УДК 517.968.23

О ЗАДАЧЕ ТИПА ДИРИХЛЕ В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

К.М. Расулов[1]

Рассматривается краевая задача типа Дирихле в классах квазигармонических функций. Получены условия разрешимости и конструктивный алгоритм решения классической задачи Дирихле в классе квазигармонических функций второго рода в случае, когда носителем краевых условий служит единичная окружность.

Ключевые слова: краевая задача, видоизмененная задача типа Дирихле, квазигармоническая функция, дифференциальное уравнение, единичная окружность.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L. Область, дополняющую $T^+ \cup L$ до полной плоскости, обозначим через T^- и будем считать, что начало координат находится в T^+.

Многие физические задачи, связанные, например, с диффузией газа при наличии распада и при цепных реакциях приводятся к дифференциальным уравнениям вида (см., например, [1, 2])

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \tag{1}$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, n – некоторое фиксированное неотрицательное целое число, $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ – неизвестная функция.

Качественные свойства решений дифференциальных уравнений вида (1) были подробно изучены в работах [3, 4]. Следуя [4], некоторые авторы уравнения вида (1) называют *дифференциальными уравнениями Бауэра–Пешля.*

В дальнейшем под *регулярным решением* дифференциального уравнения (1) в некоторой области T^+ будем понимать всякую функцию $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ класса $C^2(T^+)$ и удовлетворяющую уравнению (1) в рассматриваемой области.

Известно [3–5], что всякое регулярное решение дифференциального уравнения (1) в области T^+ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \tag{2}$$

где $A_k^n := (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ – аналитическая (голоморфная) в области T^+ функция.

Ясно, что если в (1) положить $n = 0$, то регулярные решения этого уравнения в области T^+ представляют собой класс *гармонических в T^+ функций.*

Всюду в дальнейшем при $n \geq 1$ регулярные в области T^+ решения уравнения (1) будем называть *квазигармоническими функциями рода n в области T^+*, а функцию $\varphi^+(z)$ из представления (2) назовем *аналитической компонентой* соответствующей квазигармонической функции $W(z)$.

[1] Расулов Карим Магомедович – профессор, доктор физико-математических наук, кафедра математического анализа, физико-математический факультет, Смоленский государственный университет.
e-mail: spgu@yandex.ru (с пометкой «Расулову»)

Определение. Будем говорить, квазигармоническая функция $W(z)$ принадлежит классу $C^m(T^+ + L)$, если в представлении (2) аналитическая компонента $\varphi^+(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача.

Задача D. *Требуется найти все квазигармонические функции рода* n ($n \geq 1$), *принадлежащие классу* $C^n(T^+ + L)$ *и удовлетворяющие на* L *условию:*

$$W(t) + G(t)\overline{W(t)} = g(t), \tag{3}$$

где $W(t) = \lim\limits_{z \to t \in L} W(z)$, *а* $G(t)$ *и* $g(t)$ *– заданные на контуре* L *функции класса* $H(L)$ *(т.е. удовлетворяющие на контуре* L *условию Гельдера).*

В дальнейшем задачу **D** будем называть *видоизмененной задачей типа Дирихле для квазигармонических функций рода* n. Если же в (3) $g(t) \equiv 0$, то соответствующую задачу называем однородной видоизмененной задачей типа Дирихле (короче, задачей $\mathbf{D}^0$).

Ясно, что если $G(t) \equiv 0$, то задача **D** представляет собой обычную (*классическую*) краевую задачу Дирихле для квазигармонических функций.

Отметим, что в классе квазигармонических функций рода $n = 1$ задача **D** была изучена в работе автора [5]. Основной целью настоящей заметки является построение конструктивного метода решения краевой задачи **D** в случае, когда $n = 2$, $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $G(t) \equiv 0$.

2. О решении задачи D в случае $n = 2$, $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ **и** $G(t) \equiv 0$.

Рассмотрим сначала *однородную краевую задачу Дирихле для квазигармонических функций* при $n = 2$ и $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, т.е. задачу, состоящую в отыскании *всех квазигармонических функций первого рода* $W(z)$, *принадлежащих классу* $C^2(T^+ + L)$ *и удовлетворяющих следующим условиям*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \dfrac{6}{(1 + z\bar{z})^2} W = 0, \quad z \in T^+, \\ W(t) = 0, \quad t \in L. \end{cases} \tag{4}$$

Сразу отметим, что поскольку решения задачи **D** ищутся в классе $C^n(T^+ + L)$, то в случае $n = 2$ представление (3) принимает вид

$$W(z) = \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - 6\left(\frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}}\right)\frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 12\left(\frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}}\right)^2 \varphi^+(z), \tag{5}$$

где $\varphi^+(z)$ – аналитическая в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функция, непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающаяся на контур L вместе со своими производными до второго порядка включительно.

Далее, с учетом представления (5), нетрудно установить следующее утверждение.

Лемма 1. *Общее решение однородной задачи Дирихле* (4) *можно задавать в виде*

$$W_0(z) = C_1 \frac{\bar{z}(1 - z\bar{z})}{(1 + z\bar{z})^2} + C_2 \frac{z(1 - z\bar{z})}{(1 + z\bar{z})^2}, \tag{6}$$

где C_1, C_2 *– произвольные комплексные постоянные.*

Доказательство. В силу представления (5) и так как в точках окружности $L = \{t : |t| = 1\}$ выполняется тождество $\bar{t} = \dfrac{1}{t}$, краевое условие $W(t) = 0, \quad t \in L$ в рассматриваемом случае можно переписать так:

$$\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - \frac{3}{t}\frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{3}{t^2}\varphi^+(t) = 0, \quad t \in L. \tag{7}$$

Введем в рассмотрение вспомогательную мероморфную в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функцию

$$\Phi^+(z) = \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{3}{z}\frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{3}{z^2}\varphi^+(z), \tag{8}$$

где $\varphi^+(z)$ – *аналитическая компонента* искомой квазигармонической функции $W(z)$. Поскольку решения задачи Дирихле (4) ищутся в классе $C^2(T^+ + L)$, то равенство (7) относительно мероморфной функции $\Phi(z)$ означает, что она всюду на окружности L имеет нулевые граничные значения. Следовательно, в силу граничной теоремы единственности для мероморфных функций (см., например, [6, с. 292]), имеем: $\Phi^+(z) \equiv 0,\ z \in T^+$, т.е.

$$\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{3}{z}\frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{3}{z^2}\varphi^+(z) = 0, \quad z \in T^+. \tag{9}$$

Нетрудно проверить (например, методом степенных рядов), что все аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ решения линейного дифференциального уравнения (9) задаются в виде

$$\varphi^+(z) = C_1^* z + C_2^* z^3, \tag{10}$$

где C_1^*, C_2^* – произвольные комплексные постоянные.

Наконец, подставив в правую часть формулы (5) вместо $\varphi^+(z)$ ее значения из (10), получим формулу (6), где приняты обозначения $C_1 = -6C_1^*, C_1 = 6C_1^*$. *Лемма доказана.*

Рассмотрим теперь *неоднородную краевую задачу Дирихле для квазигармонических функций* при $n = 2$ и $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, т.е. задачу, состоящую в отыскании *всех квазигармонических функций второго рода* $W(z)$, *принадлежащих классу* $C^2(T^+ + L)$ *и удовлетворяющих следующим условиям*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial z \partial \overline{z}} + \dfrac{6}{(1 + z\overline{z})^2} W = 0, \quad z \in T^+, \\ W(t) = g(t), \quad t \in L. \end{cases} \tag{11}$$

В силу (5) краевое условие $W(t) = g(t), \quad t \in L,$ можно записать в виде:

$$\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - \frac{3}{t}\frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{3}{t^2}\varphi^+(t) = g(t), \quad t \in L. \tag{12}$$

Умножив обе части равенства (12) на t^2, получим

$$t^2\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - 3t\frac{d\varphi^+(t)}{dt} + 3\varphi^+(t) = t^2 g(t), \quad t \in L. \tag{13}$$

Далее, вводя в рассмотрение вспомогательную аналитическую (голоморфную) в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функцию

$$\Psi^+(z) = z^2\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - 3z\frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 3\varphi^+(z), \quad z \in T^+,$$

равенство (13) перепишем так:

$$\Psi^+(t) = t^2 g(t), \quad t \in L. \tag{14}$$

Но равенство (14) есть краевое условие *задачи об аналитическом продолжении* (см., например, [7, с. 40]) относительно аналитической функции $\Psi^+(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$, т.е. функция $t^2 g(t)$ должна быть граничным значением аналитической в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции, непрерывной (в смысле Гельдера) в замкнутом круге $\overline{T^+} = T^+ \cup L$. Отсюда следует (см., например, [6, с. 100]), что функция $t^2 g(t)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\int_L g(t)\cdot t^{k+2}dt=0,\quad k=0,1,2,\dots . \tag{15}$$

Пусть выполняются равенства (15). Тогда в силу (13) в любой точке $z\in T^+$ имеет место равенство

$$z^2\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2}-3z\frac{d\varphi^+(z)}{dz}+3\varphi^+(z)=g_1(z),\quad z\in T^+, \tag{16}$$

где

$$g_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{t^2g(t)}{t-z}dt . \tag{17}$$

Равенство (16) есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $\varphi^+(z)$.

Учитывая, что формулой (10) задается общее решение соответствующего *однородного дифференциального уравнения* (9), найдем одно из частных решений *неоднородного дифференциального уравнения* (16), например, *методом вариации произвольных постоянных*, т.е. в виде

$$\varphi_1(z)=C_1(z)z+C_2(z)z^3, \tag{18}$$

где $C_1(z),\ C_2(z)$ – некоторые мероморфные в круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ функции комплексной переменной z, для которых выражение $C_1(z)z+C_2(z)z^3$ есть аналитическое решение дифференциального уравнения (16) в этом круге, непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающееся на контур L вместе со своими производными до второго порядка включительно. Для нахождения функций $C_1(z),\ C_2(z)$ составим соответствующую систему уравнений Лагранжа:

$$\begin{cases} zC_1'(z)+z^3C_2'(z)=0,\\ z^2C_1'(z)+3z^4C_2'(z)=g_1(z). \end{cases} \tag{19}$$

Решая систему (19), будем иметь:

$$C_1'(z)=-\frac{g_1(z)}{2z^2},\ C_2'(z)=\frac{g_1(z)}{2z^4}. \tag{20}$$

Из (20) видно, что для того чтобы функции $C_1(z)$ и $C_2(z)$ были мероморфными в круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий: $g_1'(0)=0$ и $g_1'''(0)=0$. Последние условия (с учетом (17)) можно записать в виде

$$\int_L g(t)\cdot t^{-k}dt=0,\quad k=0,2 . \tag{21}$$

При выполнении условий (21) с помощью интегрирования из (20) получаем

$$C_1(z)=-\frac{1}{2}\int\frac{g_1(z)}{z^2}dz,\ C_2(z)=\frac{1}{2}\int\frac{g_1(z)}{z^4}dz. \tag{22}$$

Таким образом, в силу (18) и (22), частное решение неоднородного дифференциального уравнения (16) можно задавать в виде

$$\varphi_1^+(z)=-\frac{z}{2}\int\frac{g_1(z)}{z^2}dz+\frac{z^3}{2}\int\frac{g_1(z)}{z^4}dz . \tag{23}$$

Поскольку мы ищем решения задачи (11) в классе $C^2(T^++L)$ (см. определение), то функция (23) должна быть непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающейся на контур L вместе со своими производными до второго порядка включительно. Но, согласно известной теореме Харди и Литтльвуда (см., например, [8, с. 397]), для этого необходимо и достаточно, чтобы в круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ выполнялись неравенства:

$$\left|\frac{3z^2}{2}\int\frac{g_1(z)}{z^4}dz-\frac{1}{2}\int\frac{g_1(z)}{z^2}dz\right|\le\frac{M_1}{(1-r)^{1-\alpha_1}},$$

$$\left|\frac{g_1(z)}{z^2}+3z\int\frac{g_1(z)}{z^4}dz\right|\le\frac{M_2}{(1-r)^{1-\alpha_2}}, \tag{24}$$

$$\left|\frac{zg_1'(z)+g_1(z)}{z^3}+3\int\frac{g_1(z)}{z^4}dz\right|\le\frac{M_3}{(1-r)^{1-\alpha_3}},$$

где $r=|z|$; M_k, α_k $(k=1,2,3)$ – некоторые положительные постоянные, причем $0<\alpha_k\le 1$.

Наконец, подставив в правую часть (5) вместо $\varphi^+(z)$ ее значение, найденное по формуле (23), получим частное решение неоднородной задачи (11) в виде

$$W(z)=\frac{g_1(z)}{z^2}+\frac{3\bar z(1-z\bar z)}{(1+z\bar z)^2}\int\frac{g_1(z)}{z^2}dz+\frac{3z(1-z\bar z)}{(1+z\bar z)^2}\int\frac{g_1(z)}{z^4}dz, \tag{25}$$

где $g_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{t^2g(t)}{t-z}dt$, *а* $\int\frac{g_1(z)}{z^2}dz$ *и* $\int\frac{g_1(z)}{z^4}dz$ – фиксированные первообразные функций $\frac{g_1(z)}{z^2}$ и $\frac{g_1(z)}{z^4}$ соответственно в круге T^+.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Если* $T^+=\{z:|z|<1\}$, *то неоднородная задача Дирихле (11) в классе* $C^2(T^++L)$ *разрешима тогда и только тогда, когда функция* $g(t)$ *удовлетворяет условиям*

$$\int\limits_L g(t)\cdot t^{m-2}dt=0,\quad m=0,\ 2,\ 4,\ 5,\ \dots, \tag{26}$$

а также условиям (24). *При выполнении этих условий частное решение задачи* (11) *можно задавать в виде* (25).

Из лемм 1 и 2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Если* $T^+=\{z:|z|<1\}$, *то неоднородная задача Дирихле* (11) *в классе* $C^2(T^++L)$ *разрешима тогда и только тогда, когда функция* $g(t)$ *удовлетворяет условиям* (24) *и* (26). *При выполнении условий* (24) *и* (26) *общее решение задачи* (11) *можно задавать в виде*

$$W(z)=\frac{g_1(z)}{z^2}+\frac{3\bar z(1-z\bar z)}{(1+z\bar z)^2}\left(C_1+3\int\frac{g_1(z)}{z^2}dz\right)+\frac{3z(1-z\bar z)}{(1+z\bar z)^2}\left(C_2+3\int\frac{g_1(z)}{z^4}dz\right), \tag{27}$$

где C_1, C_2 *– произвольные комплексные постоянные,* $g_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{t^2g(t)}{t-z}dt$, *а* $\int\frac{g_1(z)}{z^2}dz$ *и* $\int\frac{g_1(z)}{z^4}dz$ *– фиксированные первообразные функций* $\frac{g_1(z)}{z^2}$ *и* $\frac{g_1(z)}{z^4}$ *соответственно в круге* T^+.

Замечание. Известно (см., например, [9, с. 79]), что в случае *классической* (*внутренней*) *задачи Дирихле для уравнения Лапласа* справедлива следующая *теорема единственности*: любые два решения $W_1(z)$ и $W_2(z)$ этой задачи в рассматриваемой области совпадают, т.е. $W_1(z)\equiv W_2(z)$. Как видно из теоремы, для задачи Дирихле **D** в классе квазигармонических функций рода $n=2$ не имеет место *теорема единственности.*

Литература

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Трикоми, Ф. Лекции по уравнениям в частных производных / Ф. Трикоми. – М., 1957. – 442 с.
3. Bauer, K.W. Uber eine der Differentialgleichung $(1+z\bar z)^2W_{z\bar z}\pm n(n+1)W=0$ zugeordnete Funktionentheorie / K.W. Bauer // Bonner math. – 1965. – Schriften 23. – pp. 98.
4. Heersink, R. Uber Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen / R. Heersink // Ber. Math.-Statist. Sek. Forschung. Joanneum, 1986, Bericht № 268.

5. Расулов, К.М. О решении краевой задачи типа Дирихле для уравнения Бауэра-Пешля первой степени / К.М. Расулов // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: сб. науч. тр. – Смоленск. гос. ун-т, 2007. – Вып. 8. – С. 62–70.

6. Привалов, И.И. Граничные свойства аналитических функций / И.И. Привалов. – М.; Л., 1950. – 337 с.

7. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

8. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М.: Наука, 1966. – 630 с.

9. Агошков, В.И Методы решения задач математической физики / В.И. Агошков, П.Б. Дубовский, В.П. Шутяев. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

Поступила в редакцию 27 мая 2011 г.

ABOUT THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF DIRICHLET TYPE IN THE CLASSES OF QUASIHARMONIC FUNCTIONS IN A CIRCLE

K.M. Rasulov[1]

In this article the modified boundary value problem of the Dirichlet type in classes of quasi-harmonic functions is considered. Solvability conditions and constructive algorithms for solving the classical Dirichlet boundary value problem in the classes of quasi-harmonic functions of the genus 2 are obtained. The boundary conditions are on the unit circle.

Keywords: boundary value problem, modified Dirichlet boundary value problem, quasi-harmonic functions, differential equations, unit circle.

References

1. Tihonov A.N., Samarskij A.A. *Uravnenija matematicheskoj fiziki* (The equations of mathematical physics). Moscow, Nauka, 1972. 735 p. (in Russ.).

2. Tricomi F. *Lekcii po uravnenijam v chastnyh proizvodnyh* (Lectures on partial differential equations). Moscow, 1957. 442 p. (in Russ.).

3. Bauer K.W. Uber eine der Differentialgleichung $(1+z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie. *Bonner math.* 1965. Schriften 23. pp. 98.

4. Heersink, R. Uber Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen. *Ber. Math.-Statist. Sek. Forschung. Joanneum*. 1986. Bericht № 268.

5. Rasulov K.M. O reshenii kraevoj zadachi tipa Dirihle dlja uravnenija Baujera-Peshlja pervoj stepeni. *Issledovanija po kraevym zadacham kompleksnogo analiza i differencial'nym uravnenijam: sb. nauch. tr.* Smolensk. gos. universitet, 2007. Vol. 8. pp. 62–70. (in Russ.).

6. Privalov I.I. *Granichnye svojstva analiticheskih funkcij* (Boundary properties of analytic functions). Moscow, Leningrad, 1950. 337 p. (in Russ.).

7. Gahov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary value problems). Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (in Russ.).

8. Goluzin G.M. *Geometricheskaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo* (Geometric theory of functions of complex variable). Moscow, Nauka, 1966. 630 p. (in Russ.).

9. Agoshkov V.I., Dubovskij P.B., Shutjaev V.P. *Metody reshenija zadach matematicheskoj fiziki* (Methods for solving problems of mathematical physics). Moscow, Fizmatlit, 2002. 320 p. (in Russ.).

[1] Rasulov Karim Magomedovich is Dr. Sc (Physics and Mathematics), Professor, The Head of the Mathematical Analysis Department, Smolensk State University.
e-mail: spgu@yandex.ru (with note «for Rasulov»)