

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Факультет «Математики, механики и компьютерных технологий»
Кафедра «Вычислительной механики»

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой ВМ,
д. ф.-м. н., профессор
_____/Ю.М. Ковалев
_____/2018г.

Верификация метода расчета ударных волн

ПОЯНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–01.03.03.2018.14-02-1299.ПЗ ВКР

Руководитель
к.ф.-м.н., доцент кафедры ВМ
_____/Е.С.Шестаковская
_____/2018 г.

Автор работы
студент группы ЕТ-410
_____/А.М. Ганеев
_____/2018 г.

Нормоконтролер
_____/Н.Л. Клиначева
_____/2018 г.

Челябинск 2018

Ганеев А.М.

Верификация метода расчета ударных волн А.М. Ганеев - Челябинск, 2018. - 44 с.

В данной выпускной квалификационной работе описаны методы расчета ударных волн, изучен метод Куропатенко для одномерного случая. Написан вычислительный алгоритм, реализующий метод Куропатенко в пакете Matlab. Проведена верификация программного комплекса с помощью аналитического решения задачи о сжатии холодного газового шара.

Список лит. - 8 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	5
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	13
РЕЗУЛЬТАТЫ	19
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	27
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	28
ПРИЛОЖЕНИЕ	29

Введение

В современном мире математическое моделирование является неотъемлемой частью в различных областях человеческой деятельности, т.к. решает большое количество реальных задач и широко используется в исследовательской деятельности. Одним из таких направлений является изучение ударных волн (УВ). Они могут быть полезными в тушении пожаров, добыче нефти и вредоносными в разрушении от падения метеорита, землетрясения и т.д. Из-за специфики исследования УВ, не всегда безопасно производить натурные эксперименты. Для этого и используется математическое моделирование, которое адекватно описывает физический процесс. Таким образом, разработка таких математической модели является актуальной задачей.

Цель работы - разработка и верификация вычислительного алгоритма, реализующего метод Куропатенко для расчета ударных волн в идеальном газе в одномерном случае.

Задачи работы:

1. Изучить физико-математическую модель сплошной среды;
2. Изучить численные методы моделирования течений жидкостей и газов;
3. Реализовать численный алгоритм для выбранной модели сплошной среды;
4. Провести верификацию вычислительного алгоритма.

Обзор литературы

В статье [1] автор проводит сравнительный анализ известных методов расчета ударных волн. Исследовал диссипативные свойства, монотонность разностных схем и дистракцию. Принципиально отличающихся друг от друга механизмы диссипации энергии известно все четыре. В своей статье Куропатенко ограничился рассмотрением методов расчета УВ, в которых сильный разрыв заменялся слоем конечной ширины, сравнимой с размером сеточной ячейки (дистракции). В результате данной работы была приведена сравнительная таблица методов расчета УВ.

В статье [2] авторы Ковалев и Шестаковская численно исследуют распространение цилиндрической ударной волны и ее взаимодействие со слоем гетерогенной двухфазной среды. Результатами является комплексная технология, позволяющая проводить численное исследование цилиндрических ударных волн.

В своей работе авторы используют модифицированный метод Неймана-Рихтмайера, адаптировав его для расчета течений гетерогенных сред. Разностная схема представлена в виде

$$u_0^{n+1/2} = u_0^{n-1/2} - \frac{\tau}{2\Delta m_0} \sum_{i=1}^4 (p_i^n + \omega_i^n)(y_{i+1}^n - y_i^n) + \tau F_x^{n-1/2}$$

$$v_0^{n+1/2} = v_0^{n-1/2} + \frac{\tau}{2\Delta m_0} \sum_{i=1}^4 (p_i^n + \omega_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n) + \tau F_y^{n-1/2}$$

$$F_x^{n-1/2} = \left(\frac{f_x}{\rho}\right)_0^n = -\frac{4}{d} c_d \alpha \sqrt{\left(u_0^{n-1/2}\right)^2 + \left(v_0^{n-1/2}\right)^2} \cdot u_0^{n-1/2}$$

$$F_y^{n-1/2} = \left(\frac{f_y}{\rho}\right)_0^n = -\frac{4}{d} c_d \alpha \sqrt{\left(u_0^{n-1/2}\right)^2 + \left(v_0^{n-1/2}\right)^2} \cdot v_0^{n-1/2}$$

$$p^{n+1} = \frac{\frac{2}{\gamma-1} p^n \sigma^n + (p^n + \omega^n + \omega^{n+1})(\sigma^n - \sigma^{n+1})}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \sigma^{n+1} - \sigma^n}$$

$$E^{n+1} = \frac{p^{n+1}}{(\gamma - 1)\rho^{n+1}}$$

$$\rho^{n+1} = \rho^n \frac{S^n}{S^{n+1}}$$

Где S_i^n – площадь i – го четырехугольника,

$$\Delta m_0 = \int_s \rho dS = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \rho_i^n S_i^n$$

Результаты данной работы показывают структуру ударной волны в гетерогенной среде. Происходит увеличение передаваемого УВ поверхности Земли импульса, следовательно, увеличиваются масштабы разрушения.

В статье [3] авторы Миньков и Гольдина рассматривают задачу о распространении ударной волны в газозвеси. Показаны особенности численного решения задачи с инертными частицами, размер которых изменяется.

Систему уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = G$$

Где

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \\ \rho_s \\ \rho_s u_s \\ \rho_s E_s \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (\rho E + p)u \\ \rho_s u_s \\ \rho_s u_s^2 \\ \rho_s u_s E_s \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_s t_* \varphi_f(u_s - u) \\ \rho_s t_* \varphi_q(T_s - T) + \rho_s u_s t_* \varphi_f(u_s - u) \\ 0 \\ \rho_s t_* \varphi_f(u - u_s) \\ \rho_s t_* \varphi_q(T - T_s) + \rho_s u_s t_* \varphi_f(u - u_s) \end{bmatrix}$$

получили численно с использованием метода конечных объемов по разностной схеме первого порядка аппроксимации по времени и пространству.

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\tau}{h} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) + \tau G_i^n$$

Была проведена серия расчетов, в которых размер частиц изменялся от 5 до 25 мкм. Для определения устойчивости варьировали размер разностных ячеек. Расчеты показали, что для мелких частиц численное решение получается неустойчивым, если размер ячеек больше чем предельно допустимый.

По результатам работы было показано, что разностная схема корректно считает толщину ударной волны, которая распространяется по газозвеси.

Ю.М. Ковалев и Е.А. Ковалева разработали модификацию метода крупных частиц в исследовании течений газозвеси [4]. Предложенная модификация позволила не вводить в явном виде искусственную вязкость, что позволило устранить искажения картины газозвеси, при распространении ударных волн в неоднородных средах, позволило не применять сложные итерационные процессы, которые есть в неявной разностной схеме, и значительно сократить время счета.

Тестирование данной модификации на решении задачи о распространении УВ в «замороженной» газозвеси и в облаке газозвеси. Результаты показали что, применение метода более эффективно, чем применение метода крупных частиц, при больших числах Куранта и отсутствии искусственной вязкости.

В статье [5] рассматривается применение искусственной вязкости в схемах типа Годунова и эффект «карбункула». Авторы И. Ю. Тагирова, А. В. Родионов предлагают новый метод для решения проблем неустойчивости путем подавления неустойчивости при помощи введения диссипативных

добавок в виде правых частей уравнений Навье—Стокса с искусственной вязкостью.

В статье приведена подробная история изучения задач газовой динамики методом сквозного счета схемой типа Годунова.

Одной из главных не решенных проблем последнего времени авторы выделяют «карбункул» – проблему для классических конечно-объемных схем. Эффект «карбункула» - неустойчивость, появляется при сквозном расчете сильных УВ, при котором происходит значительное искажение течения.

В работе рассматриваются несколько искусственных вязкостей. Для идеального газа:

$$q = \frac{\gamma + 1}{4} \rho (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4} \rho \right)^2 (\Delta x)^4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 + (\rho a)^2 (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}$$

Для метода, имеющий название «матрица искусственных вязкостей», тензор искусственных вязкостей имеет форму

$$\tau = C_U l \rho \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Подход к решению «карбункул» - проблемы опробован на схеме Годунова и ее модификации второго порядка точности 8с использованием точного решателя задачи Римана. Его эффективность демонстрируется на ряде известных двумерных задач.

В работе [6] авторы рассматривают комбинированный метод моделирования упругопластических тел. Комбинация состоит в объединении двух методов: сглаживание частиц и сеточно-характеристического.

Сеточно-характеристический метод позволяет моделировать волновые процессы в упругих средах, упругие удары, а так же различные процессы разрушения. Но использование данного метода является технически сложным и снижается его точность из – за необходимости регулярного перестроения сетки.

Для моделирования процессов разрушения лучше подходит метод сглаживания частиц. Но и в нем есть недостатки: не физические осцилляции.

Эти два метода используют в комбинированном численном методе GCM–SPH, чтобы объединить преимущества и частично устранить недостатки, для решения реальных задач.

Описание алгоритм метода между GCM-областью и SPH-областью.

1. Интерполяция функций, характеризующих состояние вещества во вспомогательных частицах, по значениям функций, характеризующих состояние вещества в GCM-области:

$$q_{SPH}(t, im) = I_{SPH \leftarrow GCM} \cdot q_{GCM}(t)$$

2. Предварительные вычисления в SPH-области с целью определить максимально возможный временной шаг на данном временном слое t:

$$\bar{q}_{SPH}(t) = \bar{N}_{SPH} \cdot q_{GCM}(t)$$

$$\tau_{SPH}(t) = f(q_{SPH}(t))$$

3. Определение максимально возможного временного шага в тетраэдральной сетке для сеточно - характеристического метода и выбор минимального из двух:

$$q_{GCM}(t) = I_{GCM \leftarrow SPH} \cdot q_{GCM}(t)$$

$$q_{GCM}(t + \tau(y)) = N_{GCM} \cdot q_{GCM}(t)$$

4. Расчет функций, описывающих состояние вещества в GCM-области:

$$q_{GCM}(t) = I_{GCM \leftarrow SPH} \cdot q_{GCM}(t)$$

$$q_{GCM}(t + \tau(y)) = N_{GCM} \cdot q_{GCM}(t)$$

5. Расчет функций, описывающих состояние вещества в SPH-области:

$$q_{SPH}(t + \tau(y)) = N_{SPH} \cdot q_{SPH}(t)$$

6. Сохранение результатов интегрирования на данном временном слое.

В работе приведены экспериментальные результаты двух задач: распад разрыва и пробой тонкой пластины ударником. Также были получены положительные результаты численных экспериментов: сравнение численного решения модельных задач с аналитическим и качественный анализ результатов численного моделирования высокоскоростных столкновений, сопровождаемых существенными деформациями (пробой тонкой пластины ударником и столкновение ударника с массивной мишенью).

В работе [7] приведен метод адаптивной искусственной вязкости для решения уравнений газовой динамики. Авторы Попов и Фрязинов переносят этот метод с ортогональной сетки на неструктурированные сетки.

Метод состоит из трех этапов. Первый этап состоит в нахождении «предикторного» решения, в котором учтены поправки Лакса-Вендроффа, при этом отсутствуют диссипативные слагаемые с искусственной математической вязкостью. Разностная схема строится при помощи приемов, разработанных при построении полностью консервативных разностных схем.

Во втором этапе вводится диссипативное слагаемое с одинаковой искусственной вязкостью. Искусственная вязкость вводится адаптивно к решению.

На третьем этапе вводится диссипативное слагаемое для сглаживания решения. В работе приводятся расчеты тестовых задач на ортогональных сетках и сравниваются с решением на треугольных сетках.

В работе рассмотрена система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial I_\alpha}{\partial t} + \operatorname{dis}(I_\alpha v) + \operatorname{grad}_\alpha p = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}((E + p)v) = 0 \end{cases}$$

В расчетах видно, что метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики позволил качественно уменьшить размывание ударных волн, что позволит в дальнейшем использовать его для расчета на неструктурированных треугольных сетках.

В книге [8] подробно описывается разностная схема в Эйлеровых координатах. Автор использует систему дифференциальных уравнений в эйлеровых координатах вида:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial \rho U^2}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho(E + 0,5U^2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho U(E + 0,5U^2)}{\partial x} + \frac{\partial P U}{\partial x} = 0$$

После преобразований данной системы, получим разностную схему в эйлеровых координатах:

$$\frac{\rho_{i+0.5}^{n+1} - \rho_{i+0.5}^n}{\tau} + \frac{(\rho U)_{i+1}^* - (\rho U)_i^*}{h} = 0,$$

$$\frac{\rho_{i+0.5}^{n+1} U_{i+0.5}^{n+1} - \rho_{i+0.5}^n U_{i+0.5}^n}{\tau} + \frac{P_{i+1}^* + \rho_{i+1}^* (U_{i+1}^*)^2 - P_i^* - \rho_i^* (U_i^*)^2}{h} = 0,$$

$$\frac{\rho_{i+0.5}^{n+1} \varepsilon_{i+0.5}^{n+1} - \rho_{i+0.5}^n \varepsilon_{i+0.5}^n}{\tau} + \frac{P_{i+1}^* U_{i+1}^* - P_i^* U_i^* + \rho_{i+1}^* U_{i+1}^* \varepsilon_{i+1}^* - \rho_i^* U_i^* \varepsilon_i^*}{h} = 0,$$

Для расчета используют двухэтапный метод. На первом этапе используется разностная схема в лагранжевых координатах, что позволяет убрать ряд проблем и делает процедуру расчетов более простой.

Так же приводится демонстрация использования данного метода, на примере дивергентной разностной схемы.

Теоретическая часть

1. Метод Куропатенко. Идея метода

В данном разделе мы будем рассматривать метод Куропатенко для одномерного течения идеальной среды с плоской симметрией в лагранжевых координатах. В дальнейшем переходя к общему виде в 1D .

Ударные волны заменяются ударным слоем или слоем конечной ширины, как и в методах Неймана-Рихтмайера, Лакса и Годунова.

Все сеточные интервалы (основные и вспомогательные) относятся к одному из двух типов в зависимости от решения: сжатие или разрежение.

Диссипация энергии происходит только в сжимающемся интервале. Основная идея метода заключается в том, что для описания роста энтропии используется тот же механизм, что и на ударных волнах. С этой целью вспомогательные величины находятся из системы законов сохранения на поверхности сильного разрыва, записанных в виде системы нелинейных алгебраических уравнений.

$$P_1 - P_0 - W(U_1 - U_0) = 0, \quad (1)$$

$$U_1 - U_0 + W(V_1 - V_0) = 0, \quad (2)$$

$$(E_1 + \frac{1}{2}U_1^2 - E_0 - \frac{1}{2}U_0^2)W - (P_1U_1 - P_0U_0) = 0. \quad (3)$$

Состояние перед разрывом (P_0, V_0, E_0, U_0) отождествляется с решением в сеточном интервале в момент t^n , а в качестве величины за разрывом берется одна из сеточных величин либо на границе интервала, либо в соседнем интервале. После этого из (1) – (3) и уравнения состояния находятся остальные величины за разрывом. Они и выбираются в качестве вспомогательных. Так, например, если задать U_1 , то из (1)–(3) находятся

P_1, V_1, E_1, W , если же задать P_1 , то находятся V_1, E_1, U_1, W , где $W = \frac{dm}{dt}$. Сеточная ударная волна в ячейки $i + 0.5$ показана на рис 1.

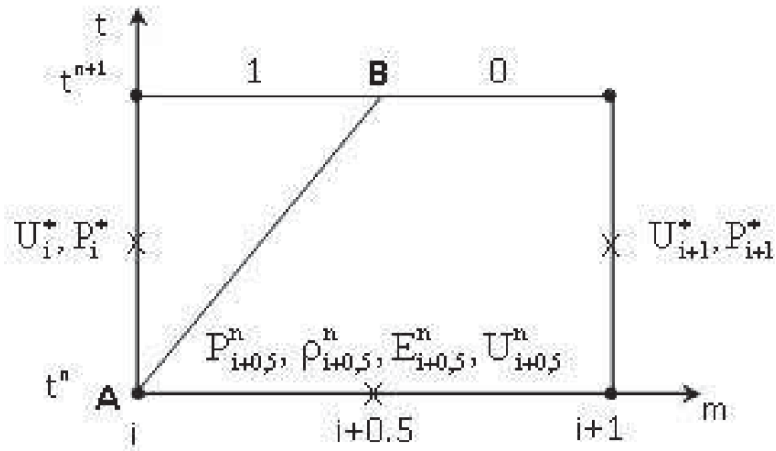


Рис 1. Схематическое изображение «сеточной» ударной волны АВ и состояний перед ней 0 и за ней 1

Рассмотрим одномерное течение в плоской симметрии идеальной жидкости описанное системой законов сохранения:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial M} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial M} = 0,$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (PU)}{\partial M} = 0$$

Система уравнений замкнута уравнением состояния

$$P = (\gamma - 1)E/V$$

и уравнение траектории для частицы с координатой М

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_M - U = 0$$

где x — эйлерова координата частицы.

От системы разностных законов сохранения перейдем к системе разностных уравнений

$$\frac{V_{i+0.5}^{n+1} - V_{i+0.5}^n}{\tau} - \frac{U_{i+1}^* - U_i^*}{h} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{U_{i+0.5}^{n+1} - U_{i+0.5}^n}{\tau} - \frac{P_{i+1}^* - P_i^*}{h} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\varepsilon_{i+0.5}^{n+1} - \varepsilon_{i+0.5}^n}{\tau} - \frac{(PU)_{i+1}^* - (PU)_i^*}{h} = 0. \quad (6)$$

Где $h = (x_{i+1} - x_i)/V_{i+0.5}$, $\varepsilon = E + 0.5U^2$. Величины U^* , P^* являются вспомогательными.

Все интервалы делятся на те, где материал сжимается ($U_i^n - U_{i-1}^n < 0$) и те, где материал расширяется ($U_i^n - U_{i-1}^n \geq 0$). Будем рассматривать интервалы, где происходит сжатие.

В качестве значений перед разрывом берутся значения в момент времени t^n

$$U_0 = U_{i+0.5}^n, P_0 = P_{i+0.5}^n, \rho_0 = \rho_{i+0.5}^n, E_0 = E_{i+0.5}^n, V_0 = 1/\rho_0,$$

Вспомогательные величины соответствуют уравнениям

$$U_i^* = U_{i-0.5}^n, P_i^* = P_{i+0.5}^n + W_i(U_{i-0.5}^n - U_{i+0.5}^n) \text{ если задано } U_1 \text{ и } W_i > 0,$$

$$P_i^* = P_{i-0.5}^n, U_i^* = U_{i+0.5}^n + (P_{i-0.5}^n - P_{i+0.5}^n)/W_i \text{ если задано } P_1 \text{ и } W_i > 0,$$

$$U_i^* = U_{i+0.5}^n, P_i^* = P_{i-0.5}^n - W_i(U_{i-0.5}^n - U_{i+0.5}^n) \text{ если задано } U_1 \text{ и } W_i < 0,$$

$$P_i^* = P_{i+0.5}^n, U_i^* = U_{i-0.5}^n + (P_{i-0.5}^n - P_{i+0.5}^n)/W_i \text{ если задано } P_1 \text{ и } W_i < 0,$$

Если внутри вспомогательной ячейки $U_i^n - U_{i-1}^n \geq 0$, то решение в указанном сеточном интервале является непрерывным и вспомогательные величины U^* , P^* определяются как

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\tau}{2h}(P_{i+0.5}^n - P_{i-0.5}^n),$$

$$P_i^* = P_i^n - \frac{\tau a^2}{2h} (U_{i+0.5}^n - U_{i-0.5}^n),$$

Значения U_i^n и P_i^n находятся интерполяциями по $U_{i+0.5}^n$, $U_{i-0.5}^n$ и $P_{i+0.5}^n$, $P_{i-0.5}^n$.

2. Метод Куропатенко для одномерного случая.

В дальнейшем перейдем к общему виду в 1D. Для расчета данной поставленной задачи мы берем дивергентную разностную схему метода Куропатенко. Обобщенные коэффициенты симметрии будем использовать из статьи Куропатенко и Якимовой [9].

Подставляя в систему разностных уравнений (4) – (6) коэффициенты, получим

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_M = U, V = \frac{\partial r^\alpha}{\partial M} \quad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mu(\alpha)r^{\alpha-1} \frac{\partial P}{\partial M} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (\mu(\alpha)r^{\alpha-1}UP)}{\partial M} = 0 \quad (9)$$

где α – коэффициент симметрии ($\alpha = 1$ для плоской, $\alpha = 2$ для цилиндрической; $\alpha = 3$ для сферической),

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{при } \alpha = 1 \\ 2\pi, & \text{при } \alpha = 2 \\ 4\pi, & \text{при } \alpha = 3 \end{cases}$$

лагранжева координата M читается как

$$M = \mu(\alpha) \int_0^r \rho r^{\alpha-1} dr$$

Уравнения (7) – (9) в конечных разностях записываются как

$$r_i^{n+1} = r_i^n + \tau U_i^* V_{i+0.5}^{n+1} = \frac{(r_{i+1}^{n+1})^\alpha - (r_i^{n+1})^\alpha}{\Delta M_{i+0.5}^n}$$

$$U_{i+0.5}^{n+1} = U_{i+0.5}^n - \mu(\alpha)(r_{i+0.5}^n)^{\alpha-1} \frac{\tau}{2\Delta M_{i+0.5}^n} (P_{i+1}^* - P_i^*)$$

$$\varepsilon_{i+0.5}^{n+1} = \varepsilon_{i+0.5}^n - \mu(\alpha) \frac{\tau}{\Delta M_{i+0.5}^n} ((r_{i+1}^n)^{\alpha-1} P_{i+1}^* U_{i+1}^* - (r_i^n)^{\alpha-1} P_i^* U_i^*)$$

Термодинамические величины определяются в серединах сеточных интервалов, а координаты и вспомогательные величины P_i^* и U_i^* определяются на границах и имеют два различных алгоритма.

Для интервала $U_i^n - U_{i-1}^n \geq 0$, решение внутри промежутка $m_{i-0.5} \leq m \leq m_{i+0.5}$ является непрерывным и вспомогательные величины, P_i^* и U_i^* определяются разностными уравнениями вида

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\tau}{\Delta M_{i+0.5} + \Delta M_{i-0.5}} (P_{i+0.5}^n - P_{i-0.5}^n),$$

$$P_i^* = P_i^n - \frac{\tau \alpha^2}{\Delta M_{i+0.5} + \Delta M_{i-0.5}} (U_{i+0.5}^n - U_{i-0.5}^n),$$

Если $U_i^n - U_{i-1}^n < 0$ – это интервал сжатия.

Если $P_{i+0.5}^n < P_{i-0.5}^n$, волна движется вправо $W_{i-0.5}^n > 0$ и $U_i^* = U_{i-0.5}^n \cdot P_i^* = P_{i+0.5}^n + W_i (U_{i-0.5}^n - U_{i+0.5}^n)$.

Если $P_{i+0.5}^n > P_{i-0.5}^n$, волна движется влево $W_{i-0.5}^n < 0$ и $U_i^* = U_{i+0.5}^n \cdot P_i^* = P_{i-0.5}^n - W_i (U_{i-0.5}^n - U_{i+0.5}^n)$.

Результаты

Тестовая задача №1

Слабая ударная волна в одноатомном газе. В области $0 \leq x_0 \leq 1$ в момент $t = 0$ находится идеальный газ с уравнением состояния и параметрами $\gamma = 5/3, \rho_0 = 1, P_0 = 1, E_0 = 1.5, U_0 = 0$. При $t > 0$ на левой границе при $x_0 = 0$ задана скорость $U = 0.5$, на правой границе при $x_0 = 1$ скорость $U = 0$. Результаты приведены для момента времени $t = 0.3$. $N = 100$, число куранта равно 0.5.

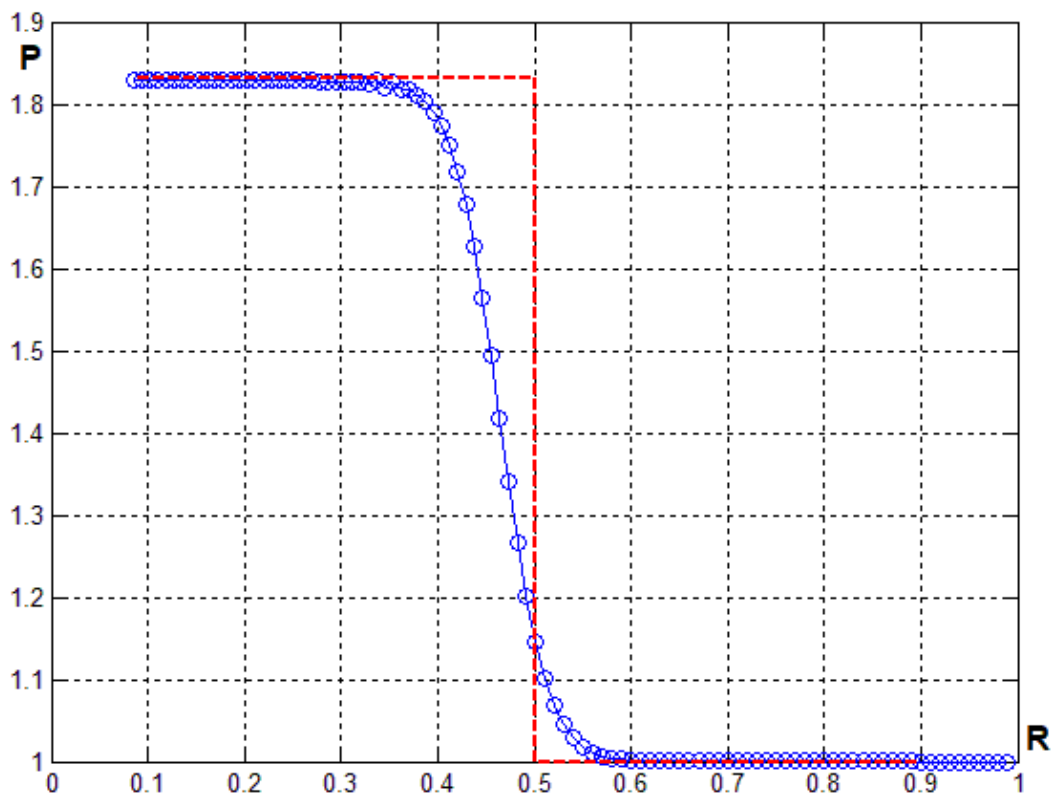


Рис 2. График распределения давления на момент времени $t=0.3$. Сплошная линия – решение методом Куропатенко; пунктирная линия – аналитическое решение.

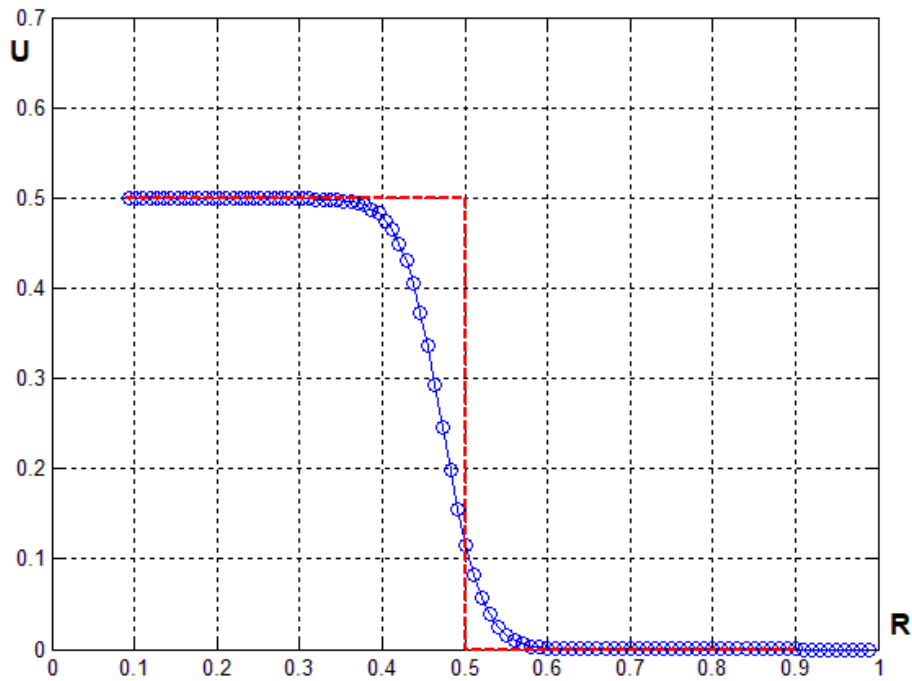


Рис 3. График распределения скорости на момент времени $t=0.3$. Сплошная линия – решение методом Куропатенко; пунктирная линия – аналитическое решение.

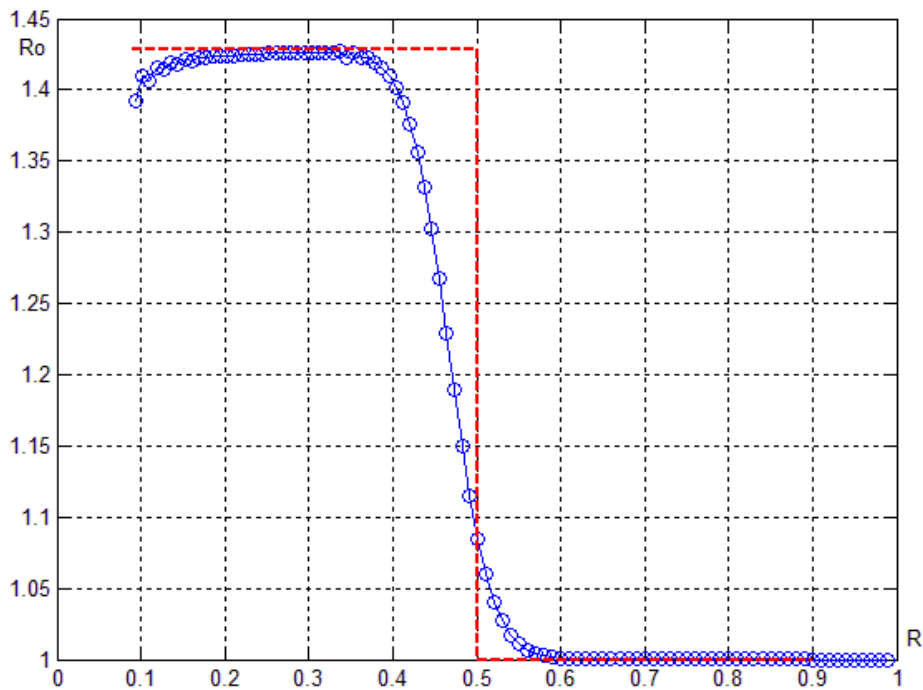


Рис 4. График распределения плотности на момент времени $t=0.3$. Сплошная линия – решение методом Куропатенко; пунктирная линия – аналитическое решение.

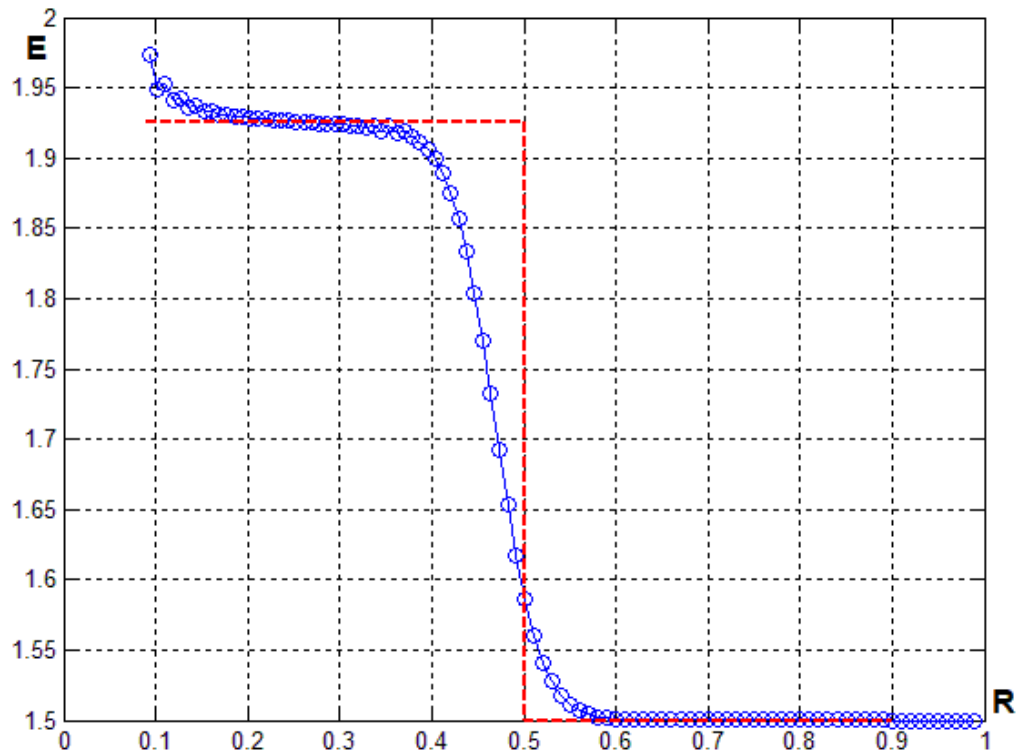


Рис 5. График распределения энергии на момент времени $t=0.3$. Сплошная линия – решение методом Куропатенко; пунктирная линия – аналитическое решение.

В результате решения задачи построены графики давления, скорости, плотности и энергии. Сравнение с аналитическим расчетом показывает, что положение ударной волны в численном решении совпадает с положением ударной волны из аналитического решения. Фронт ударной волны «размазан» на несколько сеточных ячеек.

Тестовая задача №2

Постановка задачи

Холодный газовый шар размером $R = 1$ имел параметры $P_0 = 0, \rho_0 = 1, U_0 = 0, U_1 = -1 \gamma = 5/3$. Зависимость давления и скорости границы от времени приведены в таблице 1. Расчеты проводить на равномерной сетке с числом точек $N = 100$.

t	U	P	t	U	P
0	-1.000000	1.333333	0.32	-1.044473	2.592849
0.04	-1.008791	1.415094	0.33	-1.043787	2.673060
0.07	-1.015161	1.484529	0.34	-1.042842	2.758063
0.10	-1.021256	1.562232	0.35	-1.041619	2.848236
0.13	-1.026982	1.649664	0.36	-1.040097	2.943996
0.16	-1.032224	1.748622	0.37	-1.038251	3.045798
0.18	-1.035380	1.822074	0.38	-1.036058	3.154141
0.20	-1.038211	1.902413	0.39	-1.033488	3.269573
0.22	-1.040657	1.990554	0.40	-1.030514	3.392698
0.23	-1.041717	2.037877	0.42	-1.023220	3.664748
0.24	-1.042655	2.087565	0.45	-1.008354	4.149469
0.25	-1.043463	2.139778	0.50	-0.969947	5.233492
0.26	-1.044129	2.194694	0.55	-0.899013	6.144230
0.27	-1.044643	2.252502			
0.28	-1.044992	2.313410			
0.29	-1.045165	2.377642			
0.30	-1.045146	2.445445			
0.31	-1.044921	2.517083			

Таблица 1. Граничное условие.

На рисунках (6) – (14) приведены результаты расчета поставленной задачи

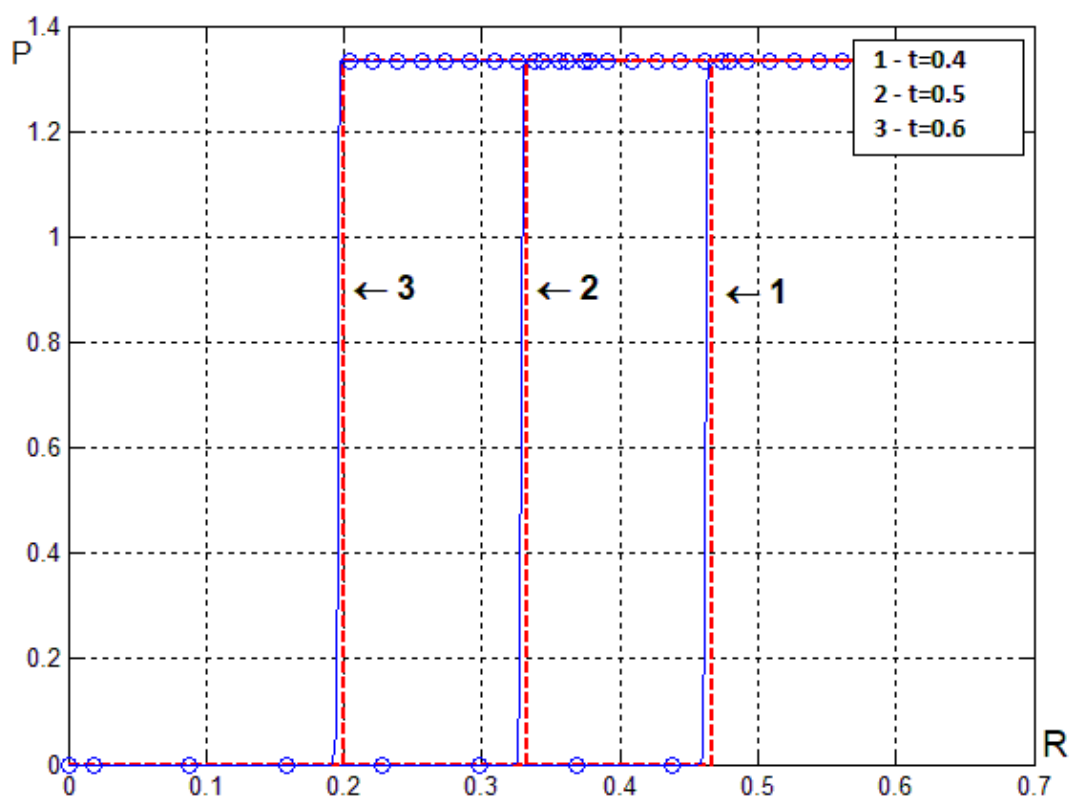


Рис 6. График распределения давления на три момента времени при $\mu(\alpha) = 1$ и $\alpha = 1$. Сплошная линия с кружком – решение методом Куропатенко; пунктирная линия – аналитическое решение.

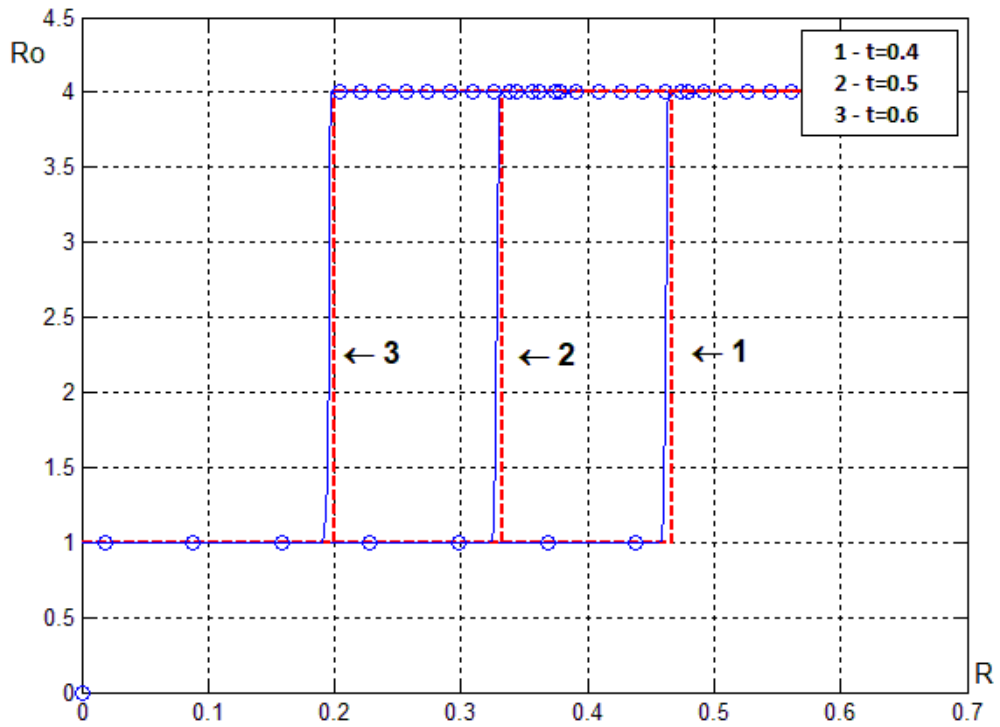


Рис 7. График распределения плотности на три момента времени при $\mu(\alpha) = 1$ и $\alpha = 1$. Сплошная линия с кружком – решение методом Куропатенко; пунктирная линия – аналитическое решение.

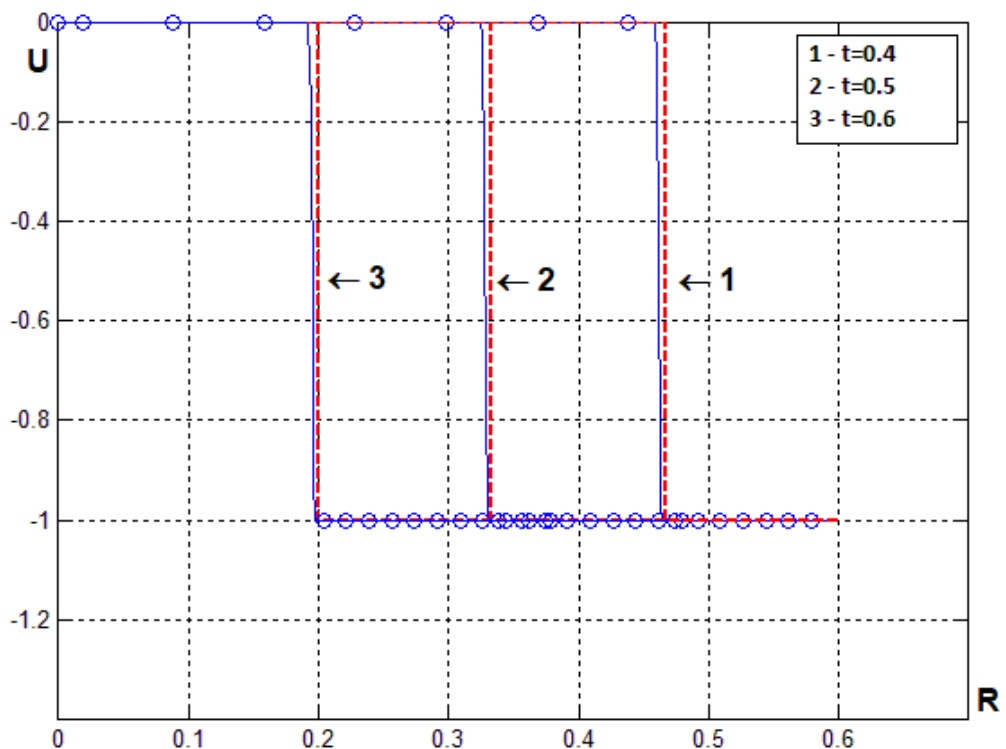


Рис 8. График распределения скорости на три момента времени при $\mu(\alpha) = 1$ и $\alpha = 1$. Сплошная линия с кружком – решение методом Куропатенко; пунктирная линия – аналитическое решение.

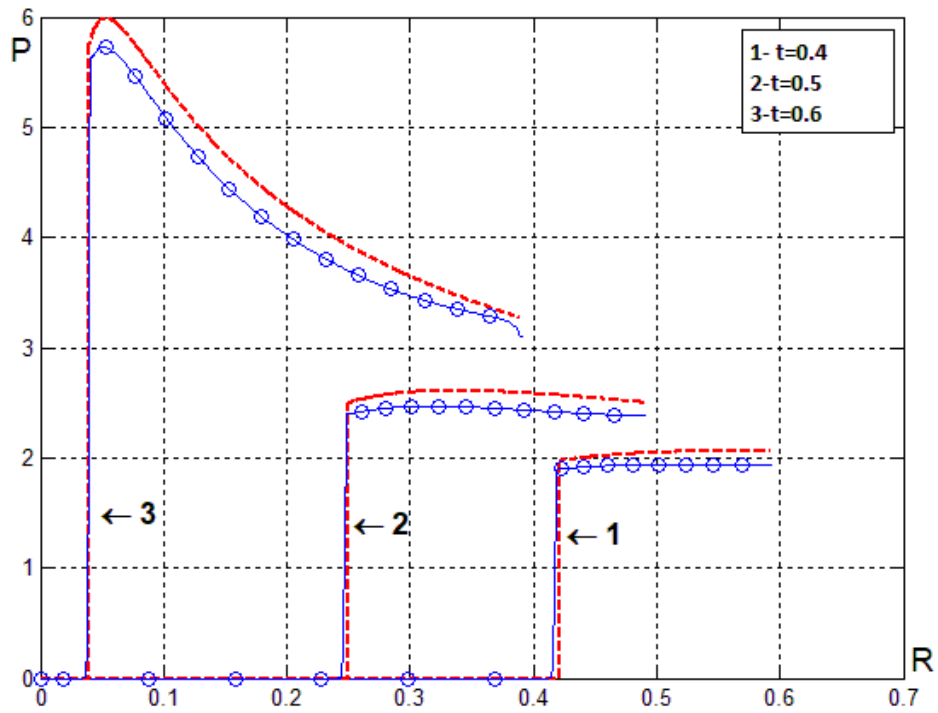


Рис 9. График распределения давления на три момента времени при $\mu(\alpha) = 2\pi$ и $\alpha = 2$. Сплошная линия с кружком – решение методом Куропатенко; пунктирная линия – аналитическое решение.

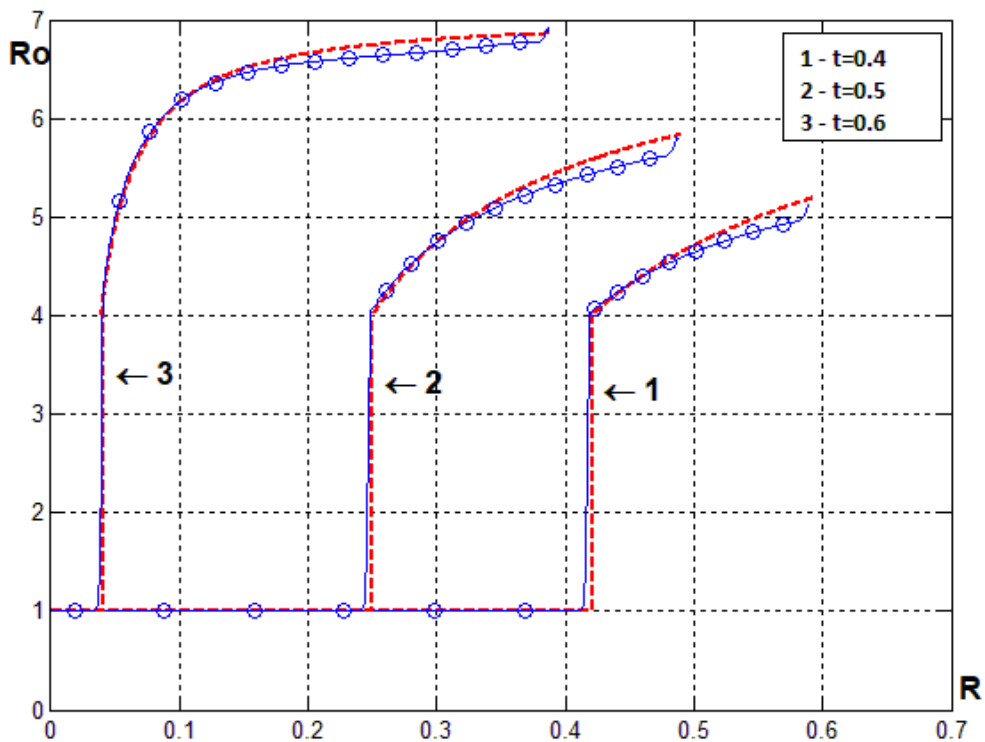


Рис 10. График распределения плотности на три момента времени при $\mu(\alpha) = 2\pi$ и $\alpha = 2$. Сплошная линия с кружком – решение методом Куропатенко; пунктирная линия – аналитическое решение.

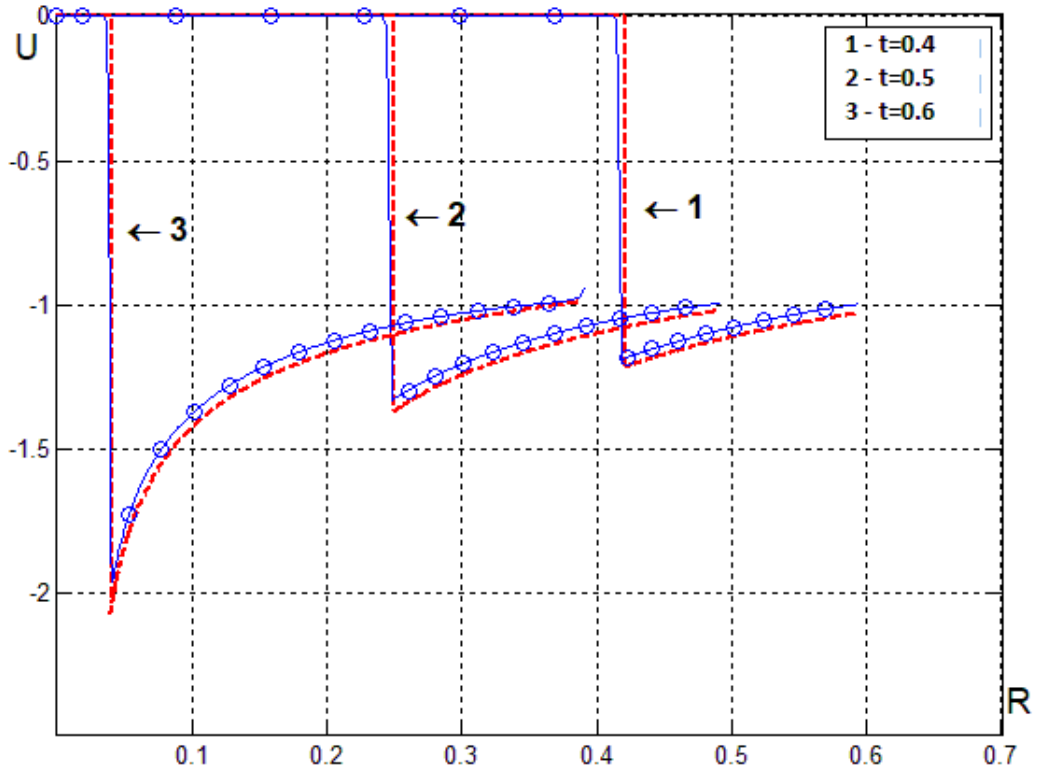


Рис 11. График распределения скорости на три момента времени при $\mu(\alpha) = 2\pi$ и $\alpha = 2$. Сплошная линия с кружком – решение методом Куропатенко; пунктирная линия – аналитическое решение.

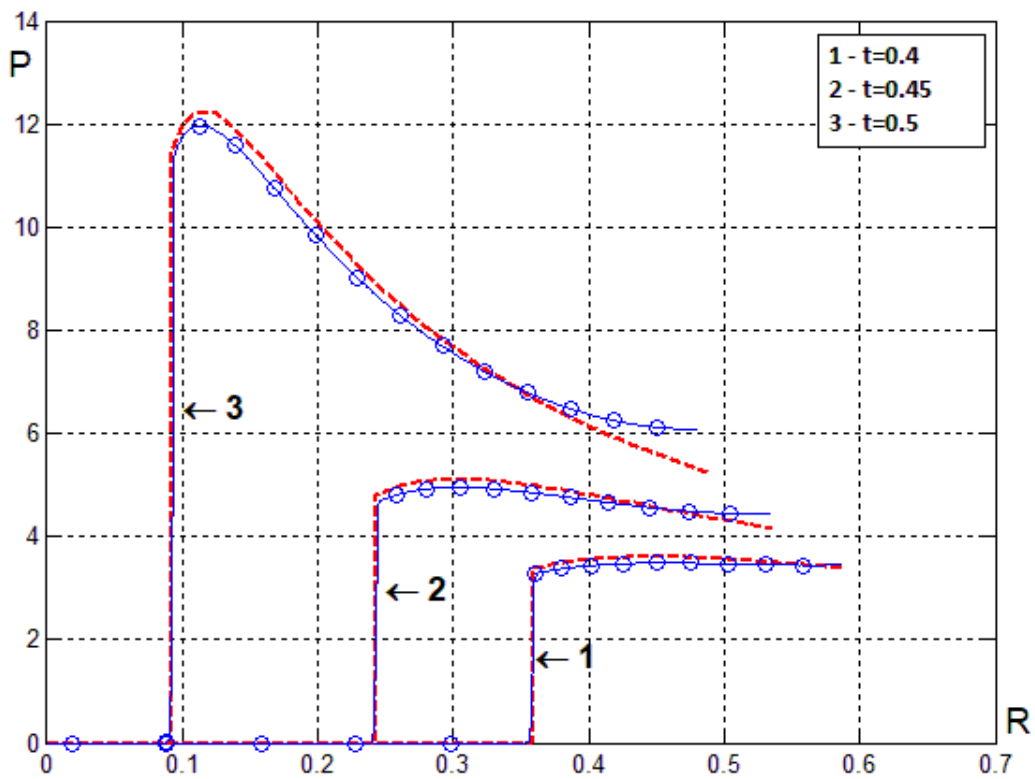


Рис 12. График распределения давления на три момента времени при $\mu(\alpha) = 4\pi$ и $\alpha = 3$. Сплошная линия с кружком – решение методом Куропатенко; пунктирная линия – аналитическое решение.

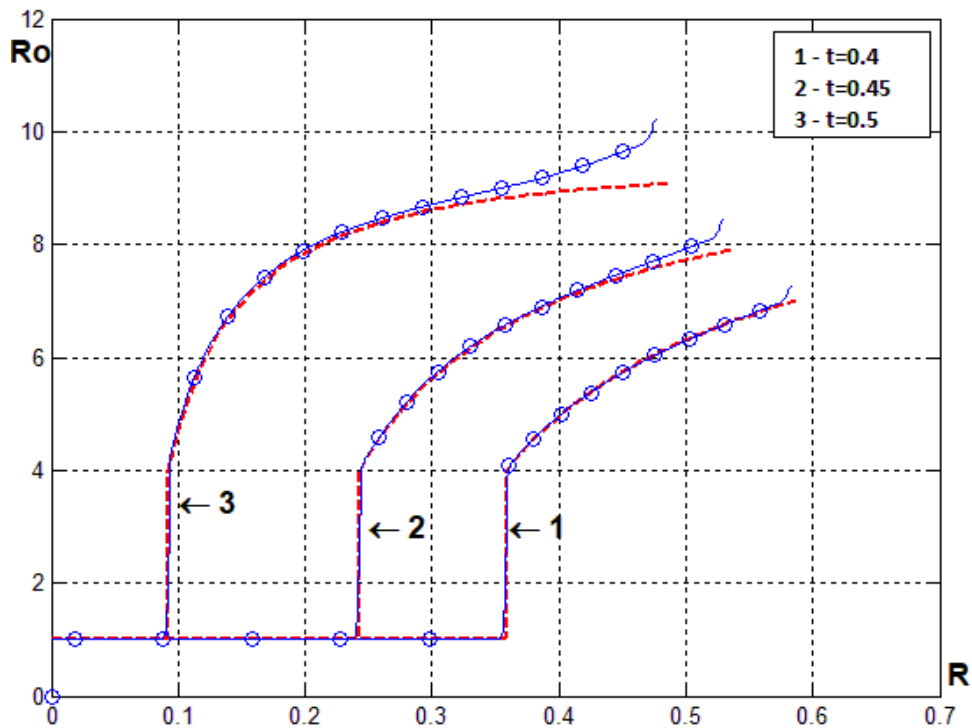


Рис 13. График распределения плотности на три момента времени при $\mu(\alpha) = 4\pi$ и $\alpha = 3$. Сплошная линия с кружком – решение методом Куропатенко; пунктирная линия – аналитическое решение.

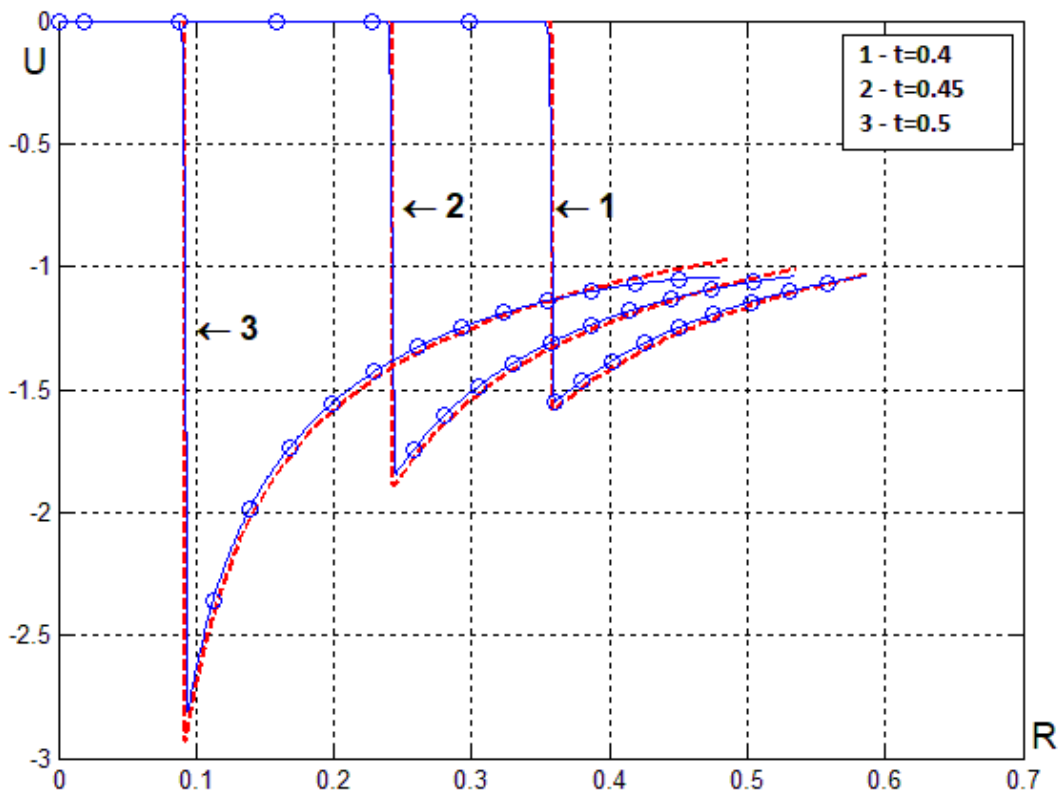


Рис 14. График распределения скорость на три момента времени при $\mu(\alpha) = 4\pi$ и $\alpha = 3$. Сплошная линия с кружком – решение методом Куропатенко; пунктирная линия – аналитическое решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы:

1. Изучена модель распространения УВ в сплошной среде.
2. Проведено математическое моделирование некоторых задач механики сплошных сред. Для моделирования использовался численный метод Куропатенко.
3. Проведен расчет тестовой задачи, имеющей аналитическое решение.
4. Верификация программы показала, что погрешность численного решения невелика.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. В. Ф. Куропатенко, Методы расчета ударных волн // Дальневост. матем. журн., 2001, т. 2, № 2, 45–59
2. Ю.М. Ковалев, Е.С. Шестаковская, Численное исследование распространения цилиндрических ударных волн в гетерогенных средах // Вестник ЮУрГУ, 2013, т.13, № 3 102–108
3. Л. Л. Миньков, Н. В. Гольдина, Особенности численного решения задачи о распространении ударной волны по газозвеси с мелкими частицами, // Вестн. Томск. гос. унта. Матем. и мех., 2017, № 49, 94–104
4. Ю.М. Ковалёв, Е.А. Ковалёва, Метод крупных частиц для исследования течений газозвеси // Вестник ЮУрГУ, 2015, т.15, № 2 91–196
5. И. Ю. Тагирова, А. В. Родионов, Применение искусственной вязкости для борьбы с «карбункул»-неустойчивостью в схемах типа Годунова, // Матем. моделирование, 2015, т. 27, № 10, 47–64
6. А. В. Васюков, А. С. Ермаков, И. Б. Петров, А. П. Потапов, А. В. Фаворская, А. В. Шевцов, Сеточно-характеристический комбинированный метод для численного решения динамических пространственных упругопластических задач, // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2014, т. 54, № 7, 1203–1217
7. И. В. Попов, И. В. Фрязинов, Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках, // Матем. моделирование, 2012, т. 24, № 6, 109–127
8. Куропатенко В.Ф., Шестаковская Е.С. Основы численных методов механики сплошных сред // Издательский центр ЮУрГУ, 2017. – 254с.
9. V. F. Kuropatenko, M. N. Yakimova, A method for shock calculation // Journal of Computational and Engineering Mathematics, 2015, vol. 2, no. 2