

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Факультет «Математики, механики и компьютерных технологий»
Кафедра «Вычислительной механики»

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой ВМ,
д. ф.-м. н., профессор
_____/Ю.М. Ковалев
_____/2018г.

Численное моделирование обтекание плоской ступеньки сверхзвуковым
потокком газа, модифицированным методом крупных частиц

ПОЯНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–01.03.03.2018.14-12-1299.ПЗ ВКР

Руководитель
к.ф.-м.н., доцент кафедры ВМ
_____/Н.Л. Клиначева
_____/2018 г.

Автор работы
студент группы ЕТ-410
_____/И.В. Степанова
_____/2018 г.

Нормоконтролер
_____/Н.Л. Клиначева
_____/2018 г.

Челябинск 2018

АННОТАЦИЯ

Степанова И.В. Численное моделирование обтекание плоской ступеньки сверхзвуковым потоком газа, модифицированным методом крупных частиц.- Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ – 410, 51 с., 12 ил., библиогр. список – 17 наименований., 1 прил.

Дипломная работа выполнена с целью исследования обтекания плоской ступеньки сверхзвуковым потоком газа, модифицированным методом крупных частиц.

В дипломном проекте проанализированы задачи моделирования обтекания преграды сверхзвуковым потоком газа.

При помощи программы MatLab разработан программный комплекс, реализующий выполнение поставленной задачи.

ОГЛАВЛЕНИЕ

АННОТАЦИЯ.....	1
ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....	6
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	16
3. ОПИСАНИЕ МЕТОДА.....	20
4. ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА.....	26
5. РЕЗУЛЬТАТЫ.....	28
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	34
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	35
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	37

ВВЕДЕНИЕ

В наше время математическое моделирование играет важную роль, так как описывает физические процессы, которые являются неотъемлемой частью нашей жизни.

Раньше считалось, что научная проблема решена, если построена математическая модель и найдено ее аналитическое решение. Сегодня же, возникают трудности, потому что появление новых математических моделей, ужесточают критерии к численным алгоритмам, которые должны получить решение с наибольшей точностью, и наименьшими затратами машинного времени.

Математические модели охватывают множество сфер науки и техники. Для рассматриваемой нами задачи, интерес представляет моделирование течения газа около тел. С помощью этих моделей можно проанализировать такие физические явления, как обтекание самолета, обтекание метеорного тела в атмосфере Земли, обтекание ракетной техники. Много практических задач было рассмотрено в рамках этих моделей, особый интерес в них представляют ударные волны, так как несут разрушительный характер и представляют большую опасность. И хотя было проведено много исследований об физике ударных волн, рассматриваемая область аэромеханики ни в теоретическом смысле, ни в экспериментальном не может считаться завершенной, и является актуальным предметом интенсивных исследований.

Численные методы, реализация которых граничит с проведением вычислительного эксперимента, отражают процесс получения результатов необходимых нам для исследования. Конкретная задача, которая стоит в теме этой работы – это численное моделирование обтекание плоской ступеньки сверхзвуковым потоком газа, модифицированным методом крупных частиц.

В рассматриваемой нами математической модели сверхзвукового обтекания, возникают взаимодействия ударных волн и волн разрежения. Скачки уплотнения, взаимодействуя с пограничными слоями, могут привести к отрыву пограничного слоя, что представляет большую проблему с точки зрения численного моделирования.

Цель работы:

1. Теоретическое исследование обтекания плоской ступеньки сверхзвуковым потоком газа.
2. Численное моделирование отражения плоской ударной волны от стенки в двумерной постановке.
3. Численное моделирование взаимодействия плоской ударной волны с плоской ступенькой.

1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Авторы Р.И. Ливеровский, С.П. Шевырев в статье [1] рассматривают численное моделирование плоских задач сверхзвуковой газовой динамики на треугольной сетке. Разрабатывается численный подход к решению уравнений течения идеального сжимаемого газа с помощью метода Давыдова, обобщенного на случай нерегулярной треугольной сетки. В данном методе взамен двух классов ячеек разностной сетки (дробные ячейки непосредственно около тела и регулярные ячейки в других случаях) классического метода крупных частиц используется единственный класс треугольных ячеек, упрощающую логику расчётов. Используется треугольная сетка, что значительно изменяет формулы на всех трёх этапах метода, но идеология метода остаётся прежней: расщепление исходных уравнений по физическим процессам. Треугольная сетка вносит дополнительные сложности в численные расчёты: генерация самой сетки (триангуляция); примыкающие треугольники не обязательно имеют соседние индексы; для подвижного тела время расчётов возрастает за счёт перестроения сетки; дополнительная память для хранения геометрии расчётной области. В рамках разработанного подхода проведено сравнение результатов решения тестовой задачи с помощью модифицированного метода Давыдова с результатами на основе схем Годунова и AUSM. Проводится сравнение результатов, полученных в данной работе и результатов, полученных с использованием метода крупных частиц на регулярной сетке. Рассматривается задача обтекания плоской пластины под углом атаки, проведено сопоставление численных результатов для величины давления сверху пластины с приближенной аналитикой для малых углов, показано, что с ростом величины угла результаты отличаются сильнее. Можно сделать вывод, что использование нерегулярной треугольной сетки методом Давыдова, позволяет описывать обтекание тел произвольной формы потоком газа, что невозможно при использовании регулярной сетки, так как не получается точно описать границу тела. Треугольная сетка позволяет

уменьшить число расчётных ячеек за счёт увеличения размера ячеек вдали от границы расчётной области.

В работе [2] рассматривается стационарное обтекание тел сверхзвуковым потоком газа, содержащим бесконечный тонкий разреженный канал. Авторы О.А. Азарова, В.Г. Грудницкий и Ю.Ф. Колесниченко исследуют обтекание затупленных и заостренных тел в различных ситуациях расположения канала. Расчёты проводились до установления стационарного режима. После проведенных исследований, можно сказать, что наличие в сверхзвуковом потоке разреженного канала существенно изменяет структуру течения. До установления стационарного режима появляются зоны вихревого течения, акустические возмущения и дополнительные ударные волны. Подведем итоги, что же происходит с течением, до установления стационарного режима:

1. Головная ударная волна изменяет форму и положение.
2. Изменяются аэродинамические свойства тел.
3. Для затупленных тел зависимость силы сопротивления торцевой поверхности от степени разреженности газа в канале близка к линейной.
4. Для заостренных тел зависимость силы сопротивления поверхности от степени разреженности газа в канале является нелинейной.
5. Уменьшение сопротивления заостренного тела на заданную величину требует большей разреженности газа в канале, чем в случае затупленного тела.
6. Существует диапазон изменения значений радиуса канала, для которого рассматриваемые эффекты практически от него не зависят.

Работа [3] автора П.Ю. Георгиевского исследует сверхзвуковое обтекание тел различной геометрической конфигурации энерговклада, локализованного в набегающем потоке. В статье проводится анализ структуры и устойчивости течений. Главная особенность данной работы в исследовании эффективности понижения сопротивления тела. Этот эффект

обусловлен взаимодействием температурного следа, который формируется, за областью энерговклада, с ударным слоем перед телом. Ключевой фактор, определяющий такое взаимодействие, является понижение полного давления, которое наблюдается в температурном следе. Автором в статье так же обнаружены новые режимы обтекания заостренных и затупленных тел.

Работа [4] автора Ф.А. Максимова посвящена аэродинамическим свойствам системы тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком. Идея состоит в том, чтобы уменьшить влияние с увеличением размера, характеризующего разлет элементов системы. Система моделируется методом построения сетки из набора сеток. Одна из сеток отвечает за интерференцию между телами и предназначается для описания невязкого внешнего течения. Остальные сетки связаны с поверхностью обтекаемых тел и описывают вязкие слои около обтекаемых тел. Затем они накладываются на первую сетку, без совмещения каких-либо узлов, что позволяет изучить задачи, например, для метеоритной тематики. В работе приводятся результаты моделирования обтекание двух цилиндров, и обтекание системы тел, расположенных в окружности. Рассмотрено 5 разных конфигураций. Получена оценка аэродинамических свойств – боковой силы и аэродинамического сопротивления. В результате проделанной работы можно выделить три режима обтекания:

- 1 – системное обтекание, когда имеется общая ударная волна.
- 2 – обтекание со значительной интерференцией, при которой образуются зоны повышенной плотности.
- 3 – режим близкий к изолированному обтеканию каждого элемента.

Авторы Ю.А. Крашаница, В.В. Тюрев и В.А. Грищенко, в работе [5] применяют методику расчета обтекания тел гиперзвуковым потоком газа. Эта методика применима для проектирования аэрокосмических летательных аппаратов. Течения газа со скоростью, превышающей скорость звука, обладают рядом отличительных особенностей, которые существенно влияют

на структуру течения и требуют особого подхода. В статье проводится расчёт параметров в изоэнтропическом гиперзвуковом потоке, выведены соотношения, характеризующие косой скачок уплотнения, при этом же течении рассматриваются аэродинамические характеристики летательного аппарата, выведены формулы для чисел Маха, коэффициентов подъемной и лобовой силы. Авторы так же учитывают закон сопротивления Ньютона, что накладывает дополнительные условия для рассмотрения данной задачи. В результате проведены исследования созданных математических моделей различных тел в гиперзвуковом потоке, производились расчёты для различных скоростей, высот полета и других параметров, определены аэродинамические силы, действующие на тело, и интегральные коэффициенты. Их исследования позволяют расширить возможности применения методов численного моделирования, для объектов различной формы гиперзвуковым потоком.

В статье [6] авторов М.Г. Хажоян, Г.С. Хахимзянов проводится расчёт обтекания потоком жидкости ступеньки, расположенной на дне канала. Используется конечно-разностный алгоритм, основанный на модели плоских потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Исследуется поведение свободной поверхности в окрестности ступеньки в зависимости от скорости набегающего потока. Стационарное обтекание ступеньки рассчитывалось методом установления. Так же проводилось сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. Полученные результаты численного моделирования позволяют убедиться в том, что даже такая упрощенная модель, может быть использована для предсказания реальной картины обтекания ступеньки потоком жидкости, поскольку экспериментальные и расчетные данные почти совпадают.

Анализ физической картины отрывного обтекания двумерной ступеньки сверхзвуковым потоком рассматривается в работе [7] Р.В.

Антонов. Исследования проводились в сверхзвуковой аэродинамической трубе в условиях адиабатической стенки. Произведено много экспериментов, и с помощью полученных данных авторам удалось построить общую схему течения перед ступенькой. Таким образом, полученные результаты анализа вносят определенную ясность в картину турбулентного отрывного течения перед двумерной ступенькой, в частности, показана взаимосвязь течения в точках отрыва и присоединения пограничного слоя, предложены соответствующие зависимости для расчёта течения в этих точках.

Расчёт обтекания тел произвольной формы методом «крупных частиц» приводится в [8] автором Ю.М. Давыдовым. Работа посвящается распространению метода «крупных частиц» на случай обтекания осесимметричных и плоских тел с произвольной образующей под нулевым углом атаки. Рассчитывались задачи внешнего обтекания в широком диапазоне скоростей набегающего потока – от дозвуковых до гиперзвуковых, включая переход через скорость звука. Особое внимание уделено трансзвуковым режимам. Для примеров приведены расчёты по обтеканию 75°-ного конуса, круглого цилиндра, сферы, 12%-ного плоского и осесимметричного профилей и тела сегментальной формы – спускаемого космического аппарата Аполлон. При расчёте обтекания тел произвольной формы конечноразностными методами есть два метода: 1) расчет в координатах; 2) введение дробных ячеек. В первом случае сложно рассчитывать тело с изломами. Во втором случае наличие изломов не вызывает затруднений, в работе используется именно этот метод. После проведенных исследований, можно сделать вывод, что метод «крупных частиц» применим для расчёта тел произвольной формы. При этом все особенности потока (срывы потока, ударные волны, локальные сверхзвуковые зоны и т.д.) выстраиваются автоматически в результате установления. Метод может быть распространен на получение характеристик обтекания произвольных тел под углом атаки, а также на решение внутренних аэродинамических задач.

Более детальное изучение метода «крупных частиц» проводилось в [9]. Авторы О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов рассматривают нестационарный метод для газодинамических расчётов, их основная цель – модификация метода «крупных частиц» применительно к задачам внешней аэродинамики. Структура алгоритма сильно не изменилась, сохранились основные принципы и подходы: использование дивергентной формы записи исходной системы, та же структура расчётных сеток и т.п. На втором этапе вычислений проводилось построение различных разностных схем (в том числе с помощью метода интегральных соотношений), обеспечивающих устойчивый счёт большого класса задач. Исследовались модификации первого и третьего этапов. Затем изучались единые численные алгоритмы, позволяющие проводить вычисления для плоских и осесимметричных течений без выделения особенностей, то есть как в областях гладкого течения, так и на разрывах. Такие алгоритмы можно построить исходя из единообразного описания гидродинамического течения. Это возможно сделать, рассматривая интегральные законы сохранения или путём введения диссипативных членов в уравнения газовой динамики идеальной жидкости. В работе используется второй подход. Отметим так же, что авторы подробно описывают вязкостные эффекты и условия устойчивости задачи для различных постановок задачи.

Результаты численных расчётов были получены на машине БЭСМ–6 для сверх-, транс- и дозвукового обтекания бесконечно осесимметричного цилиндра с плоским носом и плоской «ступеньки». Задача ставилась таким образом, чтобы было возможно проводить вычисления по единым алгоритмам для всех случаев. Можно сделать вывод, что модифицированный нестационарный метод «крупных частиц» с успехом может применяться для изучения свойств стационарных течений в сложных газодинамических задачах. Так же важным является, то, что расчёт до-, транс- и сверхзвуковых режимов обтекания плоских и осесимметричных тел, построение скачков

уплотнения, местных сверхзвуковых зон проводится по единому вычислительному алгоритму методом «сквозного течения».

Н.В. Гусев приводит численный расчёт движения газа при взрыве на поверхности в [10]. Исследуется движение газа при нормальном ударе быстролетящего тела о границу плотного полупространства с вакуумом. Получено распределение параметров разлетающегося в вакуум газа, движение ударной волны и её форма. Изучается перемещение при образовании области с большим давлением на границе с вакуумом газа, занимающим полупространство $z > 0$. Предполагается цилиндрическая симметрия относительно оси z , что позволяет решать эту в общем случае трёхмерную нестационарную задачу как двухмерную. В результате решения этой задачи, получены профили газодинамических величин и выход решения на автомодельное. Чашеобразная поверхность фронта ударной волны с большим градиентом давления на ней «фокусирует» вылетающий газ так, что его нормальная к поверхности $z = 0$ компонента скорости на порядок больше компоненты, параллельной поверхности раздела сред, и только в отдельных точках отношение их приближается к 0,4. Вследствие этого вылетающий газ формируется в виде «факела», профили давления и плотности на оси которого имеют форму, аналогичную одномерному случаю короткого удара, а в плоскости $z = 0$ распределения давления и плотности аналогичны распределениям этих величин в случае сильного точечного взрыва в неограниченной среде. Начальное возмущение рассматриваемой симметричной задачи может быть итогом либо нормального удара тела с большой скоростью о поверхность плоской среды, либо следствием влияния импульса лазера или какого-то иного процесса, когда образуется некоторый объем с большим давлением на границе раздела плотной среды с вакуумом или же с другой малоплотной средой.

Расчёт давления на контур в режиме нестационарного отрывного обтекания может представлять большую проблему. В [11] Д.Н. Горелов

рассматривает именно такую задачу. В ряде задач расчёт гидродинамических реакций на профиль, обтекаемый нестационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости, вызывает затруднения ввиду сложности. Как правило, давление вычисляют с последующим интегрированием по контуру профиля. В нестационарном потоке давление определяется интегрированием Коши – Лагранжа, который содержит производную по времени от потенциала скорости. Вычисление этой составляющей давления наиболее трудоемко, так как необходимо принять во внимание перемещение точек контура и разрывы потенциала скорости, обусловленные сходом с профиля вихревых следов. Однако предлагаемые формулы не всегда корректны. В работе получены общие формулы для расчёта давления и суммарных гидродинамических реакций на контур (разомкнутый и замкнутый) в нестационарном потоке в режимах безотрывного и отрывного обтекания. Результаты показывают, что полученные формулы достаточно точно вычисляют поставленные условия задачи. Потенциальным предполагалось течение жидкости вне профиля. Для расчёта давления использовались интенсивности вихревых слоёв, моделирующих профиль в вихревые следы, определяемые из решения соответствующей нелинейной начально – краевой задачи.

Интересной для практического применения обтекания сверхзвуковым потоком является задача [12]. Авторы Н.Н. Пилюгин, В.С. Хлебников рассматривают проблемы парашютной системы для торможения летательного аппарата. Полёты самолетов при сверхзвуковых скоростях, а также космических зондов к другим планетам привели к необходимости создания тормозных систем для воплощения безопасной посадки исследовательских аппаратов, грузов или астронавтов на поверхность Земли и других планет. Применяемая в настоящее время схема спуска возвращаемого космического аппарата с круговой орбиты включает три стадии полёта в атмосфере. На начальной стадии в верхних слоях атмосферы снижение скорости спускаемого аппарата осуществляется с помощью

тормозной двигательной установки. На втором этапе спускаемый аппарат испытывает значительные тепловые нагрузки, поэтому для него требуется специальная теплозащита. На последней стадии при дозвуковой скорости торможение и мягкая посадка на поверхность Земли осуществляется с помощью обычных парашютов. В данной работе авторы и рассматривают тормозную систему в виде парашюта. Так же исследуется сверхзвуковое неравномерное обтекание пары тел, одно из которых движется в следе другого. Соединение тел стропами приводит к изменению режима обтекания и может оказывать влияние на аэродинамические характеристики системы тел. Целью данной работы является анализ аэродинамических проблем, образующихся при разработке сверхзвуковых тормозных устройств. Проведение такого анализа нужно для тестирования методов расчёт сложных течений и применения полученных результатов в качестве начального приближения для натуральных моделей. Результаты экспериментальных исследований моделей систем груз – парашют рассматривают влияние аэродинамических характеристик систем груз – тормозное устройство при транс-, сверх- и гиперзвуковых режимах обтекания на максимальные значения силовых и тепловых нагрузок на тормозное устройство; воздействие на обтекание систем, формы, размеров груза и тормозного устройства. Представленные результаты можно применить для дальнейшего изучения и моделирования сверхзвукового обтекания систем груз – тормозное устройство, а также для апробации численных методов отрывных течений представленного класса.

В работе [13] исследуется обтекание плоской пластины сверхзвуковым потоком вязкого газа, имеющей на конечном расстоянии от носка контур, искривленный в форме плавной ступени, имеющей масштабы зоны свободного взаимодействия. Автор Д.О. Лыжин отыскал решение линеаризованной задачи с помощью ЭЦВМ, произвел численное решение нелинейной задачи для различных форм ступенек.

Теоретически исследуются стационарные ударно – волновые системы [14] (последовательности скачков уплотнения, изоэнтропных волн сжатия и разрежения), возникающие при плоском обтекании тел сверхзвуковым потоком совершенного невязкого газа. В работе рассматриваются модельные задачи сверхзвуковой аэродинамики, такие как обтекание пластины с передним щитком, обтекание одиночной пластины и многоугольных профилей. Рассчитаны области существования рассматриваемых ударно – волновых систем, определены их параметры, доставляющих экстремумы силовых и тепловых нагрузок, а также аэродинамических коэффициентов обтекаемых тел. Отметим, что волны разрежения и сжатия, определяющиеся в результате взаимодействия элементов ударно – волновых систем между собой препятствуют достижению экстремальных давлений и сил, воздействующих на тело. То есть, использование аналитического аппарата исследования и оптимизации ударно – волновых систем представляется полезным для газодинамического конструирования летательных аппаратов, управления силовыми и тепловыми нагрузками на их несущие поверхности, и для тестирования численных методов аэромеханики и газовой динамики.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В нашей задаче, в плоскости XOY декартовой системы координат, рассматривается обтекание «плоской ступеньки» сверхзвуковым потоком газа. Схема расчетной области представлена на рис. 1.

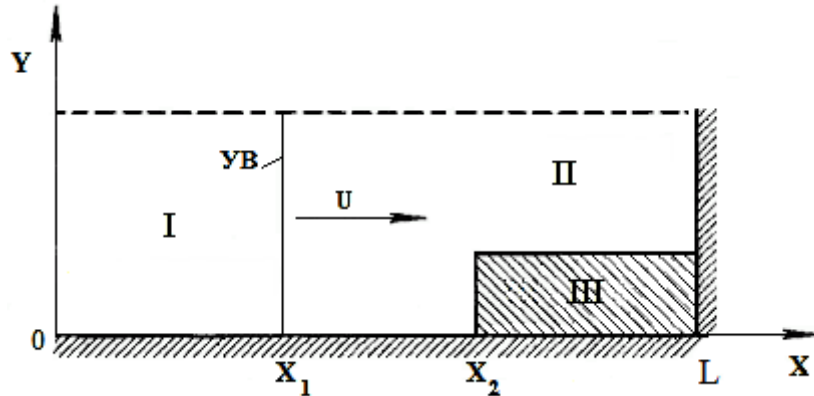


Рис.1. Схема расчетной области в начальный момент времени

В положительном направлении оси X , сформировалась плоская ударная волна, движущаяся по невозмущенному потоку. Длина рассматриваемой области имеет длину L . Здесь условия газа на разных отрезках графика:

I – Область ударной волны

II – Область покоящегося газа при нормальных условиях

III – Плоская ступенька

В начальный момент времени $t = 0$ в области $0 \leq X_1$ находится идеальный газ с параметрами P_0, ρ_0, u_0, E_0 , а плотность и скорость на фронте ударной волны задаются из соотношений Ренкина-Гюгонио, которое подробно рассмотрено в [16]:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{P_0}{P_1}}{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{P_0}{P_1}}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{(P_1 - P_0)(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1 \rho_0}}$$

Преобразовав их, получим уравнения для скорости и плотности за ударной волной в виде:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0 \frac{(k+1)P_1}{k-1} + \frac{(k-1)P_0}{k-1}}{\frac{(k+1)P_0}{k-1} + \frac{(k-1)P_1}{k-1}}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} \left(\frac{P_1 - P_0}{\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1}} \right)} - \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} \left(\frac{P_1 - P_0}{\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1}} \right)}$$

Подчеркнем, что индексом «0» обозначаются параметры перед фронтом ударной волной и определяются как P_0, ρ_0, u_0, E_0 , индексом «1» параметры за фронтом.

Математической моделью, рассматриваемой задачи, является система дифференциальных уравнений Эйлера (уравнение неразрывности, импульса и энергии) в декартовой системе координат.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho E u}{\partial x} + \frac{\partial \rho E v}{\partial y} + \frac{\partial P u}{\partial x} + \frac{\partial P v}{\partial y} = 0$$

Система замыкается уравнением состояния:

$$P = e\rho(k-1)$$

Здесь и ниже: P – давление, ρ – плотность, u, v – скорость, E – удельная полная энергия, e – внутренняя энергия, k – показатель адиабаты.

Граничные условия

Для рассматриваемой постановки задачи граничные условия выглядят таким образом:

$X = 0$ – с левой границы условия набегающего потока; $X = L$ – на правой и нижней границе обычные условия на твердой стенке (условия не протекания или прилипания); $X_2 \leq L$ – «плоская ступенька» задается как твердое тело, иначе говоря, имеет твердую стенку со всех сторон; верхняя граница области открыта, на ней ставятся условия свободного протекания.

Для того чтобы не нарушать однородность вычислений и не принимать особые формулы для граничных ячеек, вводятся слои фиктивных ячеек вдоль всех границ, куда и засылаются соответствующие параметры из соседних ячеек потока. Мы различаем два рода границ: открытая граница расчётной области и твердая стенка. При условии непротекания, нормальная к стенке компонента скорости меняет знак в слое фиктивных ячеек, остальные же параметры потока сносятся туда без изменения. При условии прилипания обе компоненты скорости изменяют свои знаки.

Пусть одной из прилегающих сверху к телу ячеек отвечают индексы (i, j) , а соответствующие ей фиктивной ячейке внутри тела – индексы $(i, j + 1)$, для наглядности приведен рис.2. Тогда при указанной выше трактовке граничных условий непротекания на теле запишутся так:

$$U_{i,j+1} = U_{i,j}, V_{i,j+1} = -V_{i,j}$$

А условия прилипания:

$$U_{i,j+1} = -U_{i,j}, V_{i,j+1} = -V_{i,j}$$

Через открытые границы поток может втекать или вытекать из области, и должны быть обеспечены некоторые условия непрерывности движения. То есть, наш поток идет слева направо, то тут и задаются

параметры набегающего потока. На остальных открытых границах в фиктивный слой переносятся параметры с ближайшего (к границе) слоя.

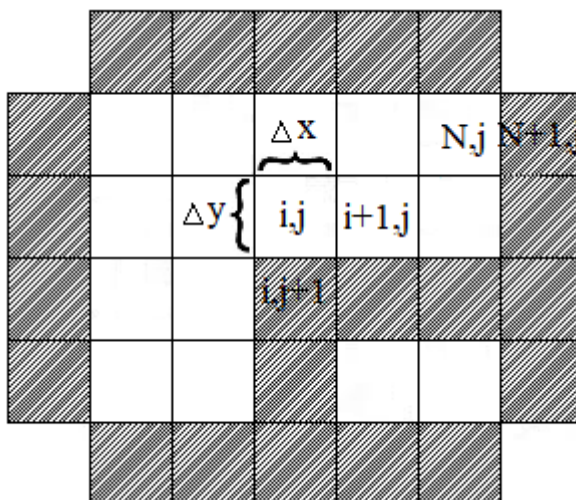


Рис.2. Структура расчётной сетки (слои фиктивных ячеек заштрихованы)

3. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Целью данной работы является получение численного решения поставленной задачи, модифицированным методом крупных частиц. Сам метод мы уже встречали в работах [8] и [9]. Идея состоит в том, что исходная нестационарная система Эйлера, записанная в форме законов сохранения, расщепляется по физическим процессам. Среда моделируется системой из жидких (крупных) частиц, совпадающих в данный момент времени с ячейкой эйлеровой сетки. Стационарное решение задачи существует при установлении, то есть многократном повторении шагов по времени. Расчет каждого вычислительного цикла разбивается на три этапа:

– Эйлеров этап. Пренебрегаем всеми эффектами, связанными с движением жидкости, учитывается эффект ускорения лишь за счет давления; здесь на фиксированной эйлеровой сетке определяются промежуточные значения искомого параметром потока.

II – Лагранжев этап. Вычисляются потоки массы при движении жидкости через границы эйлеровых ячеек.

III – Заключительный этап. На новом временном слое определяются окончательные значения параметров потока на основе законов сохранения импульса, энергии и массы для каждой ячейки и всей системы в целом на фиксированной расчетной сетке.

По существу на первом этапе проводится число лагранжев расчет – считается изменение за время импульса и энергии лагранжева элементарного объема жидкости, заключенного внутри данной эйлеровой ячейки (при этом граница объема сдвигается относительно начального положения). На втором, лагранжевом этапе, учитывают то, что было опущено на первом, т.е. члены, описывающие перенос массы, импульса и энергии. Рассчитываются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю эйлерову сетку.

И на третьем этапе происходит соответствующее перераспределение массы, импульса и энергии по пространству, что позволяет определить новое распределение гидродинамических параметров на «старой» эйлеровой сетке (находится изменения за время параметров потока в элементарной эйлеровой ячейке, полученной возвращением лагранжева объема в исходное состояние). Счет фактически проводится в локальных лагранжевых координатах с последующим пересчетом (интерполяцией) на эйлерову расчетную сетку.

В нашей работе мы рассматриваем модификацию Гришина Ю.А. и Зенкина В.А. Особенностью данной модификации заключается лишь на эйлеровом этапе, так как на данном этапе используется специальная простая процедура в определении давления и скорости на границах между ячейками.

Разберем все этапы расчетного цикла в отдельности. Для этого рассмотрим движение идеального сжимаемого газа. В качестве исходных данных возьмем дифференциальные уравнения (1).

Эйлеров этап. Пренебрегаем всеми эффектами, связанными с движением жидкости – потока массы через границы ячеек нет. На этом этапе расчета изменяются лишь величины, относящиеся к ячейке в целом, а жидкость предполагается моментально заторможенной.

Двумерная постановка задачи без учета трения и теплообмена с окружающей средой, с учетом допущений этапа Эйлера в МКЧ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \rho E}{\partial x} = 0;$$

дифференциальное уравнение полной энергии преобразуется к виду [1]:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{\partial (P \cdot u)}{\partial x} - \frac{\partial (P \cdot v)}{\partial y} \quad [1]$$

Выразив величину полной энергии:

$$E = e + \frac{w^2}{2} \text{ и } w^2 = u^2 + v^2, \quad E = e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2},$$

и с учетом уравнений

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} = P \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho v}{\partial y} = P \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial P}{\partial y},$$

получим уравнение в виде:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t} \right) = -P \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Так как уравнение количества движения для этапа Эйлера имеет вид [1]:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{и} \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y},$$

преобразуем уравнение энергии к виду

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} - u \frac{\partial P}{\partial x} - v \frac{\partial P}{\partial y} = -P \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial P}{\partial y},$$

и сократив слагаемые с обеих сторон получим:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = -P \frac{\partial u}{\partial x} - P \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Внутренняя энергия идеального совершенного газа выражается в виде:

$$e = c_v T = \frac{p}{\rho(k-1)}.$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, получим следующее соотношение для давления:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -(k-1)P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

С помощью последнего соотношения можно определить предварительные

з

$$P_{i+0.5, jn+1} = P_{i+1, jn} - P_{i, jn} 2^{1-k-1} \{ U_{i+1, jn} - U_{i-1, jn} \Delta t \Delta x + V_{i, j+1n} - V_{i, j-1n} \Delta t \Delta y \}$$

а

$$P_{i, j+0.5n+1} = P_{i, j+1n} - P_{i, jn} 2^{1-k-1} \{ U_{i+1, jn} - U_{i-1, jn} \Delta t \Delta x + V_{i, j+1n} - V_{i, j-1n} \Delta t \Delta y \}$$

е

н

и

д

я

е

с

предлагается использовать для определения промежуточных величин скорости в ячейках на этапе Эйлера:

$$\widetilde{U}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{1}{\rho_{i,j}^n} \left(\widetilde{P}_{i+0.5,j}^{n+1} - \widetilde{P}_{i-0.5,j}^{n+1} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

$$\widetilde{V}_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n - \frac{1}{\rho_{i,j}^n} \left(\widetilde{P}_{i,j+0.5}^{n+1} - \widetilde{P}_{i,j-0.5}^{n+1} \right) \frac{\Delta t}{\Delta y}.$$

Здесь величины с дробными индексами относятся к границам ячеек:

$$\widetilde{U}_{i+0.5,jn+1} = U_{i,jn} + U_{i+1,jn} - 2\rho_{i,jn} + \rho_{i+1,jn} (P_{i+1,jn} - P_{i,jn}) \Delta t \Delta x,$$

$$\widetilde{V}_{i+0.5,jn+1} = V_{i,jn} + V_{i,j+1n} - 2\rho_{i,jn} + \rho_{i,j+1n} (P_{i,j+1n} - P_{i,jn}) \Delta t \Delta y.$$

Теперь можно определить промежуточное значение полной энергии с использованием формулы

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_{i,j}^{n+1} = E_{i,j}^n - & \frac{\widetilde{P}_{i+0.5,j}^{n+1} \widetilde{U}_{i+0.5,j}^{n+1} - \widetilde{P}_{i-0.5,j}^{n+1} \widetilde{U}_{i-0.5,j}^{n+1}}{dx} \frac{dt}{\rho_{i,j}^n} \\ & - \frac{\widetilde{P}_{i+0.5,j}^{n+1} \widetilde{V}_{i+0.5,j}^{n+1} - \widetilde{P}_{i,j-0.5}^{n+1} \widetilde{V}_{i,j-0.5}^{n+1}}{dy} \frac{dt}{\rho_{i,j}^n}. \end{aligned}$$

Лагранжевый этап. На данном этапе мы находим потоки массы ΔM_n через границы ячеек. При этом полагаем, что вся масса переносится только за счет нормальной к границе составляющей скорости.

$$\Delta M_{i+0.5,j}^n = \begin{cases} \rho_{i,j}^n \frac{\widetilde{U}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{U}_{i+1,j}^{n+1}}{2} \Delta t \Delta y, & \text{если } \widetilde{U}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{U}_{i+1,j}^{n+1} > 0 \\ \rho_{i+1,j}^n \frac{\widetilde{U}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{U}_{i+1,j}^{n+1}}{2} \Delta t \Delta y, & \text{если } \widetilde{U}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{U}_{i+1,j}^{n+1} < 0, \end{cases}$$

$$\Delta M_{i,j+0.5}^n = \begin{cases} \rho_{i,j}^n \frac{\widetilde{V}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{V}_{i,j+1}^{n+1}}{2} \Delta t \Delta x, & \text{если } \widetilde{V}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{V}_{i,j+1}^{n+1} > 0 \\ \rho_{i+1,j}^n \frac{\widetilde{V}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{V}_{i,j+1}^{n+1}}{2} \Delta t \Delta x, & \text{если } \widetilde{V}_{i,j}^{n+1} + \widetilde{V}_{i,j+1}^{n+1} < 0. \end{cases}$$

I

Заключительный этап. На этом этапе мы находим окончательные поля

эйлеровых параметров потока. Уравнения представляют законы сохранения массы M , импульса P и полной энергии E , записанные для данной ячейки в разностной форме:

$$M_{n+1} = M_n + \Delta M_{грn},$$

$$E_{n+1} = E_n + \Delta E_{грn},$$

$$P_{n+1} = P_n + \Delta P_{грn}.$$

Эти уравнения показывают, что внутри поля течения нет источников и стоков M и E , изменение происходит только за счет взаимодействия на внешней границе области течения.

Окончательные значения параметров потока на новом временном слое вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}^{n+1} &= \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-0.5,j}^n - \Delta M_{i+0.5,j}^n + \Delta M_{i,j-0.5}^n - \Delta M_{i,j+0.5}^n}{\Delta x \Delta y}, \\ & X_{i,j}^{n+1} \\ &= (D_{i,j}(1) \widetilde{X}_{i-1,j}^n \Delta M_{i-0.5,j}^n + D_{i,j}(2) \widetilde{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i,j-0.5}^n \\ &- D_{i,j}(3) \widetilde{X}_{i+1,j}^n \Delta M_{i+0.5,j}^n - D_{i,j}(4) \widetilde{X}_{i,j+1}^n \Delta M_{i,j+0.5}^n \\ &+ \widetilde{X}_{i,j}^n \{ \rho_{i,j}^n \Delta x \Delta y + [1 - D_{i,j}(1)] \Delta M_{i-0.5,j}^n \\ &+ [1 - D_{i,j}(2)] \Delta M_{i,j-0.5}^n - [1 - D_{i,j}(3)] \Delta M_{i+0.5,j}^n - [1 - D_{i,j}(4)] \Delta M_{i,j+0.5}^n \}) \\ &/ (\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y). \end{aligned}$$

Г

Д

е

$D_{i,j}$ – функция определяющая направление потоков. Все стороны ячейки i,j

$$D_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если жидкость втекает в ячейку через сторону } K \\ 0, & \text{если жидкость вытекает из ячейки через сторону } K, \end{cases}$$

Ы

з

а

то есть они будут выглядеть следующим образом:

$$D_{i,j} = \begin{cases} D(1) = 1, \text{ если } \overline{U_{i,j}^{n+1}} + \overline{U_{i+1,j}^{n+1}} > 0 \\ D(3) = 0, \text{ если } \overline{U_{i,j}^{n+1}} + \overline{U_{i+1,j}^{n+1}} > 0 \\ D(2) = 1, \text{ если } \overline{V_{i,j}^{n+1}} + \overline{V_{i,j+1}^{n+1}} > 0 \\ D(4) = 0, \text{ если } \overline{V_{i,j}^{n+1}} + \overline{V_{i,j+1}^{n+1}} > 0 \end{cases}$$

Давление находится из уравнений состояния.

$$P_{i,jn+1} = k-1 \rho_{i,jn+1} (E_{i,jn+1} - U_{i,jn+1} + V_{i,jn+1}^2).$$

4. ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА

Тестирование численного алгоритма ударной волны проводилось на решении задач о распространении слабой и сильной ударной волны в одноатомном газе и сравнении результатов с [15].

Рассмотрим задачу о сильной ударной волне. В момент $t = 0$ параметры потока: $k = 5/3$, $P_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $E_0 = 0$, $U_0 = 0$. При $t > 0$ на левой границе задана скорость $U_0(t) = 1$, на правой границе $U = 0$. Величины за фронтом ударной волны задаются: $\rho = 4$, $E = 0.5$, $P = 4/3$, $W = 4/3$. W – скорость фронта.

На рис.3 приведен профиль давления P в момент времени $t = 0.375$, ударная волна находится в точке с координатой $x_0 = 0.5$. Прерывистая линия – расчёт нашей задачи, маркеры – расчёт по разностной схеме, рассмотренной в книге. Сетка равномерная с числом ячеек $N = 100$ и числом Куранта равным 0,5.

Теперь рассмотрим задачу о слабой ударной волне. Параметры в момент времени $t = 0$: $k = 5/3$, $P_0 = 1$, $\rho_0 = 1$, $E_0 = 1.5$, $U_0 = 0$. При $t > 0$ на левой границе задана скорость $U_0(t) = 0.5$, на правой границе $U = 0$. Величины за фронтом ударной волны: $E = 1.925$, $P = 1.833333$, $W = 1.666666$.

Профиль давления P приведен на рис.4 в момент времени $t = 0.3$. Как и в задаче рассмотренной выше, прерывистая линия – расчёт нашей задачи, маркеры – расчёт по разностной схеме, рассмотренной в книге, а точнее метод Куропатенко. Равномерная сетка с числом ячеек $N = 100$, число Куранта равно 0,5.

На основании полученных результатов можно сделать вывод о применимости метода крупных частиц, для решения задач о взаимодействии ударной волны с «плоской ступенькой» при сверхзвуковой скорости.

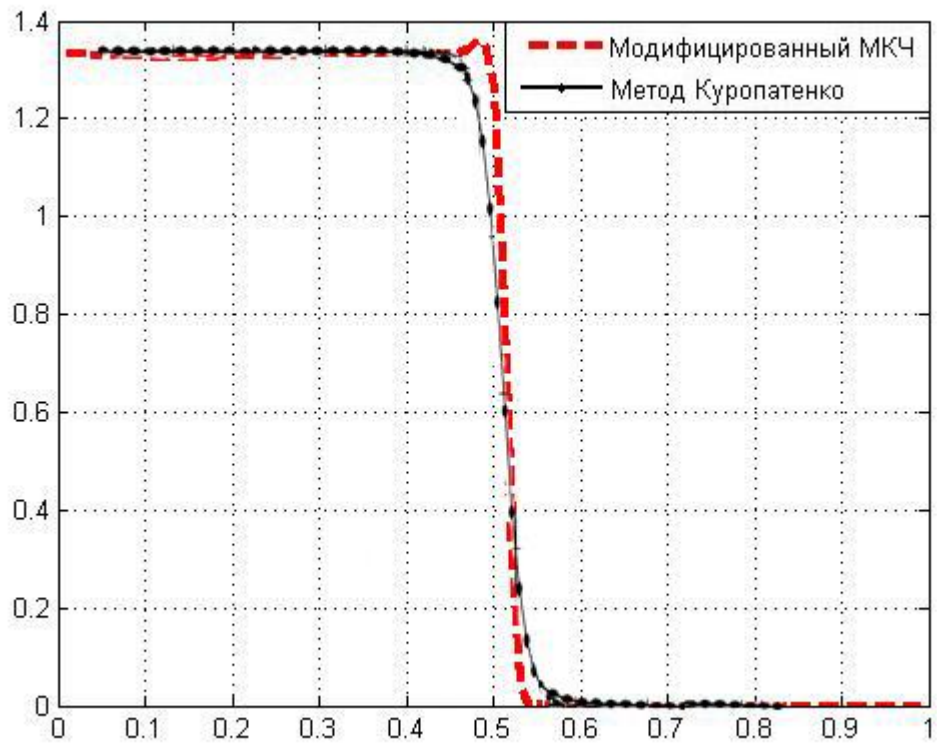


Рис.3 Профиль давления P в момент времени $t = 0.375$

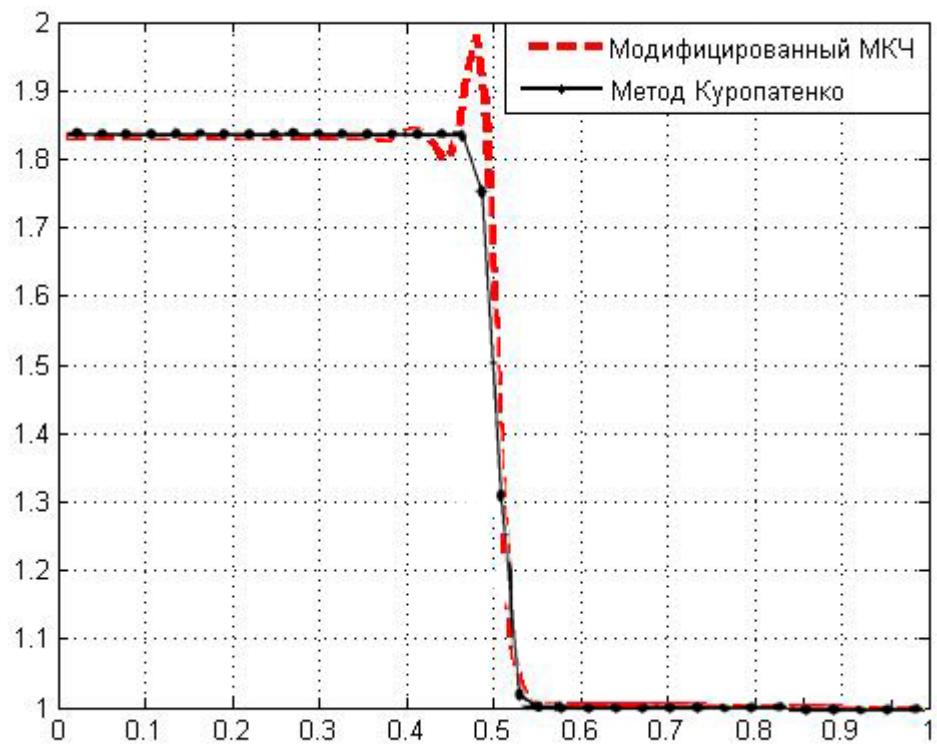


Рис.4 Профиль давления P в момент времени $t = 0.3$

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной работе были проведены расчёты для обтекания плоской ступени сверхзвуковым потоком. В качестве начальных условий были взяты следующие значения газодинамических параметров:

$P_1 = 20 \cdot 10^5$ Па – давление на фронте волны;

$P_0 = 10^5$ Па – давление перед фронтом;

$k = 1,4$ – показатель адиабаты;

$\rho_0 = 1,21$ кг/м³ – плотность перед фронтом волны;

$u_0 = 0$ м/с – скорость перед фронтом;

$E_0 = \frac{P_0}{(k-1) \cdot \rho_0} + \frac{u_0^2}{2}$ – энергия перед фронтом волны;

$E_1 = \frac{P_1}{(k-1) \cdot \rho_1} + \frac{u_1^2}{2}$ – энергия на фронте волны.

Длина волны 0,45 м. Препятствие в виде плоской ступеньки расположено на расстоянии 0,95 м от начала координат.

В результате численного моделирования были получены графики распределения давления (рис. 7,8) и графики распределения плотности (рис. 9,10) в моменты времени $t = 1,5$ мс; $t = 2,02$ мс.

Рассматриваемая нами задача имеет довольно сложную картину течения, так как на теле имеется угловая точка, где происходит резкий поворот потока.

При сверхзвуковых скоростях набегающего потока, когда в точке излома достигается местная скорость звука (звуковой излом), зона разворота потока вокруг угловой точки будет находиться в области трансзвукового течения, причем сам разворот будет сопровождаться резким изменением скорости, как по величине, так и по направлению. Так же отметим, что в сверхзвуковой области около боковой поверхности тела может возникнуть вторичный скачок уплотнения, существенно влияющий на всю картину обтекания.

Скачки уплотнения, взаимодействуя с пограничными слоями, могут привести к отрыву пограничного слоя, то есть может образоваться срыв

потока. Это происходит при сверхзвуковом обтекании тупого угла, после поворота возле вершины угла поток отрывается и следует не по стенке, образуется область вакуума, то есть среда вблизи обтекаемого тела перестает двигаться вдоль его поверхности и отходит от нее. Срыв потока может образоваться и при других условиях: например, неблагоприятном градиенте давления. В результате образуется область оторвавшегося течения или зона отрыва. В аэродинамике это проявляется на маневренности, управляемости и аэродинамической эффективности транспортного средства.

Была построена картина изолиний, показывающих распределение числа Маха (рис.6) в потоке, которая сравнивается с результатами, полученными в работе [9]. По представленным ниже графикам можно сказать, что качественная картина обтекания плоской ступени совпадает.

Так же, в работе приводятся графики числа Маха (рис. 11,12) в моменты времени $t = 1,5 \text{ мс}$; $t = 2,02 \text{ мс}$.

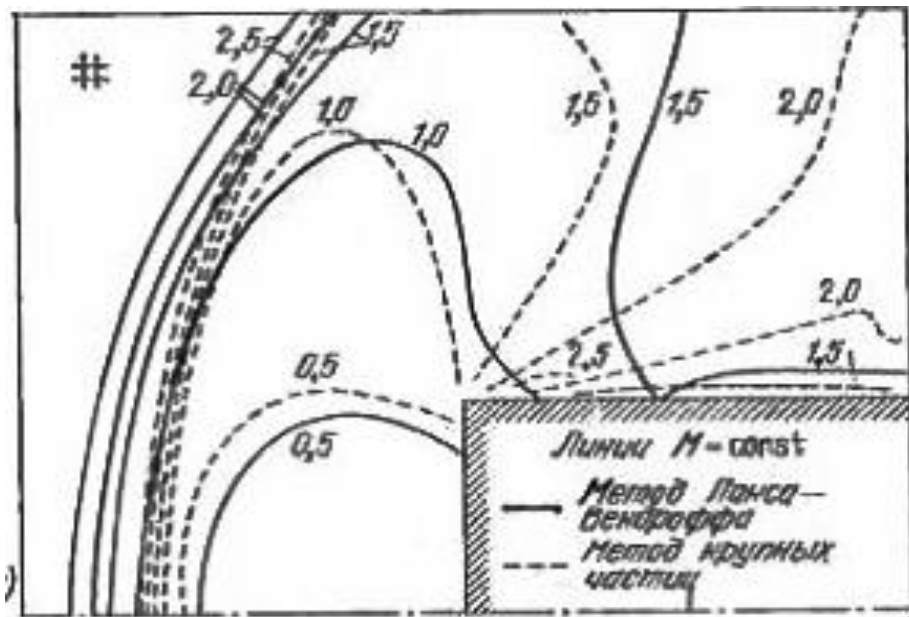


Рис.5 Результаты расчетов в работе [9]

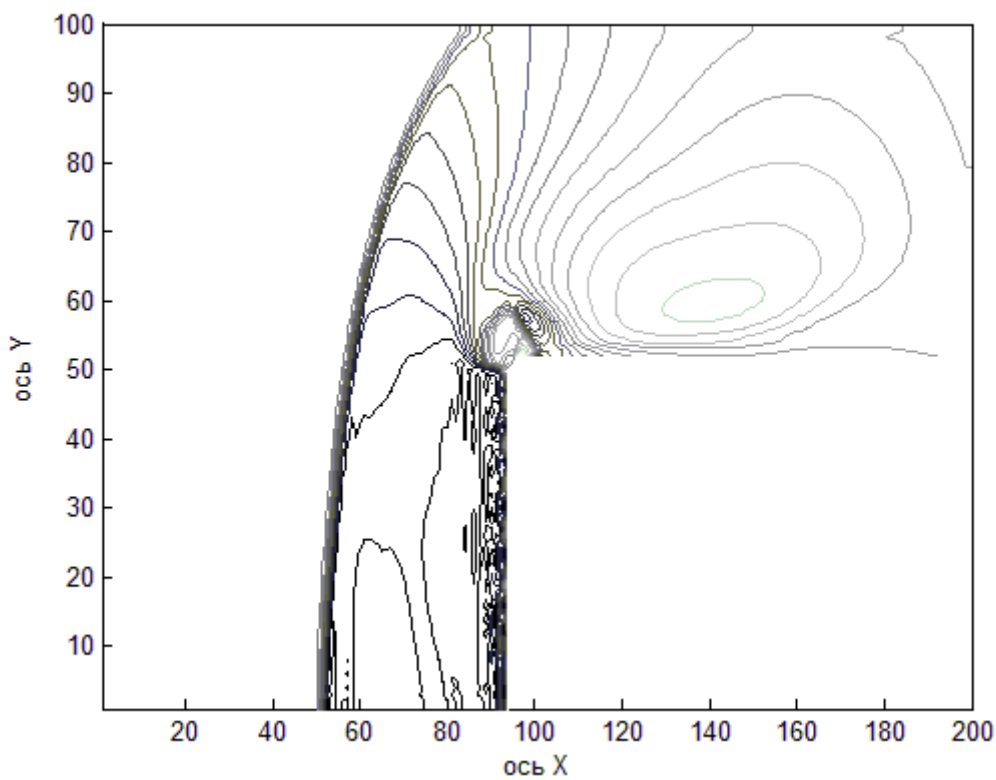


Рис.6 Результаты расчетов нашей задачи

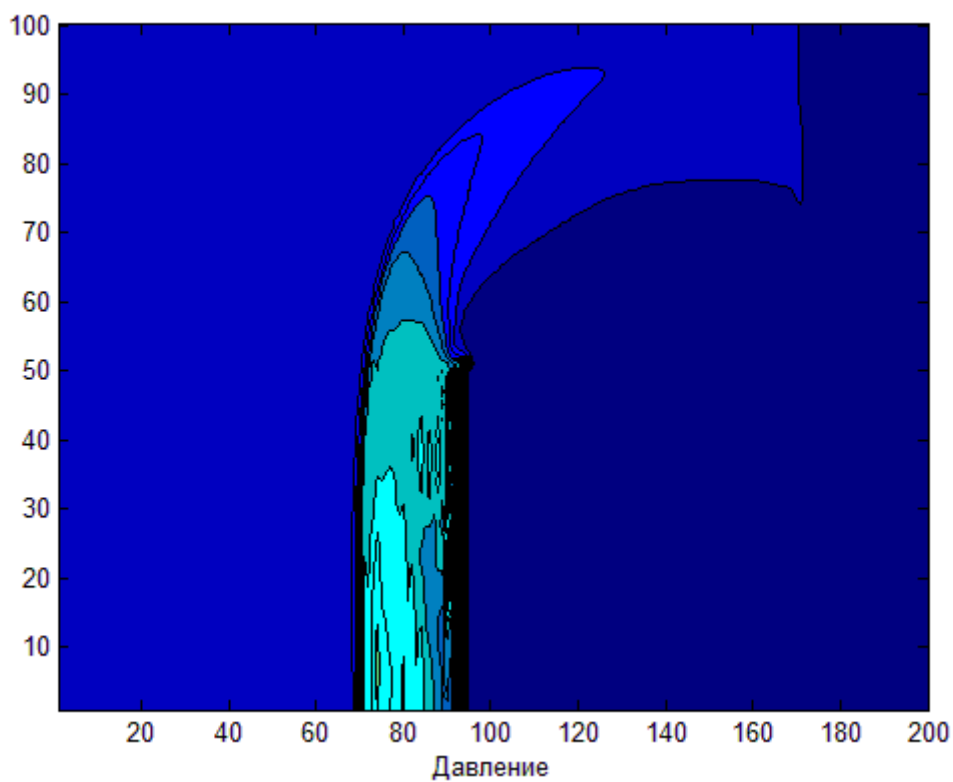


Рис.7 График изолиний давления $t = 1,5$ мс.

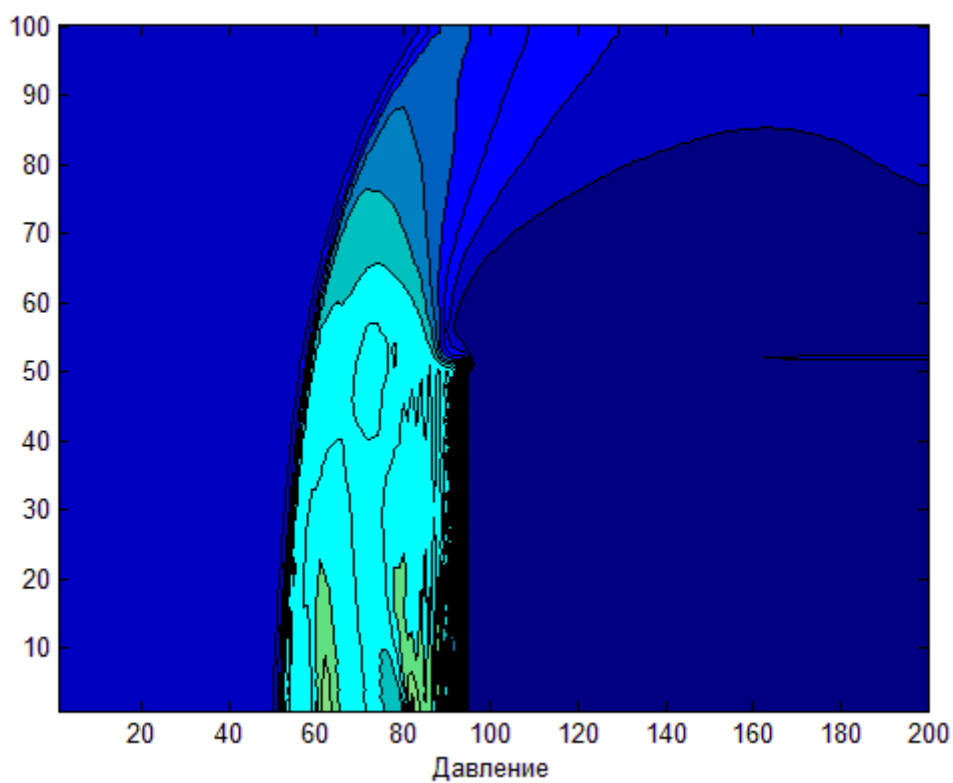


Рис.8 График изолиний давления $t = 2,02$ мс.

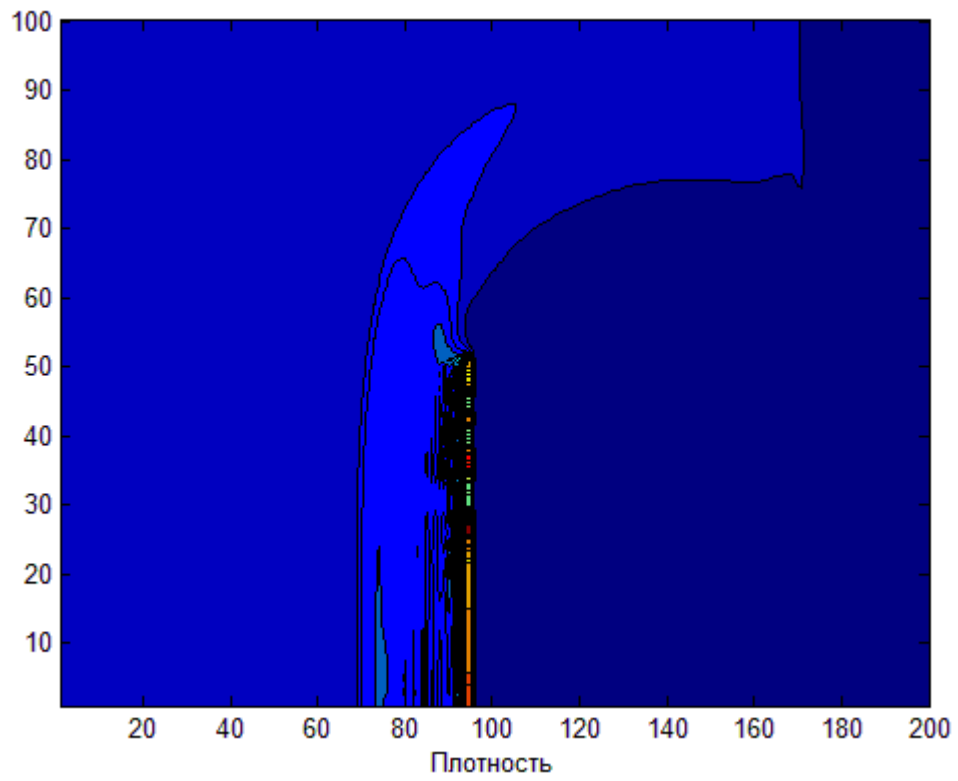


Рис.9 График изолиний плотности $t = 1,5$ мс.

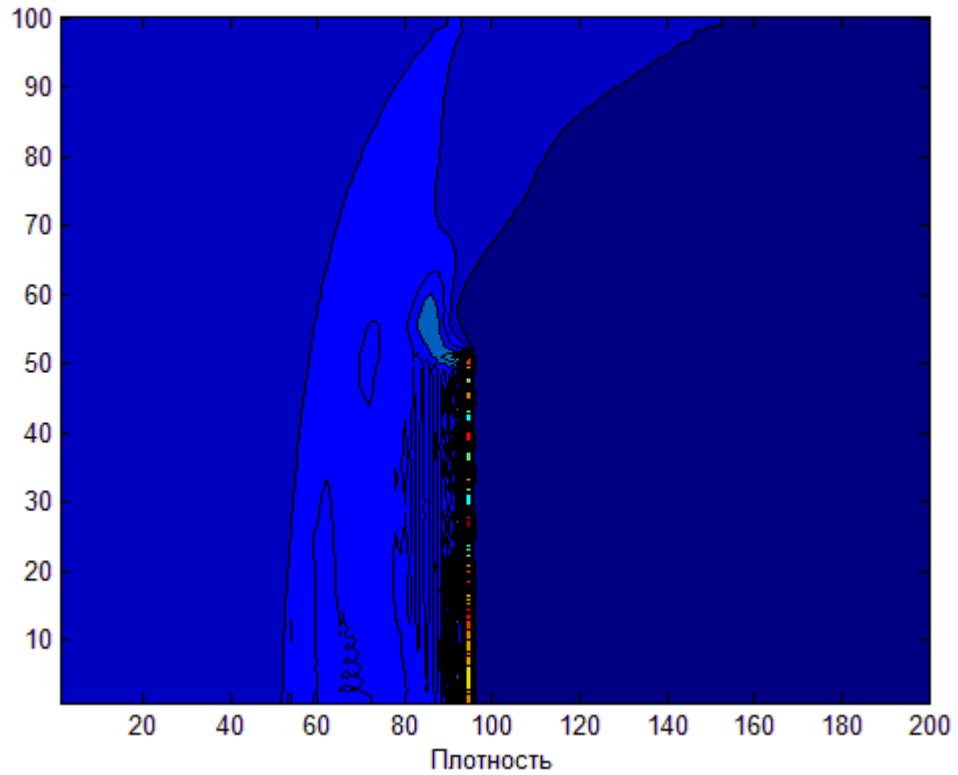


Рис.10 График изолиний плотности $t = 2,02$ мс.

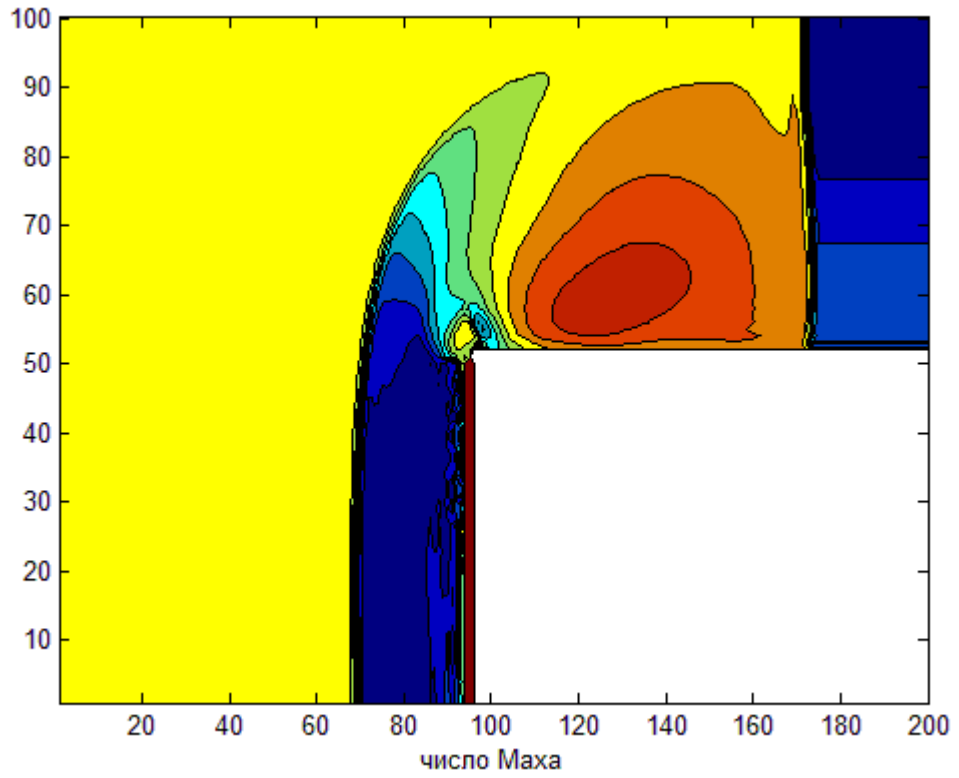


Рис.11 Графики числа Маха $t = 1,5$ мс.

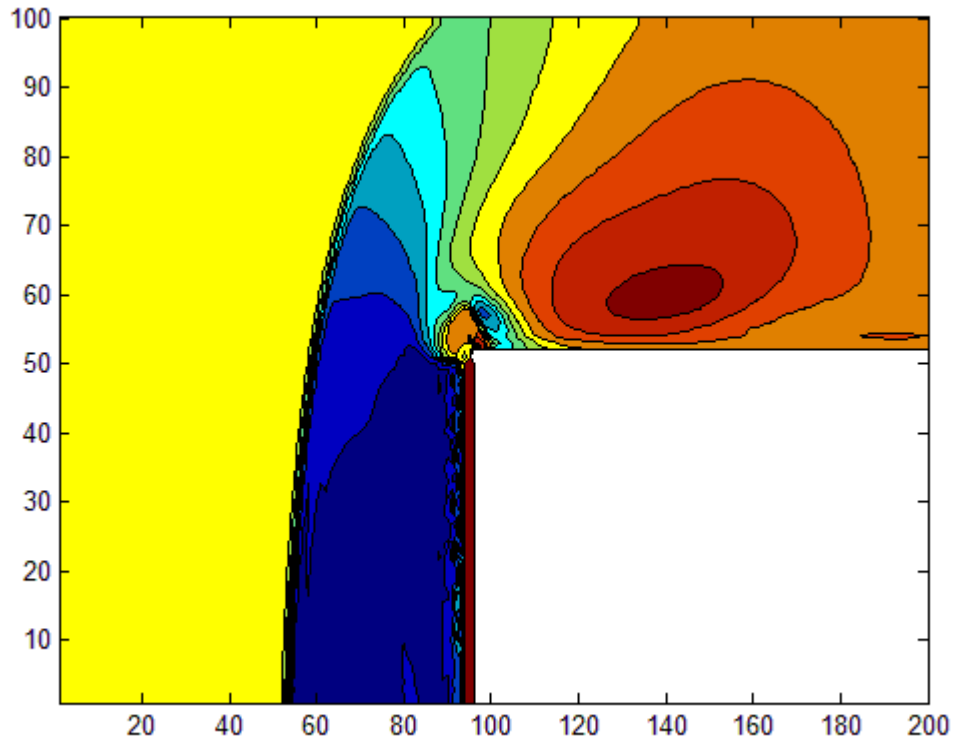


Рис.12 Графики числа Маха $t = 2,02$ мс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследовано взаимодействие плоской ударной волны с препятствием в виде плоской ступеньки. Построена математическая модель, описывающая поставленные задачи. Разработан численный алгоритм, реализующий данную математическую модель, реализован в пакете MatLab. Полученные результаты качественно совпадают с результатами, представленными в литературе. Поставленные в работе цели выполнены.