутск, 2010. – Т. 3, №2. – С. 85 – 95.
9. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями одной неклассической задачи для линейной модели Хоффа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Всероссийский научный семинар «Неклассические уравнения математической физики», посвящ. 65-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова. – Якутск, 2010. – Ч. 1. – С. 67 – 70.
10. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Физматгиз, 1961.
11. Темам, Р. Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981.
12. Свиридюк, Г.А. Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1994. – №1. – С. 62 – 70.
13. Свиридюк, Г.А. Об относительно сильной $p$-секториальности линейных операторов / Г.А. Свиридюк, Г.А. Кузнецов // Докл. Акад. наук. – 1999. – Т. 365, №6. – С. 736 – 738.
14. Загребина, С.А. О существовании и устойчивости решений уравнений Навье – Стокса / С.А. Загребина // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. – Магнитогорск, 2005. – Вып. 8. – С. 74 – 86.

Загребина Софья Александровна, кандидат физико-математических наук, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, zagrebina_sophiya@mail.ru.

*Поступила в редакцию 20 ноября 2010 г.*