

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования**  
**«Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)»**  
**Архитектурно-строительный институт**  
**Кафедра «Строительное производство и теория сооружений»**

**РАБОТА ПРОВЕРЕНА**

Рецензент, профессор

\_\_\_\_\_ Сабуров В.Ф.

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

**ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ**

Заведующий кафедрой, к.т.н., доцент

\_\_\_\_\_ Пикус Г.А.

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

**ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ МНОГОЭТАЖНОГО КАРКАСА НА  
ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ  
НЕЛИНЕЙНОСТИ**

**НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

**Научный руководитель, д.т.н., профессор**

\_\_\_\_\_ Потапов А.Н.

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

**Автор**

**аспирант группы АС-4503**

\_\_\_\_\_ Зямбаев Н.А.

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

**Нормоконтролёр, профессор**

\_\_\_\_\_ Потапов А.Н.

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

Челябинск, 2018

## Оглавление

Оглавление .....	2
Аннотация.....	4
Введение .....	9
Глава 1. Обзор существующих методов динамического расчета и краткое изложение основных положений теории временного анализа.....	10
§1.1. Обзор существующих методов решения задач динамики сооружений.....	10
§1.2. Краткое изложение основных положений теории временного анализа .....	13
§1.3. Характеристическое матричное квадратное уравнение.....	14
Глава 2. Построение математической модели физически нелинейных колебаний многоэтажного каркаса .....	18
§2.1. Построение вектора нелинейной восстанавливающей силы.....	18
§2.2. Построение вектора нелинейной динамической реакции ДДС.....	27
§2.3. Аналитические зависимости величин скачков в моменты начала и конца нелинейной работы ( $t = t_i$ ) .....	29
§2.4. Построение функции, учитывающей изменение длины пластических зон стоек многоэтажного каркаса при его деформировании по билинейной диаграмме в процессе неупругой работы .....	30
Глава 3. Построение расчетной динамической модели многоэтажного каркаса и реализация задачи временного анализа каркаса на импульсное воздействие.....	34

§3.1. Построение параметров расчетной динамической модели (РДМ) .....	34
§3.2. Описание программы расчета конструктивно нелинейной дискретной диссипативной системы методом временного анализа, написанной в среде MATLAB .....	36
§3.3. Исходные данные для расчета многоэтажного каркаса методом временного анализа .....	39
§3.4. Реализация задачи .....	40
Выводы по работе .....	59
Рекомендации по расчету многоэтажного каркаса .....	59
Библиографический список .....	60
Нормативные документы и стандарты .....	75
Приложения .....	76
Приложение 1. Описание программы расчета многоэтажного каркаса на импульсное воздействие .....	76
Приложение 2. Схема программы расчета многоэтажного каркаса на импульсное воздействие .....	77
Приложение 3. Список публикаций автора по тематике исследования .....	78

## Аннотация

Данная научно-квалификационная работа посвящена расчету многоэтажного плоского каркаса на импульсное воздействие с учетом нелинейной работы материала стоек конструкции. Предложена математическая модель построения вектора динамической восстанавливающей силы, изменяющейся по билинейному закону с разгрузкой. Закон деформирования стоек этажей каркаса представлен в виде диаграммы жесткости «восстанавливающая сила – относительное перемещение», имеющей многоцикловый характер. Произведен расчет каркаса в рамках нескольких частных случаев нелинейной работы материала элементов конструкции (упругая работа каркаса, работа материала стоек по билинейной и диаграмме Прандтля с постоянной длиной пластической зоны, равной высоте колонн; деформирование каркаса по билинейной диаграмме с учетом изменения длины пластических зон в стойках).

В ходе расчета для представленных выше случаев производится сравнение кинематических и силовых параметров реакции расчетной динамической модели, параметров собственных колебаний системы, а также проверка конструкции на прочность. Полученные результаты сравниваются с данными расчета, выполненного с помощью численных методов в программном комплексе Лира.

### **Актуальность работы**

Исследование нелинейной работы материалов в строительных конструкциях в условиях динамических нагрузений представляет повышенный интерес, т.к. в настоящее время анализ такого рода задач проводится в основном численными методами. Данные методы не позволяют записывать решение в аналитическом виде и, следовательно, проводить полноценный динамический анализ на всем интервале

интегрирования исходной задачи. Кроме того, численные методы не позволяют проводить исследование многоциклового деформирования материалов. В работах, посвященных численным методам, отмечается недостаточность исследований в области колебаний конструкций с нелинейной восстанавливающей силой. В настоящей работе применяется метод временного анализа, с помощью которого динамическая реакция записывается в виде интеграла Дюамеля. Этот метод дает возможность аналитически определить все параметры реакции с учетом упругопластической и конструктивно нелинейной работы материала и конструкции. Кроме того, он позволяет учесть многоцикловый характер деформирования каркаса.

**Цель научной работы** – разработка алгоритма расчета задачи упругопластических колебаний многоэтажного каркаса с учетом диссипации энергии при импульсном воздействии методом временного анализа.

**Объект исследования** – плоский многоэтажный каркас.

**Предмет исследования** – параметры динамической реакции и НДС стоек каркаса.

**Задачи исследования**

1. Разработка математической модели колебаний многоэтажного каркаса с упругопластической восстанавливающей силой, подчиняющейся билинейному закону в координатах «восстанавливающая сила – относительное перемещение».
2. Построение аналитической зависимости восстанавливающей силы  $R(t)$  для произвольного полуцикла диаграммы деформирования.

3. Составление алгоритма нелинейного расчёта многоэтажного каркаса при импульсном воздействии в системе MATLAB по схеме временного анализа.
4. Получение результатов, их анализ, выводы.

#### **Методы проведенных исследований:**

- метод временного анализа дискретных диссипативных систем;
- методы теории матриц;
- методы строительной механики;
- методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

#### **Научная новизна работы**

- Использование метода временного анализа при расчете физически нелинейной задачи колебаний с учетом многоциклового деформирования многоэтажного каркаса при импульсном воздействии
- Создание расчетной схемы временного анализа, позволяющей учитывать изменения параметров пластических зон в несущих элементах каркаса при билинейном законе деформирования

#### **Практическая значимость**

Предложенная математическая модель расчета многоэтажного каркаса на импульсное воздействие позволяет в аналитическом виде получать все параметры динамической реакции конструкции на импульсное воздействие. Это открывает возможность проводить качественную и количественную оценку напряженно-деформированного состояния каркаса при изменении параметров расчетной динамической модели (жесткостных и демпфирующих характеристик, параметров нагружения).

Вычислительный механизм алгоритма расчета динамической задачи по методу временного анализа основан на матричных операциях, поэтому он может быть интегрирован в современные программные продукты для расчета строительных конструкций.

### **Положения, выносимые на защиту**

- 1) математическая модель колебаний многоэтажного каркаса с упругопластической восстанавливающей силой, аппроксимируемой кусочно-линейной функцией в координатах «восстанавливающая сила – относительное перемещение»;
- 2) реализация задачи нелинейных колебаний каркаса методом временного анализа с учетом шагового изменения длины пластических зон стоек в процессе неупругого деформирования;

компьютерные программы, написанные на языке *MATLAB*, для проведения временного анализа нелинейной реакции многоэтажного каркаса на импульсное воздействие

### **Апробация результатов исследования**

Основные результаты по проведенным исследованиям опубликованы в сборниках конференции аспирантов и докторантов, сборнике трудов кафедры строительной механики, Вестнике ЮУрГУ (см. Приложение 3). Автор также принимал участие в конференциях различного уровня, где были доложены результаты проделанной работы:

- 1) конференции профессорско-преподавательского состава кафедры строительного производства и теории сооружений;
- 2) конференции аспирантов и докторантов ЮУрГУ;
- 3) Международная научно-практическая конференция «Теория и практика расчёта зданий, сооружений и элементов конструкций».

Аналитические и численные методы» (г. Москва, МГСУ, декабрь 2014 г.);

- 4) 4-я Всероссийская конференция (Новосибирск, 11-13 апреля 2017 г.);
- 5) VII Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Новосибирск, НГАСУ, 2 – 4 июля 2018) – поданы тезисы доклада.

**Личный вклад автора** состоит в:

- разработке алгоритма нелинейного расчета по методу временного анализа многоэтажного каркаса на импульсное воздействие с учетом изменения длины пластических зон в стойках;
- составлении программ в среде MATLAB для проведения реализации задачи временного анализа многоэтажного каркаса на импульсное воздействие;
- обработке и анализе полученных результатов расчётов;
- выполнении сравнительных расчётов с помощью известных численных методов.

## Введение

Современное развитие техники и технологии строительства обуславливает проектирование зданий и сооружений, которые должны эксплуатироваться в различных условиях. Особое место среди таких условий занимают нестационарные и запроектные воздействия, которые включают в себя широкий спектр динамических воздействий на конструкцию. Одной из распространенных конструктивных форм зданий является многоэтажный каркас, который распространен в гражданском и промышленном строительстве.

Многоэтажные каркасы, применяемые в современной практике проектирования, рассчитываются на различные виды динамических нагрузок, такие, как ветровые, ударные, вибрационные, технологические воздействия. Поэтому очень важно уметь учитывать реальную картину работы конструкции в процессе нелинейного расчета, чтобы адекватно оценивать величину накопленных пластических перемещений и характер петель пластического гистерезиса.

# Глава 1. Обзор существующих методов динамического расчета и краткое изложение основных положений теории временного анализа

## *§1.1. Обзор существующих методов решения задач динамики сооружений*

Общие принципы работы многоэтажных каркасов и, в частности, металлических конструкций, под действием нагрузок различного типа освещается в работах [10 – 15, 113, 123]. Обобщенный анализ работы сдвиговых рам проводился на основе метода Хольцера-Миклестада в [123]. Реакция строительных конструкций на сейсмические и вибрационные нагрузки рассматривалась в [84 – 91, 110, 124], вопросы работы зданий под воздействием ветровых нагрузок исследуется в [5], динамическая реакция конструкций при взрывных, аварийных и запроектных воздействиях изучалась в [23 – 28, 118, 126], приложение вероятностных методов к расчету сооружений на сейсмические нагрузки освещалась в [92], работа конструкций под воздействием импульсной нагрузки рассматривалась в [30 – 41, 43, 44].

Достоверность результатов расчета строительных конструкций на динамические нагрузки наиболее вероятна в случае учета демпфирующих и нелинейных свойств материала конструктивных элементов многоэтажного каркаса. Учет внутреннего трения при решении динамических задач производился в [42, 46, 111, 115, 117, 119 –123]. Модели непропорционального демпфирования были разработаны в [1].

Далее приведем краткий обзор методов расчета, применяемых в решении задач колебаний строительных конструкций.

В процессе роста вычислительных возможностей персональных компьютеров и усовершенствованием суперкомпьютерной техники активно развиваются алгоритмы численного интегрирования уравнения движения для определения динамической реакции системы. Однако такие подходы очень трудоемки с точки зрения процедуры вычислений, а также обладают низкой устойчивостью и ростом погрешностей на каждом шаге вычислений. Недостатки численного метода шагового интегрирования динамических задач указаны в [123]. Среди наиболее распространенных численных методов можно выделить метод конечных элементов, метод конечных разностей [93 – 98]. Методу дополнительных конечных элементов при расчете ж/б конструкций уделялось внимание в [99]. Еще один численный метод расчета, интегрированный в такие программные комплексы, как Robot Structural Analysis, SCAD Office, Лира САПР [105 – 108], – метод прямого интегрирования уравнения движения. Этот подход основан на схеме неявного интегрирования, которая реализуется с помощью модифицированного метода центральных разностей [105 – 108].

Методы Ритца, Бубнова – Галёркина и другие вариационные методы изучались в [100 – 109].

Для анализа собственных частот и форм колебаний применяются метод Хольцера, метод передаточной матрицы [123], метод разложения по собственным формам [110].

Один из распространенных методов для динамического анализа сооружений среди аналитических – метод разложения по собственным формам колебаний консервативной системы. Он позволяет точно решить задачу, если принять модель пропорционального демпфирования, в противном случае его использование может привести к большим погрешностям.

Применяемый в работе метод временного анализа основан на построении реакции системы в форме интеграла Дюамеля в замкнутом виде [1]. Данный подход может быть распространен на физически-нелинейный класс задач и давать точное решение, учитывая реальную работы конструкций в условиях, соответствующим принятым допущениям. Подход представляет собой временной анализ общего вида. Он в достаточной мере универсален, так как может быть применен к различным динамическим ДДС, не зависимо от условий демпфирования и характера внешнего воздействия. Универсальность подхода состоит еще и в том, что, не теряя общности, его можно использовать в динамическом анализе важнейшего класса нелинейных задач, например, колебаний упругопластических и нелинейно-упругих ДДС. При соответствующей разработке физических моделей деформирования этот подход позволяет определить реакцию системы в замкнутом виде [1].

В настоящее время метод временного анализа применяется для полноценного динамического анализа дискретных диссипативных систем и нашел практическое применение при решении следующих классов задач:

- в [1] рассмотрена работа каркасного здания под действием синусоидальных импульсов. Материал каркаса работает согласно диаграмме Прандтля
- в работе [2] изучаются колебания ферменных конструкций с учетом физической (работа материала по билинейной диаграмме) и конструктивной нелинейностью
- в работе [3] проведен анализ колебаний многоэтажного каркаса под воздействием импульсной нагрузки, материал которого деформируется по билинейной диаграмме без учета пластических деформаций

Обзор приведенных методов показывает, что наиболее полный и многосторонний динамический анализ возможен в том случае, решение задачи находится с помощью анализа характеристического матричного квадратного уравнения. Использование в динамическом расчете дискретной диссипативной системы выявленных свойств соотношений матричного квадратного уравнения позволяет производить полноценный динамический анализ работы конструкции.

## *§1.2. Краткое изложение основных положений теории временного анализа*

### **1.2.1 Уравнение движения дискретной диссипативной системы (ДДС)**

Уравнение движения дискретной диссипативной системы (ДДС) и начальные условия записываются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{Y}(t) + C_i\dot{Y}(t) + R(t) &= P(t), & (a) \\ Y(t_0) = Y_0, \dot{Y}(t_0) &= \dot{Y}_0, & (б) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $t_0 = 0$  – время начала действия динамической нагрузки;  $M = \text{diag} (m_1, \dots, m_n)$ ,  $C_i = C_i^T \in M_n(R)$  – матрицы масс и демпфирования;  $Y(t) = \{y_j(t)\} (j = 1, \dots, n)$ ,  $P(t)$  – векторы перемещений и внешней нагрузки,  $R(t) = \{R_j(t)\} (j = 1, \dots, n)$  – вектор восстанавливающей силы (здесь  $j$  – номер этажа каркаса).

Модель трения, применяемая в ходе решения уравнения (1), относится к типу непропорционального демпфирования. [1, 40]. Ниже

приведены в кратком изложении основные пункты теории решения матричного квадратного уравнения и построения интеграла Дюамеля [1 – 4].

### §1.3. Характеристическое матричное квадратное уравнение

Характеристическое матричное квадратное уравнение для однородного ОДУ в (1) представляется в виде [1]:

$$MS^2 + CS + K = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) вытекает из однородного ОДУ в (1) с помощью фундаментальной матрицы

$$\Phi(t) = e^{St} \quad (3)$$

Для уравнения (2) записываются матричные корни в виде корневой пары [1 – 3]:

$$S_{1,2} = M^{-1}(-C + V \pm U)/2 \quad (4)$$

с неизвестными матрицами  $U$  и  $V$ , но имеющими заданные свойства:

$$V = -V^T, U = U^T \quad (5)$$

Система уравнений, в которой с помощью итерационного цикла отыскиваются матрицы  $V$  и  $U$ , выглядит так:

$$\begin{cases} U = M\sqrt{-M^{-1}D}; D = 4K - (C - V)M^{-1}(C + V) \\ UM^{-1}(C + V) = (C - V)M^{-1}U \end{cases} \quad (6)$$

Далее получаем матричные соотношения, являющиеся аналогом теоремы Виета для обычного квадратного уравнения:

$$\begin{cases} S_1^T M + MS_2^T = -C \\ S_1^T MS = K \end{cases} \quad (7)$$

Фундаментальная матрица и матрицы  $U$  и  $S$  обладают свойствами

$$US = S^T U, \quad U\Phi(t) = \Phi^T(t)U \quad (8)$$

Физический смысл уравнений теоремы Виета имеют – это уравнения движения собственных форм колебаний системы. Знание соотношений (7), (8) позволяет провести интегрирование ОДУ и в замкнутом виде получить реакцию системы (интеграл Дюамеля).

### 1.2.2. Интеграл Дюамеля для произвольных дискретных диссипативных систем (ДДС)

Выражение реакций системы выводится в предположении действия в узлах дискретной диссипативной системы динамической нагрузки,  $p_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), представленной вектором  $P(t)$  (рис. 1). Полагая, что в уравнении (2) статической составляющей внешней нагрузки нет, будем иметь:

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = P(t). \quad (1a)$$

Частное решение этого уравнения, исходя из метода вариации произвольных постоянных Лагранжа [93], записывается так

$$Y(t) = \text{Re} [\Phi(t)A(t)], \quad (9)$$

где  $A(t)$  – вектор произвольных постоянных.

Для получения решения дважды продифференцируем выражение (9).

После подстановки в уравнение (2) вектора функции  $Y(t)$  и ее

производных получим систему двух матричных уравнений:

$$\operatorname{Re} [\Phi(t) \dot{A}(t)] = 0, \quad \operatorname{Re} [S\Phi(t) \dot{A}(t)] = M^{-1}P(t). \quad (10)$$

Т.к. в системе уравнений (10) вектор  $A(t)$  содержится в виде производной, то вначале необходимо разрешить эту систему относительно  $\dot{A}(t)$ :

$$\dot{A}(t) = 2\Phi(-t)U^{-1}P(t), \text{ где } \Phi(-t) = \Phi(t)^{-1} = e^{-St}.$$

После интегрирования получаем:

$$A(t) = 2U^{-1} \int_{t_0}^t \Phi(-\tau)^T P(\tau) d\tau, \quad (11)$$

где  $t_0$  – время начала действия внешней нагрузки  $P(t)$ . Тогда уравнение реакции системы (18) принимает следующий вид:

$$Y(t) = 2\operatorname{Re} \left\{ U^{-1} \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)^T P(\tau) d\tau \right\}. \quad (12)$$

Полученное уравнение описывает вынужденные колебания диссипативной вязкоупругой дискретной системы с  $n$  степенями свободы при действии динамической нагрузки общего вида.

Дифференцируя выражение (12), получаем формулу для вектора скорости:

$$\dot{Y}(t) = 2\operatorname{Re} \left\{ SU^{-1} [\Phi(t-t_0)^T M(-\bar{S} Y_0 + \dot{Y}_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)^T P(\tau) d\tau] \right\} \quad (13)$$

Приведем некоторые частные случаи интеграла Дюамеля.

**1.2.3. Построение реакции вынужденных колебаний системы при действии синусоидального импульса.**

В случае действия импульса синусоидальной формы (рис. 2):  
 $P(t) = \sin(\theta t)P_0$ , где  $\theta = E\pi/t_1$ ;  $t_1$  – продолжительность действия импульсов;  $P_0$  – вектор амплитуд импульсной нагрузки, уравнение реакции системы строится на результатах анализа, связанных с действием вибрационной нагрузки [4].

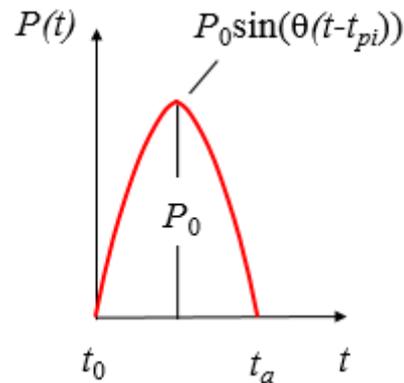


Рис. 1. Синусоидальный импульс.

Уравнения реакции в общем виде имеет следующий вид:

$$Y(t) = 2\text{Re} [U^{-1}I(t)]P_0 = 2\text{Re} [Z_p(t)]P_0, \quad \dot{Y}(t) = 2\text{Re} [SU^{-1}I(t)]P_0, \quad (18)$$

Матричная функция  $I(t)$  выражается так:

$$I(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau)^T \sin(\theta\tau+\varphi) d\tau. \quad (19)$$

Интегрирование данного выражения связано с вычислением непрерывного уравнения Сильвестра [1]:

$$(S^T)^2 I(t) + I(t)\theta^2 = F(t), \quad (20)$$

где

$$F(t) = S^T [\Phi(t)^T \sin \varphi - \sin(\theta t + \varphi)] + [\Phi(t)^T \cos \varphi - \cos(\theta t + \varphi)]\theta. \quad (21)$$

Учитывая, что все параметры импульсов, действующих в уровне

каждого из этажей, одинаковы, кроме амплитудных значений, решение уравнения (20) и функция  $Z_p(t)$  будут иметь вид:

$$I(t) = [(S^T)^2 + \theta^2]^{-1} F(t). \quad (22)$$

$$Z_p(t) = \{S[\Phi(t) \sin \varphi - \sin (\theta t + \varphi)] + [\Phi(t) \cos \varphi - \cos (\theta t + \varphi)]\theta\} [U(S^2 + \theta^2)]^{-1} \quad (23)$$

При  $t \geq t_a$  конструкция совершает свободные колебания, которые определяются следующими уравнениями:

$$Y(t) = 2\text{Re} [\Phi(t-t_a)Z_p(t-t_a)]P_0, \quad \dot{Y}_1(t) = 2\text{Re} [S \Phi(t-t_a)Z_p(t-t_a)]P_0. \quad (24)$$

## Глава 2. Построение математической модели физически нелинейных колебаний многоэтажного каркаса

### *§2.1. Построение вектора нелинейной восстанавливающей силы*

Принятая модель деформирования материала каркаса представляет собой кусочно-линейную аппроксимацию, т.е. весь процесс нелинейной динамической реакции по времени разбивается на отдельные (последовательные) интервалы  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), внутри которых параметры расчетной модели (элементы матриц масс, жесткости и демпфирования) постоянны. Это обеспечивает последовательное построение динамической реакции по схеме упругого решения и означает, что на данных квазилинейных интервалах уравнение движения в математическом плане рассматривается как обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) с постоянными коэффициентами.

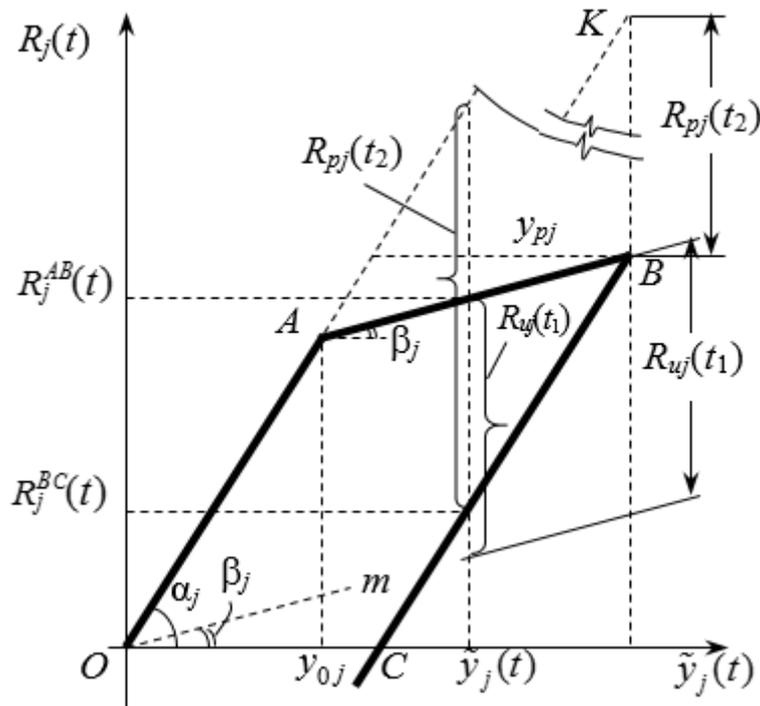


Рис. 2. Диаграмма деформирования 1-го полуцикла  $j$ -го этажа каркаса.

Для построения закона «ДВС – относительное перемещение»:  $R_j(t) \sim \tilde{y}_j(t)$  рассматривается упругопластическая работа  $j$ -го этажа каркаса. Каждый полуцикл диаграммы деформирования (ДД) имеет три участка: нагружение, упрочнение и разгрузка. Первому п/циклу соответствуют участки  $OA$ ,  $AB$  и  $BC$  (рис. 2).

### Аналитические зависимости ДВС в 1-м полуцикле

Произведем построение ДВС на каждом из трех участков. Номер п/цикла у ДВС и перемещений обозначается далее верхним индексом.

*Участок нагружения  $OA$ .* На участке  $OA$  ДВС имеет вид:

$$R_j^{(1)}(t) = R_{ej}^{(1)}(t) = \operatorname{tg} \alpha_j \cdot \tilde{y}_j(t), \quad (25)$$

где  $R_{ej}^{(1)}(t)$  – квазилинейная восстанавливающая сила в 1-м п/цикле ДД.

*Участок упрочнения  $AB$ .* Здесь воспользуемся вспомогательным построением с помощью прямой  $Om \parallel AB$  (рис. 2). Тогда ДВС будем

иметь:

$$\begin{aligned} R_j^{(1)}(t) &= R_{ej}^{(1)}(t) + R_{uj}^{(1)}(t_1) = \\ &= \operatorname{tg} \beta_j \cdot \tilde{y}_j(t) + \Delta_j y_{0j}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$R_{ej}^{(1)}(t) = \operatorname{tg} \beta_j \cdot \tilde{y}_j(t), \quad R_{uj}^{(1)}(t_1) = \Delta_j y_{0j}, \quad \Delta_j = \operatorname{tg} \alpha_j - \operatorname{tg} \beta_j, \quad (27)$$

$t_1$  – время начала нелинейной работы (текучесть) стоек  $j$ -го этажа (соответствует точке  $A$  на ДД).

*Участок разгрузки BC.* На данном участке стойки  $j$ -го этажа получают пластические (необратимые) деформации вследствие появления остаточных перемещений  $y_{pj}^{(1)}$ . Поэтому ДВС будет содержать остаточную составляющую  $R_{pj}^{(1)}(t_2)$ :

$$R_j^{(1)}(t) = R_{ej}^{(1)}(t) - R_{pj}^{(1)}(t_2), \quad (28)$$

где

$$R_{ej}^{(1)}(t) = \operatorname{tg} \alpha_j \cdot \tilde{y}_j(t), \quad R_{pj}^{(1)}(t_2) = \operatorname{tg} \alpha_j \cdot y_{pj}^{(1)}, \quad (29)$$

$t_2$  – время завершения нелинейной работы (начало разгрузки) стоек  $j$ -го этажа (соответствует точке  $B$  на ДД).

### **Аналитические зависимости ДВС во 2-м полуцикле**

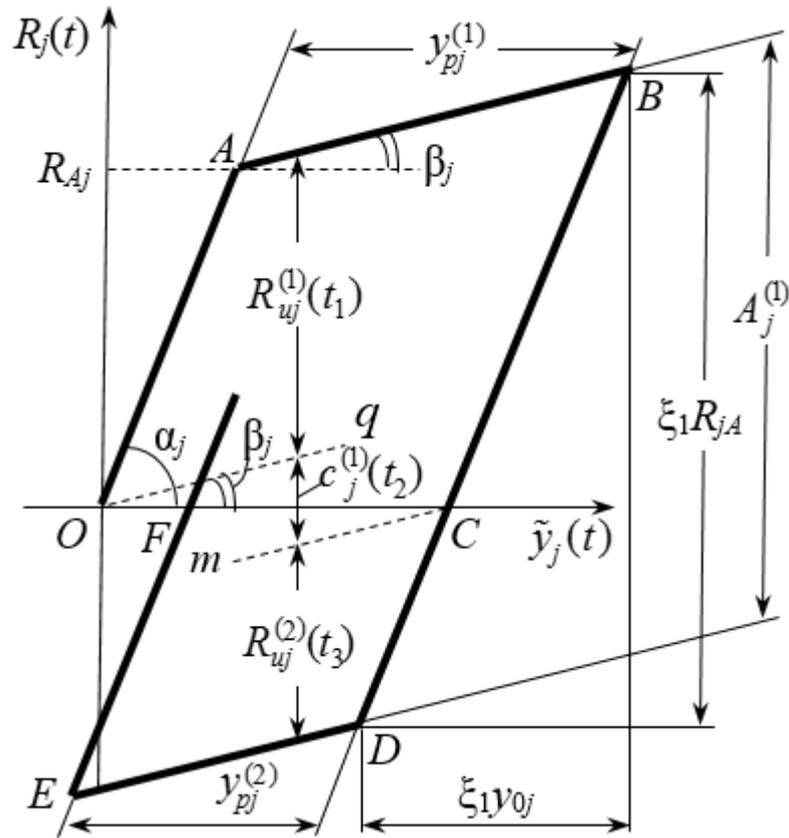


Рис. 3. Диаграмма деформирования для первых двух п/циклов  $j$ -го этажа каркаса.

При составлении зависимостей для ДВС во 2-м полуцикле (рис. 3) необходимо определить положение точки  $D$  на ДД и дать несколько определений.

Точка  $D$  определяется в соответствии с принципом Мазинга [49, 50, 58], утверждающим, что в 1-м цикле переход к неупругому деформированию происходит после упругого деформирования на величину  $2\sigma_T$ , где  $\sigma_T$  – предел текучести материала. В координатах, принятых на ДД, величина  $2\sigma_T$  соответствует удвоенному значению  $2R_{Aj}$  (рис. 3), что составляет ординату  $2R_{Aj} = \xi_1 y_{0j} \operatorname{tg} \alpha_j$  ( $\xi_1 = 2$ ). Отсюда

$$A_{uj} = \xi_1 y_{0j} \Delta_j. \quad (30)$$

С другой стороны, эта величина заключена между параллельными прямыми, проходящими по линиям упрочнения  $AB$  и  $DE$  петли

упругопластического гистерезиса (УПГ). Поэтому  $A_{uj}$  можно представить как сумму трех сил, две из которых есть предельные значения ДВС 1-го и 2-го п/циклов ДД:  $R_{uj}^{(1)}(t_1)$ ,  $R_{uj}^{(2)}(t_3)$ , а третья включает квазилинейную силу  $c_j^{(1)}(t_2)$ , действующую в  $j$ -м этаже к моменту начала разгрузки, равную:

$$c_j^{(1)}(t_2) = \operatorname{tg}\beta_j y_{pj}^{(1)}. \quad (31)$$

Тогда величина  $A_{uj}$ , учитывая соотношение в (4)  $R_{uj}^{(1)}(t_1) = \Delta_j y_{0j}$ , равна

$$A_{uj} = \Delta_j y_{0j} + \operatorname{abs}(R_{uj}^{(2)}(t_3)) + \operatorname{tg}\beta_j y_{pj}^{(1)}, \quad (32)$$

где  $t_3$  – время начала нелинейной работы (повторная текучесть) в сечениях стоек  $j$ -го этажа (соответствует точке  $D$  на ДД).

Второе слагаемое в (32) записывается по абсолютной величине, так как  $R_{uj}^{(2)}(t_3) < 0$ . Последнее слагаемое  $c_j^{(1)}(t_2)$  численно равно ординате между параллельными прямыми, проходящими через точки  $O$  и  $C$  под углом  $\beta_j$  (рис. 3). В физическом смысле это слагаемое суть величина упрочнения материала, приобретенного стойками  $j$ -го этажа за 1-й полуцикл ДД.

Присвоим величине  $A_{uj}$  верхний индекс, который в отличие от других величин будет означать номер соответствующей петли упругопластического гистерезиса ДД. Величину  $A_{uj}^{(1)}$  будем называть амплитудой предельных ДВС 1-й петли УПГ ДД (или короче: предельной амплитудой 1-й петли).

Кроме того, будем придерживаться следующего правила. Так как каждая петля УПГ содержит два п/цикла ДД: предыдущий и последующий, то номер петли УПГ будем определять по номеру предыдущего п/цикла в петле.

*Участок нагружения CD.* На данном участке ДВС имеет вид:

$$R_j^{(2)}(t) = R_{ej}^{(2)}(t) = R_{ej}^{(1)}(t) - R_{pj}^{(1)}(t_2) =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha_j [\tilde{y}_j(t) - y_{pj}^{(1)}], \quad (33)$$

где  $R_{ej}^{(2)}(t)$  – квазилинейная составляющая ДВС 2-го п/цикла ДД выражается через соответствующие величины (28), (29) 1-го п/цикла.

*Участок упрочнения DE.* На этом участке ДВС получаем по формуле:

$$R_j^{(2)}(t) = R_j^{(1)}(t) - A_{uj}^{(1)}$$

как разность между ДВС  $R_j^{(1)}(t)$ , определяемой в (27), и предельной амплитудой  $A_{uj}^{(1)}$ . Учитывая (26) и (30), имеем

$$\begin{aligned} R_j^{(2)}(t) &= R_{ej}^{(1)}(t) + (1 - \xi_1) \Delta_j y_{0j} = \\ &= \operatorname{tg} \beta_j \cdot \tilde{y}_j(t) + (1 - \xi_1) \Delta_j y_{0j}. \end{aligned} \quad (34)$$

Используя аналогию с ДВС на участке  $AB$  в 1-м п/цикле, выразим вектор  $R_j^{(2)}(t)$  через сумму квазилинейной и предельной составляющих ДВС:

$$R_j^{(2)}(t) = R_{ej}^{(2)}(t) + R_{uj}^{(2)}(t_3).$$

Первое слагаемое  $R_{ej}^{(2)}(t)$  получим с помощью вспомогательного построения – прямой  $Cm \parallel Oq$  (рис. 3), вычитая из силы  $R_{ej}^{(1)}(t)$  в (27) величину (31):

$$R_{ej}^{(2)}(t) = R_{ej}^{(1)}(t) - c_j^{(1)}(t_2) = \operatorname{tg} \beta_j [\tilde{y}_j(t) - y_{pj}^{(1)}].$$

Для построения  $R_{uj}^{(2)}(t_3)$  приравняем выражения (30) и (32), откуда будем иметь

$$R_{uj}^{(2)}(t_3) = (1 - \xi_1) \Delta_j y_{0j} + \operatorname{tg} \beta_j y_{pj}^{(1)}.$$

Очевидно, что сумма данных слагаемых совпадает с результатом (34).

*Участок разгрузки EF.* Этот участок диаграммы характеризуется наличием необратимых деформаций отрицательного знака, приобретенных

в результате повторной разгрузки в стойках  $j$ -го этажа в момент времени  $t_4$  (см. точка  $E$  на рис. 3). Так как суммарные пластические перемещения этажа равны  $(y_{pj}^{(1)} - y_{pj}^{(2)})$ , то остаточная составляющая восстанавливающей силы определяется выражением  $R_{pj}^{(2)}(t_4) = \text{tg}\alpha_j(y_{pj}^{(1)} - y_{pj}^{(2)})$ . Тогда ДВС на участке  $EF$  можно получить вычитанием величины  $R_{pj}^{(2)}(t_4)$  из квазилинейной составляющей 1-го п/цикла  $R_{ej}^{(1)}(t) = \text{tg}\alpha_j \tilde{y}_j(t)$ :

$$R_j^{(2)}(t) = R_{ej}^{(1)}(t) - R_{pj}^{(2)}(t_4) = \text{tg}\alpha_j [\tilde{y}_j(t) - (y_{pj}^{(1)} - y_{pj}^{(2)})]. \quad (35)$$

### Общий случай для $m$ п/циклов

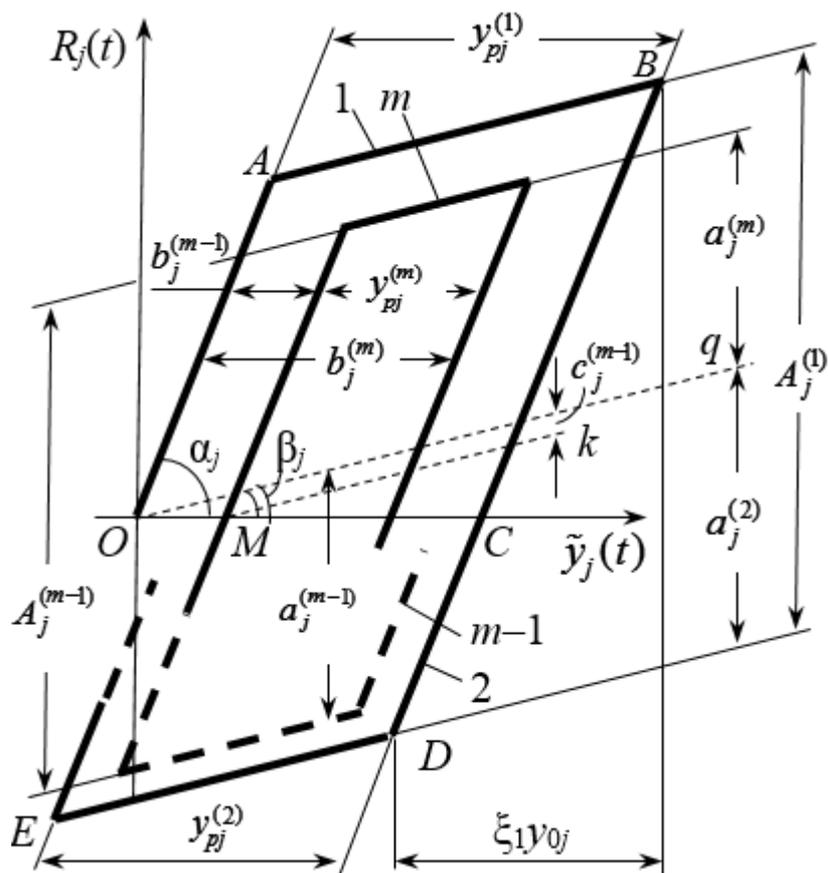


Рис. 4. Диаграмма деформирования с  $m$ -ным полуциклом.

Полученные результаты (33)–(35) можно распространить на общий

случай физически нелинейных колебаний с произвольным числом п/циклов.

*Участки нагружения (OA, CD, ...).* На данных участках восстанавливающая сила содержит квазилинейную и остаточную составляющие:

$$\left. \begin{aligned} R_j^{(m)}(t) &= R_{ej}^{(1)}(t) - R_{pj}^{(m-1)}(t_{2m-2}) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha_j [\tilde{y}_j(t) - b_j^{(m-1)}], \\ R_{ej}^{(1)}(t) &= \operatorname{tg} \alpha_j \cdot \tilde{y}_j(t), \quad R_{pj}^{(m-1)}(t_{2m-2}) = \operatorname{tg} \alpha_j b_j^{(m-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

*Участки упрочнения (AB, DE, ...).* На этих участках ДВС включает квазилинейную и предельную составляющие (рис. 4):

$$\left. \begin{aligned} R_j^{(m)}(t) &= R_{ej}^{(1)}(t) + R_{uj}^{(m)}(t_{2m-1}) - c_j^{(m-1)}(t_{2m-2}) = \\ &= R_{ej}^{(1)}(t) + a_j^{(m)}(t_{2m-1}) = \operatorname{tg} \beta_j \tilde{y}_j(t) + a_j^{(m)}(t_{2m-1}), \\ R_{ej}^{(1)}(t) &= \operatorname{tg} \beta_j \tilde{y}_j(t), \quad a_j^{(m)}(t_{2m-1}) = R_{uj}^{(m)}(t_{2m-1}) - c_j^{(m-1)}(t_{2m-2}). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

*Участки разгрузки (BC, EF, ...).* ДВС имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} R_j^{(m)}(t) &= R_{ej}^{(1)}(t) - R_{pj}^{(m)}(t_{2m}) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha_j [\tilde{y}_j(t) - b_j^{(m)}], \\ R_{ej}^{(1)}(t) &= \operatorname{tg} \alpha_j \tilde{y}_j(t), \quad R_{pj}^{(m)}(t_{2m}) = \operatorname{tg} \alpha_j b_j^{(m)}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

В формулах (36), (38) величина  $b_j^{(s)} = \sum_{k=1}^s (-1)^{k-1} y_{pj}^{(k)}$  ( $s = m-1, m$ ) выражает суммарное пластическое перемещение стоек  $j$ -го этажа на момент времени  $t_{2s}$ , соответствующий  $s$  п/циклам ДД. В (37) величины  $a_j^{(m)}$ ,  $c_j^{(m-1)}$  имеют вид

$$a_j^{(m)}(t_{2m-1}) = \Delta_j y_{0j} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \xi_k, \quad c_j^{(m-1)}(t_{2m-2}) = b_j^{(m-1)} \operatorname{tg} \beta_j,$$

где  $a_j^{(m)}$  представляет обобщенную предельную восстанавливающую силу

$m$ -го п/цикла. Согласно (37), эта сила согласована с уровнем 1-го п/цикла (посредством прямой  $Oq$ , рис. 4) и численно равна ординате, заключенной между прямой  $Oq$  и касательной к линии упрочнения  $m$ -го п/цикла. Для удобства записи выражения  $a_j^{(m)}(t_{2m-1})$  введен коэффициент  $\xi_0 = 1$ .

Предельная амплитуда  $m$ -й петли УПГ равна

$$A_j^{(m)} = \text{abs} (a_j^{(m)}(t_{2m-1}) - a_j^{(m+1)}(t_{2m+1})) = \Delta_j y_{0j} \xi_m.$$

Особенностью построения зависимостей (36–38) на любом квазилинейном интервале времени  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  является следующее. Из трёх составляющих ДВС только квазилинейная сила является функцией времени, причём на каждом участке  $m$ -го п/цикла данная составляющая выражается через характеристики 1-го п/цикла ДД. Две другие составляющие ДВС (предельная и остаточная) на любом участке  $m$ -го п/цикла на интервале  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  являются постоянными величинами, не зависящими от времени. Такое представление ДВС позволяет, не прибегая к локальным системам координат, выполнять временной анализ в единой системе координат, общей для всех состояний расчетной модели, независимо от характера протекающих в конструктивных элементах процессов (нагружение, упрочнение, разгрузка).

### **Матричная форма записи**

Полученные формулы можно использовать для построения моделей упругопластических колебаний при условии, что нелинейные процессы протекают одновременно в нескольких этажах каркаса. В общем случае вектор ДВС и его составляющие на квазилинейном интервале времени  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  записывается так:

$$R(t) = R_e(t) + R_u(t_i) - R_p(t_i), \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} R_e(t) &= K_i Y(t), \\ R_u(t_i) &= R_u(t_{i-1}) + \Delta K(t_i) Y_0, \\ R_p(t_i) &= R_p(t_{i-1}) + K(t_i) Y_{pj}(t_i), \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

где  $R_e(t)$ ,  $R_u(t_i)$ ,  $R_p(t_i)$  – векторы квазилинейных, предельных и остаточных составляющих ДВС;  $K_i = [r_{kl}(t_i)]$  ( $k, l = 1, \dots, n$ ) – матрица жесткости квазиупругой системы;  $\Delta K_i = K_{i-1} - K_i$  – разность матриц жесткости на  $i-1$ -х и  $i$ -х интервалах времени;  $Y_0 = [y_{0j}]$ ,  $Y_{pj}(t_i) = [y_{pj}^{(k)}(t_i)]$  ( $j = 1, \dots, n$ ) – векторы, соответственно, предельно упругих и остаточных перемещений стоек  $j$ -х этажей каркаса.

Элементы  $r_{kl}(t_i)$  матрицы жесткости каркаса зависят от жесткостей стоек  $j$ -х этажей, за величины которых в зависимости от состояния системы к моменту времени  $t_i$  отвечают параметры  $\text{tg}\alpha_j$  или  $\text{tg}\beta_j$  на ДД (рис. 2, 3). Вектор  $Y_{pj}(t_i)$  остаточных перемещений  $j$ -го этажа каркаса формируется в момент начала разгрузки и имеет следующую структуру: первые  $j-1$  компоненты вектора равны нулю, остальные, начиная с  $j$ -й, равны перемещению  $y_{pj}^{(k)}$ , где  $k$  – номер п/цикла ДД. Векторы предельных  $R_u(t_{i-1})$  и остаточных  $R_p(t_{i-1})$  ДВС формируются на предыдущем интервале времени  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ .

## §2.2. Построение вектора нелинейной динамической реакции ДДС

Разделение вектора ДВС (39) на линейную составляющую  $R_e(t)$ , зависящую от времени, и постоянные составляющие  $R_u(t_i)$ ,  $R_p(t_i)$ , даёт возможность построения алгоритма решения нелинейной динамической

задачи. В соответствии с алгоритмом весь процесс нелинейной реакции во времени разбивается на ряд последовательных квазилинейных интервалов  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots$ ), внутри которых динамическая реакция вычисляется по схеме упругого решения.

Для реализации такой задачи подставим вектор ДВС (39) в ОДУ (1а). Переносим постоянные составляющие ДВС в правую часть уравнения, формируем на интервале  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  вектор обобщенной динамической нагрузки

$$f(t) = P(t) - R_u(t_i) + R_p(t_i). \quad (41)$$

В левой части уравнения движения находится линейная составляющая ДВС (40)  $R_e(t) = K_i Y(t)$ , обеспечивающая выполнение предложенного алгоритма. В результате такого преобразования приходим на квазилинейном интервале времени  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  к анализу линейного дифференциального уравнения (42а) при начальных условиях (42б):

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{Y}(t) + C_i\dot{Y}(t) + K_i Y(t) &= f(t), & (a) \\ Y(t_0) = Y_0, \dot{Y}(t_0) &= \dot{Y}_0. & (б) \end{aligned} \right\} (42)$$

Непрерывность процесса колебаний квазиупругой расчетной модели обеспечивается постановкой начальных условий (19б), назначаемых из аналитических выражений реакции в конце предыдущего интервала времени  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ .

### Динамическая реакция упругопластической ДДС

Система уравнений реакции ДДС при действии обобщенной динамической нагрузки записывается так ( $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ):

$$\begin{aligned} Y(t) &= 2\text{Re}\{ Z(t) \} + Y_R(t_i), \quad \dot{Y}(t) = 2\text{Re}\{ S_i Z(t) \}, \\ \ddot{Y}(t) &= 2\text{Re}\{ S_i^2 Z(t) \} + M_i^{-1} P(t), \\ Z(t) &= Z_{0R}(t_i) + Z_p(t_i), \end{aligned}$$

где  $Z_{0R}(t_i) = \Phi(t-t_i)U_i^{-1}M_i [-\bar{S}_i (Y_0 - Y_R(t_i)) + \dot{Y}_0 ]$ ;

$$\Phi(t-t_i) = e^{S_i(t-t_i)}, Z_p(t_i) = U_i^{-1} \int_{t_i}^t \Phi(t-\tau)^T P(\tau) d\tau, U_i = M_i S_i + S_i^T M_i + C_i;$$

матрица  $S_i$  вычисляется из решения характеристического МКУ [5]:  $M_i S_i^2 + C_i S_i + K_i = 0$ .

Здесь  $Y_R(t_i)$  – вектор квазистатических перемещений:

$$Y_R(t_i) = K_i^{-1}[-R_u(t_i) + R_p(t_i)],$$

вызванных текучестью и разгрузкой в этажах каркаса в момент времени  $t_i$  от действия нелинейных составляющих  $R_u(t_i)$  и  $R_p(t_i)$ , которые вместе с начальными условиями  $Y_0, \dot{Y}_0$  отвечают за свободные колебания расчётной модели.

Выразим силовые параметры реакции (диссипативные и инерционные силы) при помощи полученных векторов кинематических параметров:  $F(t) = \Delta C \dot{Y}(t), I(t) = -M \ddot{Y}(t)$ .

### §2.3. Аналитические зависимости величин скачков в моменты начала и конца нелинейной работы ( $t = t_i$ )

В процессе упругопластического деформирования, когда в стойках какого-либо этажа начинается текучесть или разгрузка в момент времени  $t = t_i$ , система претерпевает изменения демпфирующих и жесткостных характеристик, и матрица жесткости и трения, соответственно, получают невязки  $\Delta K$  и  $\Delta C$ , соответственно. Значит, при изменении состояния системы кинематические и силовые параметры реакции получают приращения:

$$\Delta Y(t_i) = 0, \quad \Delta \dot{Y}(t_i) = 0,$$

$$\Delta \ddot{Y}(t_i) = M^{-1} [ \Delta K_i Y(t_i) + \Delta C_i \dot{Y}(t_i) ],$$

$$\Delta R(t_i) = -[\Delta K_i Y(t_i) + \Delta R_{up,i}], \quad \Delta F(t_i) = -\Delta C_i \dot{Y}(t_i),$$

$$\Delta I(t_i) = -[\Delta K_i Y(t_i) + \Delta C_i Y(t_i)].$$

Здесь  $\Delta R_{up,i}$  – невязка суммы предельной и остаточной составляющих восстанавливающей силы, возникающая в моменты перехода системы через критическую точку  $t = t_i$ :  $\Delta R_{up,i} = (R_{u,i-1} - R_{p,i-1}) - (R_{u,i} - R_{p,i})$ .

*§2.4. Построение функции, учитывающей изменение длины пластических зон стоек многоэтажного каркаса при его деформировании по билинейной диаграмме в процессе неупругой работы*

Необходимость учета изменения пластических зон в ходе упругопластических колебаний строительных конструкций обусловлена стремлением учитывать работу расчетных моделей, наиболее приближенную к действительной, в рамках принятых допущений. Такой подход позволит, с одной стороны, сэкономить материал, сделав спроектированную конструкцию более экономичной.

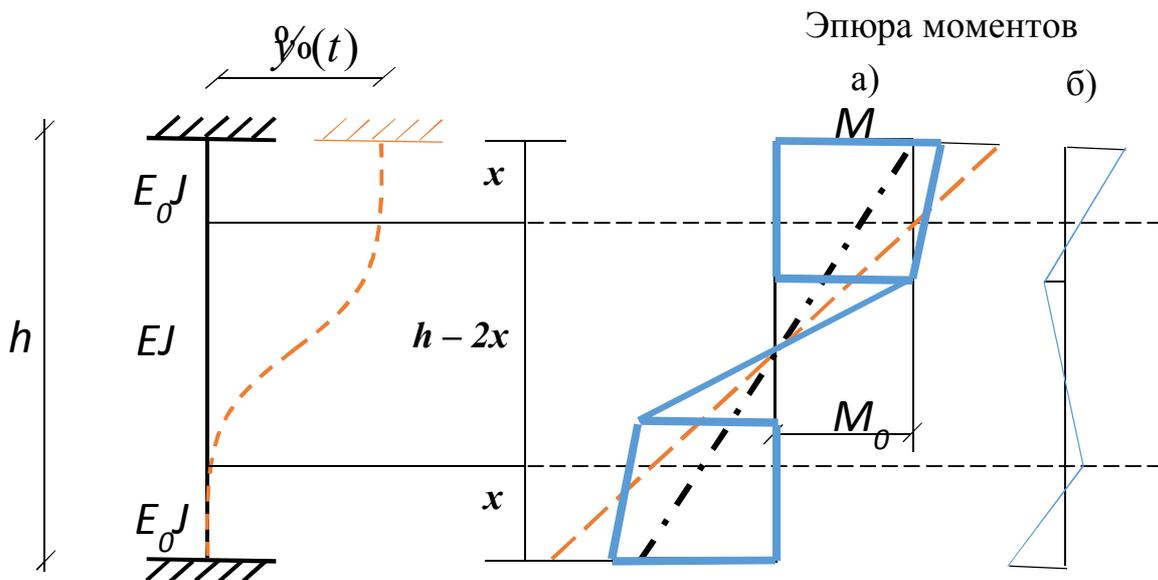


Рис. 5. Деформирование стойки каркаса с учетом изменения длины пластических зон.

На рис. 5 схематически отображен процесс упругопластического деформирования стойки многоэтажного каркаса под действием импульсного воздействия. Величина  $x$  – это длина пластической зоны, жесткость материала в пределах которой имеет пониженное значение  $E_0J$  и соответствует ее величине в стадии упрочнения (рис. 2). В среднем отрезке высоты стойки, длина которого равна  $h - 2x$ , жесткость материала в этом случае  $EJ$  (упругий режим работы конструкции, начальный модуль упругости). В правой части рисунка показаны эпюры моментов. На рис. 5, а) штрих-пунктирной и пунктирной линиями обозначены эпюры для идеально упругого материала, сплошной линией – для материала, работающего по билинейной диаграмме с упрочнением. На рис. 5, б) показана эпюра остаточных напряжений, являющаяся суммой эпюр а) и б) [52]. Введем некоторые обозначения. Пусть отношение изгибных жесткостей стойки будет равно  $k = \frac{E_0J}{EJ} = \frac{E_0}{E}$ , а относительная длина пластической зоны  $\xi = 1 - \frac{2x}{h}$ , при  $x \leq \frac{h}{2}$ .

В ходе упругопластического деформирования стойки приращение величины  $x$  происходит в момент времени, когда в крайнем сечении колонны  $M \geq \frac{M_0}{\xi}$ , где  $M_0$  – предельно-упругий момент сечения конструктивного элемента. Выразим значение момента  $M$  в крайнем сечении стойки в произвольный момент времени при смещении верхнего узла колонны на величину  $\tilde{y}(t)$  (рис. 5). Для этого воспользуемся каноническим уравнением метода сил [10 – 12] и выразим его коэффициенты. В качестве неизвестных метода сил принимаем опорные моменты в сечениях стойки:

$$\delta_{11} = (M_1)(M_1) = 2 \left\{ \frac{x}{6E_0J} [2 \cdot 1^2 + 2 \cdot \xi^2 + 2 \cdot 1 \cdot \xi] + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{h}{2} - x \right) \cdot \xi \cdot \frac{2}{3} \cdot \xi \right\} =$$

$$\frac{2}{EJ} \left\{ \frac{x}{3k} [1^2 + \xi + \xi^2] + \frac{h}{6} \cdot \xi^3 \right\} =$$

$$\frac{h}{3EJ} \left\{ \frac{2x}{hk} [1^2 + \xi + \xi^2] + \xi^3 \right\} = \frac{h}{3EJ} \left\{ \frac{1}{k} (1 - \xi) [1^2 + \xi + \xi^2] + \xi^3 \right\} = \frac{h}{3EJ} \left\{ \frac{1}{k} (1 - \xi^3) + \xi^3 \right\}$$

$$X_1 = -\frac{\Delta c}{\delta_{11}} = \frac{2y(t) \cdot 3EJ}{h \cdot h} \cdot \frac{1}{\frac{1}{k}(1 - \xi^3) + \xi^3} = \frac{6EJ}{h^2} \tilde{y}(t) \varphi(k, \xi)$$

В итоге имеем моменты и поперечные силы в крайних сечениях стойки

$$M = \frac{6EJ}{h^2} \tilde{y}(t) \varphi(k, \xi), \quad Q = \frac{12EJ}{h^3} \tilde{y}(t) \varphi(k, \xi).$$

Здесь  $\varphi(k, \xi) = \frac{k}{1 - (1 - k)\xi^3}$  – поправочная функция, учитывающая

изменение длины пластических зон в ходе неупругой работы каркаса.

В процессе деформирования колонн каркаса в произвольный момент времени  $\xi = 1 - \frac{2x_i}{h}$ . Как только момент в крайних сечениях стоек становится  $M \geq \frac{M_0}{\xi}$ , длина пластической зоны становится больше на величину шага  $x$ . В этом случае пересчитывается функция  $\varphi(k, \xi)$  и, соответственно, жесткость стойки  $B_i = B^* \varphi(k, \xi)$ , где  $B = EJ$  – изгибная жесткость стоек в упругом состоянии

**Выводы по главе.** Предложена математическая модель колебаний многоэтажного каркаса с упругопластической восстанавливающей силой, аппроксимируемой кусочно-линейно функцией в координатах «восстанавливающая сила – относительное перемещение». Выражения ДВС получены для произвольного номера полцикла диаграммы

жесткости и представлены в виде суммы линейной и нелинейной составляющих. Показано, что линейная составляющая ДВС для любого участка диаграммы всегда строится для 1-го п/цикла ДД независимо от числа петель упругопластического гистерезиса и независимо от характера участка в пределах п/цикла. Это позволяет выполнять временной анализ в рамках единого алгоритма для всех состояний расчетной модели (при нагружении, упрочнении и разгрузке). Также выведено выражение поправочной функции, которая позволяет учитывать дискретное изменение жесткостей стоек в процессе нелинейной работы путем шагового увеличения длины пластических зон в стойках каркаса.

# Глава 3. Построение расчетной динамической модели многоэтажного каркаса и реализация задачи временного анализа каркаса на импульсное воздействие

## §3.1. Построение параметров расчетной динамической модели (РДМ)

Для решения дифференциального квадратного уравнения движения дискретной диссипативной системы (1) необходимо определить параметры матриц масс, демпфирования и жесткости, которые зависят от числа степеней свободы системы.

### Определение числа степеней свободы

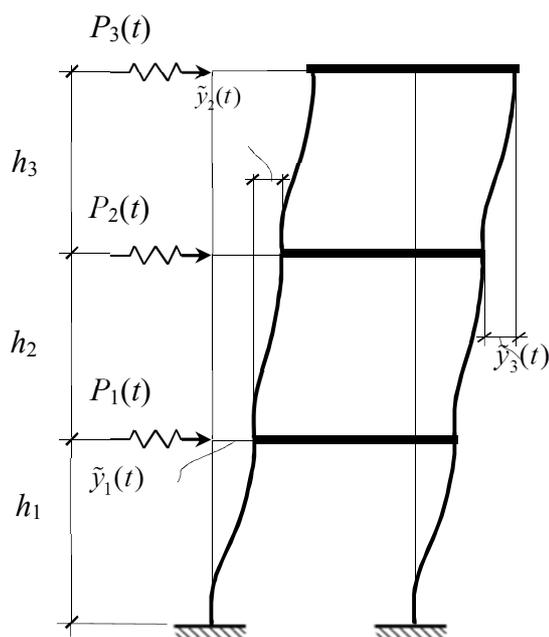


Рис. 6. Расчетная динамическая модель 3-этажного каркаса.

Принятая для расчета модель многоэтажного каркаса работает по схеме сдвиговой рамы. Рассматривается расчет трехэтажного каркаса. Каждый этаж имеет одну степень свободы, масса сосредоточена в центре пролета этажа.

Формирование матриц жесткости, демпфирования и масс

**Матрица жесткости  $K = (r_{ik})$ , ( $i, k = 1, \dots, n$ )**

В случае трехэтажной рамы имеем

$$K = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Жесткость  $j$ -го этажа равна  $B_j = \frac{24EJ}{h_j^3}$ . Используя методы

строительной механики [10, 11], находим элементы матрицы жесткости системы:  $r_{11} = B_1 + B_2$ ;  $r_{22} = B_2 + B_3$ ;  $r_{33} = B_3$ ;  $r_{12} = r_{21} = -B_2$ ;  $r_{23} = r_{32} = -B_3$ ;

**Матрица демпфирования  $C = (c_{ik})$ , ( $i, k = 1, \dots, n$ )**

В случае трехэтажной рамы имеем

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

**Матрица масс  $M = \text{diag} (m_1, m_2, \dots, m_n)$**

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

Элементы матрицы масс определяются исходя из значений массы элементов конструкции (перекрытий, стоек, оборудования, закрепленного на перекрытии и т.п.).

### *§3.2. Описание программы расчета конструктивно нелинейной дискретной диссипативной системы методом временного анализа, написанной в среде MATLAB*

Среди бурно развивающихся систем компьютерной математики (СКМ) можно особо отметить матричную математическую систему MATLAB. Эффективность MATLAB обусловлена её ориентацией на матричные вычисления с программной эмуляцией параллельных вычислений и упрощенными средствами задания циклов.

В MATLAB успешно реализованы средства работы с многомерными массивами, большими и разреженными матрицами и многими типами данных. В системе реализуется язык программирования высокого уровня, который подходит для научных и технических вычислений, имеют большое число пакетов прикладных программ – расширений.

Таким образом, MATLAB является собой мощной операционной средой для выполнения огромного числа математических и научно-технических расчетов и создания пользователем своих пакетов расширений и библиотек процедур и функций. Кроме того, программа имеет в своем составе встроенный компилятор и позволяет создавать исполняемые файлы и библиотеки [22].

**3.2.1. Описание программы расчета.** Для решения поставленной задачи временного анализа многоэтажного каркаса была написана программа в комплексе MATLAB. Она содержит несколько уровней циклических операторов, которые реализуют процесс построения векторов динамической реакции в заданном временном интервале, а также производить операцию пересчета шага интегрирования задачи в окрестности критических точек. Кроме того, некоторые типовые операции, требующие многократного повторения по ходу реализации алгоритма

(нахождение матричных корней, пересчет матриц жесткости и демпфирования, нахождение функции перемещений, сужение шага интегрирования в окрестности критических точек, построение асимптот на осциллограммах перемещений и некоторые другие), вынесены в отдельные подпрограммы, что значительно облегчает работу.

### **3.2.2. Блок-схема расчета методом временного анализа**

Ниже представлена блок-схема алгоритма расчета задачи методом временного анализа, реализованного в компьютерной программе (рис. 7). Согласно ей в первую очередь строится расчетная динамическая модель системы, формируются её параметры масс, жесткости и демпфирования, а также вектора нагрузок.

В соответствии с начальными условиями решается уравнение движения дискретной диссипативной системы, отыскиваются его корни, и строится общее решение. Находятся параметры реакции, затем вычисляются напряжения и деформации. Далее проводится проверка напряжений по критическим значениям для каждого из этажей. Если напряжения не превышают критические значения, цикл временного анализа повторяется на следующем шаге интегрирования, если нет, то корректируются параметры расчетной динамической модели, и реализация алгоритма начинается сначала.



### §3.3. Исходные данные для расчета многоэтажного каркаса методом временного анализа

#### Характеристики РДМ

Высоты этажей каркаса:  $h_1 = 5,5$  м;  $h_2 = 4,8$  м;  $h_3 = 4,5$  м.

Сечения колонн: двутавр 35Ш2 (3-й и 2-й этажи), 40Ш2 (1-й этаж).

Материал стоек – сталь 10Г2С1 с расчетным сопротивлением  $R_y = 33$  кН/см<sup>2</sup>, временным сопротивлением 49 кН/см<sup>2</sup> и начальным модулем упругости 206000 МПа. Модуль упругости материала в зоне упрочнения меньше начального в 40 раз [53 – 55]. Схематическая диаграмма деформирования представлена на рис. 8.

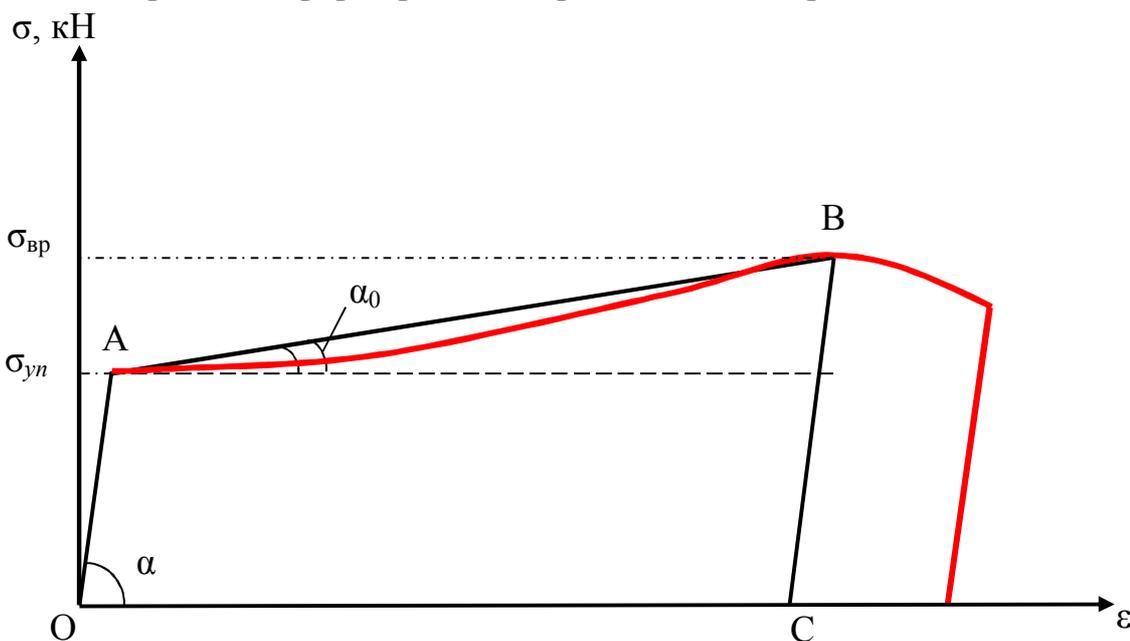


Рис. 8. Диаграмма деформирования стали 10Г2С1.

Элементы матрицы масс (с учетом массы перекрытия и стоек каркаса):  
 $m_1 = 3,077$  кН·с<sup>2</sup>/см;  $m_2 = 3,074$  кН·с<sup>2</sup>/см;  $m_3 = 2,137$  кН·с<sup>2</sup>/см.

**Параметры нагрузки и временного анализа следующие:**

время начала анализа  $t_0 = 0$  с; длина импульса:  $t_a = 0,7$  с;  $t_m = 1,5$  с;  $t_e = 2,2$  с; продолжительность анализа 8 с, шаг временного анализа  $\Delta t = 0,001$  с; амплитуды нагрузки  $P_0 = [240 \ 240 \ 150]$  кН ; нагрузка приложена в уровне перекрытия каждого из этажей. Схема нагрузки показана на рис. 9.

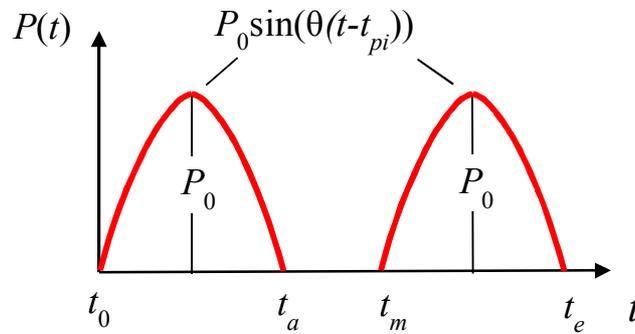


Рис. 9. Схема нагрузки, действующей на каркас.

### §3.4. Реализация задачи

В ходе решения задачи построены осциллограммы кинематических и силовых параметров реакции, диаграммы жесткости этажей каркаса в ходе упругопластического деформирования, а также осциллограммы, показывающие изменение во времени внутренних динамических параметров конструкции. Осциллограммы для трех видов работы каркаса:

1. упругий режим работы без нелинейной работы материала.
2. деформирование стоек конструкции по билинейной диаграмме в процессе нелинейной работы, при этом длина пластической зоны постоянна и равна всей высоте колонны. Это значит, что после того как напряжение в концевых сечениях стоек достигнет предела текучести, жесткость по всей высоте стоек становится равной  $B_0 = E_0 J$ , где  $E_0$  – модуль упругости материала на участке упрочнения диаграммы деформирования материала каркаса (рис. 6).

3. Длина пластической зоны  $x$  переменна в ходе упругопластического деформирования. Шагом приращения длины пластической зоны  $\Delta x = 0,001h$ .

### Принятые обозначения на осциллограммах

На приведенных ниже осциллограммах параметров реакции системы показано сравнение значений для четырех режимов работы конструкции, указанных выше.

1. Осциллограммы для **первого** режима работы конструкции обозначены линией с *двойным пунктиром*, для **второго** – *штрих-пунктиром*, для **третьего** – *сплошной* линией.
2. На осциллограммах относительных перемещений, относительных скоростей, восстанавливающих и поперечных сил в узлах, а также значений коэффициентов запаса по касательным напряжениям в узлах каркаса – **кружками** показаны моменты времени, соответствующие началу текучести в этаже, а **звездочками** – началу разгрузки.

На рис. 10 отражены диаграммы деформирования 2-го этажа каркаса. Как можно заметить, работа системы по билинейной диаграмме с постоянной длиной пластической зоны, равной высоте стойки каркаса, приводит к большему значению пластических перемещений. Учет изменения длины пластической зоны приводит к тому, что система имеет бóльшую жесткость, чем при других режимах, и количество петель пластического гистерезиса в этом случае тоже больше.

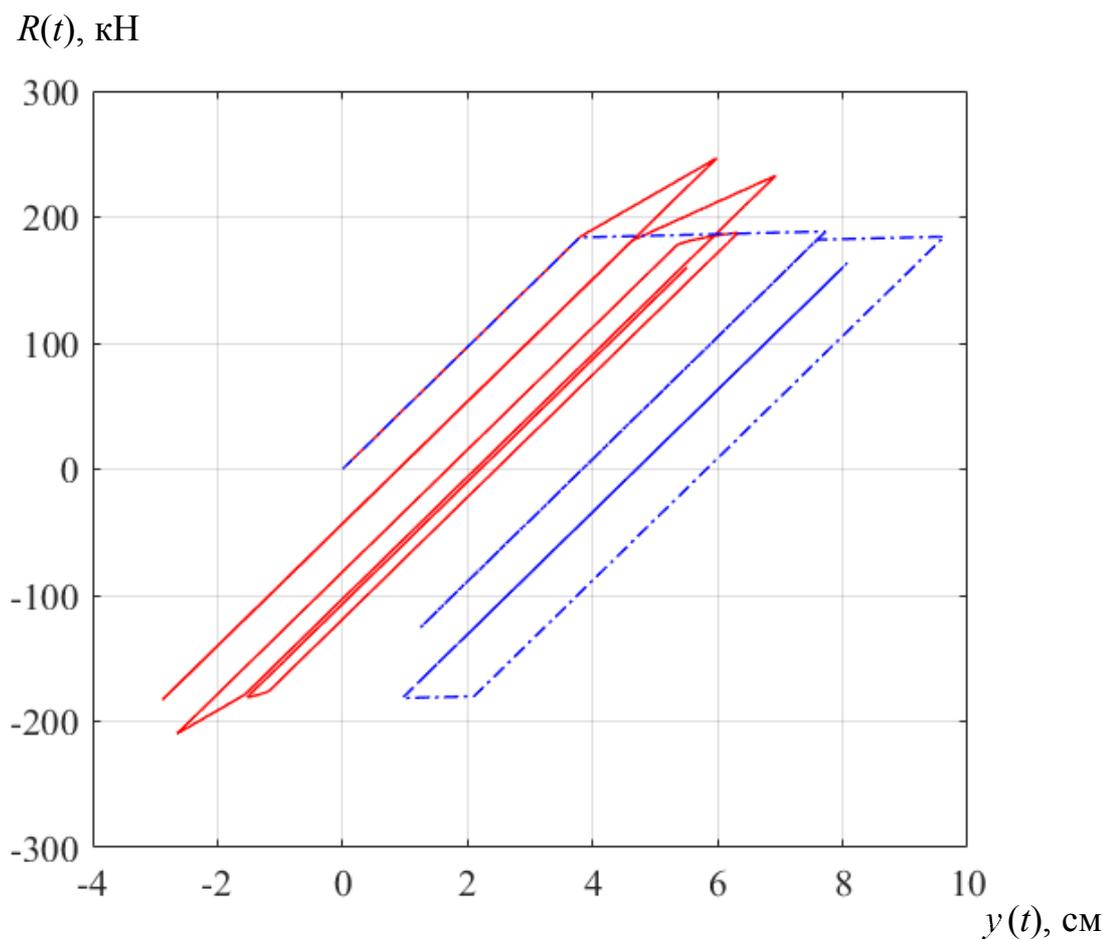


Рис. 10. Диаграммы жесткости 2-го этажа при различных режимах работы каркаса.

На рис. 11 представлены осциллограммы относительных перемещений в этажах каркаса. Горизонтальными линиями показаны асимптоты, координата которых по вертикали означает значение пластических перемещений в этаже, накопленное к концу текущего полуцикла колебаний. На рис. 12 отражены осциллограммы относительных перемещений во 2-ом этаже каркаса. На рис. 13 – 18 показаны осциллограммы абсолютных перемещений, скоростей и ускорений этажей каркаса.

На рис. 19 – 23 изображены осциллограммы силовых параметров реакции (диссипативные, инерционные силы и восстанавливающие силы).

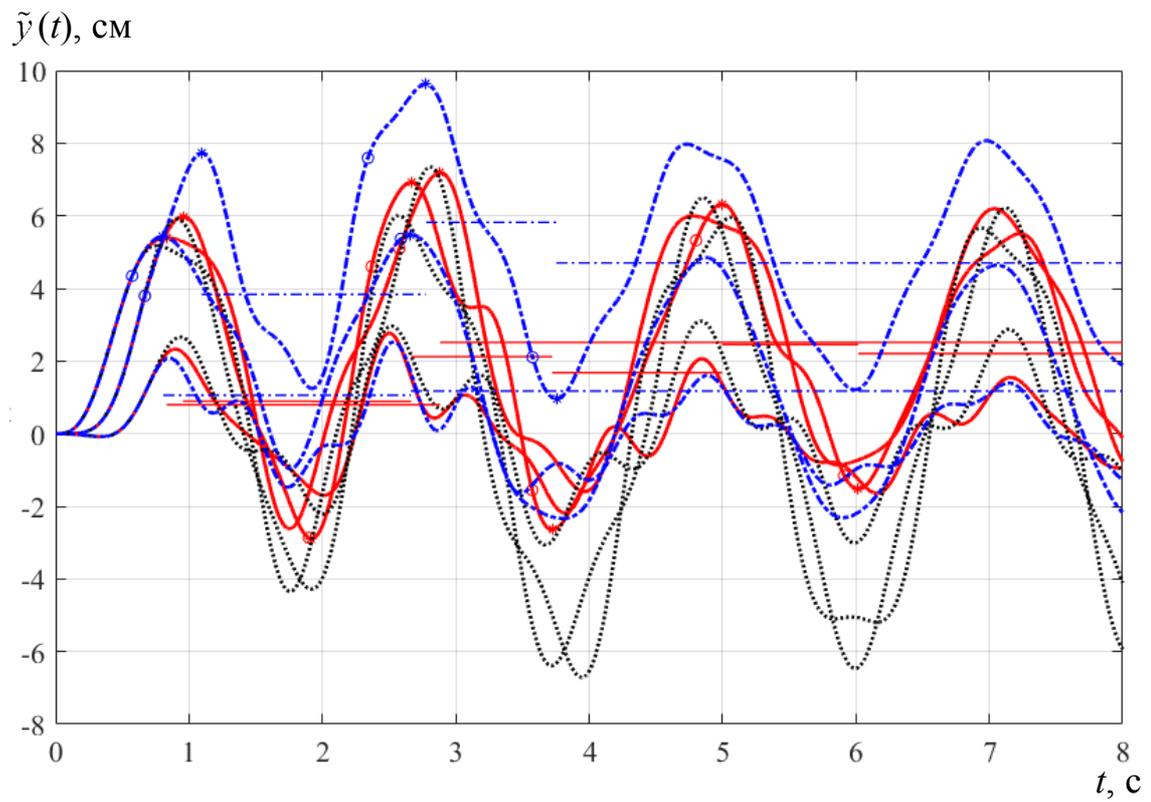


Рис. 11. Осциллограммы относительных перемещений этажей при различных режимах работы каркаса.

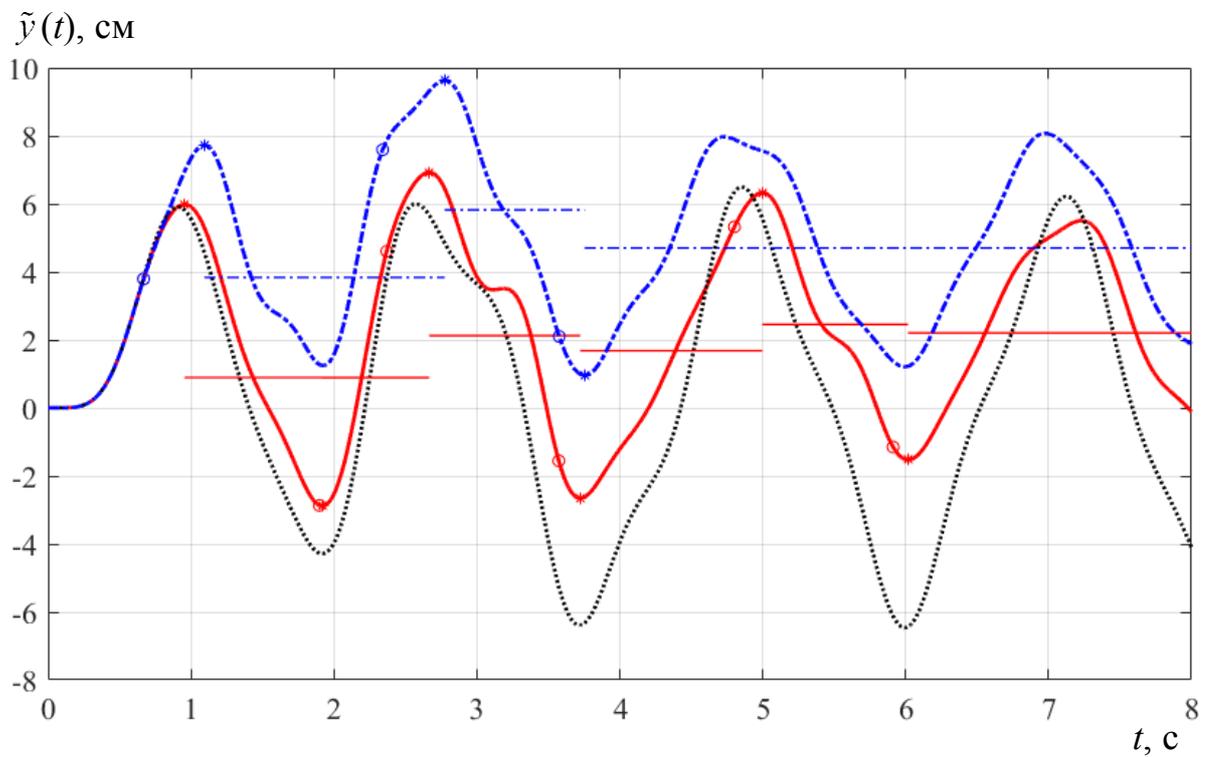


Рис. 12. Осциллограммы относительных перемещений 2-го этажа при различных режимах работы каркаса.

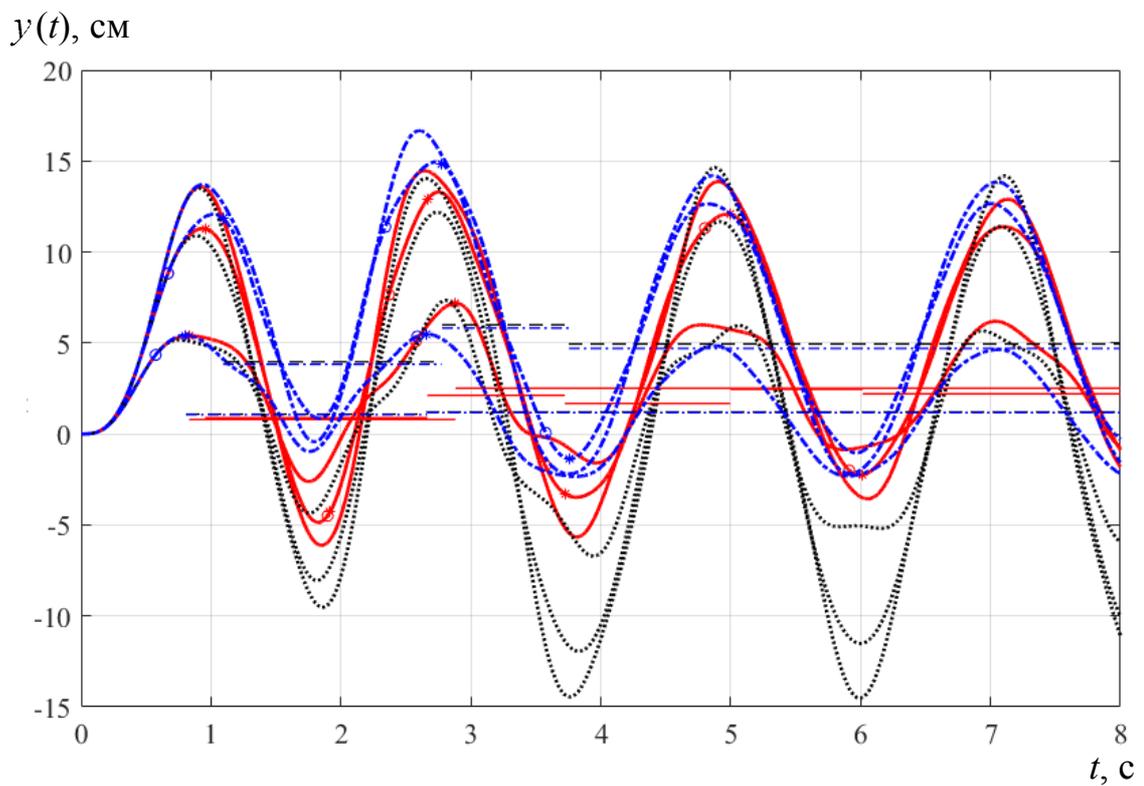


Рис. 13. Осциллограммы относительных перемещений этажей при различных режимах работы каркаса.

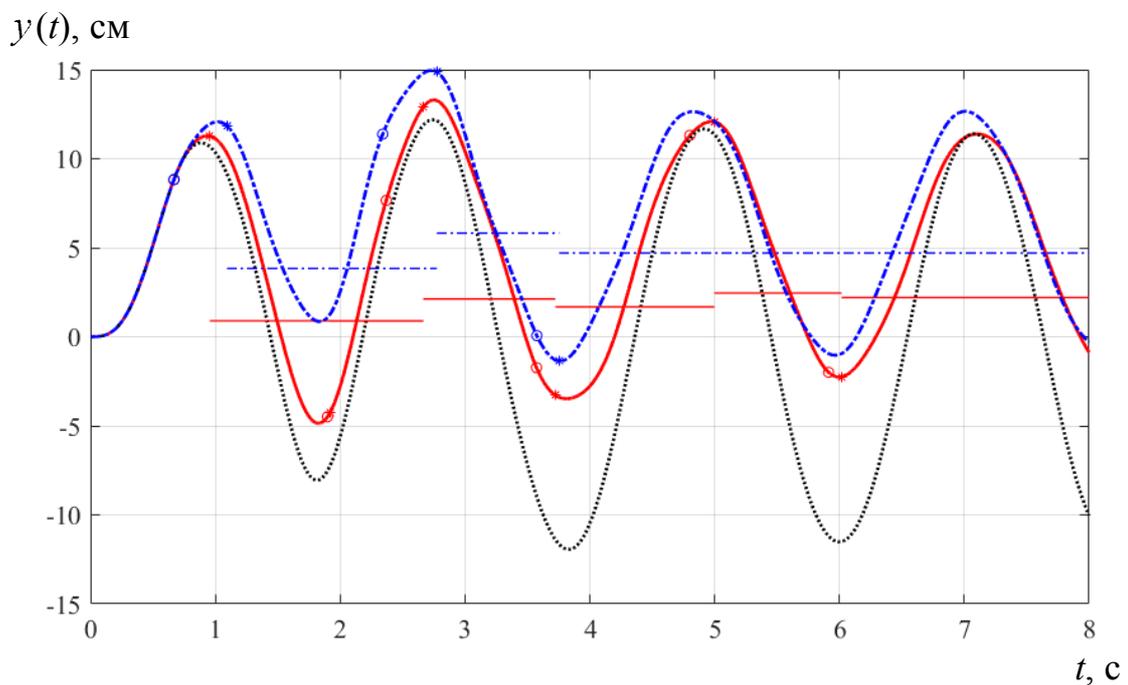


Рис. 14. Осциллограммы относительных перемещений 2-го этажа при различных режимах работы каркаса.

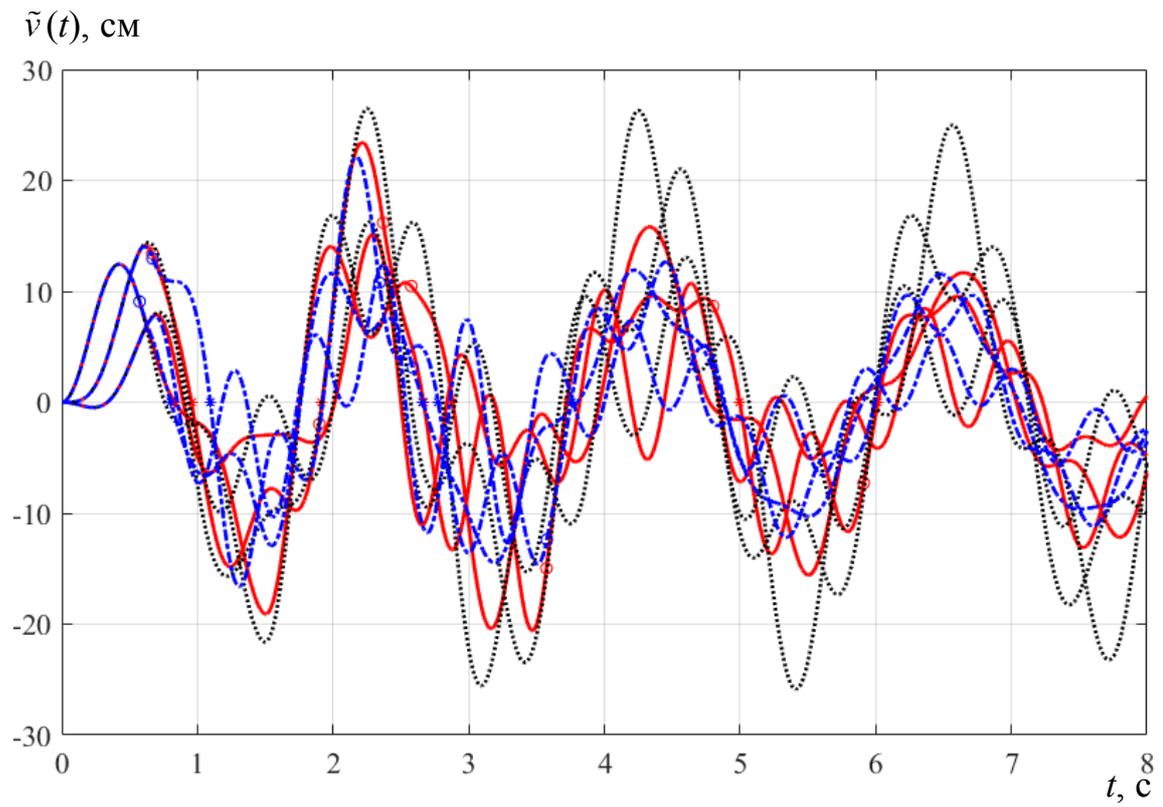


Рис. 15. Осциллограммы относительных скоростей этажей при различных режимах работы каркаса.

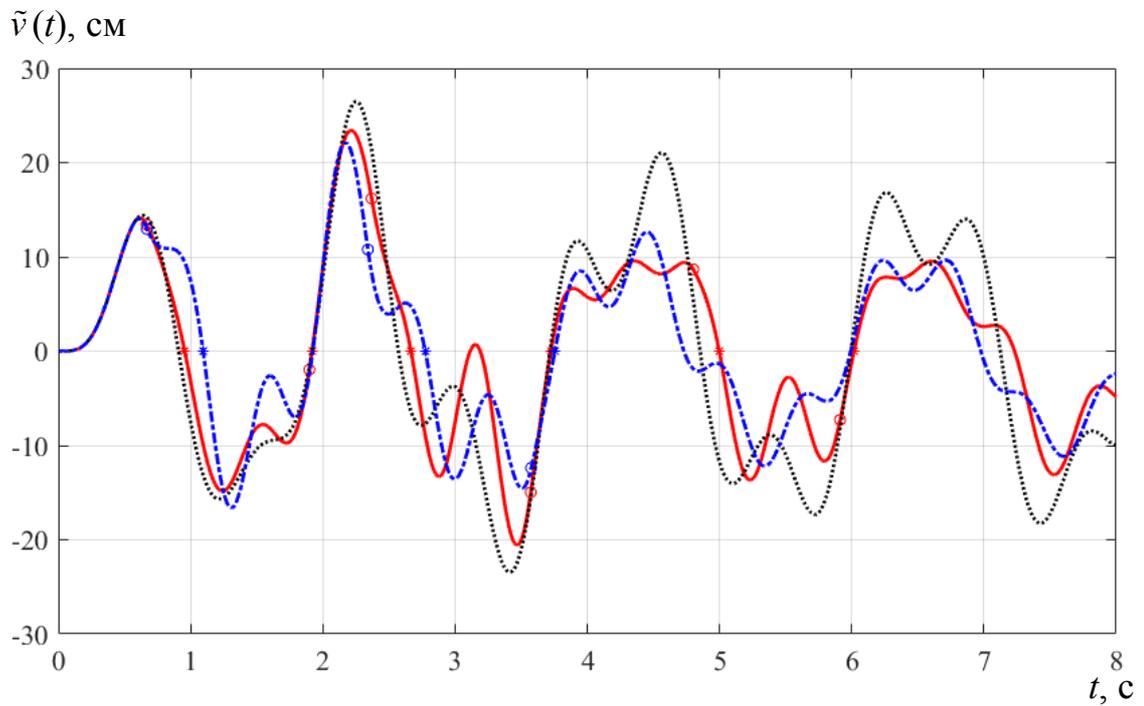


Рис. 16. Осциллограммы относительных скоростей 2-го этажа при различных режимах работы каркаса.

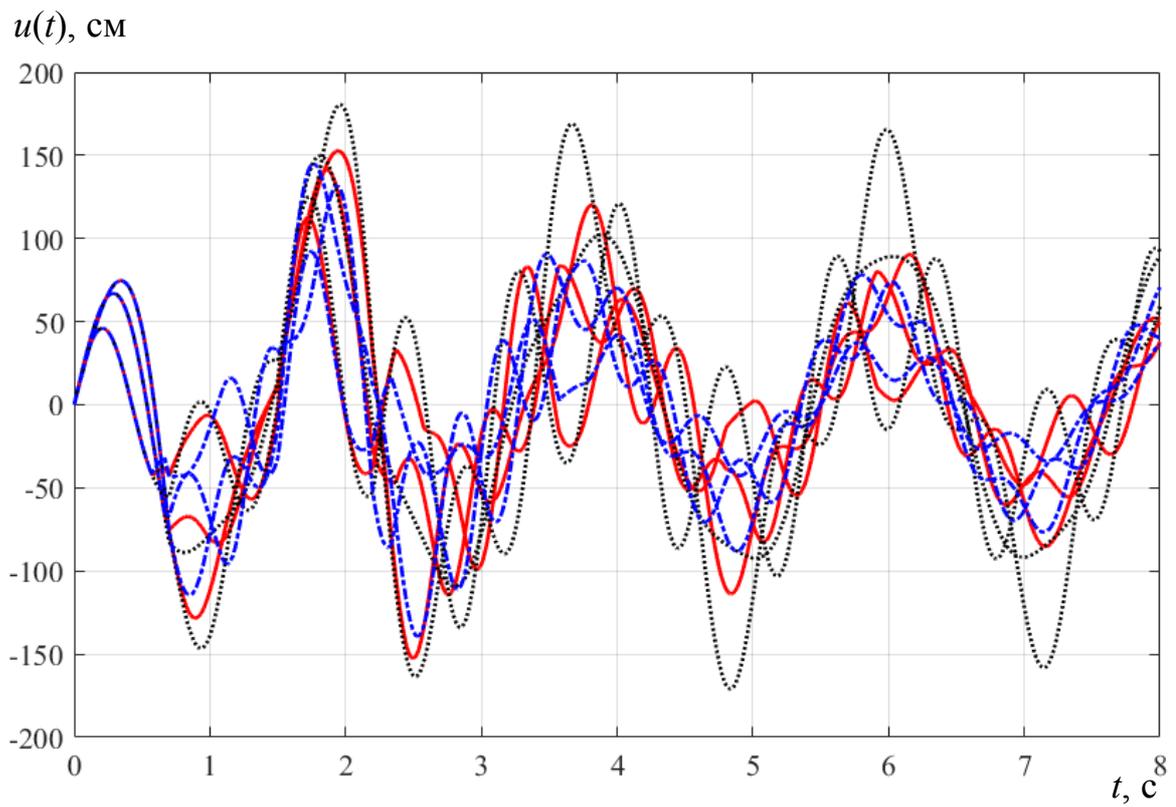


Рис. 17. Осциллограммы ускорений этажей при различных режимах работы каркаса.

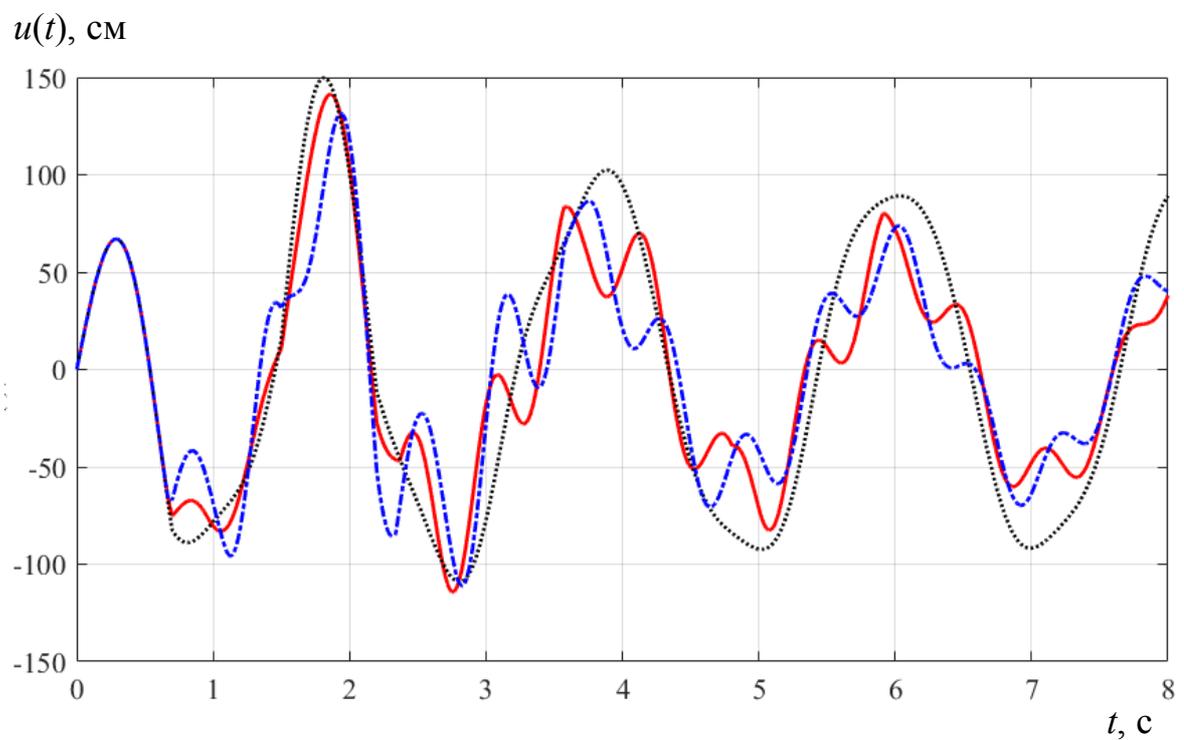


Рис. 18. Осциллограммы ускорений 2-го этажа при различных режимах работы каркаса.

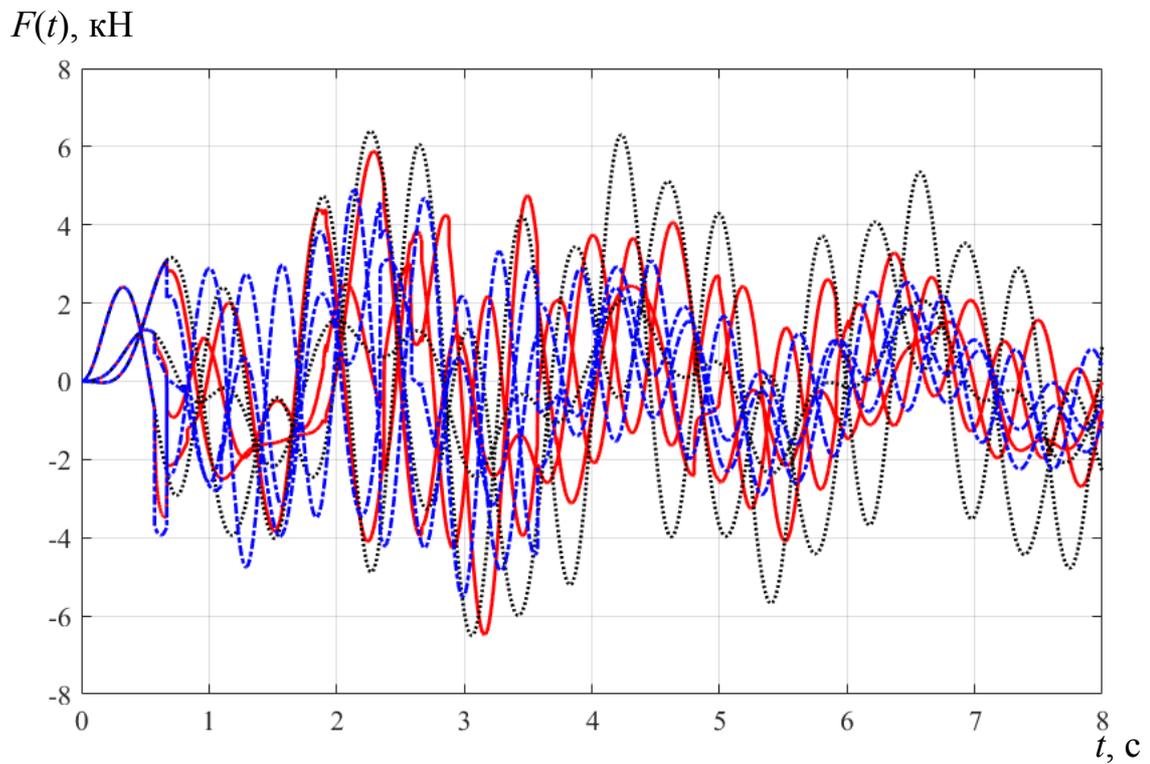


Рис. 19. Осциллограммы диссипативных сил в этажах каркаса при различных режимах работы конструкции.

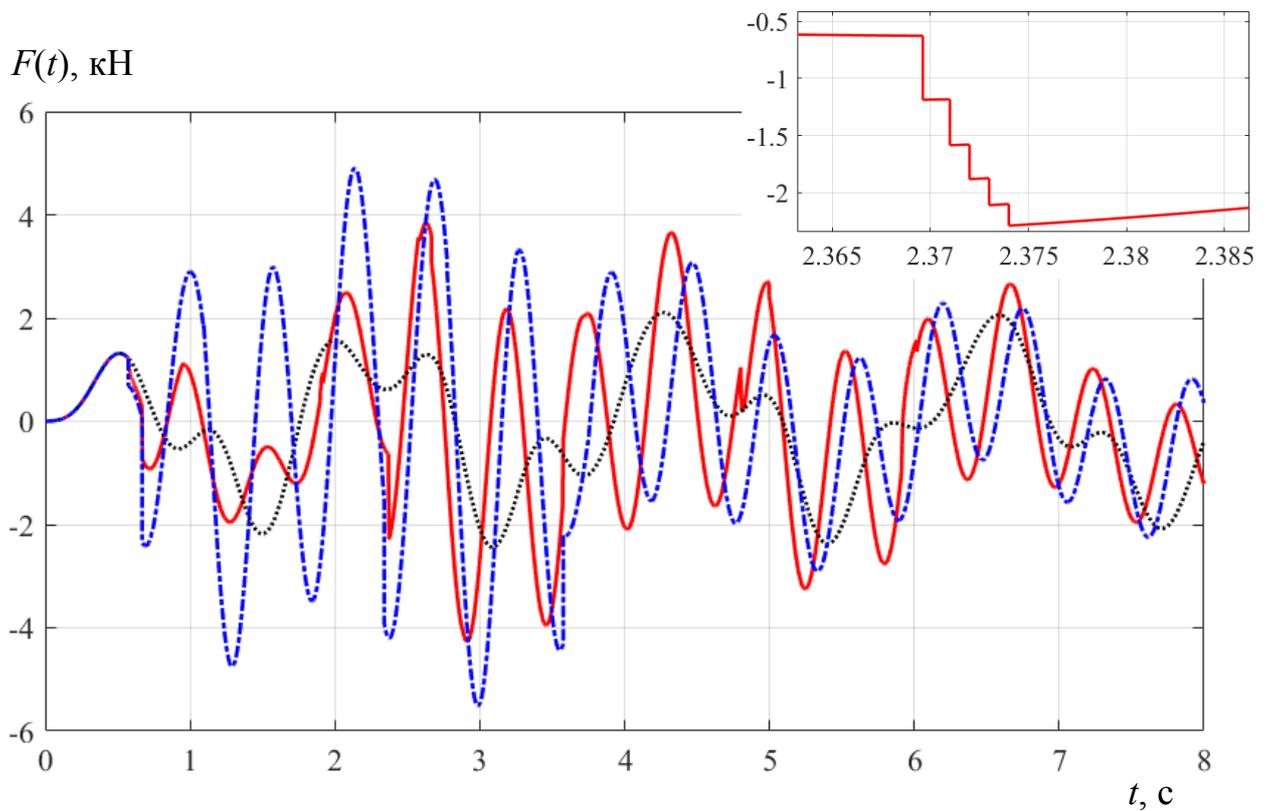


Рис. 20. Осциллограммы диссипативных сил во 2-м этаже каркаса при различных режимах работы.

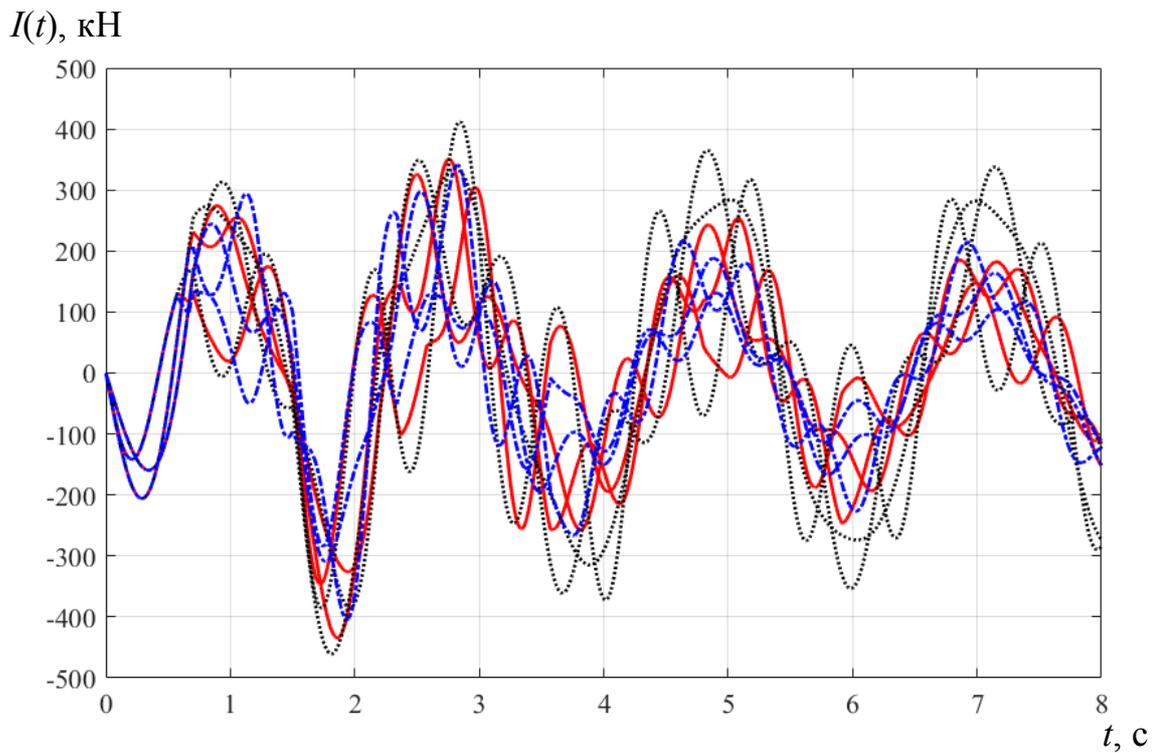


Рис. 21. Осциллограммы инерционных сил в этажах каркаса при различных режимах работы конструкции.

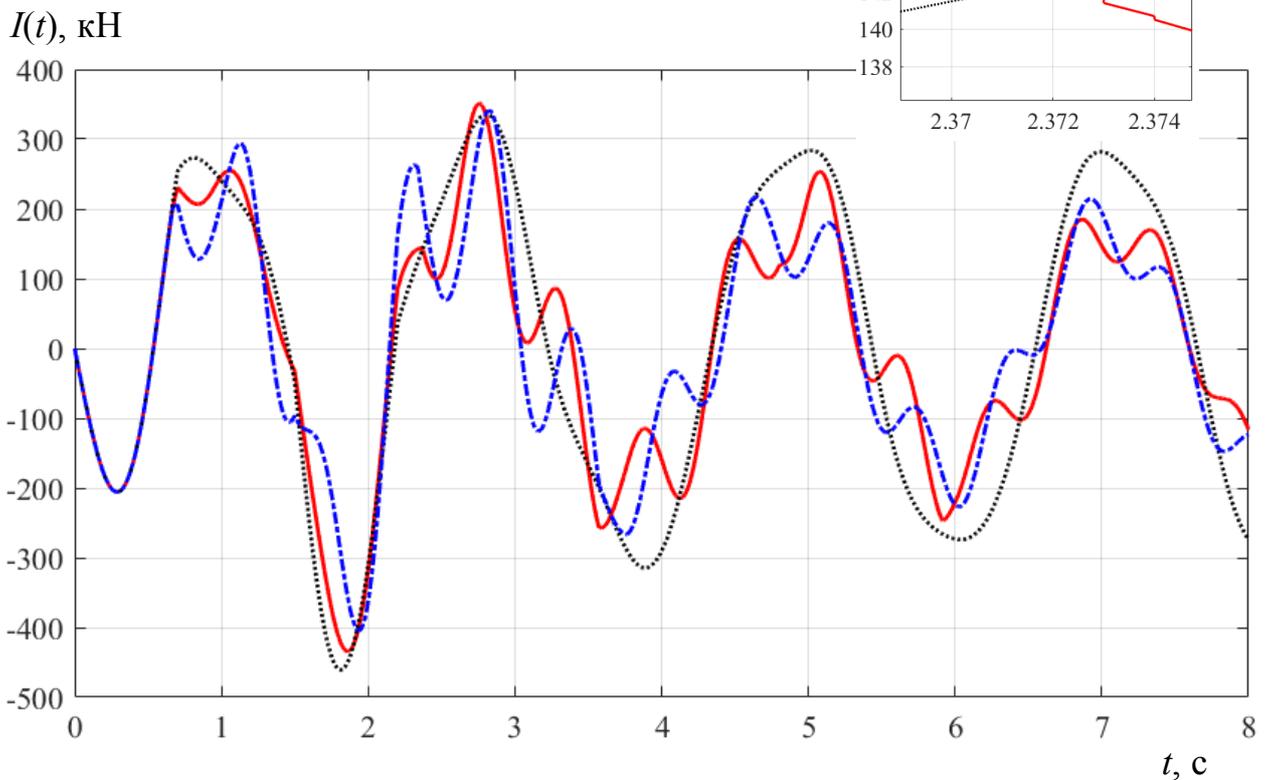


Рис. 22. Осциллограммы инерционных сил во 2-м этаже каркаса при различных режимах работы.

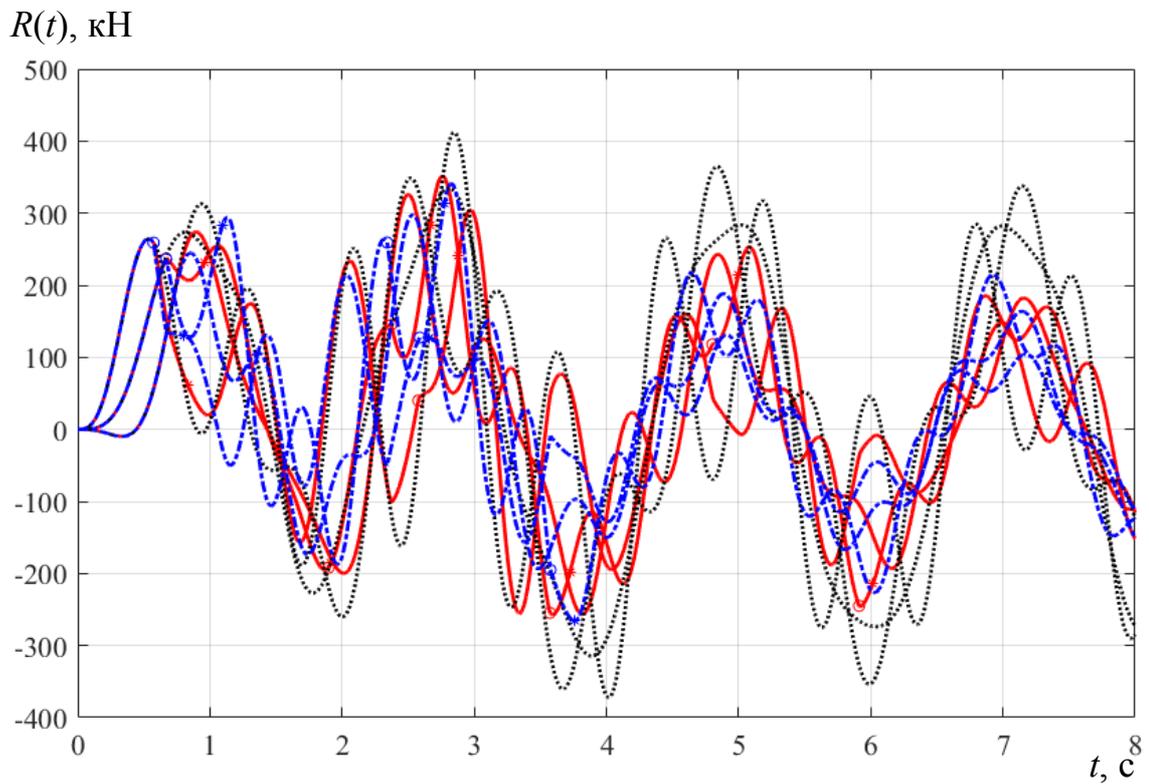


Рис. 23. Осциллограммы восстанавливающих сил в этажах каркаса при различных режимах работы конструкции.

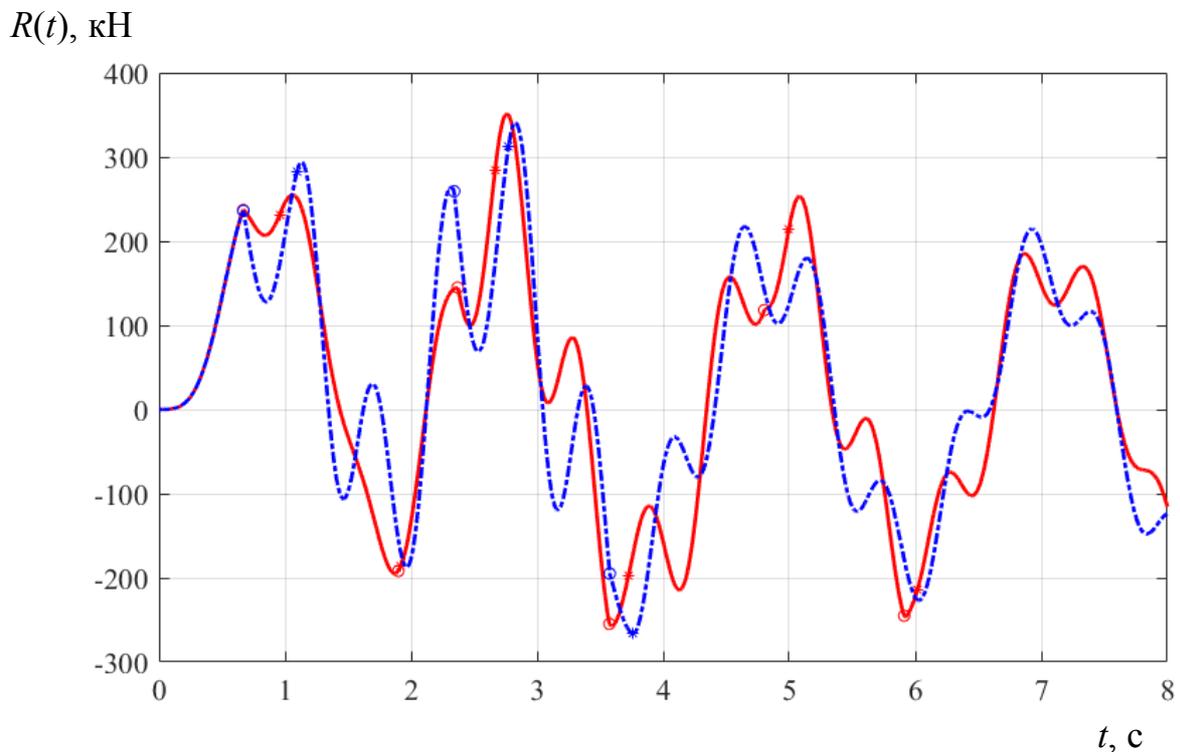


Рис. 24. Осциллограммы восстанавливающих сил во 2-м этаже каркаса при различных режимах работы.

На рис. 25 изображены осциллограммы предельных и остаточных составляющих восстанавливающих сил для 2-го этажа каркаса. Предельная составляющая обозначена тонкой линией, а остаточная – более жирной (при сохранении обозначений для различных режимов работы каркаса). Следует отметить, что предельная составляющая восстанавливающей силы при учете изменения пластических зон изменяется во время нелинейной работы ступенчато, как и жесткость этажа при шаговом увеличении длины пластической зоны.

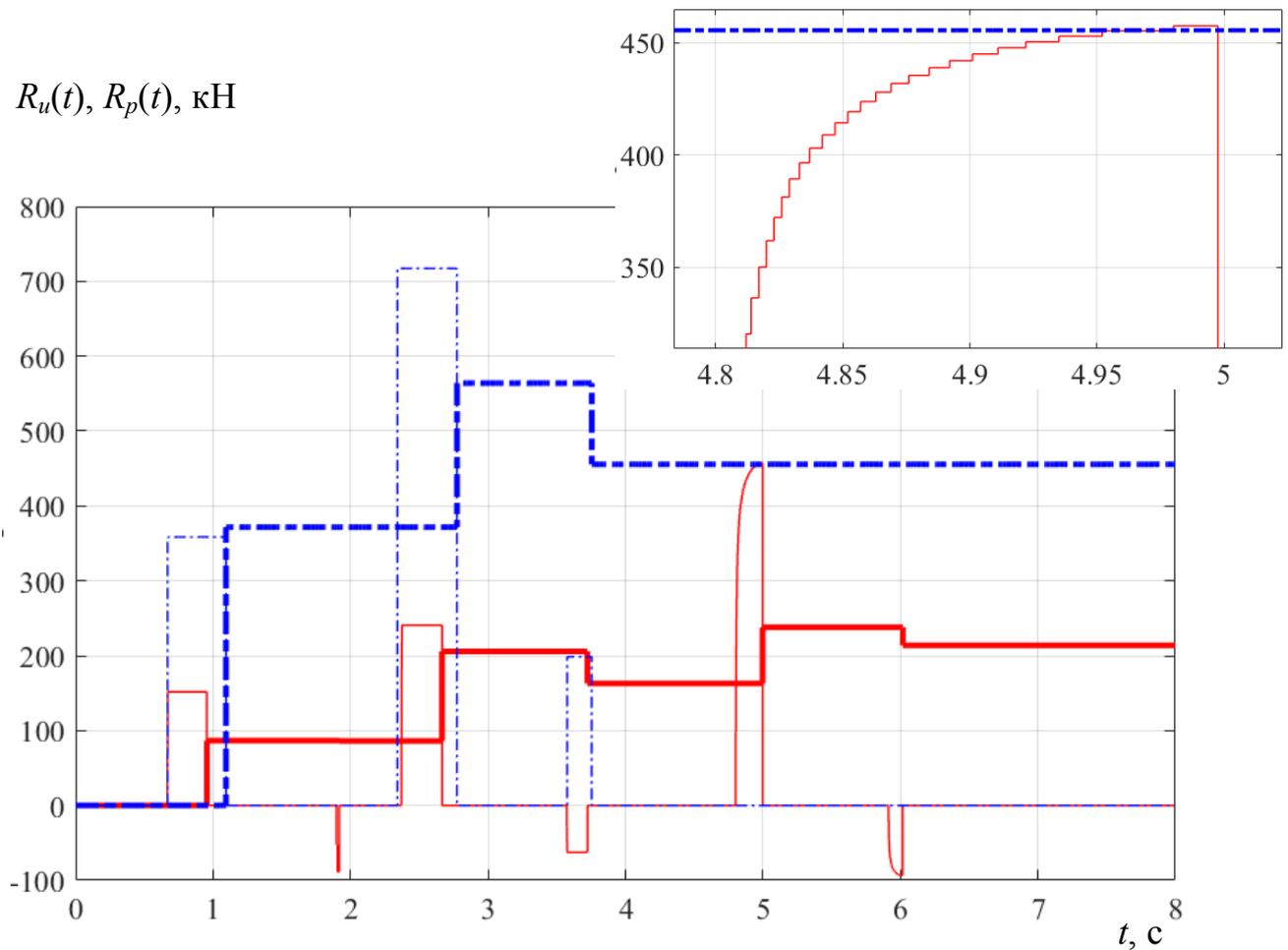


Рис. 25. Осциллограммы нелинейных составляющих восстанавливающих сил во 2-м этаже каркаса при различных режимах работы.

Собственные Частоты,  $\text{c}^{-1}$

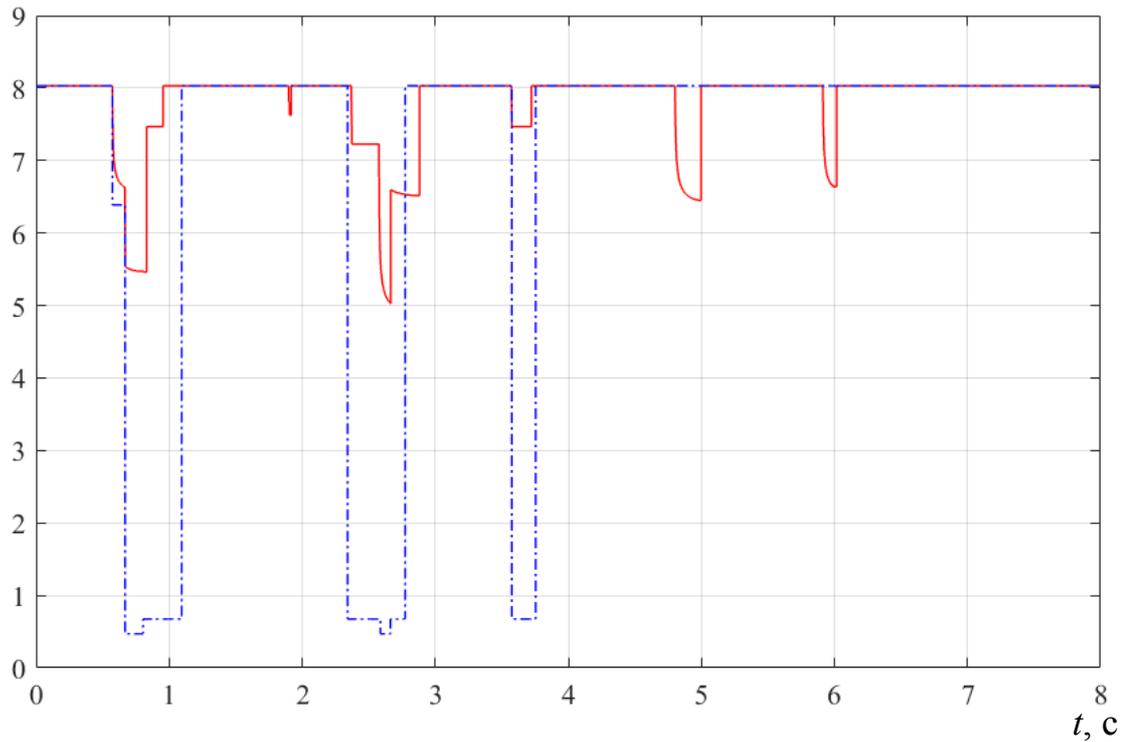


Рис. 26. Осциллограммы значений собственных частот 2-го этажа каркаса при различных режимах работы.

Периоды колебаний, с

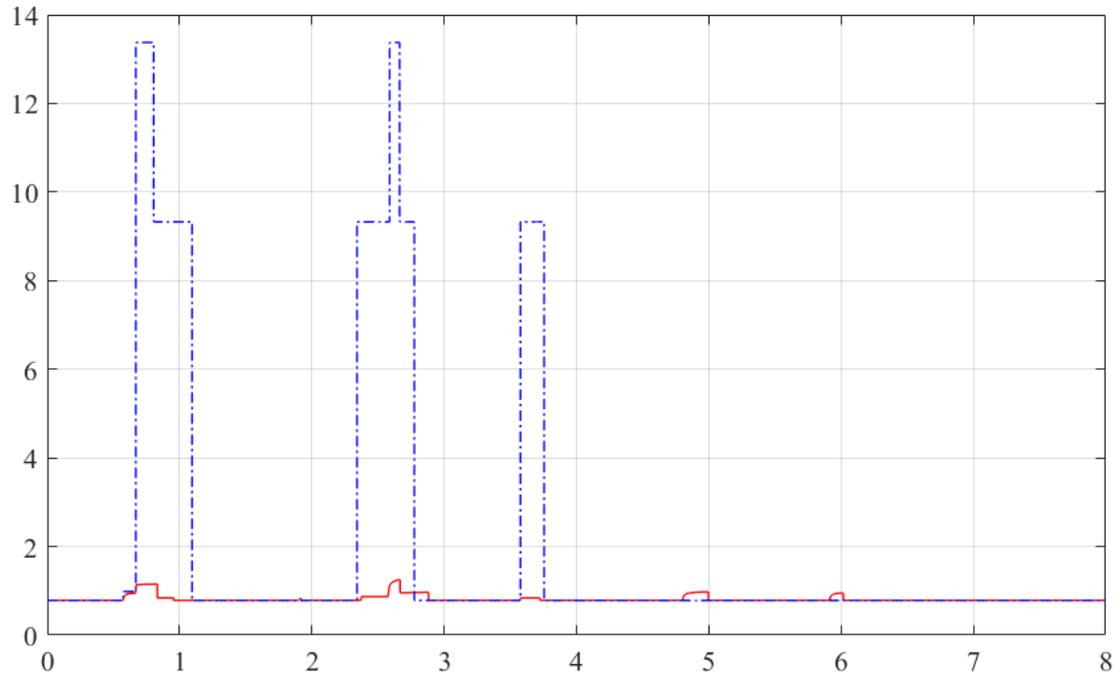


Рис. 27. Осциллограммы значений периодов колебаний 2-го этажа каркаса при различных режимах работы.

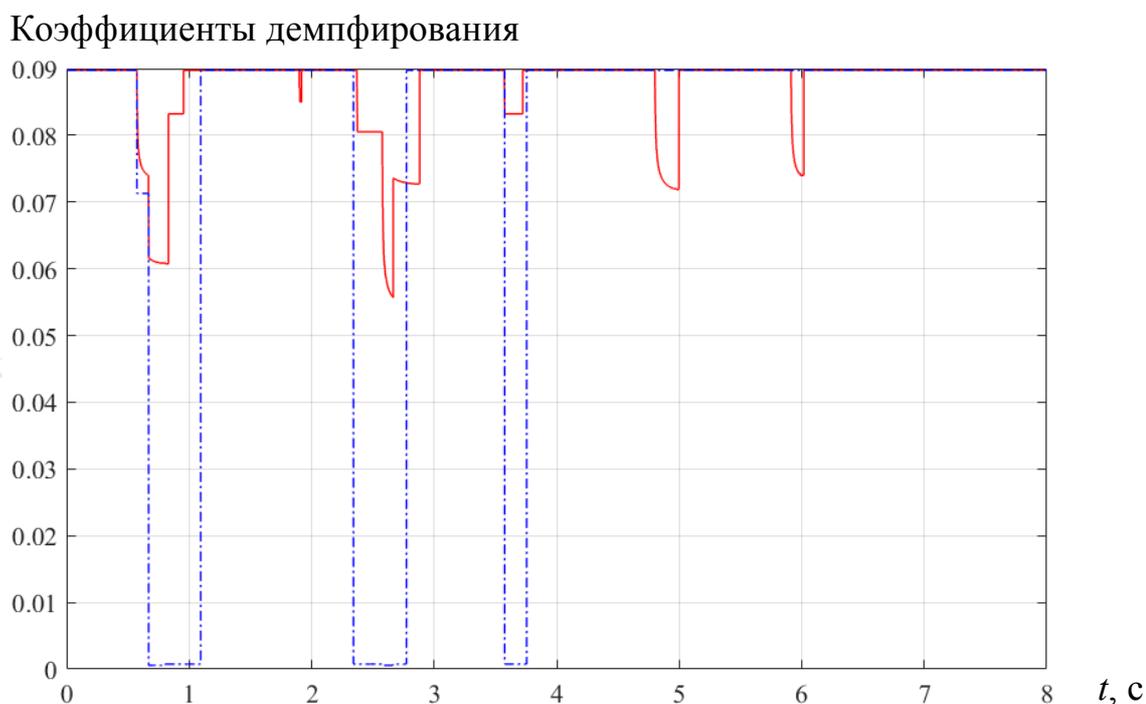


Рис. 28. Осциллограммы значений коэффициентов демпфирования 2-го этажа каркаса при различных режимах работы.

На рис. 26 – 28 показаны осциллограммы собственных характеристик колебаний 2-го этажа каркаса при различных режимах работы. Отметим, что в случае использования моделей нелинейной работы с постоянной длиной пластической зоны, равной всей высоте стоек, наблюдаются более выраженные скачки собственных характеристик колебаний, нежели с учетом переменной длины пластической зоны.

На рис. 29 показаны значения собственных частот и коэффициентов демпфирования для этажей каркаса. Слева изображены собственные характеристики для случая с переменными пластическими зонами, справа – без учета изменения длины пластических зон по высоте стоек каркаса. Из осциллограммы можно заметить, что смена состояния системы во время перехода через критические точки в одном из этажей сказывается на значениях собственных характеристик в других этажах. Это связано с изменением элементов матрицы решений МКУ в процессе нелинейной работы системы.

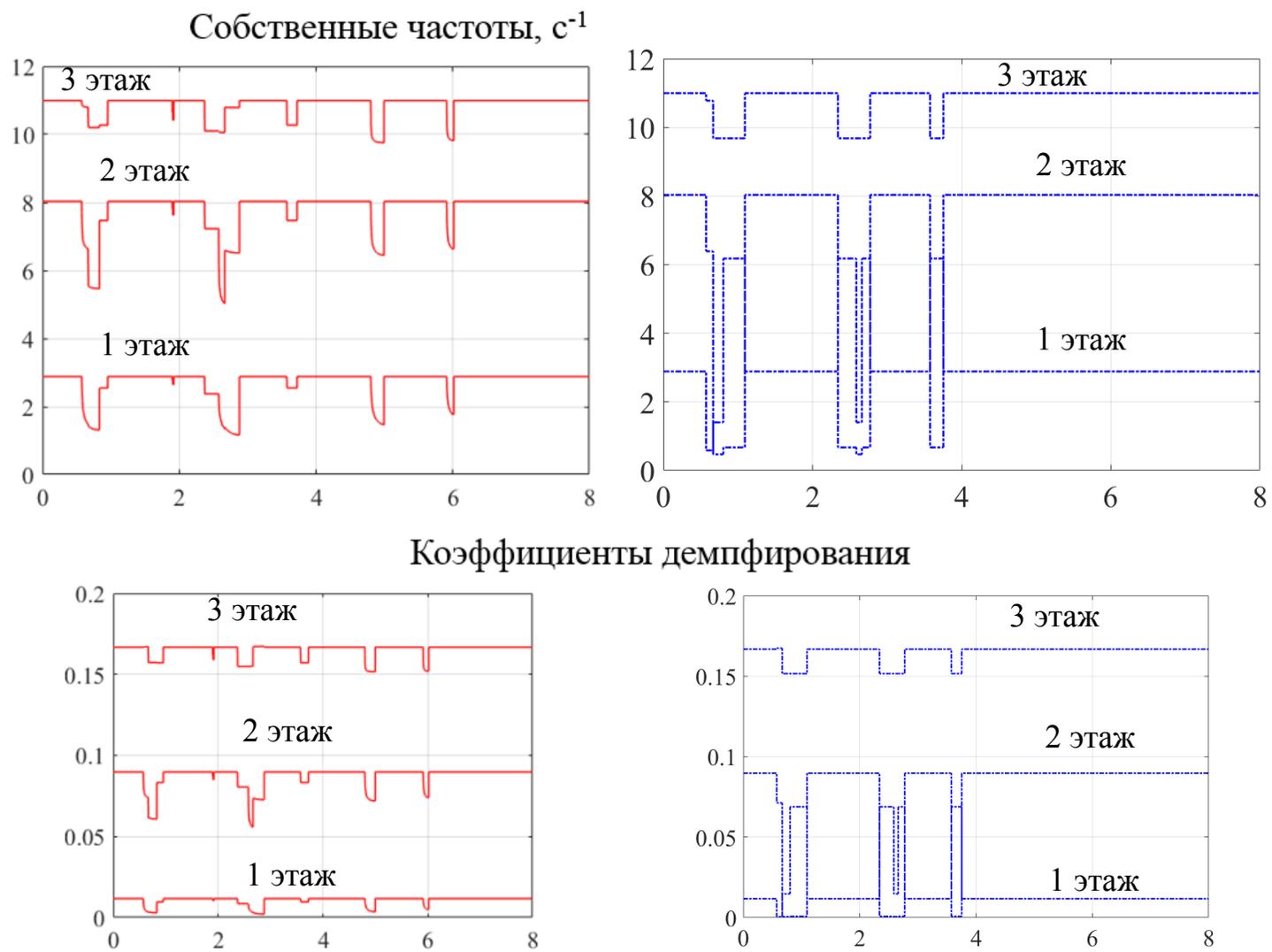


Рис. 29. Осциллограммы значений коэффициентов демпфирования и собственных частот этажей каркаса при различных режимах работы.

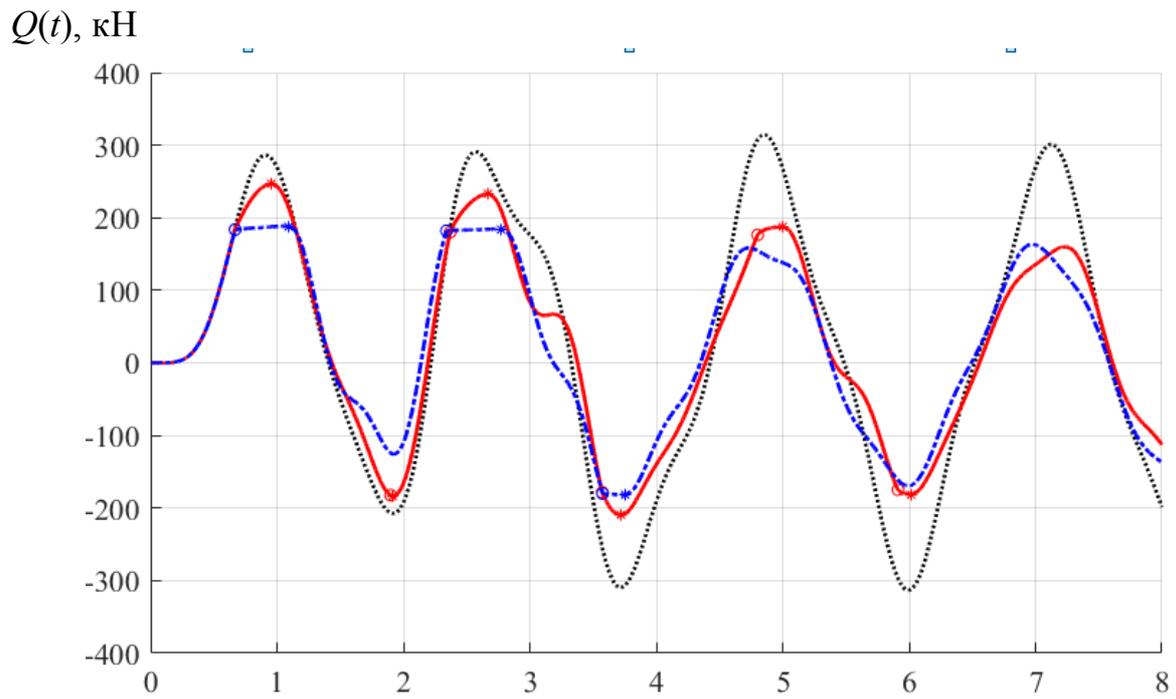


Рис. 30. Осциллограммы поперечных сил во 2-м этаже каркаса при различных режимах работы.

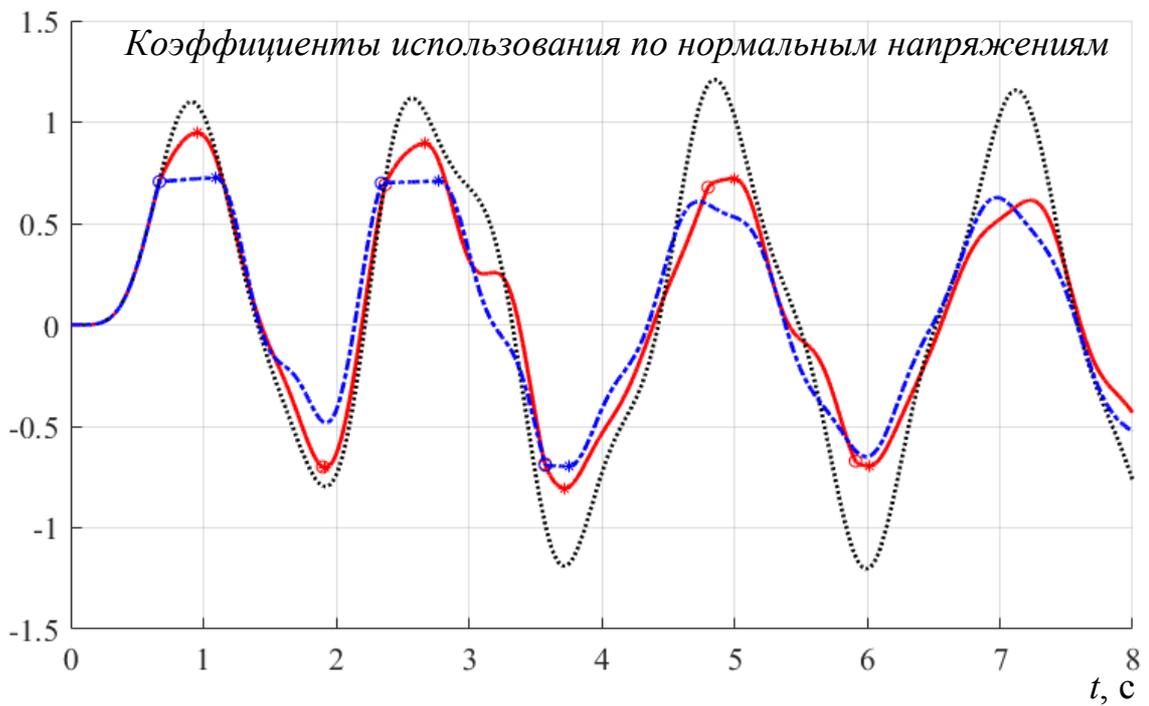


Рис. 31. Осциллограммы коэффициентов использования по нормальным напряжениям во 2-м этаже каркаса при различных режимах работы.

На рис. 29 отображены значения поперечных сил во 2-м этаже каркаса, на рис. 30 – коэффициенты использования по нормальным напряжениям во втором этаже каркаса при различных режимах работы конструкции. Коэффициенты использования равны отношению действующего напряжения в крайних сечениях стоек к значению временного сопротивления материала каркаса. Из рис. 30 мы можем видеть, что наиболее адекватно отражают картину значения коэффициентов при режиме работы каркаса с учетом переменной пластической зоны. При учете только упругой работы коэффициенты превышают критические значения, поэтому при таком подходе нужно закладывать дополнительный запас в жесткостные характеристики стоек. Режим работы каркаса, в котором длина пластической зоны постоянна и равна всей высоте стоек каркаса, наоборот, дает заниженные значения коэффициентов использования, что не позволяет адекватно оценить несущую способность сооружения.

Таким образом, учет изменения длины пластических зон в ходе решения задачи колебаний каркаса позволяет спроектировать наиболее экономичную конструкцию.

### **Выводы по расчету**

Произведен расчет колебаний многоэтажного плоского каркаса на импульсное воздействие методом временного анализа с применением различных моделей нелинейной работы конструкции. Точность решения задачи подтверждается значениями невязок уравнения движения дискретной диссипативной системы (разница левой и правой частей уравнения 42, а), которые не превышают  $2 \cdot 10^{-10}$  кН, что соответствует машинной точности. Осциллограммы значений невязок показаны на рис. 32.

Невязки, кН

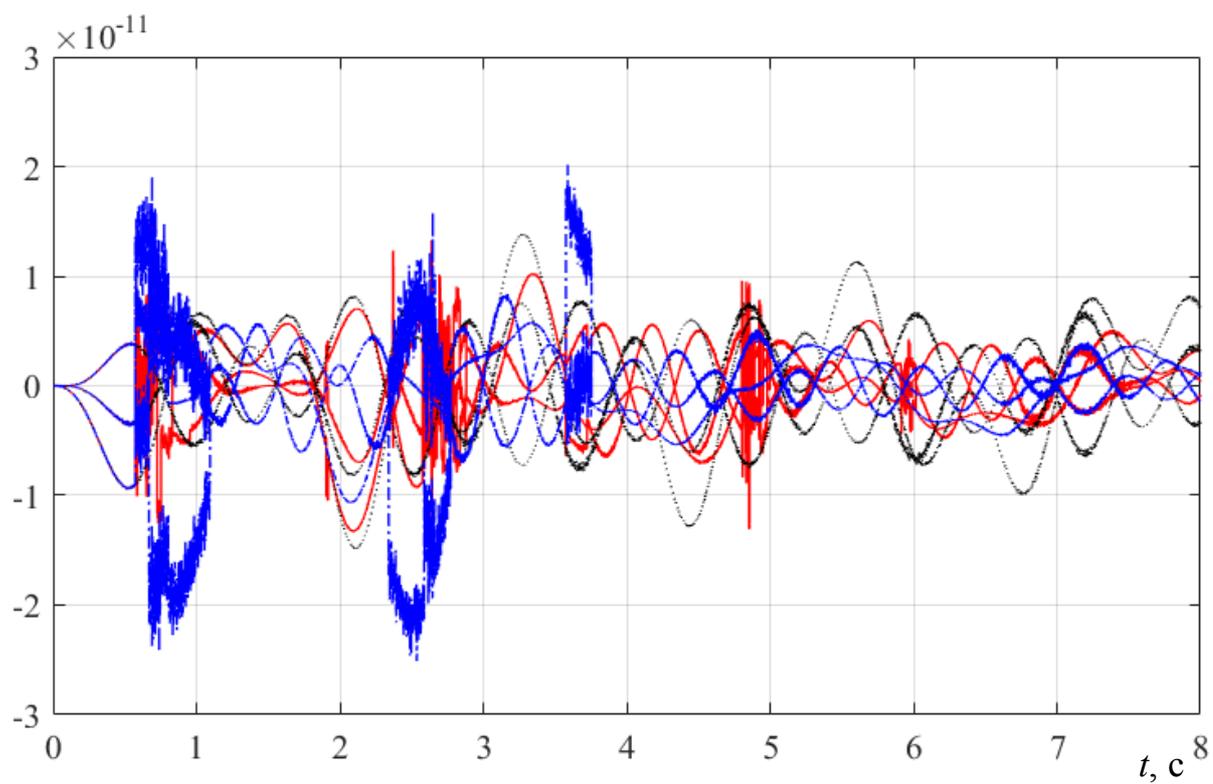


Рис. 32. Оциллограммы значений невязок уравнения движения в этажах каркаса при различных режимах работы конструкции.

## Сравнение результатов расчета по методу временного анализа и в программном комплексе Лира

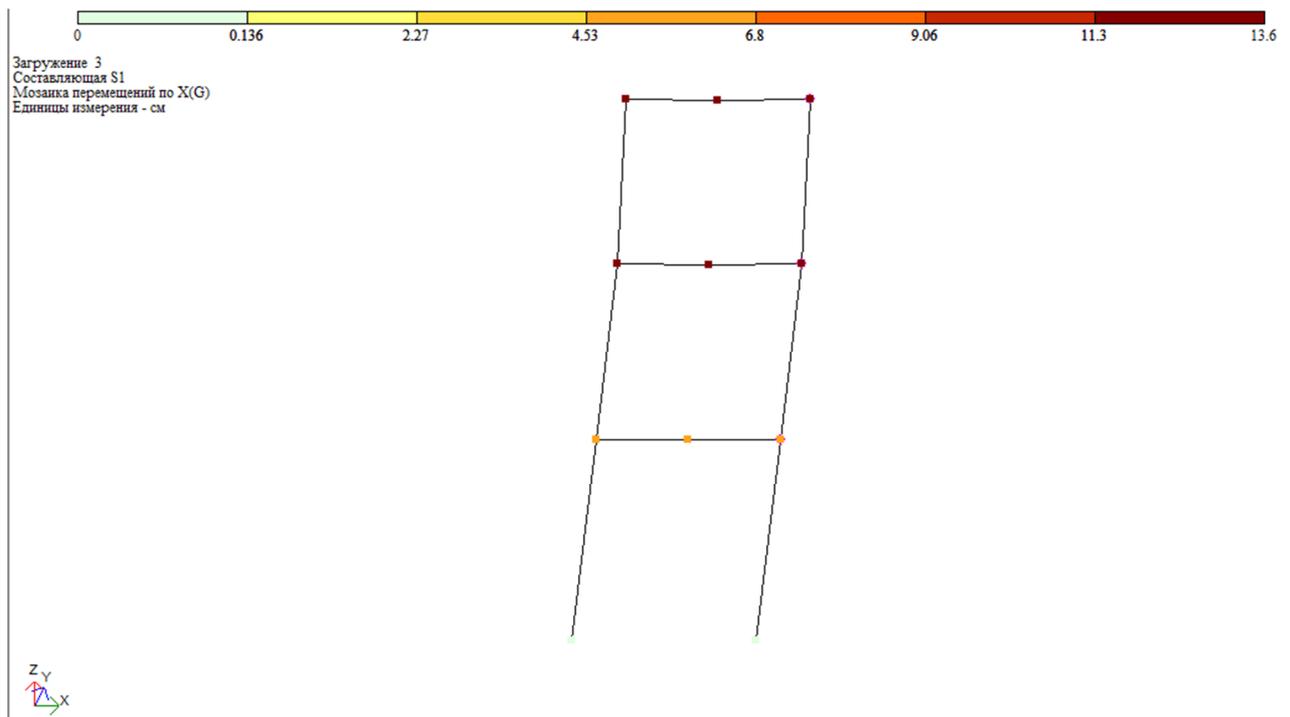


Рис. 33. Изополя максимальных абсолютных перемещений этажей каркаса, полученные в ходе решения задачи в программном комплексе Лира.

Был произведен расчет каркаса на импульсное воздействие в ПК Лира. Параметры расчетной модели и нагрузки идентичны тем, что использовались при решении методом временного анализа.

Моделирование задачи нагружения трехэтажного каркаса импульсными нагрузками показало, что максимальные перемещения составляют для первого этажа 4,53 см, для второго 11,3, для третьего – 13,6. Полученные результаты методом временного анализа показывают, что значения абсолютных перемещений для этажей несколько больше. Это объясняется тем, что ПК Лира не учитывает гистерезисных явлений при деформировании расчетной схемы. Таким образом, метод временного анализа дает более полную картину процесса колебаний конструкции.

## Выводы по работе

1. Предложена математическая модель колебаний многоэтажного каркаса с упругопластической восстанавливающей силой.
2. Учтено изменение длины пластической зоны по высоте стойки в ходе упругопластического деформирования.
3. Произведено сравнение параметров динамической реакции многоэтажного каркаса с учетом нескольких режимов нелинейной работы конструкции.
4. Оценка аналитического решения задачи (невязка равновесия узлов системы –  $10^{-10}$ ) свидетельствует о точном решении задачи.
5. Сравнение результатов расчета предлагаемым и одним из численных алгоритмов свидетельствует о состоятельности предложенного подхода

## Рекомендации по расчету многоэтажного каркаса

Для дальнейшего улучшения алгоритма расчета методом временного анализа и расчетной программы можно выделить следующие направления развития:

1. Увеличение количества пролетов в пределах одного этажа.
2. Увеличение числа степеней свободы в пределах этажа (расчет пространственного каркаса).
3. Учет конструктивной нелинейности системы (выход из строя некоторых колонн в пределах этажа).
4. Введение в алгоритм автоматической корректировки жесткостных характеристик опасных элементов. Под опасными понимаются элементы, которые потеряли устойчивость или разрушились, или не удовлетворяют эксплуатационным требованиям.
5. Повтор цикла временного анализа до тех пор, пока будут не назначены такие поперечные сечения элементов конструкции, при которых она удовлетворяет критериям предельных состояний.

## Библиографический список

1. *Потапов, А.Н.* Динамический анализ дискретных диссипативных систем при нестационарных воздействиях / А.Н. Потапов // Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 167 с.
2. *Уфимцев, Е.М.* Динамический расчёт статически неопределимых ферм методом временного анализа с учётом физической и конструктивной нелинейности / Уфимцев Е.М. // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Томск, 2016. – 20 с.
3. *Артемьева, Л.М.* Временной анализ реакции каркасных многоэтажных зданий при горизонтальных импульсных воздействиях / Артемьева Л.М. // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Томск, 2009. – 24 с.
4. *Гантмахер, Ф.Р.* Терия матриц / Ф.Р. Гантмахер // Изд-во Физматлит. – 2010. – 558 с.
5. *Кравченко, Г.М.* Динамический расчет зданий на ветровые нагрузки с учетом пульсационной составляющей / Г.М. Кравченко, Е.В. Труфанова, А.В. Долженко // Электронный научный журнал APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. Краснодар, 2013. С. 4–6.
6. *Масленников, А.М.* Нестационарные колебания систем с конечным числом степеней свободы / А.М. Масленников // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1983. – № 4. – С. 31–39.
7. *Масленников, А.М.* Расчет конструкций при нестационарных воздействиях / А.М. Масленников. // Л.: Изд. Ленингр. ун-та. – 1991. – 164 с.
8. *Масленников, А.М.* Расчет башен на импульсную нагрузку / А.М. Масленников // Строит, механика и расчет сооружений. – 1985. – № 5. С. 36–39.

9. *Каландарбеков, И.* Некоторые результаты численного решения динамической задачи за пределом упругости / Каландарбеков И. // Доклады академии наук республики Таджикистан – 2008. – Т.51, № 4. – С. 305–310.
10. *Дарков, А.В.* Строительная механика. Учебник для вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников //– 9-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2004. 656 с., ил.
11. *Константинов, И.А.* Строительная механика : учебник для вузов / И.А. Константинов, В.В. Лалин, И.И. Лалина. – М.:Прспект, КНОРУС, 2010. – 432 с.
12. *Васильев, А.А.* Металлические конструкции/ А.А. Васильев // Г.: Стройиздат, 1979. – 472с.
13. *Кудишин, Ю.И.* Металлические конструкции / Ю.И. Кудишин, Е.И. Беленя, В.С. Игнатьева и др. – Г.: Издательский центр «Академия», 2007. –688с.
14. *Беленя, Е.И.* Металлические конструкции: Специальный курс. // Под общ.ред. Е.И. Беленя. – Г.: Стройиздат, 1991. – 681 с.
15. *Кузнецов, В.В.* Металлические конструкции: Справочник проектировщика. В 3 томах. Т2. Конструкции зданий/ Под ред. В.В. Кузнецова. – Г.: Высш. школа, 1999. – 548с.
16. *Кочнева, Л.Ф.* Внутреннее трение в твердых телах при колебаниях / Л.Ф. Кочнева. М.: Наука, 1979. – 96 с.
17. *Резников, Л.М.* Эквивалентная модель многомассовой системы с вязким и частотно-независимым трением / Л.М. Резников // Строительная механика и расчет сооружений. – 1979. – № 4. – С. 44–48.
18. *Баляков, Д.Ф.* Модели демпфирования механических колебаний / Д.Ф. Баляков // Решетневские чтения. – 2016. – с. 116–117.

19. *Вильке, В.Г.* Теоретическая механика / В.Г. Вильке // Классический университетский учебник. МГУ им. М.В. Ломоносова, М., из-во «Лань», 2003. 306 с.
20. *Киселев, В.А.* Строительная механика: Спец. Курс. Динамика и устойчивость сооружений. Учебник для вузов. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Стройиздат, 1980. 616 с., ил.
21. *Корн, Г.А.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.А. Корн, Т.М. Корн. М.: Наука, 1977. – 831 с.
22. *Дьяконов В.П.* MATLAB 7.\*/R2006/R2007: Самоучитель/ Дьяконов В.П. // М.: ДМК Пресс, 2008. 768 с.: ил.
23. *Чернов, Ю.Т.* К расчету систем с выключающимися связями / Ю. Т. Чернов // Научно-технический журнал «Строительная механика и расчет сооружений», 2010. № 4. С. 44 – 49.
24. *Перельмутер, А.В.* Реализация расчета монолитных жилых зданий на прогрессирующее (лавинообразное) обрушение в среде вычислительного комплекса SCAD Office/ А.В. Перельмутер, Э.З. Криксунов, Н.В. Мосина // Инженерно-строительный журнал, 2009. № 2. – С. 13 – 18.
25. *Еремеев, П.Г.* Предотвращение лавинообразного (прогрессирующего) обрушения несущих конструкций уникальных большепролетных сооружений при аварийных воздействиях / П.Г. Еремеев // Научно-технический журнал «Строительная механика и расчет сооружений», 2006. № 2. – С. 65 – 72.
26. *Потапов А.Н.* Динамический анализ конструкций с разрушающимися связями / А.Н. Потапов, Е.В. Лемберг, В.И. Соломин, А.В. Гербенский// Вестник Южно-Уральского Государственного университета, 2012. С. 8 – 12.

27. *Гордон В.А.* Расчет динамических усилий в конструктивно-нелинейных элементах стержневых пространственных систем при внезапных структурных изменениях/ А.В. Гордон, Н.В. Ключева, Т.В. Потураева, А.С. Бухтиярова // Строительная механика и расчет сооружений. М., 2008, № 6. С. 26 – 31.
28. *Перельмутер, А.В.* Анализ конструкций с изменяющейся расчетной схемой: Монография / А.В. Перельмутер, О.В. Кабанцев. - М.: АСВ, 2015. - 148 с.
29. *Потапов, А.Н.* Метод решения матричного квадратного уравнения в задачах строительной механики / А.Н. Потапов // Строительные конструкции и расчет сооружений: Сб. тез. докл. науч.-техн. конф., 3-6 апреля, 1996. Новосибирск: НГАС, 1996. Ч.1. С. 74-75.
30. *Потапов, А.Н.* Временной анализ подкрановой фермы при аварийном воздействии / А.Н. Потапов, Е.М. Уфимцев, Зямбаев Н.А. // Проблемы оптимального проектирования сооружений: Доклады 3-й Всероссийской конференции, Новосибирск, 15 – 17 апреля, 2014 г. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2014. С. 318 – 325.
31. *Потапов, А.Н.* Временной анализ подкрановой фермы при аварийном воздействии / А.Н. Потапов, Е.М. Уфимцев, Зямбаев Н.А. // Тезисы доклада на IV Международном симпозиуме «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений», Иркутск, ИРГТУ, (01–06 июля 2014 г.).
32. *Потапов, А.Н.* Анализ колебаний подкрановой фермы при аварийном воздействии / А.Н. Потапов, Е.М. Уфимцев, Зямбаев Н.А. // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – № 5. – С. 55–59.
33. *Потапов, А.Н.* Временной анализ реакции ферм при действии импульсной нагрузки с учетом физической и конструктивной нелинейности / А.Н. Потапов, Е.М. Уфимцев, Зямбаев Н.А. // Сборник

- докладов международной научно-практической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения академика, профессора, доктора технических наук Д.Н. Соболева (16 декабря 2014 г., Москва). – 2014. – С. 279–290.
34. *Потапов, А.Н.* Динамический расчет подкрановой фермы при конструктивно нелинейной работе ее элементов/ А.Н. Потапов, Зямбаев Н.А. // Материалы седьмой научной конференции аспирантов и докторантов. – 2015. – С. 101 – 108.
35. *Потапов, А.Н.* Временной анализ диссипативной системы при конструктивно нелинейной работе ее элементов/ А.Н. Потапов, Зямбаев Н.А. // Сборник докладов I Международной научно-практической конференции «Строительство и экология: теория, практика, инновации». – 2015. – С. 87–90.
36. *Потапов, А.Н.* Динамический расчет подкрановой фермы при конструктивно нелинейной работе ее элементов. / А.Н. Потапов, Зямбаев Н.А. // Вестник Южно-Уральского государственного университета Серия «Строительство и архитектура». – 2015. – Т. 15, № 3. – С. 26 – 31.
37. *Уфимцев, Е.М.* Временной анализ физически и конструктивно нелинейных колебаний ферменных конструкций при действии импульсной нагрузки. Часть 1: математические модели временного анализа нелинейных колебаний / Е.М. Уфимцев // Сборник «Строительство и экология: теория, практика, инновации. Сборник докладов I Международной научно-практической конференции». – 2015. – С. 102-106.
38. *Уфимцев, Е.М.* Временной анализ физически и конструктивно нелинейных колебаний ферменных конструкций при действии импульсной нагрузки. Часть 3: Пример расчёта упругопластических

- колебаний ферменной конструкции/ Е.М. Уфимцев // Сборник «Статические и динамические расчёты в задачах строительной механики конструкций» / Сборник научных трудов кафедры строительной механики. – 2016. – Изд-во ЮУрГУ. – С. 108-111.
39. *Потапов, А.Н.* Временной анализ одноэтажного каркаса на импульсное воздействие. / А.Н. Потапов, Н.А. Зямбаев // Сборник 8-й научной конференции аспирантов и докторантов ЮУрГУ. – Изд-во ЮУрГУ, 2016. – 9 с.
40. *Потапов, А.Н.* Построение математической модели физически нелинейных колебаний многоэтажного каркаса. / А.Н. Потапов, Н.А. Зямбаев // Вестник Южно-Уральского государственного университета Серия «Строительство и архитектура». – 2017. – Т. 17, № 3. – С. 12 – 17.
41. *Потапов, А.Н.* Временной анализ диссипативных упругопластических конструкций / А.Н. Потапов, Н.А. Зямбаев // Проблемы оптимального проектирования сооружений: доклады 4-й Всероссийской конференции (Новосибирск, 11-13 апреля 2017 г.) – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2017. С. 221 – 229.
42. *Потапов, А.Н.* О построении моделей неоднородного демпфирования / Потапов А.Н. // Реконструкция городов, отдельных зданий, сооружений и конструкций на Урале: Третьи уральские академические чтения. Екатеринбург: УРО РААСН, 1997. С. 111–116.
43. *Зямбаев, Н.А.* Статические и динамические расчёты в задачах строительной механики конструкций / Н.А. Зямбаев // Сборник научных трудов кафедры строительной механики – Изд-во ЮУрГУ, 2016. –С. 5 – 11.

44. *Зямбаев, Н.А.* Анализ колебаний каркаса при многоцикловом деформировании с билинейной восстанавливающей силой / Н.А. Зямбаев // Сборник тезисов VII Международного симпозиума «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений». – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2018.
45. *Цейтлин, А.И.* Прикладные методы решения краевых задач строительной механики / А.И. Цейтлин. – М.: Стройиздат, 1984. – 336 с.
46. *Ананьин, А.И.* К составлению и решению уравнений движения неконсервативных систем / А.И. Ананьин // Известия вузов. – 1999. – № 5. – С. 21–27.
47. *Бате, К.* Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е.Ю. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
48. *Чернов, Ю.Т.* Вибрации строительных конструкций / Ю.Т. Чернов. – М.: Издательство АСВ, 2011. – 384 с.
49. *Москвитин, В.В.* Пластичность при переменных нагружениях / В.В. Москвитин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 344 с.
50. *Москвитин, В.В.* Пластические нагружения элементов конструкций / В.В. Москвитин. – М.: изд-во МГУ, 1964. – 264 с.
51. *Ерхов, М.И.* Теория идеально пластических тел и конструкций / М.И. Ерхов: – М.: Наука, 1978. – 352 с.
52. *Биргер, И.А.* Расчет на прочность деталей машин: Справочник / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Г.Б. Иосилевич. – М.: Машиностроение, 1993. – 640 с.: ил.
53. *Гохфельд, Д.А.* Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении. Справочник / Д.А. Гохфельд, Л.Б. Гецов,

- К.М. Кононов, Е.Т. Кульчихин, Ю.Н. Ребяков, О.С. Садаков, С.А. Тимашев, В.Н. Чепурский. – Екатеринбург: УрО РАН, 1996. – 405 с.
54. *Сорокин, В.Г.* Стали и сплавы. Марочник / В.Г. Сорокин и др. // Справочное издание. – М.: «Интермет Инжиниринг», 2001. – 608 с.: ил.
55. *Гуляев, Б. Б.* Свойства литой легированной конструкционной стали / Б.Б. Гуляев, И.А. Шапранов, В.М. Щпейзман и др. //Литейное производство. 1957. № 2. – С. 11-17.
56. *Беляев, В.И.* О схеме упрочнения и разупрочнения металла при циклическом испытании образцов. / В.И. Беляев, Т.А, Лебедев //«Тр. Ленингр. политехн. ин-та», 1953, № 4.
57. *Васильев, Д.М.* О природе эффекта Баушингера. / Д.М. Васильев //Сборник «Некоторые проблемы прочности твердого тела». – М.: Изд-во АН СССР. – 1959.
58. *Владимирский, Г.А.* К вопросу об испытании на повторные пластические деформации/ Г.А. Владимирский // «Заводская лаборатория». – 1937, Т. 6, № 5.
59. *Гвоздев, А.А.* Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации/ А.А. Гвоздев // «Труды конференции по пластическим деформациям». – М: Изд-во АН СССР. –Л., 1938.
60. *Гудьер, Дж. Н.* Упругость и пластичность / Дж. Н. Гудьер, Ф.Г. Ходж. : М.: 1960.
61. *Данилов, Ю.С.* Экспериментальное изучение эффекта Баушингера/ Ю.С. Данилов // Кандидатская диссертация. – М.: 1953.
62. *Жуков, А. М.* Упругие свойства пластически деформируемого металла и сложное нагружение / А.М. Жуков// «Инженерный сборник». – 1960, Т. 30.

63. Жуков, А.М. Поведение металлов при разгрузке и повторной нагрузке / А.М. Жуков // «Инженерный журнал». – 1961, Т. 1, № 1.
64. Зайцев, Г.З. Исследования некоторых закономерностей накопления пластических деформаций при циклических нагрузках/ Г.З. Зайцев// Канд. дис. Ин-т металлургии им. А. А. Байкова АН СССР. – 1960.
65. Зейтц, Фредерик. Физика металлов / Фредерик Зейтц // М.: Гостехиздат. – 1947.
66. Иванова, В.С. Механизмы пластических деформаций при действии циклических нагрузок / В.С. Иванова // «Металловедение и обработка металлов». – 1960, № 4.
67. Ильюшин, А.А. «Прикладная математика и механика» / А.А. Ильюшин// 1943. – т. VII, № 4.
68. Ильюшин, А.А. Пластичность, ч. I / А.А. Ильюшин // М.: ГИТТЛ. – 1948.
69. Ильюшин, А.А. О приращении пластической деформации и поверхности текучести / А.А. Ильюшин // «Прикладная математика и механика». – 1960. – Т. 24, вып. 4.
70. Кадашевич. Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера/ Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов // ДАН СССР. – 1957. – Т. 117, вып. 4.
71. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности/ Л.М. Качанов// М.: Гостехиздат. – 1956.
72. Клинов, И.Г. Экспериментальное исследование влияния линейного механического упрочнения малоуглеродистой стали на ее пластичность при последующем деформировании в обратном направлении / И.Г. Клинов// Сб. «Научн. тр. ЛИСИ». – М.: Госстройиздат. –1957, вып. 26.
73. Критеску, Н. Об эффекте Баушингера / Н. Критеску // «Период. сб. переводов иностранных статей». – 1960, 4 (62).

74. *Куприянов, В.В.* Расчет рамных конструкций из упруго-пластического материала на повторно-переменное нагружение/ В.В. Куприянов// «Строительная механика и расчет сооружений». – 1959, № 2.
75. *Ленский, В.С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций/ В.С. Ленский // Сб. «Вопросы теории пластичности». – М.: Изд-во АН СССР. – 1961.
76. *Мак-Грегор, К.В.* Значение остаточных напряжений/ К.В. Мак-Грегор, В. Остуд// Сб. «Остаточные напряжения в металлах и металлических конструкциях». – М.: 1957.
77. *Марин, Н.И.* Прочность конструктивного элемента при повторной нагрузке/ Н.И. Марин// «Тр. НАГИ». – 1946, № 596.
78. *Мартынова, Т. Н.* О повторных нагружениях пластического материала при законе упрочнения Прагера/ Т.Н. Мартынова // «Известия АН СССР», ОТН, серия механики и машин. – 1960, № 5.
79. *Москвитин, В.В.* К вопросу об упруго-пластическом изгибе бруса/ В. В. Москвитин// «Вестник Московского университета». – 1954, № 5.
80. *Москвитин, В.В.* Упруго-пластические деформации тел при повторных нагружениях/ В. В. Москвитин // «Прикладная математика и механика». – 1955. – Т. XIX, вып. 6.
81. *Москвитин, В.В.* Статические упруго-пластические деформации при многократных циклических нагружениях / В. В. Москвитин // «Изв. АН СССР», ОТН. – 1958, № 7.
82. *Москвитин, В.В.* Упруго-пластические деформации после значительного числа циклических нагружений / В. В. Москвитин // Сб. «Вопросы механики». – М: Изд-во МГУ, вып. 193.
83. *Александров, А.В.* Основы теории упругости и пластичности: учебник для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 2007. – 400 с.

84. *Чернов, Ю.Т.* Вибрации строительных конструкций. (Аналитические методы расчета. Основы проектирования и нормирования вибраций строительных конструкций, подвергающихся эксплуатационным динамическим воздействиям): Научное издание / Ю.Т. Чернов. – М.: АСВ, 2011. – 384 с.
85. *Боднер, С.Р.* Пластические деформации при ударном-и импульсном нагружении балок / С.Р. Боднер, П.С. Саймондс // Периодический сб. переводов иностр. статей: Механика, № 4, Вып. 68. – М.: ИЛ, 1961. – С. 79-91.
86. *Болотин, В.В.* Изгибно-крутильные колебания многоэтажного здания при сейсмических воздействиях / В.В. Болотин, В.П. Радин, В.П. Чирков // Известия вузов. Строительство, №2-3. – 2000. – С. 12-17.
87. *Болотин, В.В.* Исследование упругопластического деформирования многоэтажного каркасного здания при интенсивных сейсмических воздействиях / В.В. Болотин, В.П. Чирков, В.П. Радин, О.В. Трифионов // Известия вузов. Строительство. 2001. – №5. – С. 11-17.
88. *Болотин, В.В.* Упругопластический анализ несущих элементов зданий и сооружений при интенсивных сейсмических воздействиях / В.В. Болотин, В.П. Радин, В.П. Чирков // Известия вузов. Строительство. 2002. – №6. -С. 4-9.
89. *Болотин, В.В.* Исследование поведения зданий и сооружений со снижением жесткости при сейсмических воздействиях / В.В. Болотин,
90. *Болотин, В.В.* Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. Т.1 Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина; – 2-е изд., испр. и доп. – М: Машиностроение, 1999. 504 с.
91. *Корчинский, И.Л.* Расчет строительных конструкций на вибрационную нагрузку / И.Л. Корчинский. – М.: Стройиздат, 1948. – 133 с.

92. *Барштейн, Н.Ф.* Приложение вероятностных методов к расчету сооружений на сейсмические воздействия / Н.Ф. Барштейн // Строит, механика и расчет сооружений. 1960. - № 2 – С. 6–14.
93. *Леденёв, В.В.* Расчетные модели для проектирования конструкций и зданий: монография для научных и инженерно-технических работников, аспирантов, магистрантов и студентов строительных специальностей / В. В. Леденёв, П. В. Монастырёв, Г. М. Куликов, С. В. Плотникова. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2016. – 296 с.
94. *Соломин, В.И.* Метод конечных элементов. Плоские стержневые системы: учебное пособие / Соломин. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. – 73 с.
95. *Икрамов, Х.Д.* Численное решение матричных уравнений / Х.Д. Икрамов // М.: Наука, 1984. 440 с.
96. *Белостоцкий, А.М.* Конечноэлементный анализ динамических характеристик зданий и сооружений. Сравнение с данными натурных измерений / А.М. Белостоцкий, Г.Э. Шаблинский, И.Ж. Мсхалая, О.А. Козырев, Д.А. Зубков // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering – 2008 – Т. 4. – С. 31–32.
97. *Золотов, А.Б.* Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. / А.Б. Золотов, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров и др. - М.: АСВ, 2009. – 336 с.
98. *Петров, В.В.* Методы расчета конструкций из нелинейно-деформируемого материала: Учебное пособие / В.В. Петров, И.В. Кривошеин. - М.: АСВ, 2009. – 208 с.
99. *Ермакова, А.В.* Метод дополнительных конечных элементов для расчета ж/б конструкций по предельным состояниям. Монография / А.В. Ермакова. – М.: АСВ, 2012. – 114 с.

100. *Тухфатуллин, Б.А.* Численные методы расчёта строительных конструкций : учебное пособие / Б.А. Тухфатуллин. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2017. – 100 с.
101. *Агапов, В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций : учебное пособие / В.П. Агапов. – М. : Изд-во АСВ, 2004. – 248 с.
102. *Вагер, Б.Г.* Вариационное исчисление, вариационные методы и вариационные принципы в задачах строительного профиля : учебное пособие для вузов / Б.Г. Вагер и др. – СПб. : Изд-во АСВ, 2003. – 106 с.
103. *Ильин, В.П.* Численные методы решения задач строительной механики : учебное пособие / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. – М. : Изд-во АСВ, 2005. – 426 с.
104. *Матвеев, С.А.* Основы метода конечных элементов: учебное пособие / С.А. Матвеев. – Омск : СиБАДИ, 2016. – 67 с.
105. *Городецкий, А. С.* Программный комплекс ЛИРА-САПР 2013: учебное пособие / А.С. Городецкий и др. – К. –М. : Электронное издание, 2013. – 376 с.
106. *Трушин, С.И.* Строительная механика. Метод конечных элементов : учебное пособие / С.И. Трушин. – М. : НИЦ ИНФРА-М, 2016. – 305 с.
107. Барабаш, М.С. Программные комплексы САПФИР и ЛИРА-САПР - основа отечественных ВМ-технологий: монография/М.С. Барабаш, Д.В. Медведенко, О.И. Палиенко. – 2-е изд. – М.: Издательство Юрайт, 2013. – 366 с.
108. *Барабаш, М.С.* ЛИРА-САПР 9.2. Примеры расчета и проектирования. – Учебное пособие/ Барабаш, М.С., Гензерский Ю.В., Марченко Д.В., Титок В.П. – К.: «Факт», 2005. – 138с.:ил.

109. *Городецкий, А.С.* Компьютерные модели конструкций (Издание второе дополненное) / А.С. Городецкий, И.Д. Евзеров. – Киев: «Факт», 2007. – 394 с.
110. *Chopra, Anil K.* Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering/ Anil K. Chopra // Englewood Cliffs, New Jersey. – 2011. – Pp. 794.
111. *Gavin, Henry P.* Classical Damping, Non-Classical Damping and Complex Modes / Henri P. Gavin // CEE 541. Structural Dynamics. Department of Civil and Environmental Engineering. – Duke University, 2016. – Pp. 6.
112. *Prager, W.* Theory of perfectly plastic solids / W. Prager, Ph. G. Hodge// New York – John Wiley and Sons London – Chapman and Hall. – 1951. – Pp. 400.
113. *Coffin, L.F.* The cyclic straining and fatigue of Metals / L.F. Coffin, I. F. Tavernelli // «Transactions of the metallurgical society of AJME». – October, 1959, vol. 215.
114. *Caughey, T.K.* Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems / T.K. Caughey, M.E.I. O'Kelly // ASME. -1963. -Vol. 32, № 3. -P. 583-588.
115. *Dadeppo, D.A.* Damping in Discrete Linear Elastic Systems / D.A. Dadeppo // Engng Mech. Div., ASCE. 1963. - Vol. 89, № EM2, Part 1. -P. 13-18.
116. *Dubois, J. J.* An improved fluid superelement for the coupled Solid-fluid-surface wave dynamic interaction problem / J. J. Dubois, A.L. de Rouvray // Earthquake Eng. Struct. Dynam. 1978. - Vol. 6, № 3. - P. 235-245.
117. *Foss, K.A.* Coordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems / K.A. Foss // ASME, Journal of Applied Mechanics. 1958. -V. 25. - P. 361-364.

118. *Riera, J.D.* On the stress analysis of structures subjected to aircraft impact forces / J.D. Riera // Nuclear Engineering and Design, 1968. Vol. 8. - P. 415-426.
119. *Sorrentino, S.* Analysis of non-homogeneous Timoshenko beams with generalized damping distributions / S. Sorrentino, A. Fasana, S. Marchesiello // Journal of Sound and Vibration. 304 (2007). - P. 779-792.
120. *Sorrentino, S.* A new analytical technique for vibration analysis of non-proportionally damped beams / S. Sorrentino, S. Marchesiello, B.A.D. Piombo // Journal of Sound and Vibration. 265 (2003). - P. 765-782.
121. *Sun, C.T.* Vibration of multi-degree-of-freedom systems with non-proportional viscous damping / C.T. Sun, J.M. Bai // Int. J. Mech. Sci. 1995. -Vol. 37, No. 4.-P. 441-455.
122. *Baeza, L.* Dynamics of a truss structure and its moving-oscillator exciter with separation and impact–reattachment / Luis Baeza, Huajiang Ouyang // The Royal Society. – 2008. – Volume 464, issue 2098. – P. 2517–2533.
123. *Clough, R.W.* Dynamics of Structures / R.W. Clough, J. Penzien. – Computers & Structures, Inc. University Ave., Berkeley, CA 94704, USA. – 1995 – 752 p.
124. *Foss, K.A.* Coordinates which uncouple the equations of motion of damped linear dynamic systems / K.A. Foss // ASME, Journal of Applied Mechanics. – 1958. – V. 25. – P. 361–364.
125. *Khan, A.S.* Continuum theory of plasticity / A.S. Khan. – John Wiley & Sons, Inc, 1995. – 421 p.
126. *Masoero, E.* Energy-based study of structures under accidental damage / E. Masoero, P. Vallini, A.P. Fantilli, B. Chiaia // Key Engineering Materials. – 2009. – Vols. 417-418. – P. 557–560.

## Нормативные документы и стандарты

127. *ГОСТ 2772-88*. Прокат для технических условий. Общие технические условия.
128. *ГОСТ Р ИСО 10137-2016*. Основы расчета строительных конструкций. Эксплуатационная надежность зданий в условиях воздействия вибрации.
129. *СП 20.13330.2011*. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85\*. Издание официальное – М.: Минрегион России, 2010. – 85 с.
130. *СП 16.13330.2011*. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81\*. Издание официальное – М.: 2011. – 173 с.
131. *СП 63.13330.2012*. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. Издание официальное. – М.: Минрегион России, 2012. – 155 с.

## Приложения

### *Приложение 1. Описание программы расчета многоэтажного каркаса на импульсное воздействие*

Расчетный алгоритм по временному анализу многоэтажного каркаса на импульсное воздействие составлен в программном комплексе MATLAB и содержит следующие блоки:

БЛОК 1. Геометрические размеры и физические характеристики элементов каркаса.

БЛОК 2. Ввод и описание кинематических характеристик этажа каркаса, характеристик времени, параметров нагрузки.

БЛОК 3. Характеристики решения МКУ при упругих колебаниях ДДС.

БЛОК 4. Вспомогательные массивы и переменные.

БЛОК 5. Вычисление длины пластической зоны и пересчет жесткостей стоек конструкции.

БЛОК 6. Вычисление значений нелинейных составляющих восстанавливающей силы.

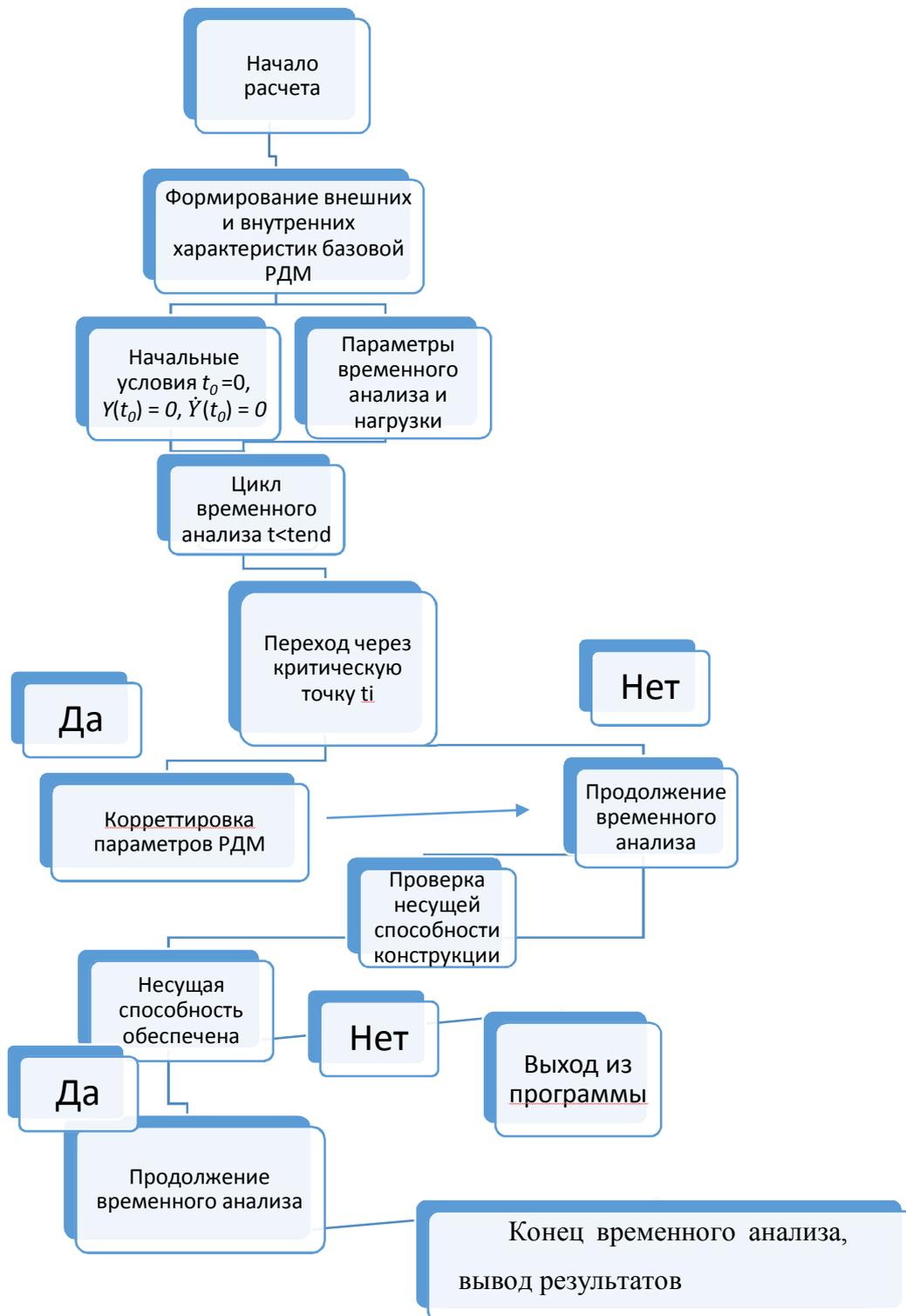
БЛОК 7. Значения реакции в момент времени, соответствующий критической точке  $t = t_i$ , когда происходит смена параметров расчетной динамической модели.

БЛОК 8. Шаговый процесс поиска значений реакции системы.

БЛОК 9. Вычисление значений параметров реакции в критической точке при состоянии системы в момент времени, соответствующий критической точке, когда смены параметров расчетной динамической модели еще не произошло.

БЛОК 10. Построение осциллограмм, вывод результатов расчета.

Приложение 2. Схема программы расчета многоэтажного каркаса на импульсное воздействие



*Приложение 3. Список публикаций автора по тематике  
исследования*

1. Потапов А.Н., Уфимцев Е.М., Зямбаев Н.А. Временной анализ подкрановой фермы при аварийном воздействии // Проблемы оптимального проектирования сооружений: Доклады 3-й Всероссийской конференции, Новосибирск, 15 – 17 апреля, 2014 г. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2014. С. 318 – 325.
2. Потапов А.Н., Уфимцев Е.М., Зямбаев Н.А. Временной анализ подкрановой фермы при аварийном воздействии // Тезисы доклада на IV Международном симпозиуме «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений», Иркутск, ИРГТУ, (01–06 июля 2014 г.).
3. Потапов А.Н., Уфимцев Е.М., Зямбаев Н.А. Анализ колебаний подкрановой фермы при аварийном воздействии // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – № 5. – С. 55–59.
4. Потапов А.Н., Уфимцев Е.М., Зямбаев Н.А. Временной анализ реакции ферм при действии импульсной нагрузки с учетом физической и конструктивной нелинейности. // Сборник докладов международной научно-практической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения академика, профессора, доктора технических наук Д.Н. Соболева (16 декабря 2014 г., Москва). – 2014. – С. 279–290.
5. Потапов А.Н., Зямбаев Н.А. Динамический расчет подкрановой фермы при конструктивно нелинейной работе ее элементов. // Материалы седьмой научной конференции аспирантов и докторантов. – 2015. – С. 101 – 108.
6. Потапов А.Н., Зямбаев Н.А. Временной анализ диссипативной системы при конструктивно нелинейной работе ее элементов. // Сборник докладов I Международной научно-практической конференции

- «Строительство и экология: теория, практика, инновации». – 2015. – С. 87–90.
7. Потапов А.Н., Зямбаев Н.А. Динамический расчет подкрановой фермы при конструктивно нелинейной работе ее элементов. // Вестник Южно-Уральского государственного университета Серия «Строительство и архитектура». – 2015. – Т. 15, № 3. – С. 26 – 31.
  8. Потапов А.Н., Зямбаев Н.А. Временной анализ одноэтажного каркаса на импульсное воздействие. // Сборник 8-й научной конференции аспирантов и докторантов ЮУрГУ. – Изд-во ЮУрГУ, 2016. – 9 с.
  9. Потапов А.Н., Зямбаев Н.А. Построение математической модели физически нелинейных колебаний многоэтажного каркаса. // Вестник Южно-Уральского государственного университета Серия «Строительство и архитектура». – 2017. – Т. 17, № 3. – С. 12 – 17.
  10. Потапов А.Н., Зямбаев Н.А. Временной анализ диссипативных упругопластических конструкций // Проблемы оптимального проектирования сооружений: доклады 4-й Всероссийской конференции (Новосибирск, 11-13 апреля 2017 г.) – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2017. С. 221 – 229.
  11. Зямбаев Н.А. Статические и динамические расчёты в задачах строительной механики конструкций. // Сборник научных трудов кафедры строительной механики – Изд-во ЮУрГУ, 2016. –С. 5 – 11.
  12. Зямбаев Н.А. Анализ колебаний каркаса при многоцикловом деформировании с билинейной восстанавливающей силой. // Сборник тезисов VII Международного симпозиума «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений». – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2018.