

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Южно-Уральский государственный университет»  
(национальный исследовательский университет)  
Факультет «Математики, механики и компьютерных технологий»  
Кафедра «Вычислительной механики»

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ  
Заведующий кафедрой ВМ,  
д. ф.-м. н., профессор  
\_\_\_\_\_/Ю.М. Ковалев  
\_\_\_\_\_/2018г.

Численное моделирование взаимодействия ударной волны с областями газа  
пониженной плотности

ПОЯНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ  
ЮУрГУ–01.03.03.2018.14-05-1299.ПЗ ВКР

Руководитель  
к.ф.-м.н., доцент кафедры ВМ  
\_\_\_\_\_/Н.Л. Клиначева  
\_\_\_\_\_/2018 г.

Автор работы  
студент группы ЕТ-410  
\_\_\_\_\_/Д.Ф. Ибрагимова  
\_\_\_\_\_/2018 г.

Нормоконтролер  
\_\_\_\_\_/Н.Л. Клиначева  
\_\_\_\_\_/2018 г.

Челябинск 2018

## **АННОТАЦИЯ**

Ибрагимова Д.Ф. Численное моделирование взаимодействия ударной волны с областями газа пониженной плотности. – Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-410, 56с., 25 ил., библиогр. список – 29 наименований, 1 прил.

Дипломная работа выполнена с целью исследования взаимодействия ударной волны с неоднородностями, представленными в виде областей газа пониженной и повышенной плотности. В дипломном проекте проанализированы задачи моделирования взаимодействия ударных волн с тепловыми неоднородностями. При помощи программы MatLab разработан программный комплекс, реализующий выполнение поставленной задачи.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

АННОТАЦИЯ.....	0
ВВЕДЕНИЕ.....	2
1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....	2
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	12
3. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ .....	15
4. ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА.....	19
5. РЕЗУЛЬТАТЫ.....	21
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	35
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	36
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	40

## **ВВЕДЕНИЕ**

Физические явления, связанные с движением газов и других сред, приводят к формированию и развитию в данных средах ударных волн. Такие явления получили широкое распространение в технике и природе, в связи, с чем возникает необходимость изучения ударно-волновых процессов.

Важнейшим направлением исследования является изучение взаимодействия ударных волн с различными преградами, неоднородными областями, пылевыми облаками, границами раздела сред и другими.

Примеры таких явлений встречаются в задачах о движении искусственных тел с большими скоростями в атмосферах Земли, прохождении ударной волны по запыленной шахте, взрывах в атмосфере Земли крупных метеоритных тел, прохождении отраженной от поверхности земли ударной волны через облако ядерного взрыва.

Наличие неоднородностей среды различного характера перед ударной волной может приводить к изменениям в ходе течения, к искривлению фронта волны, отрыву пограничного слоя и формированию новых ударных волн.

Цели работы:

1. Теоретическое исследование процесса взаимодействия плоской ударной волны с областью газа пониженной плотности;
2. Численное моделирование отражения плоской ударной волны от жёсткой стенки в двумерной постановке;
3. Численное моделирование взаимодействия плоской ударной волны с областью газа пониженной плотности;

### **1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ**

Исследование плоского нестационарного течения, возникающего при взаимодействии УВ с областью газа пониженной плотности, занимающей

четверть плоскости, было приведено в работе [1]. Отмечено, что при соприкосновении области и скачка происходит развитие двумерных течений различных типов, также происходит искажение исходного скачка на области пониженной плотности. Было показано, что при нерегулярном взаимодействии возникает сложное течение, включающее множественные точки сопряжения, изломанный контактный разрыв, косые и искривленные скачки и слоистый вихрь. Авторами была исследована структура вихря и струи, и предложена упрощенная схема для оценки углов наклона основных скачков и параметров газа за ними, которая сводится к решению системы алгебраических уравнений.

В работе [2] продолжается исследование взаимодействия плоского скачка уплотнения с областями газа повышенной или пониженной плотности. Было рассмотрено несколько видов областей: узкий прямоугольный слой, эллипсоид вращения и клин. В зависимости от отношения плотностей и угла раствора клина было выявлено два класса течений – нерегулярные и регулярные. Показывается зависимость качественных характеристик течения от определяющих параметров задачи.

Взаимодействие плоского прямого скачка уплотнения с эллипсоидальными областями повышенной и пониженной плотности были рассмотрены в работе [3]. Были получены два режима взаимодействия течений, как и в работе [2]. Было установлено, что в результате нерегулярного взаимодействия формируется сложное течение, включающее в себя тангенциальные разрывы, вихри и преломленные скачки уплотнения. Авторами был исследован эффект кумуляции скачков уплотнения, находящийся вне или внутри неоднородной области. Показано количественное и качественное влияние формы неоднородности на эффект кумуляции.

Авторами П.Ю. Георгиевским, В.А. Левиным и О.Г. Сутыриным в [4] было обнаружено формирование «предвестника», формирующегося при

взаимодействии ударной волны с температурными неоднородностями двух типов: узкого прямоугольного слоя горячего газа и четвертью плоскости, содержащиеся в набегающем потоке. Для качественной оценки основных количественных характеристик была предложена модификация упрощенной схемы взаимодействия. Модифицированная схема основывается на построении ударных поляр Буземана, которые позволяют определить скорость разворота потока за всеми возможными ударными волнами и давление газа для заданного потока газа. Применение данной методики позволяет оценить параметры течения газа за косым, лидирующим и внутренними скачками, а так же оценить угол наклона косого скачка.

Большой круг задач о распространении ударной волны по релаксирующим и неоднородным средам рассматривают в своей работе [5] авторы Войнович П.А., Жмакин А.И., Фурсенко А.А..

В [6] Георгиевским П.Ю. и Левиным В.А. был исследован эффект возникновения аномальных аэродинамических нагрузок при столкновении затупленных тел, движущихся со сверхзвуковыми скоростями, с локальными атмосферными неоднородностями в виде газовых «пузырей» пониженной плотности, который проявлялся в наличии положительного пика на «осциллограмме» давления в критической точке тела. В работе выполнялся анализ взаимодействия для случая, когда высокотемпературное облако не имеет резко очерченных границ.

Работа [7] посвящена подробному изучению ударно-волновых конфигураций, которые при взаимодействии ударной волны с продольным слоем или цилиндрическим каналом конечной ширины, заполненным газом пониженной плотности (повышенной температуры), проведено исследование характера роста предвестника на больших временных интервалах. В результате исследований авторами было установлено, конечность ширины канала не играет роли на начальной стадии течения и локальное течение совпадает с задачей о взаимодействии ударной волны с четвертью

пространства, занятого газом повышенной температуры. Рост предвестника на ранних стадиях течения имеет автомодельный характер, что согласуется с предыдущими исследованиями, было замечено, что на более поздней стадии неустойчивость внутреннего течения приводит к нарушению автомодельного характера и приводит к замедлению роста предшественника.

Артемьев В.И., Маркович И.Э., Немчинов И.В. исследовали в [8] особенности газодинамических течений, которые возникают при распространении ударных волн в неоднородно нагретой среде.

Авторами был рассмотрен эффект приповерхностного слоя, когда температурная неоднородность приводила к существенному изменению параметров течения.

Авторами Ю.М. Ковалевым и А.Ю. Черемоховым в [9] рассматривалась модификация задачи [8], когда ударная волна взаимодействовала с нагретым слоем, расположенным на некотором расстоянии от твердой поверхности. Было доказано, что при наличии тонкого слоя газа между слоем нагретого газа и твердой поверхностью происходит уменьшение относительной скорости образования предвестника из основной ударной волны и уменьшается скорость роста высоты верхней тройной точки. Этот эффект связан с тем, что в нагретом слое на фронт ударной волны происходит тормозящее воздействие нижнего предвестника. В результате было установлено, что картину течения в приповерхностной области усложняет наличие тонкого слоя газа с нормальными условиями и оказывается влияние на параметры течения.

Исследование искривления фронта ударной волны с последующим образованием предвестника - крупномасштабной ударно-волновой структуры, опережающей основной фронт волны, рассматривается в работе [10]. Аналогичный эффект возникновения предвестника рассматривался в работе [8]. В [11] этот эффект связывался с возникновением теплового слоя у поверхности под действием излучения и рассматривалось как явление, аналогичное отрыву пограничного слоя при его взаимодействии с ударной

волной. При искусственном образовании теплового слоя экспериментально было выявлено образование предвестника, что и было отражено в работе [12].

Бергельсон В.И., Немчинов И.В., и др. в своей работе [13] приводили результаты численного моделирования нестационарной двумерной задачи взаимодействия ударной волны со слоем пониженной плотности на основе разностных уравнений Эйлера. Ими было получено автомодельное решение, которое было представлено в виде клиновидного возмущения движущегося вверх по потоку.

Также они продолжили исследование развития предвестника, образующегося при взаимодействии ударной волны с газовыми каналами пониженной плотности, рассматриваемого в работе [14]. Авторами проводилось исследование зависимости скорости предвестников от плотности разреженного газа и выяснение характера течения со стационарными и нестационарными предвестниками. В работе использовался обобщенный термин – разреженный канал, включающий в себя частные случаи цилиндрический газовый канал и плоский газовый слой. В результате было установлено, что под действием возмущения плотности в тонкой, протяженной области приводит к эффекту перестройки течения. Данный эффект наблюдался не только в рассмотренных нестационарных течениях, но и при сверхзвуковом обтекании различных препятствий.

Таганов Г.И. [15] используя эффект теплового слоя с явлением отрыва вязкого пограничного слоя создал газодинамическую модель и вводит критерий, который способен определить условия перехода из стационарного течения в нестационарное течение. Рассмотрим задачу о набегании ударной волны с числом Маха  $M_0$  на канал разреженного газа, плотность которого относится к плотности окружающей среды как  $\rho_j/\rho_\infty = \omega$ . Было предположено, что для того, чтобы существовал стационарный режим течения необходимо, чтобы давление торможения  $p_0$  газа теплового слоя превосходило давление  $p_1$  за ударной волной. Данное условие показывает зависимость  $M_0(\omega)$ ,



разделяющего область параметров существования стационарного режима от его автомодельного роста во времени. В работах [10,13] была получена зависимость угла наклона  $\alpha$  косой волны при вершине предвестника от соотношения плотностей газа окружающей среды и теплового слоя  $\omega$ :  $\sin\alpha = \sqrt{\omega}$ . Торами в работах [10,13] было доказано, что размер предвестника в стационарном случае фиксирован и определяется толщиной слоя. При нестационарном течении размер предвестника асимптотически возрастает с увеличением отношения плотностей газа в основном потоке и тепловом слое, и при увеличении пройденного расстояния. Явление увеличения размера предвестника объяснялось подпиткой газом основного потока проходящего через внутренний скачок.

В работе [16] рассматривается взаимодействие плоских и сферических ударных волн со слоем нагретого газа, который расположен над плоской твердой поверхностью, или с решеткой, прилегающей к поверхности. Автором была создана модель лесного пожара, где лес – гетерогенный слой, а область горячих продуктов сгорания – слой горячего газа и воздействие на них ударных волн. В результате исследований было выявлено свойство автомодельности течения при взаимодействии ударных волн со слоем нагретого газа, также обнаружено возникновение и распад вихрей. Если в нагретом слое были обнаружены частицы твердой фазы, то происходило нарушение автомодельности течения.

Рассмотрим взаимодействие сильной сферической ударной волны с тепловым слоем, который располагается над плоской поверхностью [17]. В работе было установлено снижение интенсивности ударной волны, проходящей через тепловой слой, а также произошедшие в результате интерференции отраженных возмущений внутри теплового слоя эффекты записания теплового слоя. Меньшаковым С.С. и Охитиным В.Н. были представлены результаты исследований влияния градиента температуры внутри теплового слоя [18], показывающие усиление ударной волны,

проходящей через тепловой слой с отрицательным градиентом температуры, что объяснялось различными темпами затухания ударных волн в холодном и теплом газе.

В работе [19] описываются эксперименты по исследованию распространения плоской УВ по смеси газов. В ударной трубе создавалась неоднородность за счет диффузии фреона-14 или гелия в воздух, заполняющий камеру низкого давления. Небольшая концентрация гелия в камере слабо влияла на распространение ударных волн. Достаточно большая концентрация фреона в камере приводила к уменьшению скорости ударной волны вблизи нижней стенки трубы, где концентрации примесей больше, чем у верхней стенки. Тогда течение в данном случае оказывается неоднородным. Расщепления ударных волн не было обнаружено, отмечено образование вихря волной отраженной от торца трубы. В результате был сделан вывод, что образование вихря связано с влиянием неоднородности на процесс распространения ударной волны.

Большое количество работ посвящается исследованиям движения тел через нагретые области, которые имеют замкнутую форму или неограниченную протяженность.

На основе результатов численного моделирования взаимодействия плоской ударной волны с тепловым слоем и аналитического анализа в рамках теории коротких волн, было доказано в работе [20], что в зависимости от параметров теплового слоя и падающей ударной волны интенсивность проходящей через тепловой слой ударной волны может как увеличиваться, так и уменьшаться. При других условиях изменение интенсивности ударной волны может быть определено из отношения температур в тепловом слое и основном потоке.

Авторами Головизниным В.П., Мишиным Г.И. и др. рассматривалось движение сферы через область нагретого газа, которая создавалась искусственно при помощи нагревателей [21]. При прохождении тела через

нагретую область величина отхода головной ударной волны от модели увеличивалась, после выхода из этой зоны, становилась меньше изначальной и после прохождения четырех калибров модели релаксирует к исходному значению в не нагретом воздухе. При проведении численного моделирования процесса авторами было зафиксировано расхождение с экспериментом, что объяснялось выбором упрощенной модели расчета.

В книге [22] рассматривается подробное описание трёх численных методов: метод частиц в ячейках, метод свободных точек и метод крупных частиц. Данные методы позволяют производить численное интегрирование системы уравнений газовой динамики. Особое внимание уделено методу крупных частиц.

Гришин Ю.А. и Зенкин В. А. в [23] рассматривают модификацию метода крупных частиц, которая позволяет проводить расчёт при числах Куранта близких и даже превышающих единицу. Рассматриваемая модификация заключается в использовании в расчётах промежуточных значений давления, полученного из разностного представления преобразованного уравнения сохранения энергии.

Ю.М. Ковалёвым и Е.А. Ковалёвой была разработана модификация метода крупных частиц в приложении к исследованиям течений газозвесей [24]. Данная модификация позволила провести расчет поведения ударных волн в газозвесах без введения в явном виде искусственной вязкости, что позволило устранить искажение картины течения, которая была связана с наличием осцилляций, возникающих при распространении ударных волн в неоднородных средах. Было показано, что при использовании этой модификации для проведения расчетов распространения ударных волн в газозвесах с большими числами Куранта может быть использован явный вариант модификации метода крупных частиц. Это позволило избежать сложных итерационных процедур и сократить время расчета. Было доказано, что предложенная модификация является эффективной и позволила провести расчет ударных волн в газозвеси с большими числами Куранта.

Ивановым К.А. в [25] проводилось численное моделирование плоских задач газовой динамики методом крупных частиц с использованием различных конечно-разностных схем. Автор проводил исследования, предполагая, что задачи газовой динамики имеют ряд особенностей, таких как расчетная область может быть неодносвязная, границы течения газов имеют нелинейный характер и точки излома, границы расчетной области могут быть проницаемы, частично проницаемы и непроницаемы. Схемы анализировались на примере тестовой задачи, которая позволяла оценить качество применявшейся вычислительной схемы в условиях распространения по плоскому каналу прямой и отраженной ударной волны. Расчетная область разбивалась ячейками треугольной и четырехугольной формы. В результате исследования была доказана высокая эффективность подхода, когда на эйлеровом этапе параметры на границах смежных ячеек находятся по формулам, которые справедливы для слабого разрыва газодинамических параметров.

При исследовании выше описанных эффектов было разработано большое количество способов для защиты от разрушительного воздействия ударных волн. Примером может рассматриваться работа [26], где на основе численного моделирования было доказано, что при взаимодействии взрывной ударной волны с пылевой завесой происходит ослабление интенсивности ударной волны. Данный эффект зависит от плотности и размера частиц, а также от толщины самой завесы. Особенностью данного способа является формирование вторичной ударной волны, образующейся при взаимодействии взрывной ударной волны с границей пылевого слоя.

В работе [27] при проведении ряда экспериментов было доказано, что завеса, создаваемая распыленной водой, обеспечивает снижение перепада избыточного давления на фронте ударной волны. При взаимодействии возмущений с каплями воды был достигнут эффект ослабления.

Создание частиц над поверхностью земли перед взрывом, поглощающих, опережающую ударную волну, энергию излучения, тем самым прогревая слой атмосферного воздуха [28]. Ударная волна ослабевает при прохождении этого слоя, что обеспечивает снижение ее разрушительного воздействия. Главным недостатком данных способов является необходимое введение в атмосферу различного рода мелких частиц, что осложняет их практическое внедрение.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть к некоторому моменту времени сформировалась плоская ударная волна, которая движется в положительном направлении оси  $X$  по невозмущенному газу. Рассмотрим взаимодействие ударной волны с областью газа пониженной плотности, со схемой расчетной области представленной на Рис.1.

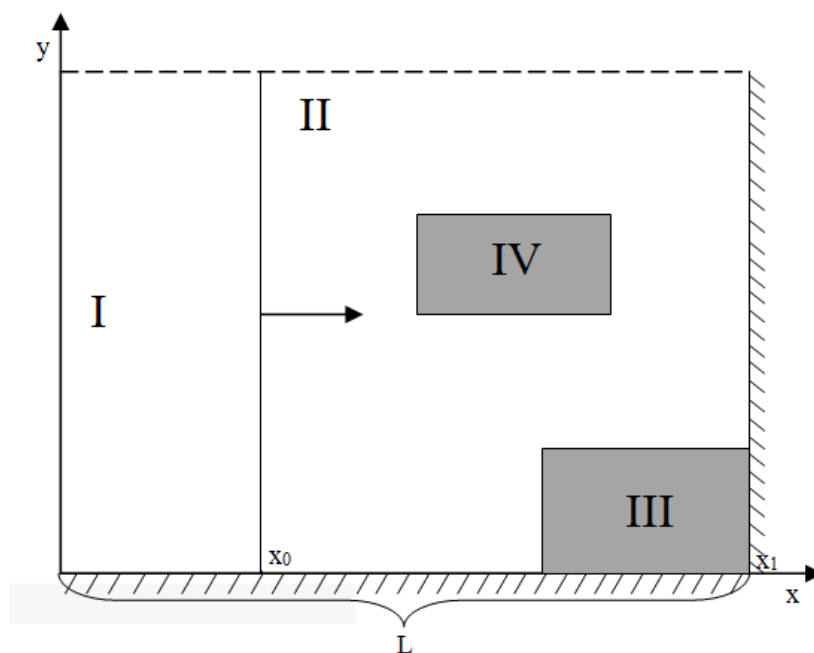


Рис.1 Схема расчетной области.

Здесь область I – область ударной волны (УВ). Область II – невозмущенный газ, III, IV- моделируют неоднородность в виде газа пониженной или повышенной плотности. Соответствует следующим постановкам:

1. II, III, IV – область покоящегося газа при нормальных условиях.
2. II, IV – область покоящегося газа при нормальных условиях.  
III – область газа пониженной/повышенной плотности.
3. II, III – область покоящегося газа при нормальных условиях.  
IV – область газа пониженной/повышенной плотности.

В начальный момент времени в области  $x_0 < x < x_1$  находится идеальный газ с параметрами  $P_0$ ,  $U_0$ ,  $\rho_0$  и  $E_0$ . Величины на фронте ударной волны определяются из соотношений Ренкина-Гюгонио:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{P_0}{P_1}}{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{P_0}{P_1}}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{(P_1 - P_0)(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1 \rho_0}}$$

Определяющим параметром в данной работе является отношение плотности теплого слоя к плотности окружающей среды как  $\omega = \rho_m / \rho_0$ . Если данное отношение близко к единице  $0.8 < \rho_m / \rho_0 < 1.3$ , то реализуется регулярное течение, которое характеризуется сопряжением преломленных скачков уплотнения и тангенциальных разрывов в единственной точке.

Индексами «0» - обозначены параметры перед фронтом ударной волны, а индексом «1» за фронтом ударной волны.

Граничные условия для рассматриваемой задачи выглядят следующим образом: на левой границе используется условие свободного протекания, на правой и нижней границе – условия твердой стенки (условие не протекания), верхняя граница – открытая.

Математической моделью рассматриваемой задачи является система дифференциальных уравнений Эйлера в декартовой системе координат.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho W) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \text{div}(\rho u W) + \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \text{div}(\rho v W) + \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}(\rho E W) + \text{div}(P W) = 0.$$

Система замыкается уравнением состояния:

$$P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$$

где  $P$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $u, v$  – скорость,  $\varepsilon$  – внутренняя энергия,  $k$  – показатель адиабаты.



### 3. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Численное решение проводилось с использованием метода крупных частиц. Основная идея метода крупных частиц состоит в расщеплении по физическим процессам исходной нестационарной системы дифференциальных уравнений, записанной в форме законов сохранения. Общая структура расчётной сетки представлена на Рис. 2.

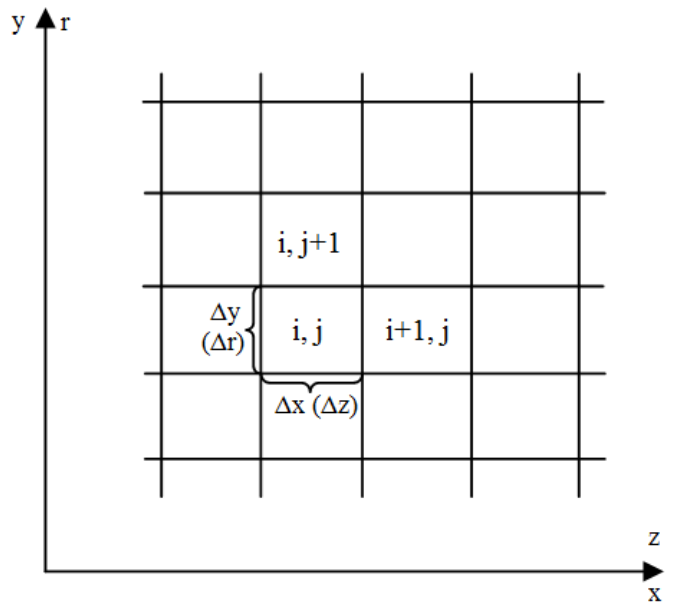


Рис.2. Общая структура расчётной сетки.

Расчет каждого временного шага разбивается на 3 этапа.

На первом этапе предполагаем, что происходит изменение параметров внутри ячейки, а поле плотности «заморожено», рассчитываются промежуточные значения энергии и скорости. Для данного этапа разностный аналог дифференциальных уравнений будет иметь вид

$$\bar{u}_{i,j}^n = u_{i,j}^n - \frac{P_{i+0.5,j}^n - P_{i-0.5,j}^n}{\Delta x} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n},$$

$$\bar{v}_{i,j}^n = v_{i,j}^n - \frac{P_{i,j+0.5}^n - P_{i,j-0.5}^n}{\Delta y} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n},$$

$$\bar{E}_{i,j}^n = E_{i,j}^n - \left[ \frac{P_{i+0.5,j}^n u_{i+0.5,j}^n - P_{i-0.5,j}^n u_{i-0.5,j}^n}{\Delta x} + \frac{P_{i,j+0.5}^n u_{i,j+0.5}^n - P_{i,j-0.5}^n u_{i,j-0.5}^n}{\Delta y} \right] \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n}.$$

Здесь значения параметров на границах ячеек определяются арифметически:

$$u_{i+0.5,j}^n = \frac{u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{2},$$

$$P_{i+0.5,j}^n = \frac{P_{i,j}^n + P_{i+1,j}^n}{2} + q_{i+0.5,j}^n \text{ и т. д.}$$

где  $q$ -псевдовязкость и задается следующим образом:

$$q_{i+0.5,j}^n = \begin{cases} \rho_{i+0.5,j}^n (ac_{i+0.5,j}^n + b\Delta u)\Delta u, & \text{если } \Delta u > 0 \\ 0, & \text{если } \Delta u \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{где } \Delta u = u_{i,j}^n - u_{i+1,j}^n$$

$$q_{i-0.5,j}^n = \begin{cases} -\rho_{i-0.5,j}^n (ac_{i-0.5,j}^n - b\Delta u)\Delta u, & \text{если } \Delta u < 0 \\ 0, & \text{если } \Delta u \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{где } \Delta u = u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n$$

$$q_{i,j+0.5}^n = \begin{cases} \rho_{i,j+0.5}^n (ac_{i,j+0.5}^n + b\Delta v)\Delta v, & \text{если } \Delta v > 0 \\ 0, & \text{если } \Delta v \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{где } \Delta v = v_{i,j}^n - v_{i,j+1}^n$$

$$q_{i,j-0.5}^n = \begin{cases} -\rho_{i,j-0.5}^n (ac_{i,j-0.5}^n - b\Delta v)\Delta v, & \text{если } \Delta v < 0 \\ 0, & \text{если } \Delta v \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{где } \Delta v = v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n$$

На втором этапе рассчитываются потоки массы газа и частиц через границы ячеек, причем вся масса и газа и частиц переносится только за счёт нормальной составляющей скорости к границам ячеек. Поток массы определяется по формулам первого порядка точности

$$\Delta M_{i+0.5,j}^n = \begin{cases} \rho_{i,j}^n \frac{\bar{u}_{i,j}^n + \bar{u}_{i+1,j}^n}{2} \Delta t \Delta y, & \text{если } \bar{u}_{i,j}^n + \bar{u}_{i+1,j}^n > 0 \\ \rho_{i+1,j}^n \frac{\bar{u}_{i,j}^n + \bar{u}_{i+1,j}^n}{2} \Delta t \Delta y, & \text{если } \bar{u}_{i,j}^n + \bar{u}_{i+1,j}^n < 0 \end{cases},$$

$$\Delta M_{i,j+0.5}^n = \begin{cases} \rho_{i,j}^n \frac{\bar{v}_{i,j}^n + \bar{v}_{i,j+1}^n}{2} \Delta t \Delta x, & \text{если } \bar{v}_{i,j}^n + \bar{v}_{i,j+1}^n > 0 \\ \rho_{i+1,j}^n \frac{\bar{v}_{i,j}^n + \bar{v}_{i,j+1}^n}{2} \Delta t \Delta v, & \text{если } \bar{v}_{i,j}^n + \bar{v}_{i,j+1}^n < 0 \end{cases}.$$

Третий этап является заключительным. На этом этапе мы находим окончательные поля эйлеровых параметров потока в момент времени  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ . Уравнения этого этапа представляют собой законы сохранения массы  $M$ , импульса  $P$  и полной энергии  $E$ , записанные для данной ячейки в разностной форме:

$$M^{n+1} = M^n + \sum \Delta M_{ГР}^n,$$

$$P^{n+1} = P^n + \sum \Delta P_{ГР}^n,$$

$$E^{n+1} = E^n + \sum \Delta E_{ГР}^n.$$

Эти уравнения показывают, что внутри поля течения нет источников стоков  $M$ ,  $P$ ,  $E$ , а их изменение за время  $\Delta t$  осуществляется только за счет взаимодействия на внешней границе области течения.

Исходя из этого окончательные значения параметров потока  $\rho$  и  $X = (u, v, E)$  на следующем временном слое  $t^{n+1}$  вычисляются по формулам

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-0.5,j}^n - \Delta M_{i+0.5,j}^n + \Delta M_{i,j-0.5}^n - \Delta M_{i,j+0.5}^n}{\Delta x \Delta y}$$

Значение параметров на новом временном определяется как  $X = (u, v, E)$

$$\bar{X}_{i,j}^{n+1} = \frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} \bar{X}_{i,j}^n + \frac{\bar{X}_{i-1,j}^n \Delta M_{i-0.5,j}^n + \bar{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i,j-0.5}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y} - \frac{\bar{X}_{i+1,j}^n \Delta M_{i+0.5,j}^n - \bar{X}_{i,j+1}^n \Delta M_{i,j+0.5}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y}$$

Соотношение справедливо, когда поток втекает в ячейку (i,j) через все стороны. При реализации произвольного направления течения жидкости необходимо ввести функцию  $D_{i,j}^n$ , которая определяет направление движения потока через границы расчетных ячеек. Занумеруем стороны ячейки (i,j) индексами  $k = 1, 2, 3, 4$ , где  $k = 1$  - это левая граница ячейки, а  $k = 3$  - правая граница ячейки,  $k = 2$  - это нижняя граница ячейки, а  $k = 4$  - соответственно верхняя граница ячейки.

Определим значение  $D_{i,j}^n(k)$ , относящееся к стороне k, следующим образом:

$$D_{i,j}^n(k) = \begin{cases} 1, & \text{если жидкость втекает в ячейку (i, j) через сторону k} \\ 0, & \text{если жидкость вытекает из ячейки (i, j) через сторону k} \end{cases}$$

Тогда окончательные значения параметров потока  $X = (u, v, E)$  на новом временном слое определяются так:

$$\begin{aligned} X_{i,j}^{n+1} = & \frac{D_{i,j}^n(1)\bar{X}_{i-1,j}^n\Delta M_{i-0.5,j}^n + D_{i,j}^n(2)\bar{X}_{i,j-1}^n\Delta M_{i,j-0.5}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}\Delta x\Delta y} \\ & - \frac{D_{i,j}^n(3)\bar{X}_{i+1,j}^n\Delta M_{i+0.5,j}^n - D_{i,j}^n(4)\bar{X}_{i,j+1}^n\Delta M_{i,j+0.5}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}\Delta x\Delta y} \\ & + \left[ \bar{X}_{i,j}^n \frac{\rho_{i,j}^n\Delta x\Delta y + [1 - D_{i,j}^n(1)]\Delta M_{i-0.5,j}^n + [1 - D_{i,j}^n(2)]\Delta M_{i,j-0.5}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}\Delta x\Delta y} \right. \\ & \left. - \bar{X}_{i,j}^n \frac{\rho_{i,j}^n\Delta x\Delta y - [1 - D_{i,j}^n(3)]\Delta M_{i+0.5,j}^n - [1 - D_{i,j}^n(4)]\Delta M_{i,j+0.5}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}\Delta x\Delta y} \right] \end{aligned}$$

После расчёта значений на новом временном слое система замыкается уравнением состояния.

$$P^{n+1} = (\gamma - 1)\rho_{i,j}^{n+1}\left(E_{i,j}^{n+1} - \frac{(u_{i,j}^{n+1})^2 + (v_{i,j}^{n+1})^2}{2}\right)$$

#### 4. ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА

Тестирование численного алгоритма проводилось на решении задач о распространении сильной и слабой ударных волн в одноатомном газе, рассматриваемых в книге [29].

Рассмотрим задачу о сильной ударной волне в одноатомном газе. В момент  $t = 0$  находится одноатомный газ с параметрами:  $k = 5/3$ ,  $P_0 = 0$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $E_0 = 0$ ,  $U_0 = 0$ . При  $t > 0$  на левой границе задана скорость  $U_0(t) = 1$ , на правой границе  $U = 0$ . Величины за фронтом ударной волны задаются:  $\rho = 4$ ,  $E = 0.5$ ,  $P = 4/3$ ,  $W = 4/3$ .  $W$  – Скорость фронта.

На рис.1 приведен профиль давления  $P$  в момент времени  $t = 0.375$ . Пунктирная линия – результаты расчёта методом крупных частиц, маркеры – расчёт методом Куропатенко. Сетка равномерная с числом ячеек  $N = 100$  и числом Куранта равным  $0,5$ .

Далее рассмотрим задачу о слабой ударной волны в одноатомном газе. Параметры в момент времени  $t = 0$ :  $k = 5/3$ ,  $P_0 = 1$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $E_0 = 1.5$ ,  $U_0 = 0$ . При  $t > 0$  на левой границе задана скорость  $U_0(t) = 0.5$ , на правой границе  $U = 0$ . Величины за фронтом ударной волны:  $E = 1.925$ ,  $P = 1.833333$ ,  $W = 1.66666$ .

Профиль давления  $P$  приведен на рис.2 в момент времени  $t = 0.3$ . Так же как и в первой задаче о сильной УВ пунктирная линия – результаты расчёта методом крупных частиц, маркеры – расчёт методом Куропатенко. Равномерная сетка с числом ячеек  $N = 100$  и числом Куранта равным  $0,5$ .

На основе полученных результатов можно сделать вывод о применимости метода крупных частиц для решения задач о распространении ударных волн в идеальном газе.

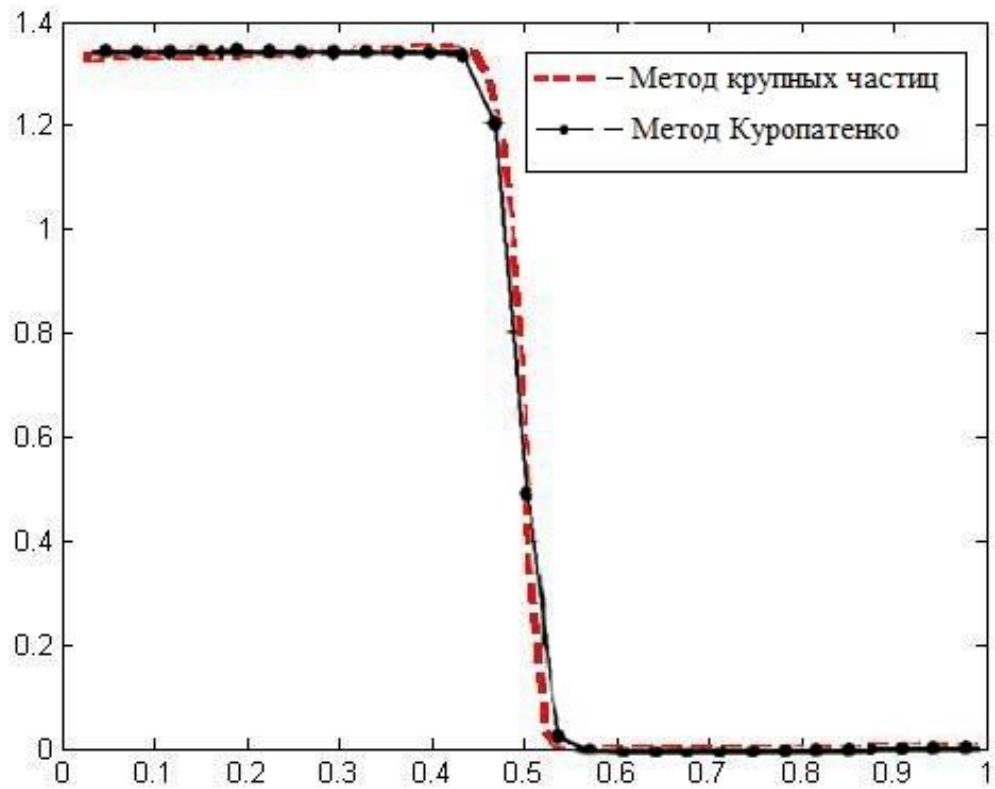


Рис.3. Профиль давления в момент времени  $t = 0.375$

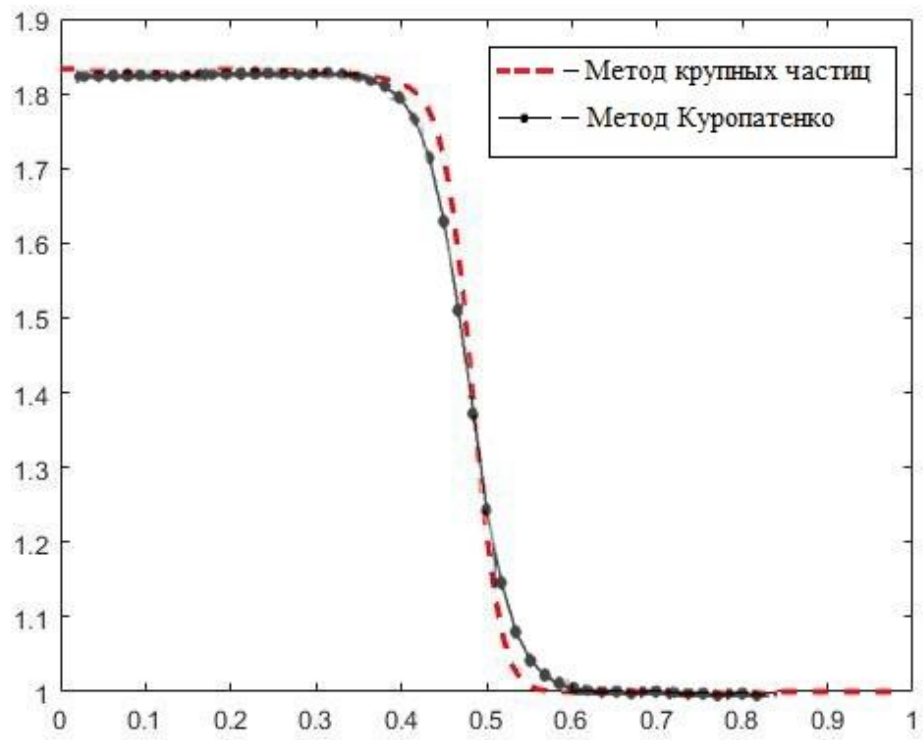


Рис.4. Профиль давления в момент времени  $t = 0.3$

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим взаимодействие ударной волны с областью III. В качестве результатов представлены изолинии давления и плотности для моментов времени  $t = 0.015$ ,  $t = 0.017$  и  $t = 0.02$ . Анализ полученных графиков показывает, что при взаимодействии ударной волны с областью газа пониженной плотности происходит увеличение скорости внутри этой области, что влечет за собой образование косоугольной ударной волны, которая связывает фронт головной ударной волны и часть ударной волны, движущейся внутри неоднородности.

На Рис.5-10 видим, что при переходе ударной волной область пониженной плотности наблюдается увеличение скорости внутри этой области, реализуется нерегулярное течение, с течением времени происходит формирование косоугольной ударной волны, которая связывает фронт головной УВ и часть УВ, движущейся внутри неоднородности. На графиках видим, что с течением времени размер предвестника растет.

Рис.11-13 подтверждают, что при уменьшении температуры в области тепловой неоднородности размер предвестника уменьшается.

Далее рассмотрим взаимодействие ударной волны с областью IV в качестве результатов представлены изолинии давления и плотности для моментов времени  $t = 0.015$  и  $t = 0.02$ .

Анализ результатов представленных на Рис. 14-17. показывает, что при взаимодействии УВ с областью IV происходит увеличение скорости внутри области, происходит формирование косоугольной ударной волны, которая связывает фронт головной УВ и часть УВ, движущейся внутри неоднородности. Размер предвестника увеличивается с течением времени.

Рис.18 и 19 подтверждают, что при уменьшении температуры в области IV размер предвестника уменьшается.

Рассмотрим теперь взаимодействие ударной волны с областью 4 с показателем  $\omega > 1$ . Результаты таких расчетов представлены на Рис. 20-23. Анализ полученных результатов показывает, что взаимодействие ударной волны с областью газа пониженной температуры происходит подобно обтеканию например плоской ступеньки сверхзвуковым потоком газа.



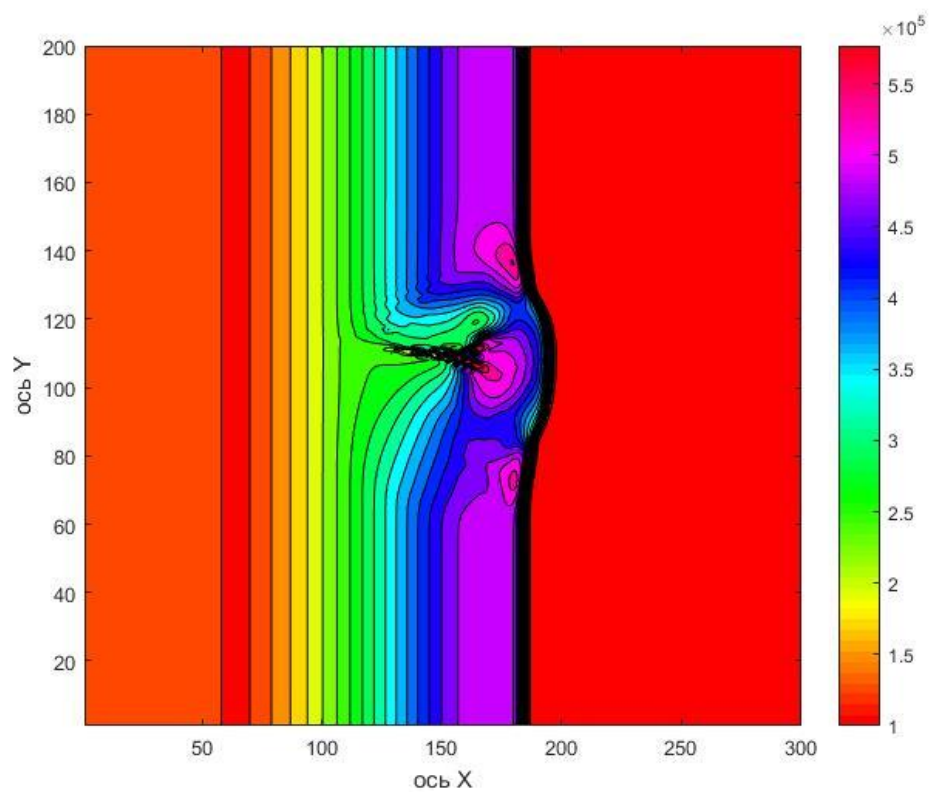


Рис.5. Изолинии давления при  $\omega=0.3$  в момент времени  $t = 0.015$

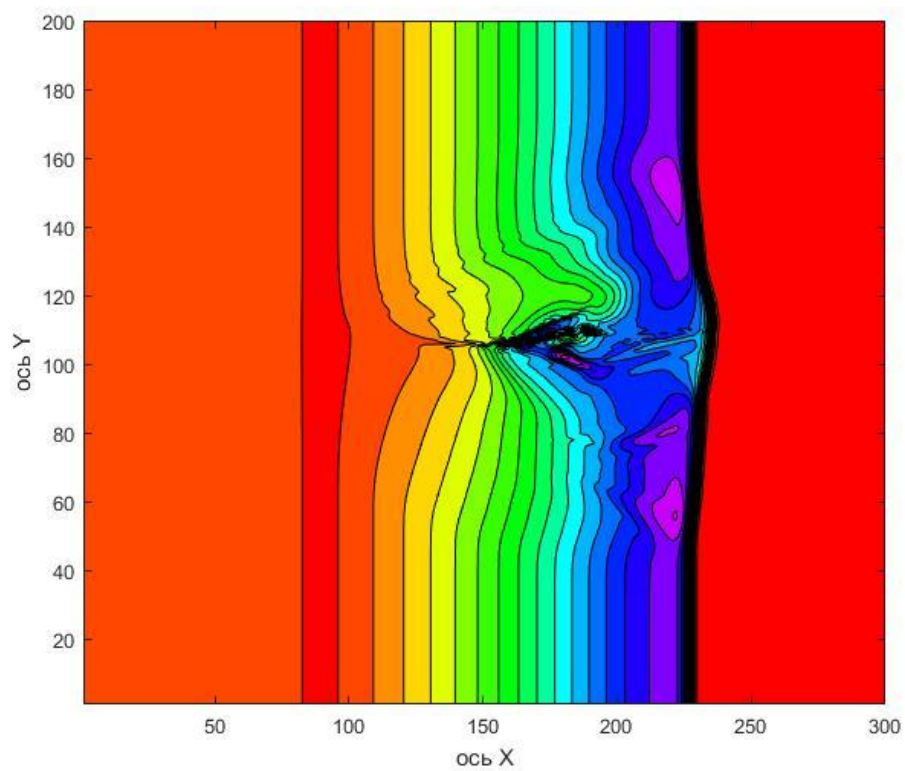


Рис.6. Изолинии давления при  $\omega=0.3$  в момент времени  $t = 0.017$

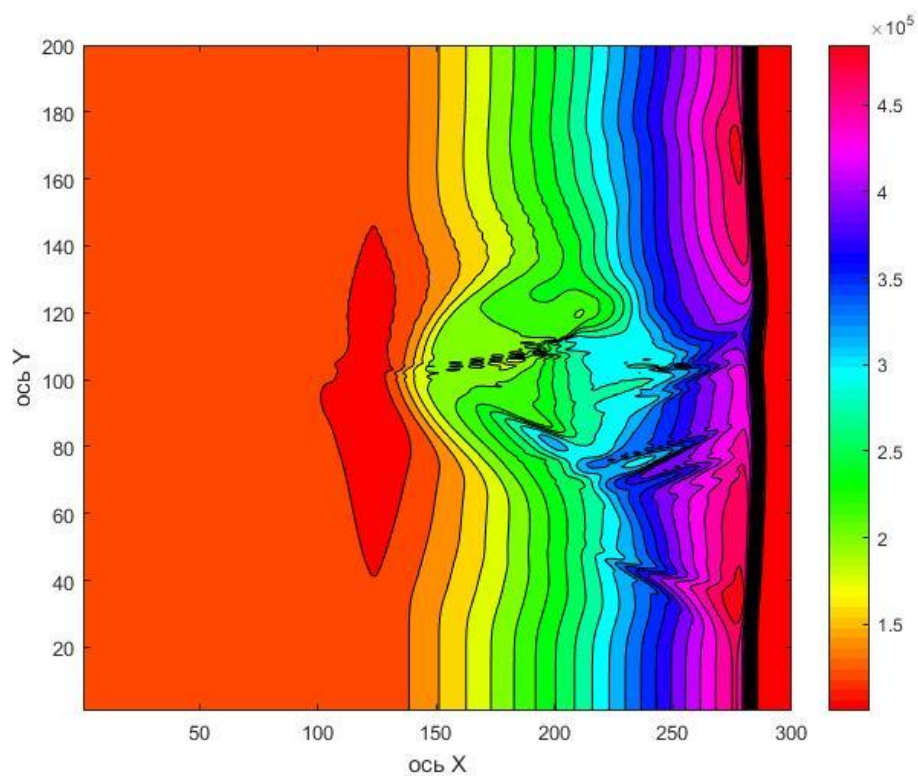


Рис.7. Изолинии давления при  $\omega=0.3$  в момент времени  $t = 0.02$

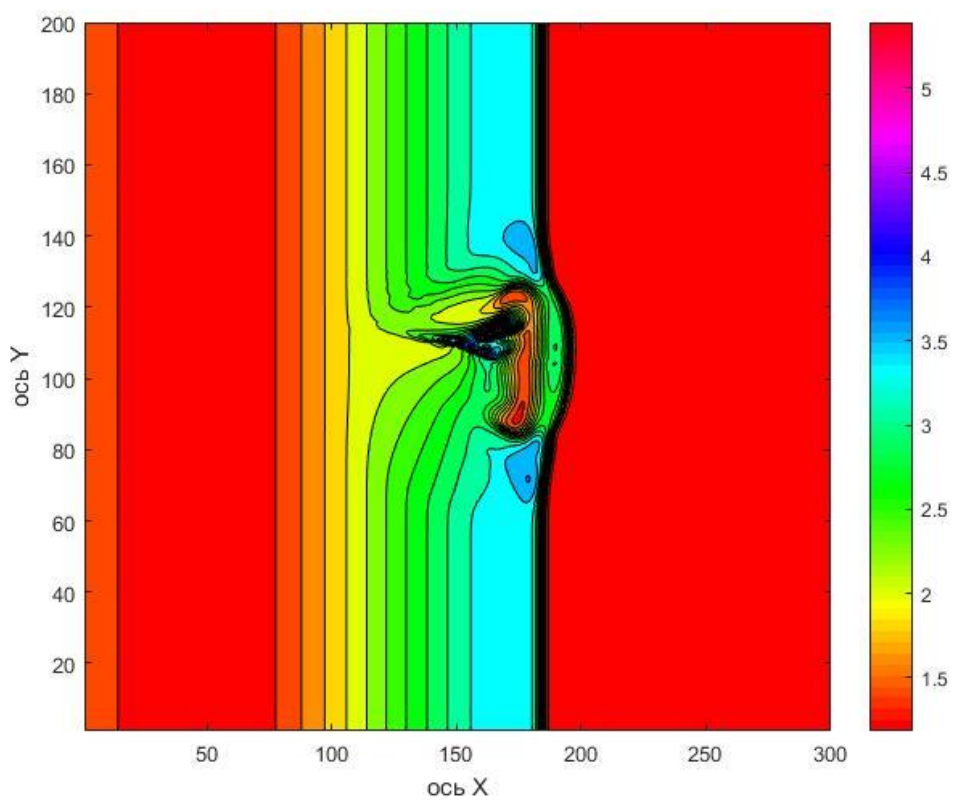


Рис.8. Изолинии плотности при  $\omega=0.3$  в момент времени  $t = 0.015$

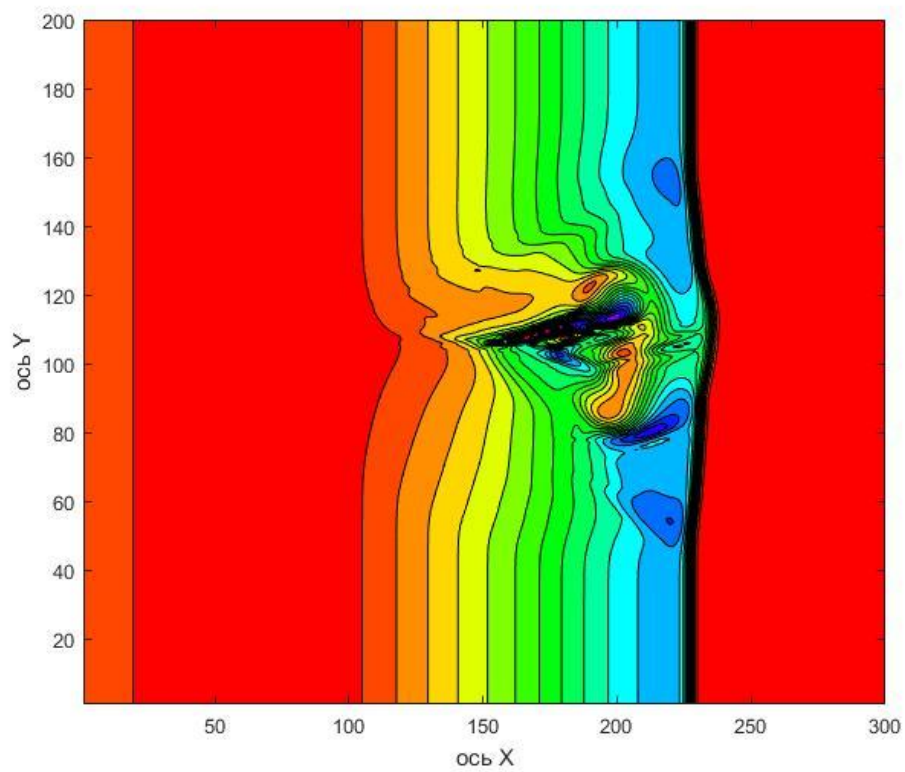


Рис.9. Изолинии плотности при  $\omega=0.3$  в момент времени  $t = 0.017$

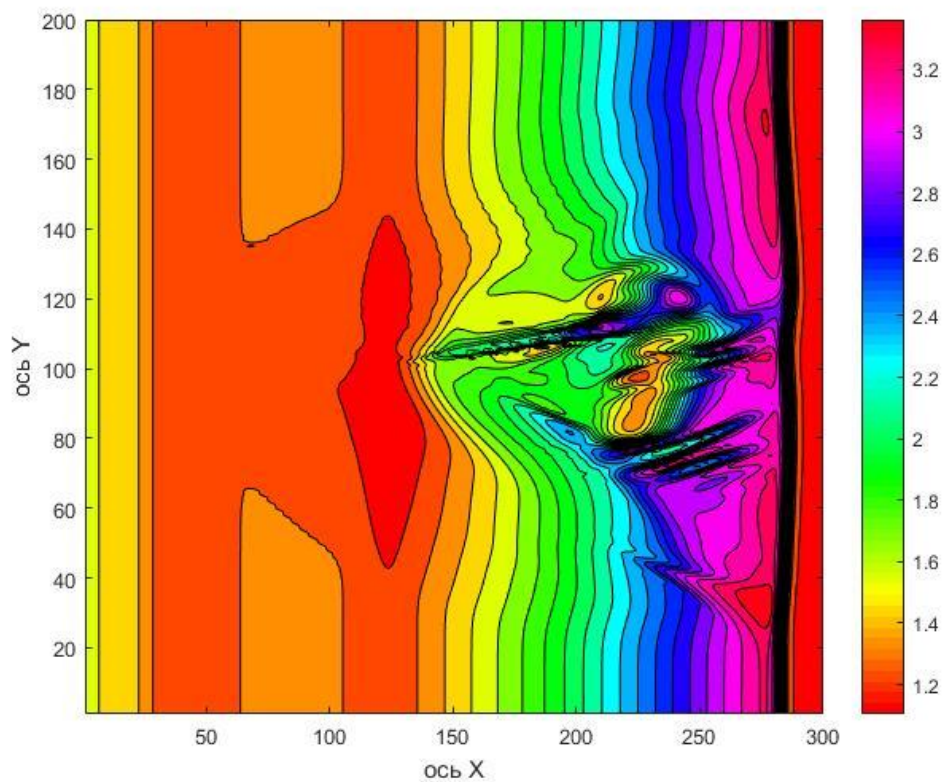


Рис.10. Изолинии плотности при  $\omega=0.3$  в момент времени  $t = 0.02$

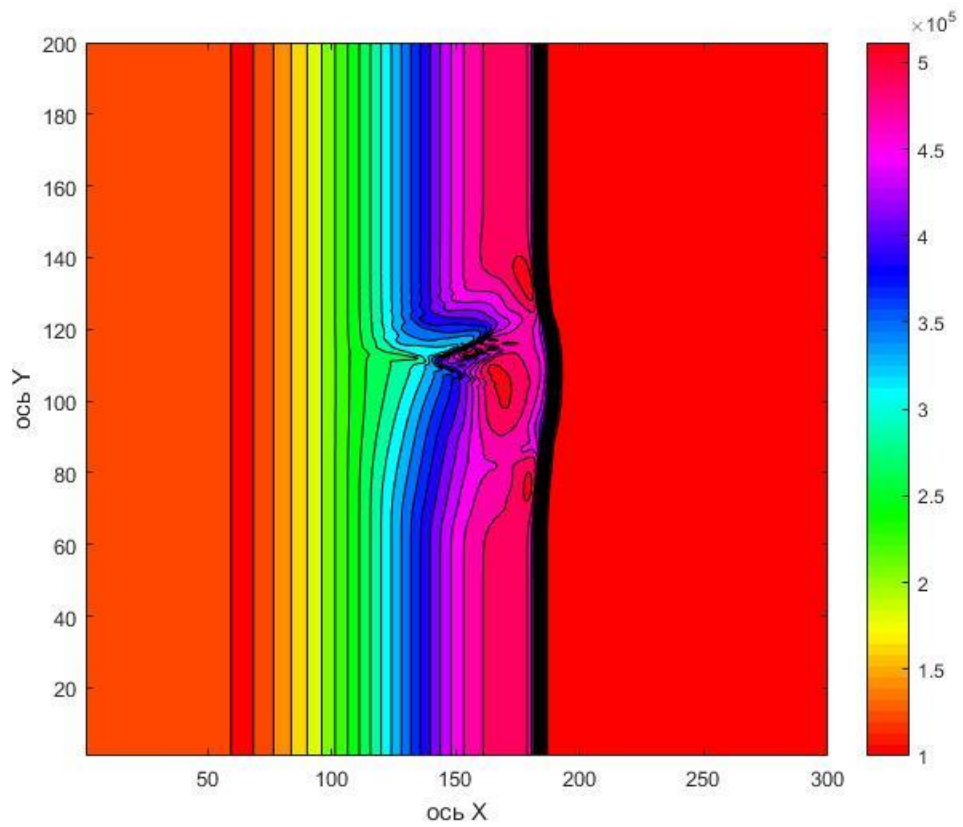


Рис.11. Изолинии давления при  $\omega=0.6$  в момент времени  $t = 0.015$

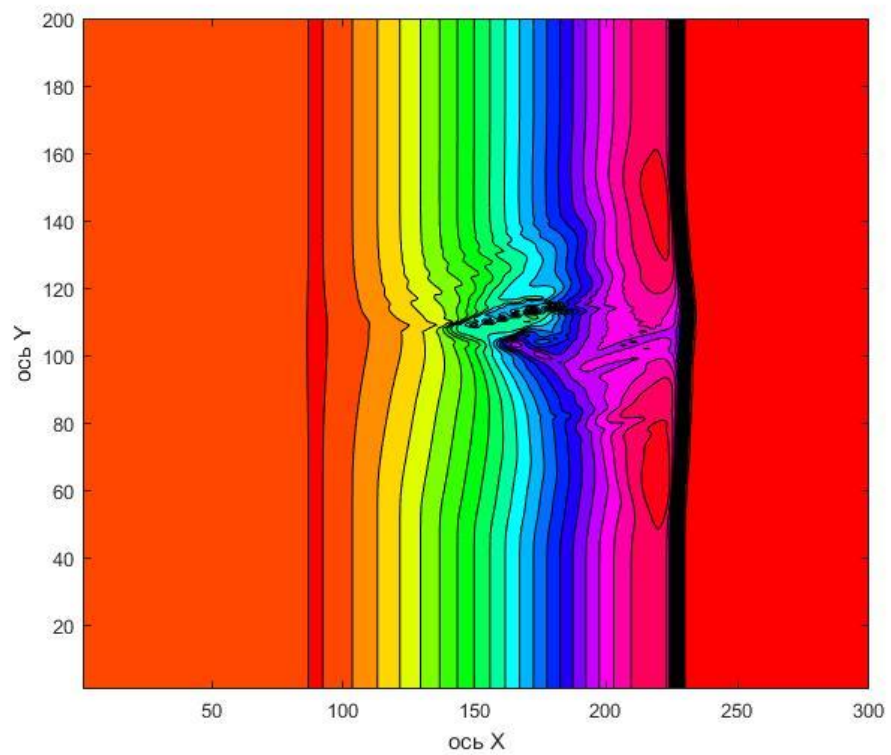


Рис.12. Изолинии давления при  $\omega=0.6$  в момент времени  $t = 0.017$

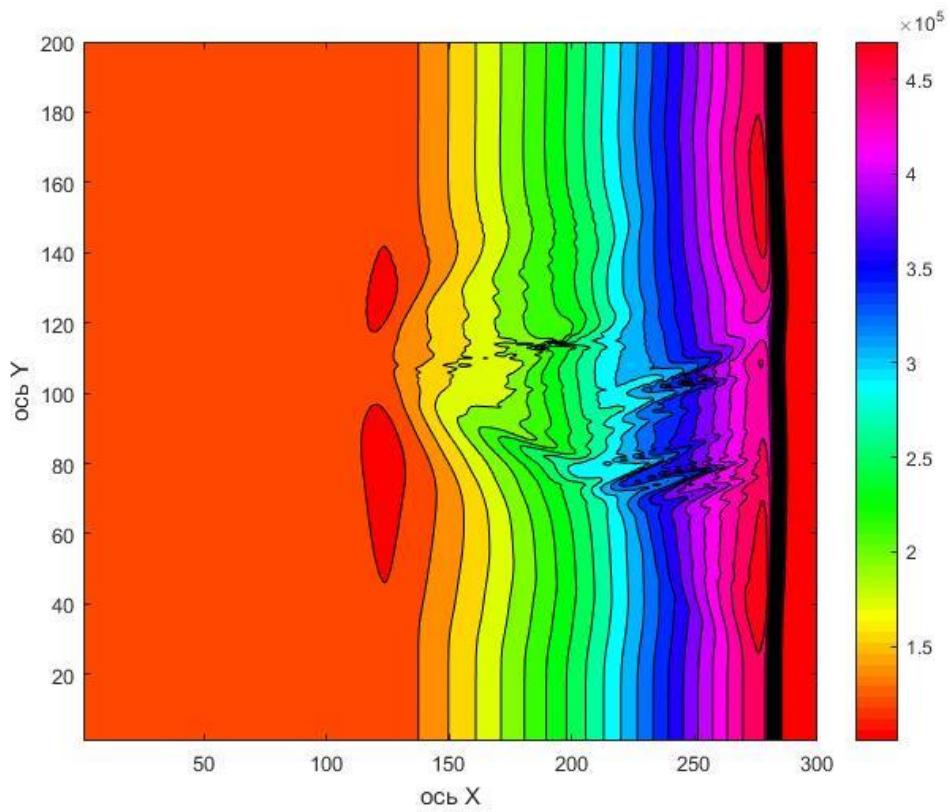


Рис.13. Изолинии давления при  $\omega=0.6$  в момент времени  $t = 0.02$

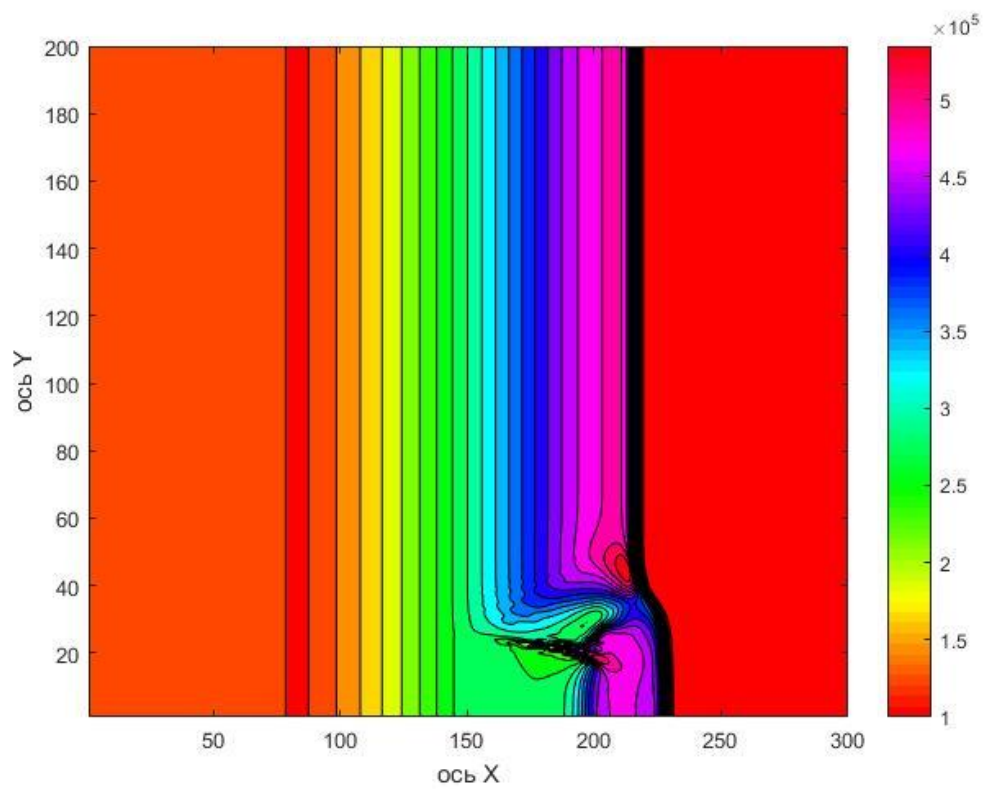


Рис.14. Изолинии давления при  $\omega=0.3$  в момент времени  $t = 0.015$

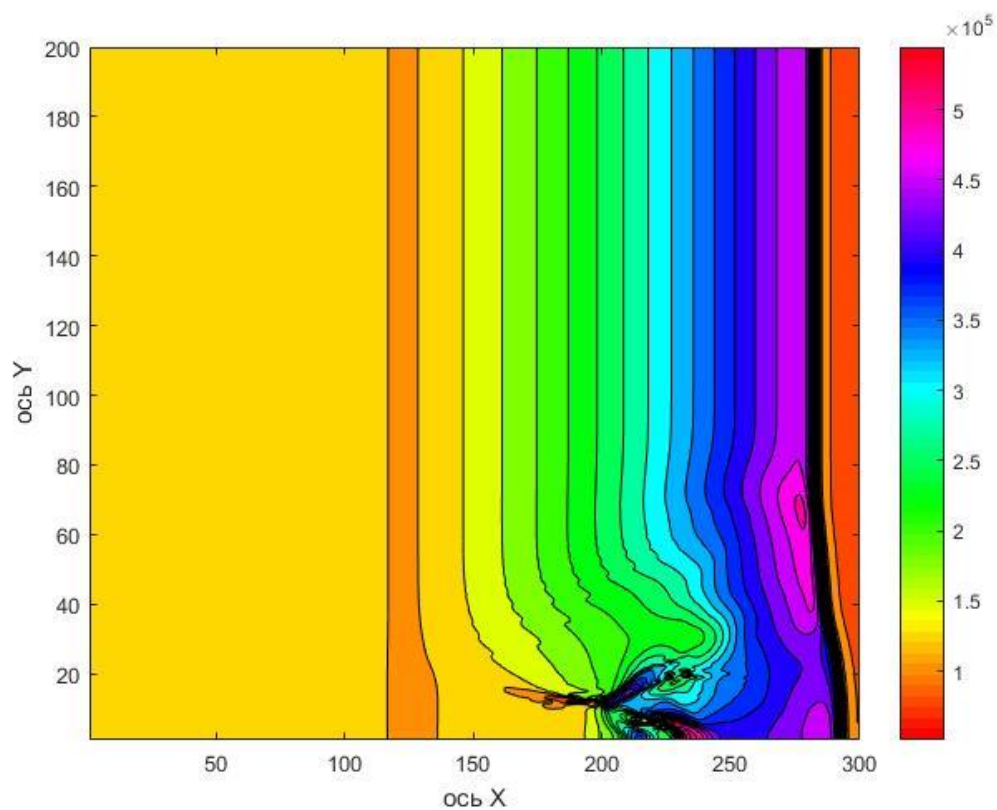


Рис.15. Изолинии давления при  $\omega=0.3$  в момент времени  $t = 0.02$

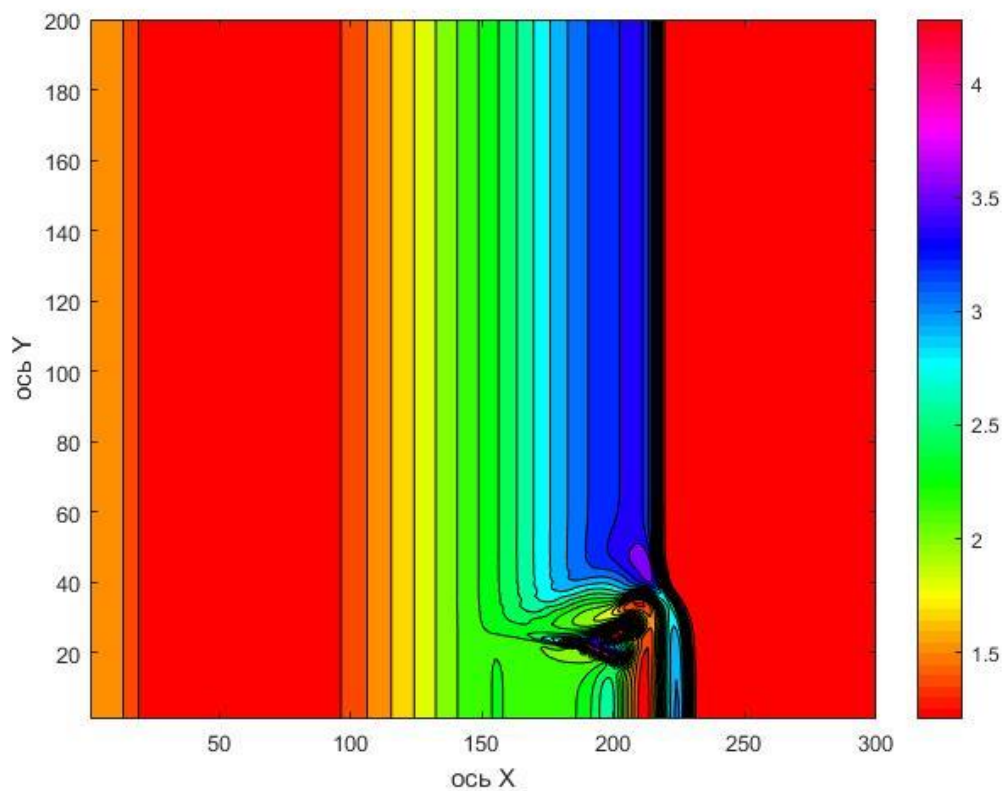


Рис.16. Изолинии плотности при  $\omega=0.3$  в момент времени  $t = 0.015$

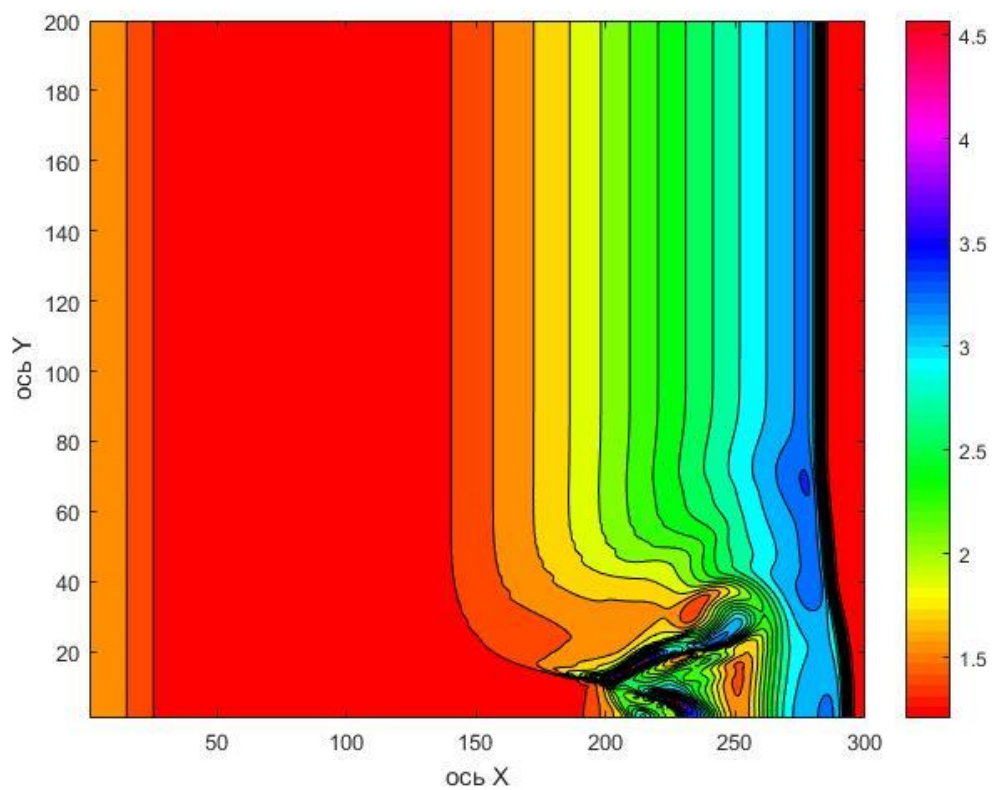


Рис.17. Изолинии плотности при  $\omega=0.3$  в момент времени  $t = 0.02$

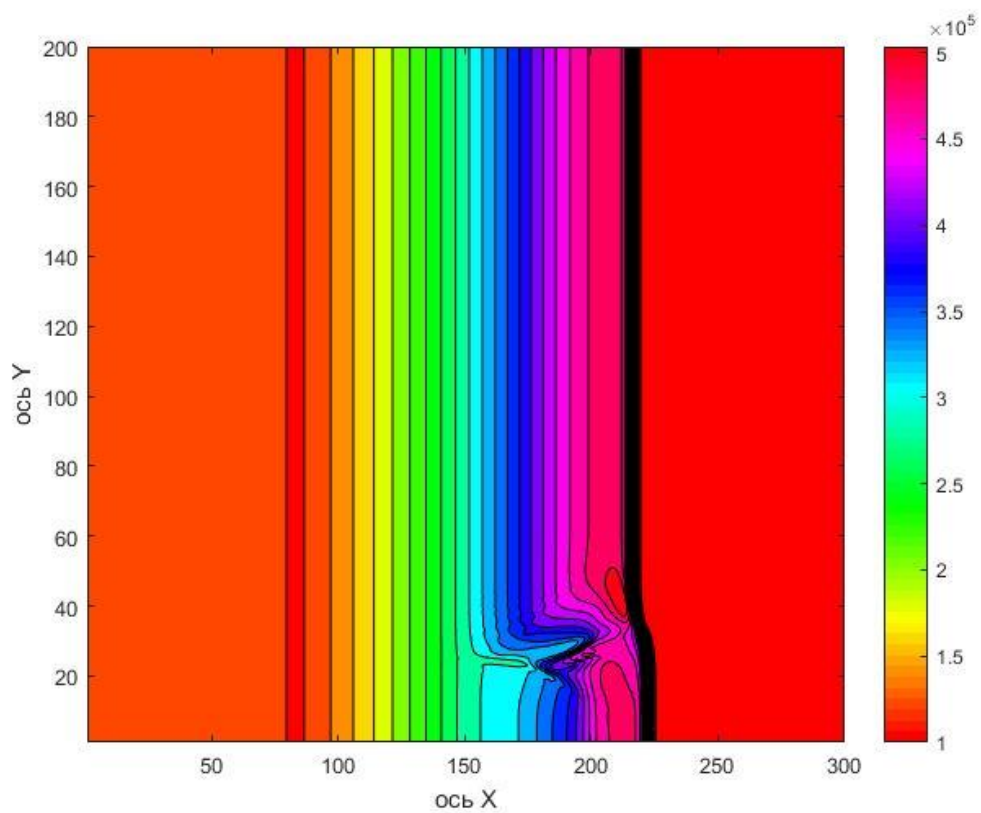


Рис.18. Изолинии давления при  $\omega=0.6$  в момент времени  $t = 0.015$

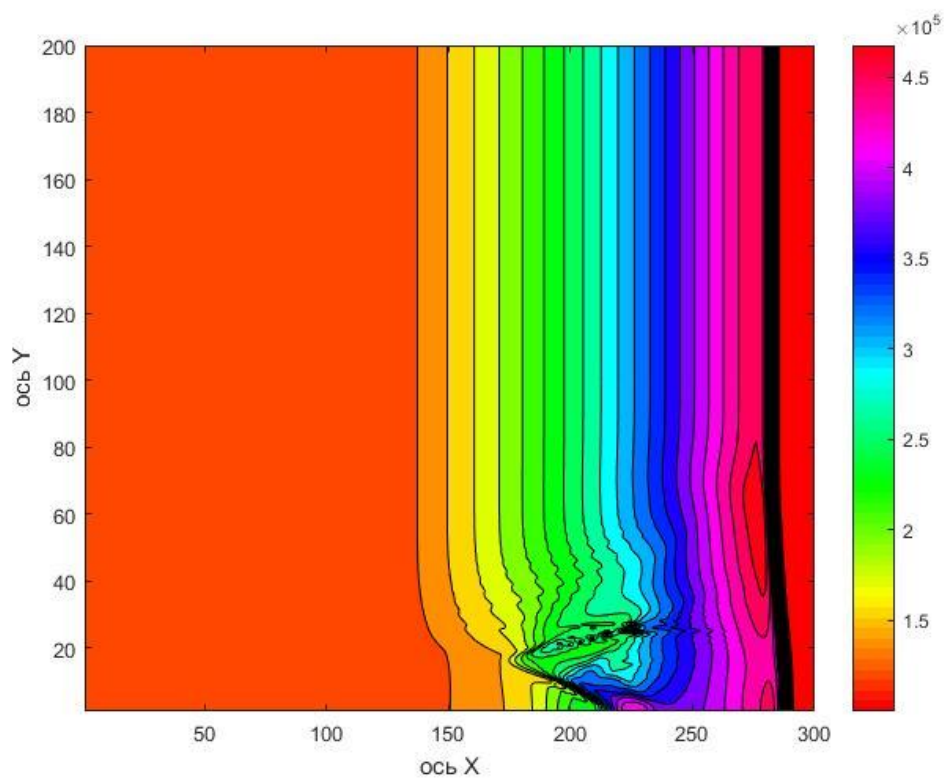


Рис.19. Изолинии давления при  $\omega=0.6$  в момент времени  $t = 0.02$

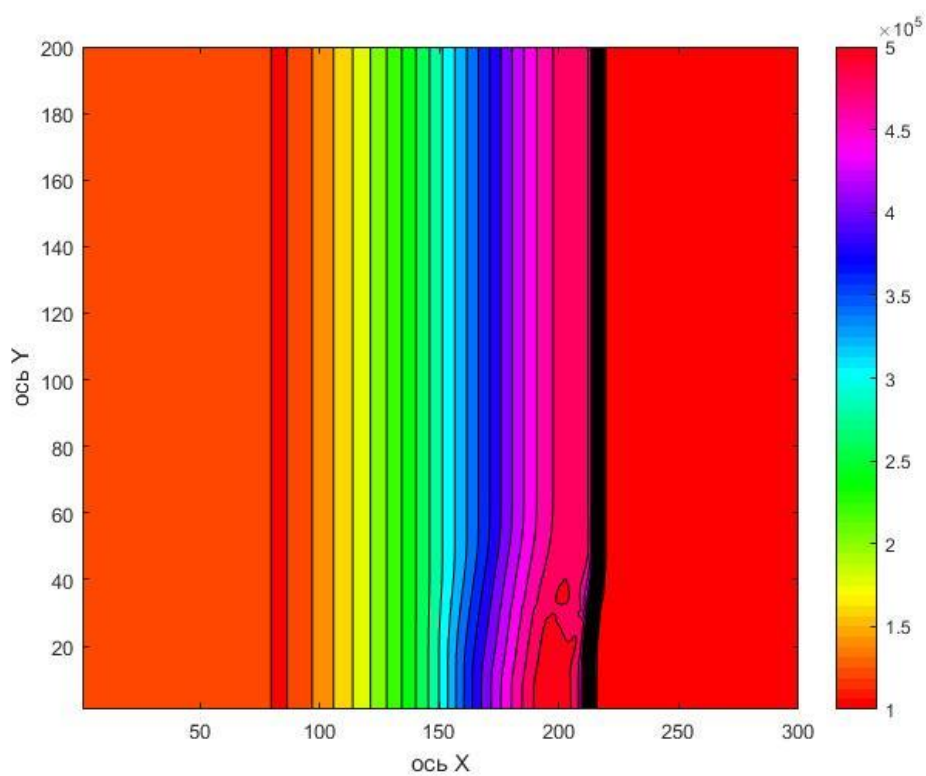


Рис.20. Изолинии давления при  $\omega=1.3$  в момент времени  $t = 0.015$



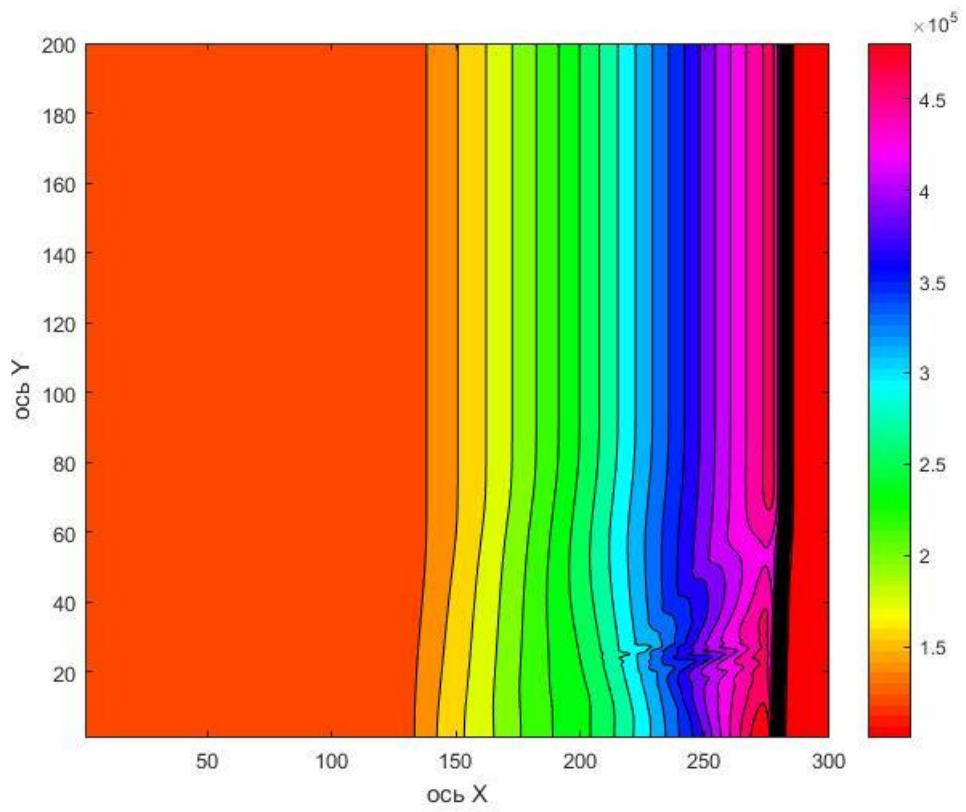


Рис.21. Изолинии давления при  $\omega=1.3$  в момент времени  $t = 0.02$

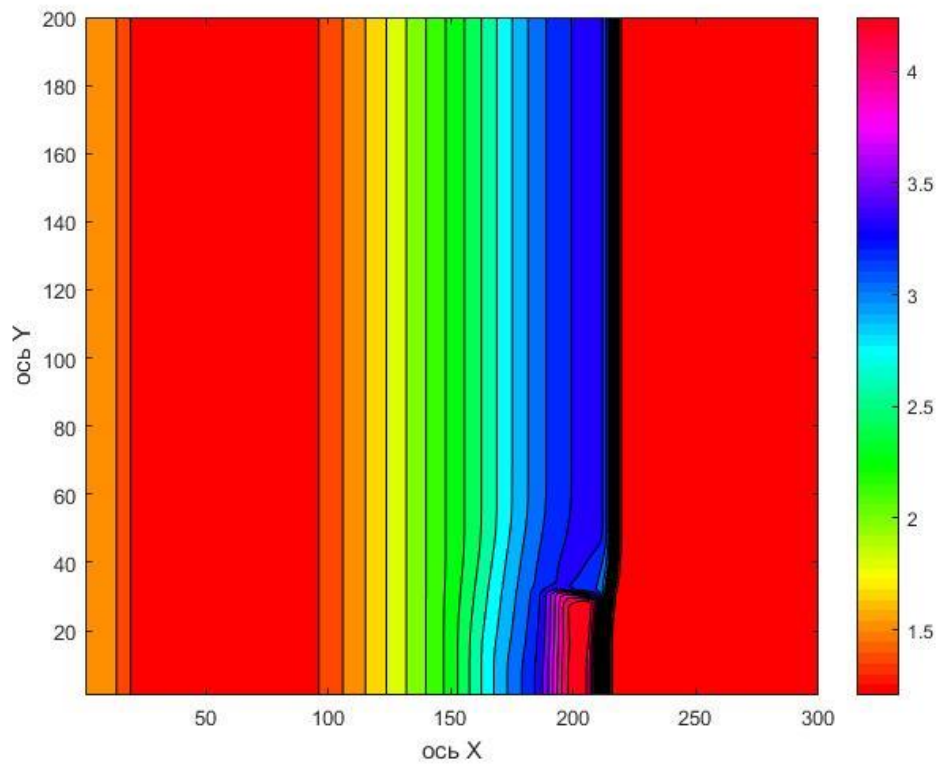


Рис.22. Изолинии плотности при  $\omega=1.3$  в момент времени  $t = 0.015$

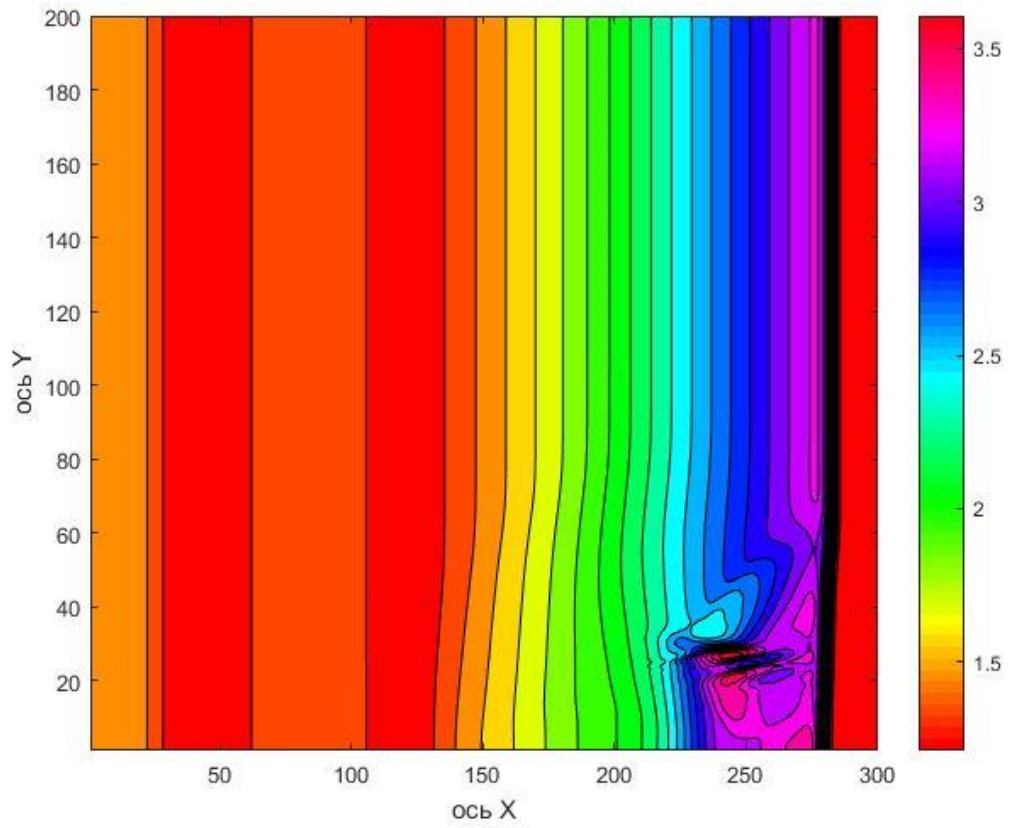


Рис.23. Изолинии плотности при  $\omega=1.3$  в момент времени  $t = 0.02$

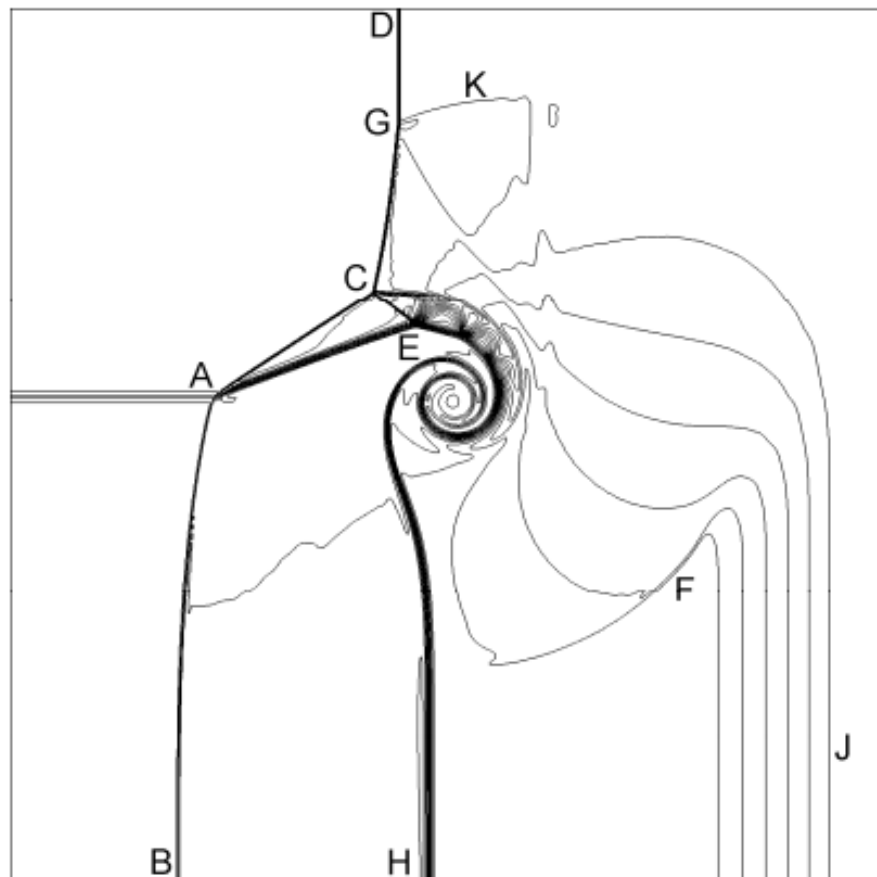


Рис.24. Изолинии плотности с показателем  $\omega=0.3$

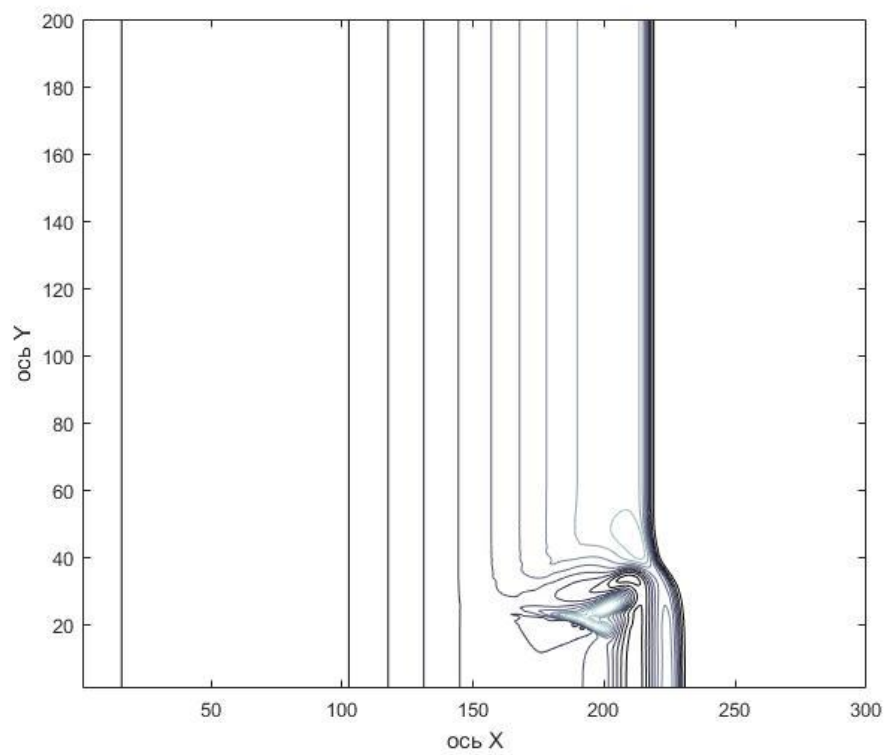


Рис.25. Изолинии плотности с показателем  $\omega=0.3$

Была построена картина изолиний плотности с показателем  $\omega=0.3$ , которая сравнивается с результатами, полученными в работах [1]-[5]. По представленным графикам можно сделать вывод, что результаты качественно совпадают с результатами, полученными в работе [1] .

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

1. Изучено взаимодействие плоской ударной волны с неоднородностями, представленными в виде областей газа пониженной или повышенной плотности.
2. Построен и реализован в пакете MatLab численный алгоритм поставленной задачи.
3. Полученные результаты качественно совпадают с результатами других авторов, представленными в литературе.
4. Поставленные в работе цели выполнены.