УДК 517.95

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОТРАЖАЮЩИМ ОТКЛОНЕНИЕМ

Т.К. Юлдашев

Рассматриваются вопросы однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения, содержащего суперпозицию параболического и эллиптического операторов в левой части уравнения и отражающего отклонение в правой нелинейной части данного уравнения. С помощью метода разделения переменных задача сводится к изучению счетной системы нелинейных интегральных уравнений, однозначная разрешимость которой доказывается методом последовательных приближений.

Ключевые слова: суперпозиция параболического и эллиптического операторов, отклонение с отражающим аргументом, обобщенные производные, счетная система нелинейных интегральных уравнений, метод последовательных приближений, сходимость ряда Фурье.

1. Постановка задачи

В области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),u\left(\delta(t,x,u(-t,x)),x\right)\right) \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями:

$$\begin{cases} u(t,x)_{|t\in(-\infty;-T]}=0,\ u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\ u(t,x)_{|t\in[T,\infty)}=0, \\ u_t(t,x)_{|t=0}=\varphi_2(x),\ u_{tt}(t,x)_{|t=0}=\varphi_3(x), \end{cases} \tag{2}$$

$$u(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=l}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=l}=0, \tag{3}$$

где $f(t,x,u,\vartheta)\in C(D\times R^2)$, $\delta(t,x,u)\in C(D\times R)$, $\varphi_i(x)\in C^5(D_l)$, $\varphi_i(x)_{|x=0}=\varphi_i(x)_{|x=l}=$ $=\varphi_i''(x)_{|x=0}=\varphi_i''(x)_{|x=l}=0$, $i=\overline{1,3}$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[-T,T]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$.

Отметим, что в работах [1, 2] изучены краевые задачи для однородных и линейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков. В работе [3] обосновано применение метода разделения переменных к смешанным задачам для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

В данной работе используется другая методика применения метода разделения переменных: ищем решение смешанной задачи (1)–(3) в виде ряда Фурье. Обычная методика разделения переменных в случае уравнения (1) не применима, т.е. переменные в этом уравнении не разделяются. А применение ряда Фурье позволяет нам в отличие от других работ (напр.см. [3, 4]) отказываться от непрерывной дифференцируемости правой части уравнения (1). Кроме того, такой подход позволяет нам с помощью интегрального тождества свести смешанную задачу к счетной системе нелинейных интегральных уравнений, однозначная разрешимость которой легко доказывается методом последовательных приближений.

2. Сведение решения смешанной задачи к счетной системе нелинейных интегральных уравнений

Решение данной задачи (1)–(3) ищем в виде ряда Фурье [5]:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(x),\ (t,x)\in D, \tag{4}$$

где $b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, $n=1,2,\ldots$.

В множестве $\left\{\vec{a}(t)=(a_n(t))\middle| a_n(t)\in C[-T;T],\ n=1,2,...\right\}$ определим операции сложения двух элементов и умножение элемента на скаляр покоординатно. Тогда данное множество становится линейным векторным пространством. Берем те элементы векторного пространства, которые удовлетворяют условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n(t)\right|^p<\infty$. Это множество обозначим через $B_p(T)$ и положим $\left\|\vec{a}(t)\right\|_{B_p(T)}=\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n(t)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$, $p>1$.

Для каждого элемента $\vec{a}(t)\in B_p(T)$ определим оператор Q следующим образом:

$$Q\vec{a}(t)=u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(x).$$

Обозначим через $E_p(D)$ множество значений оператора Q, а через $W_{k,p}(D)$ – множество функций $\Phi(t,x)$ таких, что $\Phi(t,x)$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,x)$ имеют обобщенные производные порядка k по t, принадлежащие $L_p(D_l)$, и обращаются в нуль при $t\le\varepsilon-T$ и $t\ge T-\varepsilon$ ($0<\varepsilon-$зависит от $\Phi(t,x)$). Для функций из $W_{k,p}(D)$ справедливы соотношения:

$$\lim_{t\to\pm T}\int_0^l\Phi(t,x)dx=\lim_{t\to\pm T}\int_0^l\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}dx=\lim_{t\to\pm T}\int_0^l\frac{\partial^2\Phi(t,x)}{\partial t^2}dx=0\ \text{при}\ k=3.$$

Определение. Если функция $u(t,x)\in E_p(D)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int_0^t\int_0^l\left\{u(s,x)\left[\frac{\partial^3}{\partial s^3}\Phi+\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right)+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\Phi\right]+f\Phi\right\}dxds=$$

$$=\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right]_{t=0}dx-\int_0^l\varphi_2\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right]_{t=0}dx+\int_0^l\varphi_3\left[\Phi\right]_{t=0}dx$$

для любого $\Phi(t,x)\in W_{k,p}(D)$, то функция $u(t,x)$ называется решением смешанной задачи (1)–(3).

Согласно определению решение задачи (1)–(3) разлагается в ряд Фурье по собственным функциям дифференциального оператора $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ почти для всех $t\in D_T$, причем единственным образом. Если $u(t,x)$ является решением смешанной задачи (1)–(3), то имеет место разложение (4) почти при всех $t\in D_T$ и

$$a_n(t)=\int_0^l u(t,x)b_n(x)dx,\quad b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x,\quad \lambda_n=\frac{n\pi}{l},\quad n=1,2,....$$

Покажем, что коэффициенты Фурье $a_n(t)$ решения смешанной задачи (1)–(3) по собственным функциям $b_n(x)$ удовлетворяют следующей счетной системе нелинейных интегральных уравнений:

$$a_n(t)=\omega_n(t)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s,x,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,x,Q\vec{a}(-s)))\right)\times$$

$$\times b_n(x)G_n(t,s)dxds,\ t\in D_T,\qquad(5)$$

где

$$\omega_n(t)=\frac{\lambda_n^2\varphi_{1n}-\varphi_{3n}}{\lambda_n^2(1-\lambda_n^2)}e^{-\lambda_n^2 t}+\frac{\lambda_n^3\varphi_{1n}+\lambda_n(1+\lambda_n)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{2\lambda_n^2(1+\lambda_n)}e^{\lambda_n t}+$$

$$+\frac{-\lambda_n^3\varphi_{1n}-\lambda_n(1-\lambda_n)\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{2\lambda_n^2(1-\lambda_n)}e^{-\lambda_n t},$$

$$G_n(t,s)=\frac{1}{\mu_n}\left[-e^{-\lambda_n^2(t-s)}+2\left(\operatorname{ch}\lambda_n(t-s)-\lambda_n\operatorname{sh}\lambda_n(t-s)\right)\right], \qquad (5_1)$$

$$\mu_n=2\lambda_n(1-\lambda_n^2). \qquad (5_2)$$

Действительно, согласно определению решения смешанной задачи (1)–(3) имеем

$$\int_0^t\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)\cdot b_n(x)\left[-\frac{\partial^3}{\partial s^3}\Phi-\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right)-\frac{\partial^4}{\partial x^4}\Phi\right]-f\Phi\right\}dx\,ds=$$

$$=-\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right]_{t=0}dx+\int_0^l\varphi_2\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right]_{t=0}dx-\int_0^l\varphi_3\left[\Phi\right]_{t=0}dx. \qquad (6)$$

Пусть в (6) $\Phi=\Phi_m(t,x)=g(t)b_m(x)\in W_{k,p}(D)$, где $0\neq g(t)\in C^3(D_T)$, $m=1,2,3,\ldots$, тогда имеем

$$\int_0^t\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)\cdot b_n(x)\left[-g'''(s)b_m(x)+\lambda_m^2 g''(s)b_m(x)+\lambda_m^2 g'(s)b_m(x)-\lambda_m^4 g(s)b_m(x)\right]-\right.$$

$$\left.-f\left(s,x,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,x,Q\vec{a}(-s)))\right)g(s)b_m(x)\right\}dx\,ds=0.$$

Учитывая, что система функций $\left\{b_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированна в $L_p(D_l)$, из последнего равенства получаем

$$\int_0^t\left[a_n(s)\cdot\left(-g'''(s)+\lambda_n^2 g''(s)+\lambda_n^2 g'(s)-\lambda_n^4 g(s)\right)-\right.$$

$$\left.-\int_0^l f\left(s,x,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,x,Q\vec{a}(-s)))\right)g(s)b_n(x)dx\right]ds=0.$$

Отсюда, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^t g(s)\left[a_n'''(s)+\lambda_n^2 a_n''(s)-\lambda_n^2 a_n'(s)-\lambda_n^4 a_n(s)-\right.$$

$$\left.-\int_0^l f\left(s,x,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,x,Q\vec{a}(-s)))\right)b_n(x)dx\right]ds=0. \qquad (7)$$

Так как $g(t)$ – любая функция, удовлетворяющая вышеуказанным условиям, то $a_n(t)$ имеют обобщенные производные третьего порядка по t в смысле Соболева на интервале D_T и из (7) получим

$$a_n'''(t)+\lambda_n^2 a_n''(t)-\lambda_n^2 a_n'(t)-\lambda_n^4 a_n(t)=\int_0^l f\left(t,x,Q\vec{a}(t),Q\vec{a}(\delta(t,x,Q\vec{a}(-t)))\right)b_n(x)dx. \qquad (8)$$

Решая систему (8) методом вариации произвольных постоянных, получаем [6, с. 60–62]

$$a_n(t)=C_{1n}e^{-\lambda_n^2 t}+C_{2n}e^{\lambda_n t}+C_{3n}e^{-\lambda_n t}+$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s,x,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,x,Q\vec{a}(-s)))\right)b_n(x)\,G_n(t,s)\,dx\,ds,\ t\in D_t, \qquad (9)$$

где $G_n(t,s)$ и μ_n определяются из (5_1) и (5_2) соответственно.

Разложив функции $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,3}$ в ряд Фурье по собственным функциям $b_n(x)$, из начальных условий (2) получим

$$\left\|\vec{U}^2(t)-\vec{U}^1(t)\right\|_{B_p(T)} \le \text{ где } \le \left(M_1M_2\,\overline{l^{\frac{1}{q}}}\right)^2 M_3^3\Delta\left|\int_0^t\left\|\overline{\overline{h}}(s,x)\right\|_{L_p(D_l)}ds\right|,\ (t,x)\in D,$$

Используя эти условия, из (9) получаем счетную систему нелинейных интегральных уравнений (5).

3. Однозначная разрешимость счетной системы нелинейных интегральных уравнений

Лемма. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\left|\int_0^t\left\|f\left(s,\,x,\,Q\vec{\omega}(s),\,Q\vec{\omega}(s)\right)\right\|_{L_p(D_l)}ds\right|\le\Delta<\infty$, где $Q\vec{\omega}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(s)b_n(x)$;
2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\left\{h_1(t,x)_{|u,\vartheta}\right\}$, где $\int_0^t\left\|h_1(s,x)\right\|_{L_p(D_l)}ds<\infty$;
3. $\delta(t,x,u)\in Lip\left\{h_2(t,x)_{|u}\right\}$, где $\int_0^t\left\|h_2(s,x)\right\|_{L_p(D_l)}ds<\infty$;
4. $\left\|\vec{\omega}(t)\right\|_{B_p(T)}<\infty$.

Тогда счетная система нелинейных интегральных уравнений (5) имеет единственное решение в пространстве $B_p(T)$.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. При этом итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{cases} a_n^0(t)=\omega_n(t),\ t\in D_T, \\ a_n^{k+1}(t)=\omega_n(t)+ \\ +\dfrac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s,x,Q\vec{a}^k(s),Q\vec{a}^k(\delta(s,x,Q\vec{a}^k(-s)))\right)\times \\ \times b_n(x)\cdot G_n(t,s)\,dx\,ds,\ k=0,1,2,3,\ldots,\ t\in D_T. \end{cases} \tag{10}$$

В силу условий теоремы для первой разности $a_n^1(t)-a_n^0(t)$ из (10) получим

$$\left\|\vec{U}^{k+1}(t)-\vec{U}^k(t)\right\|_{B_p(T)}\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\int_0^t\int_0^l|f_0|\cdot|b_n(x)|\cdot\left|G_n(t,s)\right|dx\,ds\right|\le M_1M_2M_3\,\overline{l^{\frac{1}{q}}}\,\Delta, \tag{11^1}$$

где

$$f_k\equiv f\left(s,x,Q\vec{a}^k(s),Q\vec{a}^k(\delta(s,x,Q\vec{a}^k(-s)))\right),\ k=0,1,2,\ldots,$$

$$M_1=\max_{(t,s)}\left|\vec{G}(t,s)\right|,\ M_2=\left\|\frac{1}{\lambda}\right\|_{\ell_p},\ M_3=\max_x\left\|\vec{b}(x)\right\|_{B_q(l)},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Аналогично

$$\left\|\vec{a}^1(-t)-\vec{a}^0(-t)\right\|_{B_p(T)}\le M_1M_2M_3\,\overline{l^{\frac{1}{q}}}\,\Delta. \tag{11^2}$$

В силу второго условия теоремы для второй разности $a_n^2(t)-a_n^1(t)$ имеем

$$\left\| \vec{a}^{\,2}(t) - \vec{a}^{\,1}(t) \right\|_{B_p(T)} \le M_1 M_2 M_3 \int_0^t \int_0^l \left| f_1 - f_0 \right| dx\, ds.$$

Так как

$$\left| f\left(s,x,Q\vec{a}^{\,1}(s),Q\vec{a}^{\,1}(\delta(s,x,Q\vec{a}^{\,1}(-s)))\right) - f\left(s,x,Q\vec{a}^{\,0}(s),Q\vec{a}^{\,0}(\delta(s,x,Q\vec{a}^{\,0}(-s)))\right)\right| \le$$

$$\le h_1(s,x)\cdot\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right|\cdot\left|b_\nu(x)\right| + \right.$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|a_\nu^1\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right) - \right.$$

$$\left.\left.-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)\right|\cdot\left|b_\nu(x)\right|\right]$$

и в силу третьего условия теоремы

$$\left|a_\nu^1\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right) - a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)\right| \le$$

$$\le\left|a_\nu^1\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right) - a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)\right| +$$

$$+\left|a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right) - a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)\right| \le$$

$$\le \max_{s\in D_T}\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right| +$$

$$+\Delta\cdot\left|\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right) - \delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right)\right| \le$$

$$\le \max_{s\in D_T}\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right| + \Delta\cdot h_2(s,x)\cdot\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right|,$$

то из последнего неравенства с учетом (11^1) и (11^2) получим следующую оценку:

$$\left\| \vec{a}^{\,2}(t) - \vec{a}^{\,1}(t) \right\|_{B_p(T)} \le M_1 M_2 M_3 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(s,x)\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[2\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right| + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\Delta\cdot h_2(s,x)\cdot\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right|\right]\cdot\left|b_\nu(x)\right| dx\, ds\right| \le$$

$$\le M_1 M_2\, M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(s,x)\left(2\left\| \vec{a}^{\,1}(s) - \vec{a}^{\,0}(s) \right\|_{B_p(t)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\Delta\cdot h_2(s,x)\cdot\left\| \vec{a}^{\,1}(-s) - \vec{a}^{\,0}(-s) \right\|_{B_p(t)}\right) dx\, ds\right| \le$$

$$\le \left(M_1 M_2\, l^{\frac{1}{q}} \right)^2 M_3^3 \Delta \left| \int_0^t \left\| h(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right|, \quad (t,x)\in D, \qquad (12^1)$$

где $h(s,x) \equiv h_1(s,x)\left(2+\Delta\cdot h_2(s,x)\right)$. Меняя в (12^1) t на $-t$, s на $-s$, получаем

$$\left\| \vec{a}^{\,2}(-t) - \vec{a}^{\,1}(-t) \right\|_{B_p(T)} \le M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(-s,x) \left(2 \left\| \vec{a}^{\,1}(-s) - \vec{a}^{\,0}(-s) \right\|_{B_p(t)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \Delta \cdot h_2(-s,x) \cdot \left\| \vec{a}^{\,1}(s) - \vec{a}^{\,0}(s) \right\|_{B_p(t)} \right) dx\, ds \right| \le$$

$$\le \left(M_1 M_2\, l^{\frac{1}{q}} \right)^2 M_3^3 \Delta \left| \int_0^t \left\| \bar{h}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right|, \quad (t,x) \in D, \qquad (12^2)$$

где $\bar{h}(s,x) \equiv h_1(-s,x)\left(2 + \Delta \cdot h_2(-s,x) \right)$.

Пусть $\bar{\bar{h}}(s,x) \equiv \frac{1}{2}\left[h(s,x) + \bar{h}(s,x) \right]$. Тогда из (12^1) и (12^2) получим

$$\left\| \vec{U}^{\,2}(t) - \vec{U}^{\,1}(t) \right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le \left(M_1 M_2\, l^{\frac{1}{q}} \right)^2 M_3^3 \Delta \left| \int_0^t \left\| \bar{\bar{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right|, \quad (t,x) \in D, \qquad (12^3)$$

где $\left\| \vec{U}^{\,k}(t) - \vec{U}^{\,k-1}(t) \right\|_{B_p(T)} \equiv \max \left\{ \left\| \vec{a}^{\,k}(t) - \vec{a}^{\,k-1}(t) \right\|_{B_p(T)}; \left\| \vec{a}^{\,k}(-t) - \vec{a}^{\,k-1}(-t) \right\|_{B_p(T)} \right\}$.

Для последующей разности $a_n^3(t) - a_n^2(t)$ из (10) получим следующую оценку:

$$\left\| \vec{a}^{\,3}(t) - \vec{a}^{\,2}(t) \right\|_{B_p(T)} \le M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(s,x) \left(2 \left\| \vec{a}^{\,2}(s) - \vec{a}^{\,1}(s) \right\|_{B_p(t)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \Delta \cdot h_2(s,x) \cdot \left\| \vec{a}^{\,2}(-s) - \vec{a}^{\,1}(-s) \right\|_{B_p(t)} \right) dx\, ds \right|. \qquad (13^1)$$

В неравенстве (13^1) t меняем на $-t$ и s на $-s$. Тогда имеем

$$\left\| \vec{a}^{\,3}(-t) - \vec{a}^{\,2}(-t) \right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(-s,x) \left(2 \left\| \vec{a}^{\,2}(-s) - \vec{a}^{\,1}(-s) \right\|_{B_p(t)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \Delta \cdot h_2(-s,x) \cdot \left\| \vec{a}^{\,2}(s) - \vec{a}^{\,1}(s) \right\|_{B_p(t)} \right) dx\, ds \right|. \qquad (13^2)$$

С учетом (12^3) из (13^1) и (13^2) получим следующую оценку:

$$\left\| \vec{U}^{\,3}(t) - \vec{U}^{\,2}(t) \right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l \bar{\bar{h}}(s,x) \left\| \vec{U}^2(s) - \vec{U}^1(s) \right\|_{B_p(t)} dx\, ds \le \right.$$

$$\le M_1 M_2 M_3^2\, l^{\frac{1}{q}} \left| \int_0^t \left\{ \int_0^l \bar{\bar{h}}^{\,p}(s,x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\| \vec{U}^2(s) - \vec{U}^1(s) \right\|_{B_p(t)} ds \right| \le$$

$$\le \left(M_1 M_2\, l^{\frac{1}{q}} \right)^3 M_3^5 \Delta \frac{\left[\int_0^t \left\| \bar{\bar{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right]^2}{2!}.$$

Продолжая этот процесс для произвольного натурального числа k, аналогичным образом получаем

$$\left\| \vec{U}^{\,k+1}(t) - \vec{U}^{\,k}(t) \right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le \left(M_1 M_2 l^{\frac{1}{q}} \right)^{k+1} M_3^{2k+1} \Delta \frac{\left[\left| \int_0^t \left\| \overline{\overline{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right| \right]^k}{k!}. \qquad (14)$$

Далее, в силу (14) получим

$$\left\| \vec{U}(t) - \vec{U}^{\,k+1}(t) \right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l \overline{\overline{h}}(s,x) \left\| \vec{U}(s) - \vec{U}^{\,k+1}(s) \right\|_{B_p(t)} dx\, ds \right| +$$

$$+ M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l \overline{\overline{h}}(s,x) \left\| \vec{U}^{\,k+1}(s) - \vec{U}^{\,k}(s) \right\|_{B_p(t)} dx\, ds \right| \le$$

$$\le \left(M_1 M_2 l^{\frac{1}{q}} \right)^{k+1} M_3^{2k+1} \Delta \frac{\left[\left| \int_0^t \left\| \overline{\overline{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right| \right]^k}{k!} +$$

$$+ M_1 M_2 M_3^2 l^{\frac{1}{q}} \left| \int_0^t \left\| \overline{\overline{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} \left\| \vec{U}(s) - \vec{U}^{\,k+1}(s) \right\|_{B_p(t)} ds \right|. \qquad (15)$$

Применяя к (15) неравенство типа Гронуолла–Беллмана [7], получаем

$$\left\| \vec{U}(t) - \vec{U}^{\,k+1}(t) \right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le \left(M_1 M_2 l^{\frac{1}{q}} \right)^{k+1} M_3^{2k+1} \Delta \frac{\left[\left| \int_0^t \left\| \overline{\overline{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right| \right]^k}{k!} \times$$

$$\times \exp\left\{ M_1 M_2 M_3^2 l^{\frac{1}{q}} \left| \int_0^t \left\| \overline{\overline{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right| \right\}.$$

Так как

$$\left\| \vec{a}^{\,k+1}(t) - \vec{a}^{\,k}(t) \right\|_{B_p(T)} \le \left\| \vec{U}^{\,k+1}(t) - \vec{U}^{\,k}(t) \right\|_{B_p(T)},$$

то из оценки (14) следует, что при $k \to \infty$ последовательность функций $\left\{ \vec{a}^{\,k}(t) \right\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно по t к функции $\vec{a}(t) \in B_p(T)$. Отсюда следует существование решения системы (5). Покажем единственность этого решения в пространстве $B_p(T)$. Пусть счетная система нелинейных интегральных уравнений (5) имеет два решения: $\vec{a}(t) \in B_p(T)$ и $\vec{\vartheta}(t) \in B_p(T)$. Тогда для их разности получим

$$\left\| \vec{U}(t) - \vec{V}(t) \right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le M_1 M_2 M_3^2 l^{\frac{1}{q}} \left| \int_0^t \left\| \overline{\overline{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} \left\| \overline{U}(s) - \overline{V}(s) \right\|_{B_p(t)} ds \right|, \tag{16}$$

где $\left\| \vec{U}(t) - \vec{V}(t) \right\|_{B_p(T)} \equiv \max \left\{ \left\| \vec{a}(t) - \vec{\vartheta}(t) \right\|_{B_p(T)}; \left\| \vec{a}(-t) - \vec{\vartheta}(-t) \right\|_{B_p(T)} \right\}$.

Применяя к (16) неравенство типа Гронуолла–Беллмана, получим, что $\left\| \vec{a}(t) - \vec{\vartheta}(t) \right\|_{B_p(T)} = 0$ для всех $t \in [0;T]$. Отсюда следует единственность решения счетной системы (5) в пространстве $B_p(T)$.

4. Однозначная разрешимость смешанной задачи (1)–(3)

Подставив (5) в ряд (4), получим формальное решение смешанной задачи (1)–(3):

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\omega_n(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f\left(s,x,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,x,Q\vec{a}(-s)))\right) \cdot b_n(x) G_n(t,s)\, dx\, ds \right] \cdot b_n(x). \tag{17}$$

Теорема. Пусть выполняются условия леммы. Если $\vec{a}(t) \in B_p(T)$ является решением счетной системы (5), то ряд (17) будет решением смешанной задачи (1)–(3).

Доказательство. Так как $\vec{a}(t) \in B_p(T)$, то из равенства

$$\lim_{k\to\infty} u^k(t,x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n(t) \cdot b_n(x) = u(t,x)$$

следует, что

$$\lim_{k\to\infty} f\left(t,x,u^k(t,x),u^k(\delta(t,x,u^k(-t,x)),x)\right) =$$
$$= f\left(t,x,u(t,x),u(\delta(t,x,u(-t,x)),x)\right) \tag{18}$$

в смысле метрики $L_p(D)$.

Строим последовательность функций:

$$P_k(t) = \int_0^t \int_0^l \left\{ u^k(s,x)\left[-\Phi_{sss} - \Phi_{ssxx} - \Phi_{sxx} - \Phi_{xxxx} \right] - \right.$$
$$\left. - f\left(s,x,u^k(s,x),u^k(\delta(s,x,u^k(-s,x)),x)\right) \cdot \Phi(s,x) \right\} dx\, ds +$$
$$+ \int_0^l \varphi_1^k \left[\Phi_{tt} + \Phi_{txx} + \Phi_{xx} \right]_{t=0} dx - \int_0^l \varphi_2^k \left[\Phi_t + \Phi_{xx} \right]_{t=0} dx + \int_0^l \varphi_3^k \left[\Phi \right]_{t=0} dx. \tag{19}$$

Покажем, что при $k \to \infty$ (19) есть интегральное тождество (6), т.е. $\lim_{k\to\infty} P_k = 0$ в смысле метрики $L_p(D)$.

Интегрируя по частям отдельные слагаемые в (19) и учитывая условия теоремы и начальные условия

$$a_n(0) = \varphi_{1n},\ a_n'(0) = \varphi_{2n},\ a_n''(0) = \varphi_{3n},$$

имеем

$$P_k = \int_0^l \left(\varphi_1(x) - \sum_{n=1}^{k} \varphi_{1n} b_n(x) \right) \left[\Phi_{tt} + \Phi_{txx} + \Phi_{xx} \right]_{t=0} dx -$$
$$- \int_0^l \left(\varphi_2(x) - \sum_{n=1}^{k} \varphi_{2n} b_n(x) \right) \left[\Phi_t + \Phi_{xx} \right]_{t=0} dx + \int_0^l \left(\varphi_3(x) - \sum_{n=1}^{k} \varphi_{3n} b_n(x) \right) \left[\Phi \right]_{t=0} dx +$$

$$+\int_0^t\int_0^l \Phi(s,x)\sum_{n=1}^{k}\left\{\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y,Q\vec{a}(-s)))\right)\cdot b_n(y)\,dy - \right.$$

$$\left. - f\left(s,x,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,x,Q\vec{a}(-s)))\right)\right\}\cdot b_n(x)\,dx\,ds. \qquad (20)$$

Очевидно, что первые три интеграла в (20) стремятся к нулю при $k\to\infty$, так как $\varphi_i(x)\in L_p(D_l)$. Сходимость разности двух последних интегралов в (20) при $k\to\infty$ следует из (18). Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = 0$. Это и доказывает теорему.

Литература

1. Джураев, Т.Д. Вычисления собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков / Т.Д. Джураев, Б.В. Логинов, И.А. Малюгина // Дифференц. уравнения мат. физики и их приложения: сб. науч. тр. – Ташкент: Фан, 1989. – С. 24–36.

2. Бекиев, А.Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка / А.Б. Бекиев // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: тезисы докладов. – М.: ФВМиК МГУ им. Ломоносова, 2009. – С. 140–141.

3. Чернятин, В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В.А. Чернятин. – М.: МГУ, 1991. – 112 с.

4. Вагабов, А.И. Аналитический метод решения смешанной задачи для квазилинейной параболической системы / А.И. Вагабов, З.А. Абдурахманов // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 7. – С. 3–12.

5. Юлдашев Т.К. Метод разделения переменных: учебное пособие / Т.К. Юлдашев. – Ош: ОшГЮИ, 2010. – 166 с.

6. Юлдашев, Т.К. Уравнения в частных производных четвертого порядка / Т.К. Юлдашев. – Ош: ОшГЮИ, 2010. – 136 с.

7. Филатов, А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. – М.: Наука, 1976. – 152 с.

Поступила в редакцию 18 февраля 2011 г.

ON A MIXED VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER WITH REFLECTING DEVIATION

In this paper we consider the questions of one value solvability of mixed problem for a nonlinear partial differential equation, consisting superposition of parabolic and elliptic operators in the left-hand side and reflecting deviation on the right-hand side of this equation. We accept the integral identity and by the Fourier method of separation variables we obtain the countable system of nonlinear integral equation with deviation. The one value solvability of this countable system of nonlinear integral equation we study by the method of successive approximations. The convergence of the Fourier series we prove on the base of the accepting in this work integral identity.

Keywords: superposition of parabolic and elliptic operators, reflecting deviation, general derivatives, countable system of nonlinear integral equations, method of successive approximations, convergence of Fourier series.

Yuldashev Tursun Kamaldinovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Doctoral Candidate, Department of Higher Mathematics, Siberian state aerospace university, Krasnoyarsk.

Юлдашев Турсун Камалдинович – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант, кафедра высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

e-mail: tursunbay@rambler.ru