

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра прикладной математики и программирования
Направление подготовки Прикладная математика и информатика

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, д.т.н., доцент,
заведующий кафедры ТОТС
_____/ Н.Машрабов
« ____ » _____ 2018 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н.,
доцент
_____/ А.А.Замышляева
« ____ » _____ 2018 г.

Температурные поля при переменных
теплофизических параметрах

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–01.04.02.2018.180.ПЗ ВКР

Руководитель работы, доцент
кафедры ПМиП, к.ф.-м.н.

_____/ А.В. Геренштейн
« ____ » _____ 2018 г.

Автор работы

Студент группы ЕТ-222

_____/ Д.Д. Гиззатов
« ____ » _____ 2018 г.

Нормоконтролер, доцент
кафедры ПМиП, к.э.н.

_____/ Д.А. Дрозин
« ____ » _____ 2018 г.

АННОТАЦИЯ

Гиззатов Д.Д. Температурные поля при переменных теплофизических параметрах.– Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-222, 70 с., 8 ил., 9 табл., библиогр. список – 48 наим.

В работе рассмотрена третья смешанная задача для одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности. Проведен обзор существующих методов численного решения данной задачи, отмечены ограничения на их применение на практике. Показано, как с помощью несложной замены неизвестной функции упростить вид исходного уравнения. Исходя из упрощенного вида уравнения, построена и программно реализованы четыре явные разностная схема решения поставленной задачи. На примере конкретной тестовой задачи проведены численные эксперименты для получения оценок точности разработанных алгоритмов и их сравнения с традиционными методами решения поставленной задачи.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 6 |
| 1. Методы решения квазилинейного уравнения теплопроводности | 8 |
| 1.1. О некоторых сложностях решения квазилинейного уравнения теплопроводности | 8 |
| 1.2. Обзор методов решения квазилинейного уравнения теплопроводности | 9 |
| 1.3. Выводы по разделу | 12 |
| 2. Постановка задачи | 14 |
| 3. Теоретический раздел..... | 16 |
| 3.1. Распределение тепла в пространстве | 16 |
| 3.2. Постановка краевых задач | 18 |
| 3.3. Разностные схемы | 20 |
| 3.4. Устойчивая явная схема для уравнения теплопроводности..... | 26 |
| 3.5. Приведение задачи к безразмерному виду | 50 |
| 3.6. Выводы по разделу | 53 |
| 4. Оценивание точности разработанных алгоритмов..... | 54 |
| 4.1. Описание способа оценивания точности..... | 54 |
| 4.2. Результаты сравнительных численных расчетов | 56 |
| 4.3. Поведение схем в случае неустойчивости явной схемы..... | 62 |
| 4.4. Машинное время счета для построенных схем | 63 |
| 4.5. Выводы по разделу | 64 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 66 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК | 68 |

ВВЕДЕНИЕ

Одним из актуальных направлений современной математической физики является изучение нелинейных математических моделей различных физико-химических явлений и процессов. Появление таких моделей обусловлено использованием в современной физике и технике воздействий на вещество электрических полей большой интенсивности, пучков частиц высокой энергии, мощного лазерного когерентного излучения, пучков частиц высокой энергии, мощного лазерного когерентного излучения, ударных волн высокой интенсивности, мощных тепловых потоков. Линейные математические модели являются лишь определенным приближением при описании различных процессов. Их можно использовать только в тех случаях, когда исследуемые физические величины в рассматриваемом процессе изменяются не в очень широком диапазоне значений.

Нелинейные модели позволяют описать процессы в более широком диапазоне изменения параметров. При нелинейности изменяют не только количественные характеристики процессов, но и качественную картину их протекания. В основе нелинейных моделей лежат нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, законченной теории и общих методов решения задач для которых в настоящее время не разработано.

Нелинейные параболические уравнения второго порядка служат основой многих математических моделей, используемых в физике, механике, биологии, химии и экологии. Например, квазилинейное уравнение теплопроводности

—

(1)

при определенных условиях описывает процессы электронной и ионной теплопроводности в плазме, адиабатической фильтрации газов и жидкостей в пористых средах, течения крови в мелких кровеносных сосудах, распространения выбросов отрицательной плавучести, диффузии нейтронов и альфа-частиц в реакторных материалах, химической кинетики и биологической активности.

Использование основных законов сохранения при математическом моделировании различных физических процессов нередко приводит к одним и тем же нелинейным уравнениям параболического типа. Среди уравнений указанного типа особенно часто встречаются квазилинейное уравнение теплопроводности (1). Его универсальный характер дает основание утверждать, что изучение краевых задач для нелинейного уравнения теплопроводности остается до настоящего времени актуальной темой исследования. Несмотря на многочисленные работы по изучению процессов нелинейной теплопроводности, до сих пор не получены точные решения целого ряда краевых задач, описываемых нелинейным уравнением теплопроводности. Поэтому численные методы решения подобных задач представляют особый интерес.

В работе рассматривается квазилинейное одномерное уравнение теплопроводности (1) в отсутствие источников тепла в среде, что означает , и в предложении, что теплоемкость и теплопроводность являются непрерывными функциями температуры:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (2)$$

Целью дипломной работы является построение явной устойчивой разностной схемы для решения смешанной задачи для уравнения вида (2). Выбор смешанной задачи обусловлено тем, что практически интересные постановки задач математической физики содержат условия на границе (краевые условия) именно третьего рода.

Научная новизна работы состоит в построении явной абсолютно устойчивой разностной схемы для решения третьей смешанной задачи для уравнения (2). Выбор третьей смешанной задачи для исследования обусловлен тем, что практически интересные постановки задач математической физики содержат условия на границе (краевые условия) именно третьего рода.

Научная новизна работы состоит в построении явной абсолютно устойчивой разностной схемы для решения третьей смешанной задачи для уравнения (2). В [1] и [2] говорится о нецелесообразности использования явных схем для решения подобных задач. Условия устойчивости:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

накладывает сильные ограничения на шаг по времени , поэтому авторами [1] и [2] предлагается использовать для расчета безусловно устойчивые неявные схемы.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования предложенной схемы для расчета распределения температуры в тонком однородном стержне при наличии существенной зависимости теплоемкости и теплопроводности среды от температуры, а также в возможности обобщения предложенной схемы на ее применения к целому ряду задач, о которых упоминалось ранее.

1. Методы решения квазилинейного уравнения теплопроводности

1.1. О некоторых сложностях решения квазилинейного уравнения теплопроводности

Решить большинство обыкновенных дифференциальных уравнений можно, используя лишь численные методы. Принципиально различных постановок задач довольно немного: в основном это задача Коши, краевая задача для линейных уравнений, краевая задача для нелинейных уравнений.

В настоящее время разработка методов и алгоритмов решения задачи Коши продвинулась настолько, что зачастую исследователь, имеющее дело с этой задачей, не занимается выбором метода решения, а просто обращается к стандартной программе.

В случае уравнений с частными производными число принципиально различных постановок задач существенно больше. В курсе уравнений с частными производными обычно рассматривается незначительная часть таких постановок, главным образом связанных с линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. При этом существует очень малое количество задач, решаемых в явном виде. Многообразие постановок в теории уравнений с частными производными связано с многообразием явлений окружающего нас мира [3].

Большое количество различных постановок задач, связанных с решением уравнений в частных производных, привело к тому, что теория численных методов в этом направлении дробится на большое количество направлений. Использование численных методов с применением ЭВМ сильно расширило возможности в исследовании подобных задач. Например, разработанные за последние пятьдесят лет алгоритмы дают возможность решать с приемлемой затратой машинного времени подавляющее большинство краевых задач, связанных с решением одно- и многомерных уравнений параболического типа с переменными коэффициентами, в частности с коэффициентами, нелинейно зависящими от решения.

Конечно, здесь иначе, чем в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, обстоит дело с обоснованием сходимости численных методов и оценкой погрешности. Для широких классов типовых задач такие исследования проведены. Однако для многих важных классов прикладных задач, предъявляемых математикам для решения, не только не доказан, но часто остается неясным сам факт существования решения. При таком состоянии вопроса о существовании решения в настоящее время трудно ожидать получения строгих оценок погрешности и теорем сходимости сеточных методов при достаточно общих предположениях. Тем не менее, часто пользуясь полуэмпирическими соображениями, аналогиями по сравнению со случаем линейных уравнений и численными экспериментами на задачах с известным точным решением, математики создают численные методы решения и для таких задач. При этом результаты и анализ численных расчетов наравне с

экспериментом оказывают существенное влияние на развитие соответствующих разделов теории уравнений с частными производными [3].

Несмотря на отсутствие строгих обоснований чисто математической (в частности, алгоритмической) стороны вопроса, математикам занимающимся решением подобных прикладных задач, часто приходится брать на себя ответственность за достоверность получаемых численных результатов, включая правильность математической постановки задачи.

Конечно, все сказанное не уменьшает роли чисто теоретических исследований. Их результаты, в частности теоремы существования, дают уверенность в правильности постановки, подсказывают информацию о качественных свойствах решения, что крайне важно при выборе алгоритма. Наличие известных частных решений, например, в задачах газовой динамики, позволяет производить проверку точности предлагаемых методов.

1.2. Обзор методов решения квазилинейного уравнения теплопроводности

Наиболее общее квазилинейное уравнение теплопроводности, как отмечалось ранее, имеет вид

$$\text{---} \tag{1.1}$$

- где — теплоемкость единицы объема;
 — коэффициент теплопроводности;
 — функция плотности тепловых источников.

1.2.1. Автомодельные решения

В [1] рассмотрено одномерное уравнение (1.1), в котором коэффициент теплопроводности зависит от температуры по степенному закону, а теплоемкость с целью упрощения предлагается постоянной и равной 1:

$$\text{---} \tag{1.2}$$

Решение уравнения (1.2) предлагается искать в виде бегущей волны

При подстановке такого решения в уравнение (1.2) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение

Однократное интегрирование этого уравнения дает соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C \quad (1.3)$$

Если функция обращается в ноль хотя бы в одной точке, то константа в правой части (1.3) равна нулю и соотношение (1.3) нетрудно проинтегрировать еще раз:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

При $C=0$ полагается равным нулю, что удовлетворяет уравнению (1.2). Таким образом, автомодельное решение уравнения (1.2) выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C \quad (1.4)$$

Чтобы это решение могло существовать, начальные и граничные условия должны быть с ним согласованы. Например, если уравнение (1.2) рассматривается при $x=0$ на плоскости $y=0$, то следует задать условия

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C \quad (1.5)$$

Автомодельные решения довольно часто удается найти для квазилинейных уравнений или систем уравнений, коэффициенты которых зависят от переменных x и y по степенному закону. Для построения решения надо «угадать» подходящую комбинацию независимых переменных и описанным выше приемом свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению. Выразить решение этого уравнения через элементарные функции, подобно (1.4), удастся далеко не всегда, но найти это решение численным интегрированием проще, чем решить исходное уравнение в частных производных.

Если уравнение в частных производных описывает сложный физический процесс, то автомодельные решения дают отдельные режимы протекания этого процесса и позволяют исследовать многие его особенности [4].

1.2.2. Использование неявных разностных схем

Другой подход к решению квазилинейных уравнений состоит в применении чисто неявных разностных схем. В [1] и [2] рассматривается первая смешанная задача для простейшего квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \tag{1.6}$$

где . Для его решения предлагается использовать два варианта схем:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \tag{1.7}$$

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \tag{1.8}$$

где

$$\text{---}$$

Обе схемы абсолютно устойчивы, имеют погрешность аппроксимации (доказательство см. в [5]).

Схема (1.7) линейна относительно значения функции на слое , и значения функции находятся по значениям функции на слое , например, методом прогонки (матрица линейной системы относительно значений получается трехдиагональной с преобладанием главной диагонали). Поскольку схема абсолютно устойчива, шаг выбирается только из соображений точности.

Схема (1.8) нелинейна относительно значения функции и для ее решения используется метод итераций. Итерационный процесс строится следующим образом:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \tag{1.9}$$

Относительно разностная схема оказывается линейной. В качестве начальной итерации берется функция предыдущего шага по времени: . Итерационный процесс для большинства встречающихся на практике коэффициентов и сходится. При счете по итерационной схеме (1.8), (1.9) задают либо число итераций и требуют выполнение условия

Пример расходимости итерационного процесса для схемы (1.8) приведен в [6]. То есть фактически схема (1.8) не является абсолютно устойчивой. Однако в [1] отмечено, что даже в случае расходимости итераций полезно сделать две итерации для повышения точности схемы. Заметим, что при одной итерации (1.9) схема (1.8) – метод Ньютона [1]. С учетом того, что , после подстановки в уравнения (1.8) и линеаризации получаются довольно громоздкие уравнения, линейные и трехточечные относительно :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{---} & & \text{---} & & \\
 & & & & & & \\
 \text{---} & & & \text{---} & & \text{---} & \\
 & & & & & & \\
 & & \text{---} & & \text{---} & &
 \end{array} \tag{1.10}$$

где --- . На каждой итерации уравнения (1.10) решают прогонкой. Доказано, что вблизи корня сходимость итерационного метода квадратичная.

Достоинство рассмотренных методов решения квазилинейного уравнения теплопроводности с применением неявных схем состоит в их абсолютной устойчивости, что позволяет выбирать шаг по времени, исходя только из соображений точности решения и времени его поиска, а решение линейных систем с трехдиагональными матрицами прогонкой сегодня даже не требует реализации алгоритма прогонки, т.к. он уже реализован во многих математических пакетах. Однако такие хорошие в одномерном случае схемы с трудом обобщаются на многомерный случай (см., например, продольно-поперечную и локально-одномерную схемы в [1]).

Этого недостатка лишены явные схемы. Более того, при переходе в пространство большей размерности вид рабочей формулы для расчета остается тем же. Построение безусловно устойчивой явной схемы для решения квазилинейного одномерного уравнения теплопроводности и посвящена данная работа.

1.3. Выводы по разделу

В данном разделе был выполнен обзор литературы по интересующему нас вопросу, рассмотрены существующие методы решения квазилинейного уравнения теплопроводности. На основании проведенного анализа теоретического материала можно сделать следующие заключения:

- для многих важных прикладных задач, требующих теоретического исследования и решения, не только не доказан, но часто остается неявным сам факт существования решения;
- следствием нерешенности вопроса о существовании решения для большинства краевых задач является проблематичным получение строгих оценок погрешности и теорем сходимости сеточных методов;
- для численного решения квазилинейного уравнения теплопроводности можно использовать методы разностных аппроксимаций производных;
- наиболее часто на практике применяются разностные методы с использованием чисто неявных разностных схем; иногда исходное разностное уравнение при помощи подходящей замены переменных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое решается аналитически, если это удастся, либо численно;
- использование неявных разностных схем для решения квазилинейного уравнения теплопроводности затруднительно при решении многомерных краевых задач.

2. Постановка задачи

В рамках выполнения данной научно-исследовательской работы необходимо:

1. Построить явную устойчивую схему для численного решения следующей третьей смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ & \text{---} \\ & \text{---} \end{aligned} \tag{2.1}$$

где θ – неизвестная функция (температура стержня), подлежащая отысканию, t ;

- L – длина стержня;
- τ – конечный момент времени;
- c – известная объемная теплоемкость материала стержня;
- λ – известный коэффициент теплопроводности;
- θ_0 – известная непрерывная функция, задающая начальное распределение температуры стержня;
- α_1 – коэффициент теплоотдачи на левом конце стержня;
- $\theta_{\text{ср}1}$ – температура внешней среды на левом конце стержня;
- Q_1 – мощность потока тепла на левом конце стержня;
- α_2 – коэффициент теплоотдачи на правом конце стержня;
- $\theta_{\text{ср}2}$ – температура внешней среды на правом конце стержня;
- Q_2 – мощность потока тепла на правом конце стержня.

Величины L , τ считаются постоянными, а функция θ_0 , α_1 , α_2 и $\theta_{\text{ср}1}$, $\theta_{\text{ср}2}$ – непрерывными функциями температуры, заданными на конечном множестве значений температуры.

Численные значения всех величин предполагаются заданными в системе СИ.

Построение схемы предполагает решение следующих задач:

- упрощение вида исходного уравнения с учетом того, что коэффициент λ явно зависит от температуры;
- выбор сетки разбиения для множества, на котором определена функция θ_0 либо новая неизвестная функция;
- выбор разделенных разностей для аппроксимации частных производных, входящих в уравнение, получение разностного уравнения;
- сведение разностного уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно значения температуры на следующем временном слое;
- выбор способа задания нелинейных краевых условий, входящих в постановку задачи;

- обезразмеривание задачи;
- возможное использование схемы предиктор-корректор для повышения точности схемы.

2. Исследование свойства полученной схемы (порядок аппроксимации, устойчивость).

3. Разработать программу на языке программирования Matlab для численного решения поставленной задачи (2.1) с применением полученной схемы, линейного и нелинейного вариантов чисто неявной схемы.

4. Провести сравнение решения задачи, полученных при использовании указанных выше схем.

3. Теоретический раздел

3.1. Распределение тепла в пространстве

Процесс распределения тепла в пространстве может быть characterized температурой $u(x, y, z, t)$, являющейся функцией координат x, y, z и времени t .

Если температура непостоянна, то возникают тепловые потоки, направленные от точек с более высокой температурой к точкам с более низкой температурой. В этом состоит закон Фурье, аналитическая форма записи которого выглядит следующим образом:

$$(3.1)$$

где \mathbf{w} – вектор плотности теплового потока, λ – коэффициент теплопроводности.

В случае как изотропной, так и анизотропной среды λ является тензором, а вектор теплового потока \mathbf{w} – представляет собой произведение тензора λ на вектор $-\text{grad} u$. Далее будет рассматриваться изотропная среда, для которой

тензор λ имеет вид $\lambda \mathbf{I}$, λ – скаляр. Умножив этот тензор справа на вектор

$-\text{grad} u$, получим вектор \mathbf{w} . В силу этого для изотропной среды удобнее считать скалярной величиной.

На рисунке 3.1 изображена площадка $d\sigma$ в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$ с нормалью \mathbf{n} .

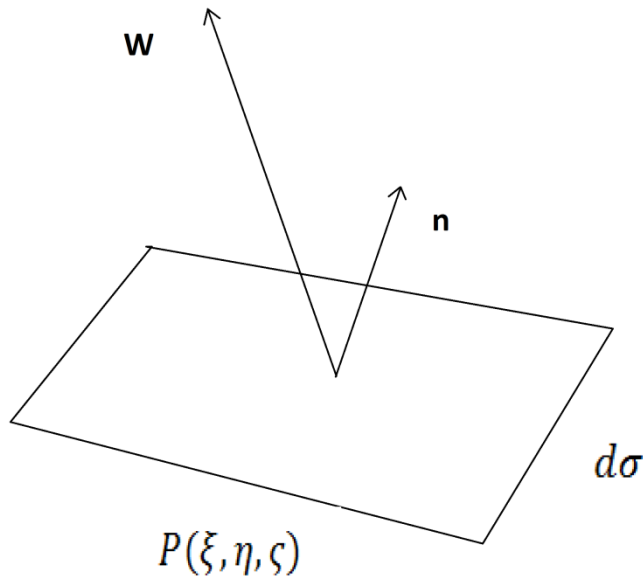


Рисунок 3.1 – Тепловой поток через элементарную площадку

Количество тепла, протекающего через $d\sigma$ в единицу времени, согласно закону Фурье, равно

Рассмотрим теперь некоторый объем V , ограниченный замкнутой поверхностью S . Уравнение теплового баланса для объема V за промежуток времени Δt запишется в следующем виде:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V q \, dV - \oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3.2)$$

где \mathbf{r} – точка интегрирования, dV – элемент объема, c – теплоемкость единицы объема, q – плотность тепловых источников (количество тепла, выделяющегося единицей объема в единицу времени). Будем предполагать, что q – непрерывная функция своих аргументов.

Пусть функция \mathbf{v} дважды непрерывно дифференцируема по x, y, z и один раз непрерывно дифференцируема по t в рассматриваемой области. В этом случае векторное поле \mathbf{v} является непрерывно дифференцируемым, и можно воспользоваться формулой Гаусса-Остроградского

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3.3)$$

Уравнение баланса преобразуется к виду

—

или же

—

В силу равенства интеграла нулю по любому объему V и для любого промежутка времени Δt , а так же непрерывности подынтегральной функции по теореме сохранения знака следует, что подынтегральная функция есть тождественный нуль:

—

Заменяя по формуле , получим дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\text{---} \quad (3.4)$$

В двумерном случае при отсутствии источников тепла получим двумерное уравнение теплопроводности

$$\text{---} \quad (3.5)$$

Применительно к задаче о распределении тепла в стержне будем предполагать, что стержень имеет конечную длину , боковая поверхность стержня теплоизолирована и, кроме того, стержень настолько тонок, что в любой момент времени температура всех точек данного поперечного сечения стержня одна и та же.

3.2. Постановка краевых задач

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия.

Начальное условие состоит в задании значения функции в начальный момент времени .

Граничные условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границах. Рассмотрим три основных типа граничных условий:

1. На конце стержня задана температура:

где – функция , заданная в некотором промежутке , причем есть промежуток времени, в течение которого изучается процесс.

2. На конце задан значение производной:

$$\text{---}$$

К этому условию приходят, если задана величина теплового потока , протекающего через торцевое сечение стержня,

$$\text{---}$$

откуда — , где – известная функция, выражающаяся через заданный поток по формуле

$$\text{---}$$

3. На конце задано линейное соотношение между производной и функцией:

—
Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой известна. Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, вытекающего через сечение

,

и

—
получаем математическую формулировку третьего граничного условия в виде:

—
где α — коэффициент теплоотдачи;

$t_{\text{ср}}$ — некоторая заданная функция (температура внешней среды).

Для конца стержня третье граничное условие имеет вид:

—
Граничные условия при $x=0$ и $x=l$ могут быть различных типов.

3.3. Разностные схемы

Задача математической физики помимо дифференциального уравнения включает краевые и начальные условия, которые обеспечивают выделение единственного решения из всей совокупности возможных решений. Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих основное дифференциальное уравнение и краевые и начальные условия, называют *разностной схемой*.

3.3.1. Сходимость и точность разностных схем

При решении некоторой задачи приближенным методом в конечном счете надо иметь предварительное суждение о том, с какой точностью можно приблизить при помощи этого метода точное решение задачи.

Пусть в области Ω с границей Γ требуется найти решение линейного дифференциального уравнения

$$(3.6)$$

удовлетворяющее дополнительным (краевым или начальным) условиям

$$(3.7)$$

где f и φ – заданные функции (входные данные задачи);

L – некоторый линейный дифференциальный оператор.

Предположим, что решение задачи (3.7)-(3.8) существует и единственно.

Область Ω непрерывного изменения аргумента заменяется дискретным множеством точек (узлов) Ω_h – сеткой.

Пусть \mathbf{h} – векторный параметр, характеризующий плотность распределения узлов, Ω_h – множество внутренних узлов сетки, Γ_h – множество граничных узлов.

Задаче (3.6)-(3.7) поставим в соответствии разностную задачу

$$(3.8)$$

где U_h и φ_h – известные сеточные функции. Здесь L_h и φ_h – линейные операторы, действующие на сеточные функции, заданные для $\Omega_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$. Решение задачи (3.8) есть сеточная функция, определяемая в узлах сетки Ω_h . Меняя \mathbf{h} , то есть выбирая различные сетки Ω_h , получаем множество решений U_h , зависящих от параметра \mathbf{h} . Таким образом, следует рассматривать семейство схем (3.3), соответствующих различным значениям \mathbf{h} .

Основной целью всякого приближенного метода является получение решения исходной (непрерывной) задачи с заданной точностью ϵ за конечное число действий. Чтобы выяснить принципиальную возможность приближения решения

задачи (3.6)-(3.7) решением задачи (3.8) с любой заданной точностью в зависимости от выбора шага, нужно иметь возможность сравнить. Это сравнение будем проводить в пространстве сеточных функций. Пусть - проекция на сетке, так что. Рассмотрим погрешность разностной схемы (3.8):

Подставив в (3.8), получим для задачу того же типа, что и (3.8):

$$(3.9)$$

где

называют погрешностью аппроксимации для схемы = на решении уравнения (3.6), а - погрешностью аппроксимации для условия на решении (3.6)-(3.7).

Для оценки погрешности схемы и погрешности аппроксимации и введем на множестве сеточных функций нормы, и соответственно.

Будем говорить, что решение разностной задачи (3.8) сходится к решению задачи (3.6)-(3.7) (схема (3.8) сходится), если при

Разностная схема (3.8) сходится со скоростью или имеет n -й порядок точности, $n > 0$, если

Говорят, что разностная схема (3.9) аппроксимирует задачу (3.6)-(3.7), если и при.

Разностная схема (3.8) обладает n -м порядком аппроксимации, если и.

3.3.2. Понятие корректности разностной задачи. Устойчивость

Применительно к задачам математической физики понятно говорить, что задача поставлена корректно, если выполнены два условия:

- 1) решение задачи существует и единственно при любых входных данных из некоторого класса,
- 2) решение задачи непрерывно зависит от входных данных.

Аналогично определяют понятие корректности разностной задачи. Пусть - решение, а - входные данные некоторой разностной задачи. Они зависят от параметра. Изменяя, получим последовательности решений и входных

данных U_n . Понятие корректности вводится для семейства разностных задач (схем) при $h \rightarrow 0$.

Говорят, что *разностная задача (схема) корректна*, если для всех h таких, что $h < h_0$:

1) решение U_n существует и единственно для всех входных данных U_{n-1} из некоторого семейства,

2) решение U_n непрерывно зависит от входных данных U_{n-1} , причем эта зависимость равномерна относительно h .

Второе условие означает, что

$$\|U_n - U_n^*\| \leq C \|U_{n-1} - U_{n-1}^*\| \quad (3.10)$$

где U_n^* - решение задачи с входными данными U_{n-1}^* .

Свойство непрерывной зависимости решения разностной задачи от входных данных, выраженное условием (3.10), называется устойчивостью схемы по входным данным или просто *устойчивостью*.

Пусть дана непрерывная задача (3.6)-(3.7). И пусть ее аппроксимирует разностная задача (3.8) напомним формально

Если оператор A_n линеен и разностная схема корректна, то U_n , в силу (3.10), будет иметь

$$\|U_n - U_n^*\| \leq C \|U_{n-1} - U_{n-1}^*\| \quad (3.11)$$

Если, кроме того, разностная задача (3.8) обладает n -м порядком аппроксимации, то, в силу (3.12), будем иметь

где константа C .

Таким образом, если схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу, то она сходится, причем скорость сходимости равна ее порядку аппроксимации.

3.3.3. Устойчивость явной и неявной разностных схем для линейного уравнения теплопроводности

Рассмотрим первую смешанную задачу линейной теплопроводности с однородными краевыми условиями:

$$\begin{cases} u_t - a u_{xx} = f(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (3.12)$$

Задача с неоднородными краевыми условиями:

— — —

может быть сведена к задаче с однородными краевыми условиями с помощью замены

где — новая неизвестная функция.
На плоскости введем сетку

(3.13)

Аппроксимируем задачу (3.7) разностной схемой

— — —

(3.14)

Проинтегрируем каждое из уравнений в (3.14) по времени на промежутке
:

— —

Поделив обе части на , получим:

— — —

(3.15)

где ;

—

—

Вспользовавшись тем, что \dots имеем:

или

Отсюда условие устойчивости для явной схемы (3.16) запишется в виде

Обозначим для удобства \dots . Тогда

Левое неравенство верное, а из правого получим

Так как \dots , то \dots . Поэтому условие

$$\dots \tag{3.18}$$

является достаточным условием устойчивости.

Аналогичными рассуждениями из (3.17) получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов

$$\dots$$

Условие устойчивости для неявной схемы (3.12) запишется в виде

$$\frac{\tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\Delta x} + \beta \right)$$

Это неравенство верно для всех n и для любых Δx и τ . Следовательно, неявная схема для уравнения теплопроводности безусловно (абсолютно) устойчива.

3.4. Устойчивая явная схема для уравнения теплопроводности

3.4.1. Вывод расчетной схемы и рабочих формул для задачи с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующую третью смешанную задачу для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ & u(0, t) = u_0 \\ & \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -\beta u(L, t) + q \end{aligned} \quad (3.19)$$

- где
- коэффициент теплоотдачи на левом конце стержня;
 - температура внешней среды на левом конце стержня;
 - мощность потока тепла на левом конце стержня;
 - коэффициент теплоотдачи на правом конце стержня;
 - температура внешней среды на правом конце стержня;
 - мощность потока тепла на правом конце стержня.

На плоскости введем равномерную сетку

–

где Δx – шаг по переменной x , Δt – шаг по переменной t .

Через u_j^n обозначим значения функции $u(x, t)$ при $x = x_j$ (не оси x) в точках x_j , через u_j^{n+1} – значения функции $u(x, t)$ в момент времени $t = t_{n+1}$ в тех же точках (см. рисунок 3.2.)

и перейдя к пределу при [8]. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \dots = \dots \quad (3.23)$$

с начальным условием . Значения предполагаются замороженными.

Будем искать решение этого уравнения в виде . Тогда получим

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \dots = \dots$$

Интегрируя левую и правую части от 0 до , получим

$$\frac{du}{dx} + \dots = \dots$$

Окончательно решением уравнения (3.23) является следующая функция

$$u(x) = \dots \quad (3.24)$$

Полученная формула для определения значений на следующем временном слое справедлива для узлов с номерами . Для остальных узлов необходимо учесть краевые условия задачи (3.19). На левой границе должно выполняться условие

$$u(0) = \dots \quad (3.25)$$

$$u(L) = \dots \quad (3.26)$$

Заведем фиктивные узлы с номерами 0 и (см. рисунок 3.3) и подберем температуры и в этих узлах, чтобы обеспечить выполнение условий (3.25)-(3.26).

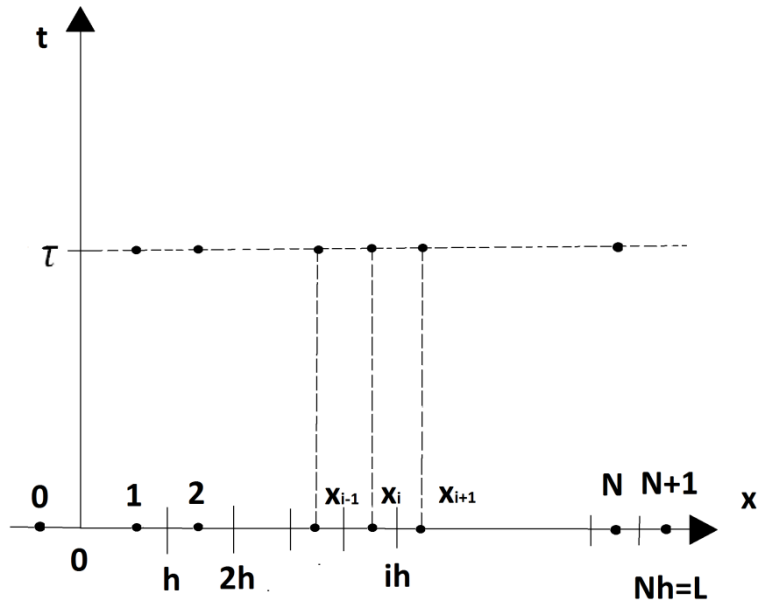


Рисунок 3.3 – Расчетная схема с фиктивными узлами

Температура в точке x_i принимается равной полусумме температур t_{i-1} и t_{i+1} . Разностная аппроксимация условия (3.25) имеет вид

$$-\frac{\lambda}{h} \frac{t_0 - t_1}{h} - \frac{\lambda}{h} \frac{t_i - t_{i+1}}{h} = \rho c \frac{dt_i}{dt} \quad (3.27)$$

где α , β , γ - коэффициент теплоотдачи, температура внешней среды и мощность потока тепла на левом конце стержня. Выразим из выражения (3.27) температуру

$$t_i = \frac{1}{2} (t_{i-1} + t_{i+1}) - \frac{\rho c h^2}{2\lambda} \frac{dt_i}{dt} \quad (3.28)$$

Аналогично находится температура

$$t_{i+1} = \frac{1}{2} (t_i + t_{i+2}) - \frac{\rho c h^2}{2\lambda} \frac{dt_{i+1}}{dt} \quad (3.29)$$

где α , β , γ - коэффициент теплоотдачи, температура внешней среды и мощность потока тепла на правом конце стержня.

Теперь формула (3.24) справедлива для узлов с номерами i .

Итак, в начальный момент времени $t=0$ заданы значения t_0 . Это либо начальное значение, либо значения, вычисленные в предыдущей итерации. По формулам (3.28) и (3.29) вычисляются значения t_1 и t_{N+1} . Наконец, по формуле (3.24) вычисляются значения t_i , которые служат начальными значениями для следующей итерации по времени.

3.4.2. Устойчивость явной схемы для третьей смешанной задачи с постоянными коэффициентами

Докажем сперва устойчивость предложенной схемы для внутренних узлов, то есть узлов с номерами $1 \leq i \leq N-1$. Пусть решение уравнения (3.23) имеет вид

где u_i^n – точное решение задачи (3.19) на i -м узле и соответствующем слое по времени. Стало быть, e_i^n – есть допущенная ошибка. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

Его решение

и, следовательно, для узлов сетки с номерами $1 \leq i \leq N-1$ выполняется

что и означает устойчивость схемы во внутренних узлах.

Рассмотрим узел с номером 1. Пусть в t_n допущена ошибка e_1^n , то есть

Тогда в соответствии с формулой (3.28)

Обозначим e_1^n . Тогда

и в силу того, что $\frac{d\theta}{dx} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$,

Аналогично для случая $\theta = 0$ доказывается, что $\frac{d\theta}{dx} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$.

Окончательно имеем $\theta = 0$.

3.4.3. Третья смешанная задача одномерной теплопроводности с непостоянными коэффициентами

В соответствии с формулой (3.5) уравнение одномерной теплопроводности с непостоянными коэффициентами записывается в виде

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{d\theta}{dx} \right) + \mu \theta = 0 \quad (3.30)$$

Будем считать удельную теплоемкость единицы объема c и коэффициент теплопроводности λ положительными функциями температуры, т.е. $c > 0$ и $\lambda > 0$.

Краевые условия на концах стержня выглядят так

$$\theta = \theta_0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (3.31)$$

$$\lambda \frac{d\theta}{dx} = -q \quad \text{при} \quad x = l \quad (3.32)$$

где θ_0 и q коэффициенты теплоотдачи соответственно на левом и правом концах стержня (известные функции температуры);

θ_0 и q – температура внешней среды соответственно на левом и правом концах стержня;

q – мощность теплоисточника соответственно на левом и правом концах стержня.

Кроме того, задано распределение температуры на стержне в начальный момент времени $t = 0$:

$$\theta = \theta(x, 0) \quad (3.33)$$

Записывая вместе уравнение (3.30), краевые условия (3.31), (3.32) и начальное условие (3.33), получим постановку третьей смешанной задачи одномерной

теплопроводности с непостоянными коэффициентами, являющимися функциями температуры:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -\dot{q} \\ & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ & \text{---} \\ & \text{---} \end{aligned} \tag{3.34}$$

3.4.4. Вывод рабочих формул явной схемы для задачи с непостоянными коэффициентами

3.4.4.1. Явная схема для интеграла от теплопроводности

Введем в рассмотрение функцию $T(x, y, z, t)$. Частная производная $\frac{\partial T}{\partial x}$ равна

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1,j,k} - T_{i-1,j,k}}{\Delta x}$$

с учетом этого частная производная $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$ равна

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\lambda_{i+1/2} (T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}) - \lambda_{i-1/2} (T_{i,j,k} - T_{i-1,j,k})}{\Delta x^2}$$

Следовательно, для функции T получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -\dot{q} \tag{3.35}$$

где $\lambda_{i+1/2} = \lambda \left(\frac{T_{i+1,j,k} + T_{i,j,k}}{2} \right)$.

Для расчета значения функции T можно воспользоваться разностной схемой (3.24), описанный в предыдущем пункте, расчетная формула для значений функции T во внутренних узлах сетки запишется в виде

$$T_{i,j,k}^{n+1} = \frac{\Delta t}{\rho c} \left[\frac{\lambda_{i+1/2}}{\Delta x^2} (T_{i+1,j,k}^n - T_{i,j,k}^n) - \frac{\lambda_{i-1/2}}{\Delta x^2} (T_{i,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n) + \frac{\lambda_{j+1/2}}{\Delta y^2} (T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j,k}^n) - \frac{\lambda_{j-1/2}}{\Delta y^2} (T_{i,j,k}^n - T_{i,j-1,k}^n) + \frac{\lambda_{k+1/2}}{\Delta z^2} (T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k}^n) - \frac{\lambda_{k-1/2}}{\Delta z^2} (T_{i,j,k}^n - T_{i,j,k-1}^n) \right] + T_{i,j,k}^n \tag{3.36}$$

Заведем фиктивные узлы с номерами 0 и n (см. рисунок 3.2) и подберем значения u_0 и u_n в этих узлах, чтобы обеспечить выполнение условий (3.31)-(3.32).

Перепишем краевое условие (3.31) в виде

$$u_0 = \alpha$$

Обозначим через ψ функцию, обратную к функции u . В силу монотонности последней такая функция существует. Тогда $u = \psi \circ v$ можно записать в виде

и

$$v = \psi \circ u$$

Аппроксимируя производную u_x — разделенной разностью $\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$, а значение u_x — полусуммой $\frac{u_{i+1} + u_i}{2}$, получим соотношение

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2} \Delta x$$

Преобразуем левую часть этого соотношения:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2} \Delta x$$

Отсюда получим, что краевое условие (3.31) запишется в виде

$$u_0 = \alpha$$

Обозначив $\alpha = u_0$, получим уравнение относительно

$$u_0 = \alpha \tag{3.37}$$

Уравнение для правого конца можно получить, заменив в предыдущих выкладках x на $x + \Delta x$, y – на $y + \Delta y$ и нижний индекс i – на нижний индекс $i + 1$. То есть для выполнения краевого условия (3.32) требуется решить уравнение

$$-\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.38)$$

где $\Delta x = x_{i+1} - x_i$.

Пусть y_i – решение уравнения (3.37). Тогда искомое значение y_{i+1} на фиктивном слое с номером 0 будет равно

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y \quad (3.39)$$

Аналогично, если x_{i+1} – решение уравнения (3.37). Тогда искомое значение x_{i+1} на фиктивном слое с номером i равно

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x \quad (3.40)$$

Учитывая совпадение уравнений (3.37) и (3.38) с точностью до обозначений, далее будем рассматривать только первое из них.

Способ решения уравнения (3.37) зависит от способа задания функций $y(x)$ и $x(y)$. Будем считать, что $y(x)$, $x(y)$ и Δx заданы таблично в некотором числе точек оси температур. Назовем эти точки отмеченными. Для задания каждой из функций между ее двумя соседними отмеченными точками будем использовать линейную аппроксимацию. Так что функции $y(x)$, $x(y)$ и Δx являются кусочно-линейными. Кроме того, можно считать, что множества отмеченных точек функций совпадают. В противном случае эти множества можно просто объединить, а значения функций в новых отмеченных точках рассчитать по формуле

где x_{i+1} – ближайшая слева к точке x отмеченная точка функции $x(y)$.
Вернемся к уравнению (3.37). Перепишем его, опустив индексы :

$$-\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_i}{x - x_i} \quad (3.41)$$

Под y_i будем понимать $y(x_i)$, если речь идет о граничном условии на левом конце, или $y(x_{i+1})$, если рассматривается граничное условие на правом конце. Считаем, что функции $y(x)$ и $x(y)$ заданы в одних и тех же отмеченных точках. Пусть это множество точек есть множество чисел $\{x_i\}$.

Рассмотрим промежуток $[\alpha, \beta]$. На этом промежутке в силу линейности функции $f(x)$ функция $g(x)$ является квадратичной. Действительно,

$$\begin{aligned} & \text{_____} \\ & \text{_____} \end{aligned}$$

Для $x \in [\alpha, \beta]$ верно

$$\text{_____}$$

Таким образом, уравнение (3.41) на каждом промежутке $[\alpha, \beta]$ является квадратным. Его можно записать в виде

$$(3.42)$$

где

$$\text{_____} \quad \text{_____} \quad (3.43)$$

$$\text{---} \text{_____} \text{_____} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & \text{---} \text{_____} \text{---} \\ & \text{_____} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Определив значения функции $g(x)$ на фиктивных слоях, формула (3.36)

$$\text{_____} \quad \text{_____} \quad \text{_____}$$

становится справедливой для узлов сетки с номерами i . Но для ее применения необходимо уметь по значению T_i в узле i определять температуру в этом же узле для вычисления значения T_{i+1} . То есть по данному значению необходимо найти температуру T_{i+1} такую, что $T_{i+1} > T_i$. В силу монотонности функции $T(x)$ эту задачу можно решить методом деления отрезка пополам (дихотомии) с требуемой точностью.

3.4.4.2. Явная схема для функции количества теплоты единицы объема

Напомним, что рассматривается одномерное квазилинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Q \quad (3.46)$$

Введем функцию количества теплоты единицы объема

$$Q = Q(x, t) \quad (3.47)$$

Частная производная $\frac{\partial T}{\partial x}$ — равна

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$$

а частная производная $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$ — равна

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\lambda_{i+1} \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} - \lambda_i \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

С учетом этого уравнение (3.46) преобразуется к виду

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\lambda_{i+1} (T_{i+1}^n - T_i^n) - \lambda_i (T_i^n - T_{i-1}^n)}{\Delta x^2} + Q_i^n \quad (3.48)$$

где $\lambda_i = \lambda(T_i)$.

Для расчета значений функции $T(x, t)$, как и в пункте 3.4.1, на плоскости введем равномерную сетку

–

где Δt – шаг по переменной t , Δx – шаг по переменной x . Вводя те же обозначения, что и в пункте 3.4.1, и используя раздельную разность вперед для производной по времени и центральную раздельную разность для производной по пространственной координате, получим следующее разностное уравнение для дифференциального уравнения (3.48)

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \quad (3.49)$$

где $u_{i,j}^n$ – значение функции u в узле (i, j) на n -м шаге по времени.

Перепишем (3.49) в виде

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n)$$

и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

с начальным условием $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$. Его решением является функция

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi, \eta) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4t}\right) d\xi d\eta$$

Следовательно, расчетная формула для значений функции u во внутренних узлах сетки будет следующей

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \quad (3.50)$$

Как и ранее, заведем фиктивные узлы с номерами 0 и N и подберем значения u_0 и u_N в этих узлах, чтобы обеспечить выполнение краевых условий

$$u_0 = \alpha, \quad u_N = \beta \quad (3.51)$$

$$u_0 = \alpha, \quad u_N = \beta \quad (3.52)$$

Перепишем краевое условие (3.51) в виде

$$u_0 = \alpha, \quad u_N = \beta$$

Обозначим через ϕ функцию, обратную к функции u . В силу монотонности последняя такая функция существует. Тогда ϕ можно записать в виде

и

$$\phi(u) = \dots$$

Аппроксимируя производную u' — $\frac{u_{i+1} - u_i}{h}$ разделенной разностью $\frac{u_{i+1} - u_i}{h}$, а значение u_i — полусуммой $\frac{u_{i+1} + u_i}{2}$, получим соотношение

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} = \dots$$

Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\dots = \dots$$

Отсюда получим, что краевое условие (3.51) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Обозначим $u_i = u(x_i, y_j)$, получим уравнение относительно

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = h^2 f_{i,j} \quad (3.53)$$

Так как функции $u(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ являются кусочно-линейными, полученное уравнение является кубическим на промежутках линейности последних, что несколько усложняет его решение.

Проще использовать подход, описанный в пункте 3.4.4.1. По формулам (3.39) и (3.40) находятся значения $u_{i,j}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$ функции в фиктивных слоях соответственно 0 и h . Тогда значения $u_{i,j}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$ могут быть найдены по формулам

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^0 + u_{i,j}^h) - \frac{h^2}{6} f_{i,j} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x}^0 + \frac{\partial u}{\partial x}^h) - \frac{h}{3} f_{i,j} \quad (3.55)$$

Определив значения функции $u_{i,j}$ в фиктивных слоях, формула (3.50)

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) - \frac{h^2}{12} f_{i,j}$$

становится справедливой для узлов сетки с номерами i, j .

3.4.4.3. Численное решение квазилинейного уравнения теплопроводности способом интегрирования на промежутках линейности непостоянных коэффициентов

В пункте 3.4.4 был введена функция $u(x, y)$ и было показано, что она должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y) \quad (3.56)$$

где τ —. Используя разностные аппроксимации производных, получим разностную аппроксимацию уравнения (3.56)

$$\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i+1}^{n-1} - u_i^{n-1}}{\tau} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\tau} + \frac{u_i^n - u_{i+1}^n}{\tau} \quad (3.57)$$

при условии расчета значений функции u в фиктивных слоях по формулам (3.39) и (3.40) верную для узлов с номерами i и $i+1$. Проведем преобразования уравнения (3.57), учитывая, что $\tau \ll \Delta x$ и $\tau \ll \Delta t$:

$$\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i+1}^{n-1} - u_i^{n-1}}{\tau} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\tau} + \frac{u_i^n - u_{i+1}^n}{\tau} \quad (3.58)$$

Перейдем в (3.58) к пределу при $\tau \rightarrow 0$:

$$\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i+1}^{n-1} - u_i^{n-1}}{\tau} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\tau} + \frac{u_i^n - u_{i+1}^n}{\tau}$$

Обозначив $\tau = \Delta t$, запишем

$$\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^{n-1} - u_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i+1}^n}{\Delta t} \quad (3.59)$$

Теперь (3.59) перепишем в виде

$$\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^{n-1} - u_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i+1}^n}{\Delta t} \quad (3.60)$$

где $\tau = \Delta t$.

Значение u в начальный момент времени может быть равно, меньше или больше u_i . Если $u_i < u_{i+1}$, то из (3.59) следует, что $u_{i+1}^n - u_i^n > u_i^n - u_{i-1}^n$. Докажем, что если $u_i < u_{i+1}$, то $u_{i+1}^n - u_i^n > u_i^n - u_{i-1}^n$ — возрастающая (убывающая функция) на промежутке $[i, i+1]$, и $u_{i+1}^n - u_i^n > u_i^n - u_{i-1}^n$.

Рассмотрим случай $u_i < u_{i+1}$. Запишем уравнение (3.59) в виде

$$\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^{n-1} - u_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i+1}^n}{\Delta t}$$

При $\epsilon > 0$ имеем

—

Следовательно, в силу непрерывности производной —
и f — возрастающая функция на $[a, b]$. Теперь
рассмотрим промежуток $[a, a + \epsilon]$. При $\epsilon > 0$ имеем

—

Следовательно, f и f' —
возрастающая функция на $[a, a + \epsilon]$. Продолжая описанный процесс, приходим к
выводу, что f является возрастающей функцией на всем промежутке $[a, b]$.

Докажем вторую часть утверждения. Если предположить противное, то при
в силу того, что f — ограниченная функция, интеграл от левой
части уравнения (3.60) будет расходящимся, тогда как интеграл от правой части
есть константа, равная $f(b) - f(a)$. Для случая f доказательство аналогично.

Обозначим первообразную функции f через F . Задача состоит
в нахождении значения $F(b) - F(a)$ такого, что выполнялось бы равенство

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \quad (3.61)$$

Для нахождения $F(b) - F(a)$ будем выделять промежутки монотонности функции
 f и на каждом из промежутков монотонности методом дихотомии пытаемся
находить корень уравнения $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt$. Если для найденного
дихотомией значения x выполняется равенство $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt$
с заданной погрешностью, то полагаем $x = b$.

Как и в пункте 3.4.4 будем считать, что функция f и F заданы на одном
и том же конечном множестве температур $[a, b]$ (здесь и далее в
этом пункте нижний индекс a при F не является сеточным обозначением).

Рассмотрим промежуток $[a, a + \epsilon]$. На этом промежутке
функция f является линейной. Поэтому можно записать

$$\text{-----} \tag{3.62}$$

$$\text{-----} \quad \text{-----}$$

где .
Возможны два случая:

- 1)
- 2)

Рассмотрим первый из них. Так как , то из (3.62) получаем

$$\text{-----} \tag{3.63}$$

Далее, в силу линейности и на рассматриваемом промежутке
имеем

$$\text{-----}$$

$$\text{-----} \quad \text{-----} \quad \text{-----}$$

С учетом этого уравнения (3.60) преобразуется к виду

$$\text{---} \quad \text{-----} \quad \text{-----} \quad \text{-----} \tag{3.64}$$

Обозначим первообразную функцию ----- на промежутке
через :

$$\text{-----} \quad \text{-----} \quad \text{-----}$$

$$\text{-----} \tag{3.65}$$

Введем обозначения α , β . Тогда (3.65) можно записать в более компактном виде:

$$(3.66)$$

Интегрируя (3.64) на промежутке $[\alpha, \beta]$, получаем

$$(3.67)$$

Корень уравнения (3.67), принадлежащий промежутку $[\alpha, \beta]$ в случае роста температуры в α -м узле и промежутку $[\beta, \alpha]$ в случае уменьшения температуры в α -м узле, и является искомым значением θ .

Обратимся к случаю $\alpha < \beta$. Запишем (3.62) в виде

$$(3.68)$$

Получили квадратное уравнение относительно θ . Его корни равны

$$(3.69)$$

С учетом этого

Но так как теплопроводность строго положительна, то перед корнем следует оставить знак плюс, то есть

Теплоемкость равна

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\text{ad}} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\text{diff}}$$

Уравнение (3.60) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\text{ad}} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\text{diff}} \quad (3.70)$$

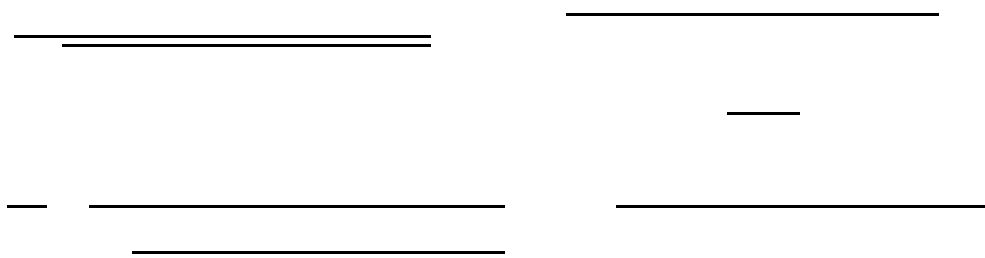
Введем обозначения:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\text{diff}} = \dots$$

Тогда уравнение (3.70) запишется в виде

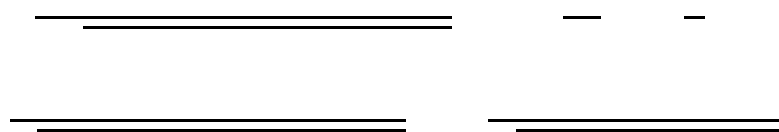
$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\text{ad}} + \dots \quad (3.71)$$

Найдем \dots . Обозначим \dots за новую переменную \dots .

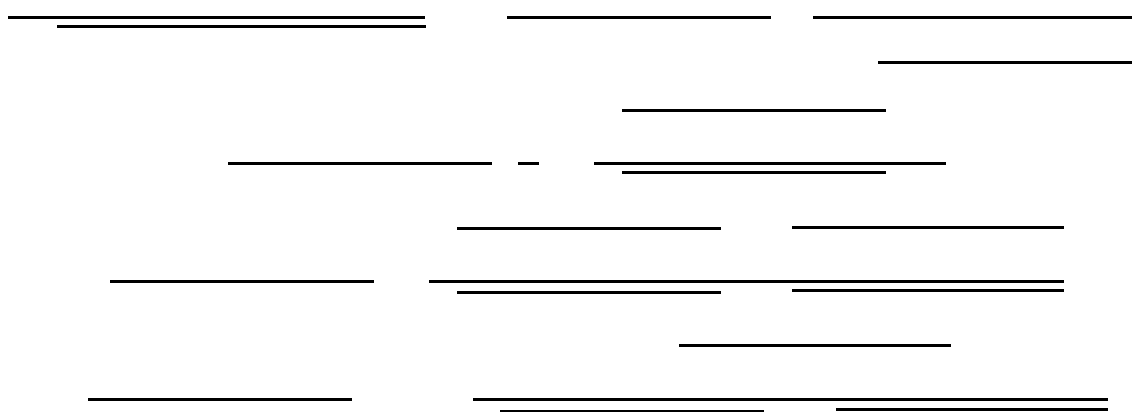


Возможны три случая:

1)



2)



3)



Обозначим первообразную функции $\int f(x) dx$ (см. формулу (3.71)) на промежутке $[a, b]$ через $F(x)$. С учетом найденной функции

$$(3.72)$$

Интегрируя (3.70) на промежутке $[a, b]$, получаем

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (3.72)$$

где конкретный вид функции $F(x)$ определяется выполнением одного из рассмотренных выше трех условий.

3.4.4.4. Явная схема с повышенным порядком аппроксимации

В пункте 3.4.4.1 исходное квазилинейное уравнение заменой $y = Y(x)$ было сведено к уравнению

$$Y'' + p(x)Y' + q(x)Y = r(x) \quad (3.74)$$

где $Y(x)$.

Для расчета значений функции $Y(x)$ будем пользоваться идеей, изложенной в пункте 3.4.1. Шаблон схемы изображен на рисунке 3.4.

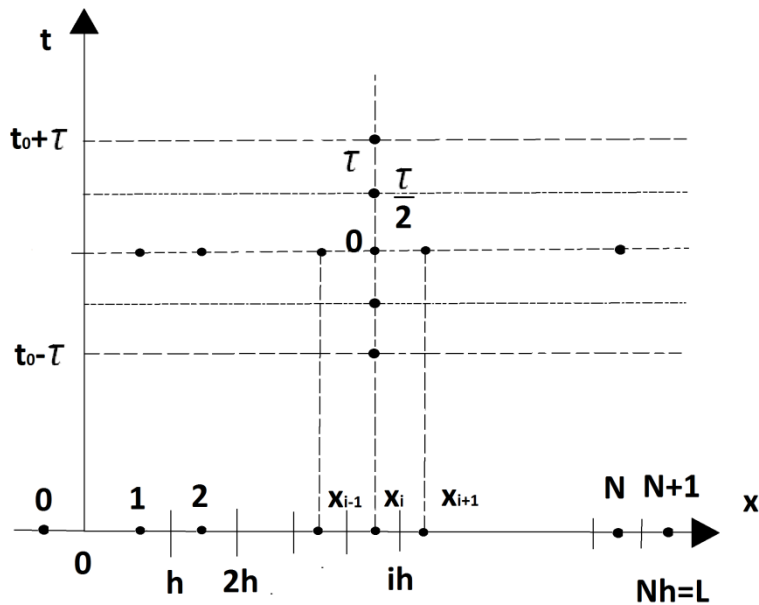


Рисунок 3.4 – Шаблон схемы более высокого порядка аппроксимации

Пусть u_i^n – значения функции $u(x, t)$ в сечении $x = x_i$ в момент времени $t = t_n$.

Запишем уравнение (3.56) для точки (x_i, t_n) , заменив вторую производную по пространственной координате на соответствующее разностное соотношение:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + \dots \quad (3.75)$$

Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение можно представить в виде

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + \dots \quad (3.76)$$

Схема в пункте 3.4.1 получалась аппроксимацией значений u_{i-1}^n и u_{i+1}^n соответственно значениями $u_i^{n-\tau}$ и $u_i^{n+\tau}$. По этой причине вносилась погрешность аппроксимации $O(\tau^2)$. Для повышения точности аппроксимации воспользуемся приближенными равенствами

$$u_{i-1}^n \approx u_i^{n-\tau} - \frac{h}{\tau} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_i, t_n} + \dots$$

или

$$u_{i+1}^n \approx u_i^{n+\tau} + \frac{h}{\tau} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_i, t_n} + \dots$$

В результате уравнение (3.76) преобразуется к виду

$$\frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{n+1/2} = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{n-1/2} + \tau^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{n-1/2} + O(\tau^4) \quad (3.77)$$

Погрешность аппроксимации становится равной $O(\tau^2)$, даже если производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ вычисляются по формулам первого порядка точности.

Решение уравнения (3.77) является функция

$$u^n = u(t_n, x) + O(\tau^2) \quad (3.78)$$

где

$$u^n = u(t_n, x) + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{n-1/2} + O(\tau^4)$$

Для обозначения значений сеточной аппроксимации функции u на следующем временном слое будем использовать верхний индекс (+1), а на предыдущем – верхний индекс (-1), соответственно, на следующем полуцелом временном слое – $u^{n+1/2}$, а на предыдущем полуцелом временном слое – $u^{n-1/2}$. Запишем теперь разностные аппроксимации для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{n+1/2} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{n+1/2} + O(\tau^3) \quad (3.79)$$

Окончательно, расчетная формула приобретает вид

$$u^{n+1} = u^n + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{n+1/2} + O(\tau^3) \quad (3.80)$$

где

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{n+1/2} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{n+1/2} + O(\tau^3)$$

Для расчета значения $u_{i,j}^{n+1}$ на временном слое $n+1$, а также для вычисления значений функции в полужелтых слоях по времени можно воспользоваться схемой, описанной в пункте 3.4.4.1:

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{2} (f_{i,j}^n + f_{i,j}^{n+1/2}) \quad (3.81)$$

$$u_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2} (f_{i,j}^n + f_{i,j}^{n+1}) \quad (3.82)$$

Наконец, в формуле (3.80) значения коэффициента $\alpha_{i,j}^n$ можно брать не с текущего временного слоя, а со следующего полужелтого, то есть

$$\alpha_{i,j}^n = \frac{1}{2} (\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i,j}^{n+1/2}) \quad (3.83)$$

Значение $u_{i,j}^{n+1/2}$ может быть вычислено по найденному по формуле (3.82) значению $u_{i,j}^n$, а именно $u_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2} (f_{i,j}^n + f_{i,j}^{n+1})$.

3.4.4.5. Повышение порядка точности разностной схемы методом предиктор-корректор

В соответствии с теоремой Лакса [2] (основной теоремой сходимости разностных схем) для повышения порядка точности, вообще говоря, нужно повышать порядок аппроксимации разностной схемы.

Для повышения порядка аппроксимации используемой схемы применяется метод предиктор-корректор. Суть этого метода заключается в том, что в момент времени t_n решение в следующий момент времени t_{n+1} ищется в два шага: сначала по схеме первого порядка аппроксимации и со значительным запасом устойчивости находится решение в момент времени $t_{n+1/2}$ – *предиктор*, после чего на втором этапе исходное уравнение расписывается по схеме более высокого порядка аппроксимации (чаще всего, второго) – *корректор*.

Приведем пример предиктор-корректорного метода для схемы, описанной в пункте 3.4.4.1. В соответствии с (3.36) расчетная формула, используемая для решения задачи

$$\begin{aligned} & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ & \text{---} \\ & \text{---} \end{aligned}$$

такова:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

Решение с использованием метода предиктор-корректор строится следующим образом:

1) находится в момент времени – по формуле

$$\begin{aligned} & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{aligned} \tag{3.84}$$

2) находится решение в момент времени по формуле

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \tag{3.85}$$

где , – значение температуры в момент времени –, соответствующее значению функции , равному .

3.5. Приведение задачи к безразмерному виду

Одним из первых вопросов, возникающих при численном решении какой-либо практически интересной задачи, является вопрос о выборе системы единиц, в которой будут измеряться все физические параметры. Обойти связанные с этим трудности позволяет так называемое *обезразмеривание* задачи, то есть приведение системы уравнений, граничных и начальных условий к безразмерному виду [7].

Напомним постановку третьей смешанной задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ & \dots \\ & \dots \end{aligned} \tag{3.86}$$

В соответствии с теорией размерностей выберем среди размерностей величин, входящих в систему уравнений (3.86), размерности, образующие размерно-независимый базис, то есть такие, что формула, выражающая размерность одной величины, входящий в базис, не может быть представлена в виде степенного одночлена из формул размерностей других величин [9]. В качестве таких размерностей можно взять размерности длины l , теплоемкости, C , теплопроводности λ , и температуры T , то есть размерно независимый базис будет следующим

$$l, C, \lambda, T \tag{3.87}$$

Размерности остальных величин будут, как говорилось ранее, иметь вид степенных одночленов из базисных размерностей:

$$\dots \tag{3.88}$$

где \dots – некоторая величина, входящая в систему (3.86);
 \dots – целые числа.

Теперь определим значения \dots для размерности величин: времени t , коэффициента теплоотдачи α и мощности теплоисточника Q , входящих в систему (3.86). Для времени t \dots . Действительно,

$$\dots \dots \dots$$

Для коэффициента теплоотдачи α \dots :

$$\dots \dots \dots$$

Наконец, для мощности теплоисточника Q \dots :

Таким образом,

$$(3.89)$$

$$(3.90)$$

$$(3.91)$$

Изменим теперь единицы измерения величины \dots соответственно в \dots . Численные значения этих величин и величин \dots в новой системе единиц будет соответственно равны:

Положим \dots , \dots , \dots , а \dots —, где \dots — число узлов сетки по пространственной координате, чтобы значение величины \dots , равное 1, соответствовало значению \dots , равному шагу \dots — разностной схемы.

Тогда получим

$$\dots \dots \dots (3.92)$$

$$\dots \dots \dots (3.93)$$

Выразив прежние величины (в обозначениях которых не присутствует \dots) из формул (3.92), (3.93) и подставив их выражения в систему уравнений (3.86), получим систему частично в безразмерном виде:

$$\dots \dots \dots (3.94)$$

в которой величины \dots являются безразмерными, а величины \dots имеют размерность \dots .

Нетрудно видеть, что если в полученной системе уравнений (3.94) опустить волну над всеми функциями, то она совпадает с системой уравнений (3.86) в размерном виде. Поэтому в расчетах можно использовать обычную систему уравнений, рассматривая ее как частично безразмерную. Числовые значения параметров, определяющие конкретное решение задачи, следует предварительно преобразовать в соответствии с формулами (3.92), (3.93).

3.6. Выводы по разделу

В данном разделе была рассмотрена третья смешанная задача для однородного квазилинейного уравнения теплопроводности. Предложена равномерная сетка, которая имеет ряд особенностей:

- значения искомой функции подсчитываются в точках с координатами \dots , где \dots и \dots – соответственно число узлов и шаг сетки по пространственной координате;

- выведены фиктивные слои с номерами 0 и \dots для того, чтобы все внутренние точки стержня можно было рассматривать единообразно: сначала рассчитываются значения искомой функции во внутренних точках, после чего, исходя из краевых условий, задаются ее значения в фиктивных слоях.

Предложен алгоритм для расчета значений искомой функции в фиктивных узлах сетки с учетом кусочно-линейной аппроксимации функции температуры, входящих в постановку задачи.

Предложены модификации конечно-разностных алгоритмов численного решения рассматриваемой задачи, допускающие обобщение на пространство переменных большей размерности. Вводилась новая неизвестная функция, для которой записывались разностные соотношения. Эти соотношения затем заменялись на обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. В результате были получены следующие варианты явной схемы:

- явная схема для функции \dots ;
- явная схема для функции \dots количество теплоты единицы объема;

- явная схема, полученная в предположении незамороженности коэффициента температуропроводности.

- явная схема для функции \dots повышенного порядка аппроксимации.

Также в этом разделе был описан предиктор-корректорный метод повышения точности для построенных схем счета и выполнено приведение рассматриваемой задачи к безразмерному виду.

4. Оценивание точности разработанных алгоритмов

4.1. Описание способа оценивания точности

Для получения представления о качественных характеристиках разработанных алгоритмов решения задачи (2.1) требуется предложить способ сравнения точного решения задачи (2.1) с ее численным решением, получаемый по каждому из разностных методов, описанных в пунктах 3.4.4.1-3.4.4.4. В п. 1.2.2 говорилось о достоинствах чисто неявных разностных схем для решения уравнения теплопроводности, а именно, об их безусловной устойчивости и сходимости к точному решению (доказательство этих фактов можно найти, например, в [10]). Поэтому при оценивании точности построенных схем под точным решением задачи (2.1) будем понимать решение, полученное чисто неявной схемой, например, (1.8).

Для проведения расчетов возьмем следующую третью смешанную задачу:

$$\begin{aligned} & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ & \text{---} \\ & \text{---} \end{aligned} \tag{4.1}$$

где значения констант T , L , φ_0 , приведены в таблице 4.1, а функции \dots , \dots и \dots – заданы в таблице 4.2.

Таблица 4.1

Значения входных параметров задачи, являющихся константами

| Параметры | Значения | Единица измерения |
|-------------|----------|-------------------|
| T | 100 | c |
| L | 1 | m |
| φ_0 | 22 | |
| | 1400 | |
| | 1400 | |
| | 100000 | --- |
| | 0 | --- |

Для выполнения расчетов была написана программа на языке программирования Matlab (ее текст приведен в ПРИЛОЖЕНИИ 1), в которой были реализованы следующие разностные схемы решения уравнения теплопроводности:

1. итерационный вариант чисто неявной схемы;
2. традиционная явная схема;
3. явная схема с замороженным коэффициентом температуропроводности (см. п. 3.4.4.1);
4. явная схема с замороженным коэффициентом температуропроводности (см. п. 3.4.4.2);
5. явная схема с незамороженным коэффициентом температуропроводности (см. п. 3.4.4.3);
6. явная схема с замороженным коэффициентом температуропроводности повышенного порядка аппроксимации (см. п. 3.4.4.4)

Таблица 4.2

Значения входных параметров задачи, являющихся функциями температуры

| Параметр | Температура, | | | | | | | | | |
|----------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|
| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 1000 |
| ———— | 3.414 | 3.568 | 4.040 | 4.347 | 4.812 | 5.272 | 5.88 | 7.286 | 7.218 | 7.218 |
| ———— | 22.5 | 23.4 | 24.8 | 26.7 | 27.7 | 27.8 | 28.1 | 28.6 | 27 | 27 |
| ———— | 100 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 170 |
| ———— | 100 | 120 | 130 | 140 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 |

Для каждой схеме поставим в соответствии обозначение, составленное из заглавной буквы А и ее номер в выше приведенном списке, уменьшенное на единицу. Так, итерационный вариант чисто неявной схемы будет иметь обозначение А0, а, например, явная схема с замороженным коэффициентом температуропроводности – А2.

Для получения представления о свойствах разработанных алгоритмов решалась задача (4.1). С целью оценки влияния количества элементарных участков по пространственной координате и шага по времени на максимальное отклонение между численным и точным решениями задачи проведены численные эксперименты. Для каждого шага по времени перебиралось число по пространственной координате N от значения 10 с шагом 10 до значения 200. При заданных шагах Δx и h находилось решение задачи (4.1) по каждой из схем А0-А5 и подсчитывалась величина максимальный относительной погрешности решений, полученных по схемам А1-А5 (в качестве точного решения бралось решение по чисто неявной схеме А0):

где
схем A0-A5,
схеме A0.

– решение задачи (4.1) в момент времени T по одной из
– решение задачи (4.1) в момент времени T по

4.2. Результаты сравнительных численных расчетов

4.2.1. Обоснование использования метода предиктор-корректор

Прежде чем проводить численные эксперименты, сперва выясним целесообразность повышения точности схемы методом предиктор-корректор. Его использование в среднем удвоит число арифметических операций, что приведет к увеличению времени машинного счета. Поэтому если эффект от его использования окажется незначительным, то разумнее отказаться от его использования.

Задача (4.1) решалась по двум вариантам схемы A2 с шагом по времени с перебором числа узлов по пространственной координате от 10 до 200 с шагом 10: первый вариант – без использования предиктор-корректорного метода повышения точности, второй – без использованием данного метода. Результаты расчетов приведены в таблице 4.3.

Как видно из таблицы, эффект от использования предиктор-корректорного метода повышения точности схемы оказался существенным. Поэтому дальнейшие расчеты по схемам A2-A5 проводились с применением этого метода.

Таблица 4.3

Оценивание эффекта от использования предиктор-корректорного метода

| Число узлов N | Максимальная относительная погрешность решения по схеме A2 | |
|-----------------|--|--|
| | без использования метода предиктор-корректор | с использование метода предиктор-корректор |
| 10 | 0,00984 | 0,00843 |
| 20 | 0,00694 | 0,00163 |
| 30 | 0,01213 | 0,00123 |
| 40 | 0,01536 | 0,00096 |
| 50 | 0,01660 | 0,00103 |
| 60 | 0,01654 | 0,00094 |
| 70 | 0,01654 | 0,00086 |
| 80 | 0,01774 | 0,00079 |
| 90 | 0,01749 | 0,00065 |
| 100 | 0,01751 | 0,00063 |
| 110 | 0,01750 | 0,00057 |
| 120 | 0,01738 | 0,00053 |
| 130 | 0,01726 | 0,00048 |

Окончание таблиц 4.3

| | | |
|-----|---------|---------|
| 140 | 0,01718 | 0,00042 |
| 150 | 0,01719 | 0,00038 |
| 160 | 0,01708 | 0,00035 |
| 170 | 0,01701 | 0,00029 |
| 180 | 0,01668 | 0,00028 |
| 190 | 0,01674 | 0,00026 |
| 200 | 0,01662 | 0,00023 |

4.2.2. Результаты расчетов

Результат расчета с шагом по времени с приведены в таблице 4.4.

Таблица 4.4

Результат расчета при времени

| Число узлов | Максимальная относительная погрешность решения по схеме | | | | |
|-------------|---|---------|---------|---------|---------|
| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 |
| 10 | 0,00801 | 0,00801 | 0,05661 | 0,00388 | 0,00801 |
| 20 | 0,00144 | 0,00143 | 0,02367 | 0,00050 | 0,00143 |
| 30 | 0,00041 | 0,00040 | 0,00770 | 0,00068 | 0,00040 |
| 40 | 0,00046 | 0,00047 | 0,00422 | 0,00087 | 0,00047 |
| 50 | 0,00098 | 0,00096 | 0,00296 | 0,00065 | 0,00096 |
| 60 | 0,00113 | 0,00112 | 0,00210 | 0,00053 | 0,00112 |
| 70 | 0,00108 | 0,00108 | 0,00176 | 0,00047 | 0,00108 |
| 80 | 0,00100 | 0,00099 | 0,00165 | 0,00049 | 0,00099 |
| 90 | 0,00086 | 0,00084 | 0,00149 | 0,00047 | 0,00084 |
| 100 | 0,00077 | 0,00076 | 0,00122 | 0,00044 | 0,00075 |
| 110 | 0,00068 | 0,00067 | 0,00094 | 0,00046 | 0,00067 |
| 120 | 0,00061 | 0,00060 | 0,00074 | 0,00052 | 0,00060 |
| 130 | 0,00054 | 0,00053 | 0,00065 | 0,00048 | 0,00053 |
| 140 | 0,00049 | 0,00048 | 0,00058 | 0,00041 | 0,00047 |
| 150 | 0,00044 | 0,00043 | 0,00052 | 0,00039 | 0,00042 |
| 160 | 0,00040 | 0,00039 | 0,00046 | 0,00038 | 0,00038 |
| 170 | 0,00037 | 0,00035 | 0,00041 | 0,00040 | 0,00035 |
| 180 | 0,00034 | 0,00032 | 0,00036 | 0,00039 | 0,00032 |
| 190 | 0,00031 | 0,00029 | 0,00033 | 0,00042 | 0,00029 |
| 200 | 0,00029 | 0,00027 | 0,00030 | 0,00044 | 0,00027 |

Как видно, наибольшая погрешность при наблюдается у решения, полученного по схеме A3. При максимальной становится погрешность решения по схеме A4. Погрешности по схемам A2 и A5 практически идентичны. Графическое отображение полученных результатов представлено на рисунке 4.1.

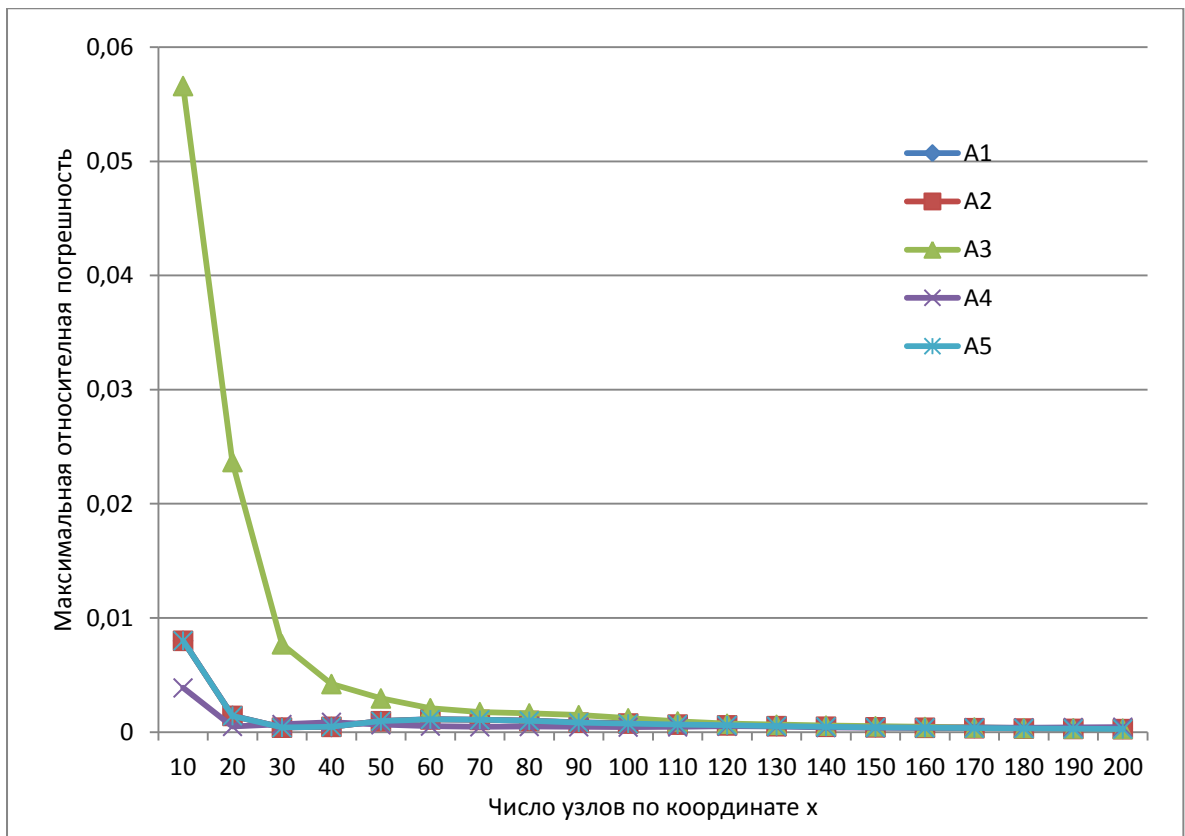


Рисунок 4.1 Результаты расчета с шагом по времени 0,01с

В таблице 4.5 приведены результаты расчета с шагом по времени с. Графическое отображение представлено на рисунке 4.2.

Таблица 4.5

Результат расчета при времени

| Число узлов | Максимальная относительная погрешность решения по схеме | | | | |
|-------------|---|---------|---------|---------|---------|
| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 |
| 10 | 0,00803 | 0,00802 | 0,05677 | 0,00388 | 0,00801 |
| 20 | 0,00151 | 0,00147 | 0,02384 | 0,00046 | 0,00147 |
| 30 | 0,00052 | 0,00046 | 0,00788 | 0,00063 | 0,00046 |
| 40 | 0,00059 | 0,00047 | 0,00404 | 0,00082 | 0,00045 |
| 50 | 0,00111 | 0,00102 | 0,00278 | 0,00061 | 0,00101 |
| 60 | 0,00123 | 0,00112 | 0,00221 | 0,00045 | 0,00112 |
| 70 | 0,00111 | 0,00111 | 0,00193 | 0,00042 | 0,00110 |
| 80 | 0,00110 | 0,00100 | 0,00181 | 0,00044 | 0,00100 |
| 90 | 0,00100 | 0,00084 | 0,00164 | 0,00042 | 0,00089 |
| 100 | 0,00092 | 0,00078 | 0,00137 | 0,00037 | 0,00077 |
| 110 | 0,00084 | 0,00071 | 0,00109 | 0,00039 | 0,00070 |
| 120 | 0,00077 | 0,00064 | 0,00088 | 0,00047 | 0,00063 |
| 130 | 0,00072 | 0,00059 | 0,00074 | 0,00043 | 0,00053 |
| 140 | 0,00068 | 0,00055 | 0,00063 | 0,00038 | 0,00051 |
| 150 | 0,00064 | 0,00051 | 0,00056 | 0,00036 | 0,00047 |

| | | | | | |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|
| 160 | 0,00060 | 0,00048 | 0,00051 | 0,00036 | 0,00043 |
| 170 | 0,00058 | 0,00047 | 0,00049 | 0,00037 | 0,00040 |
| 180 | 0,00056 | 0,00046 | 0,00045 | 0,00038 | 0,00038 |
| 190 | 0,00054 | 0,00045 | 0,00040 | 0,00042 | 0,00036 |
| 200 | 0,00052 | 0,00045 | 0,00034 | 0,00047 | 0,00034 |

С увеличением шага по времени ожидаемо уменьшение точности численного расчета. Как и ранее, до определенного значения наибольшая погрешность наблюдается у решения по схеме А3. При погрешность схем А2 и А5 практически совпадают. При погрешность наблюдается у традиционной явной схемы А1.

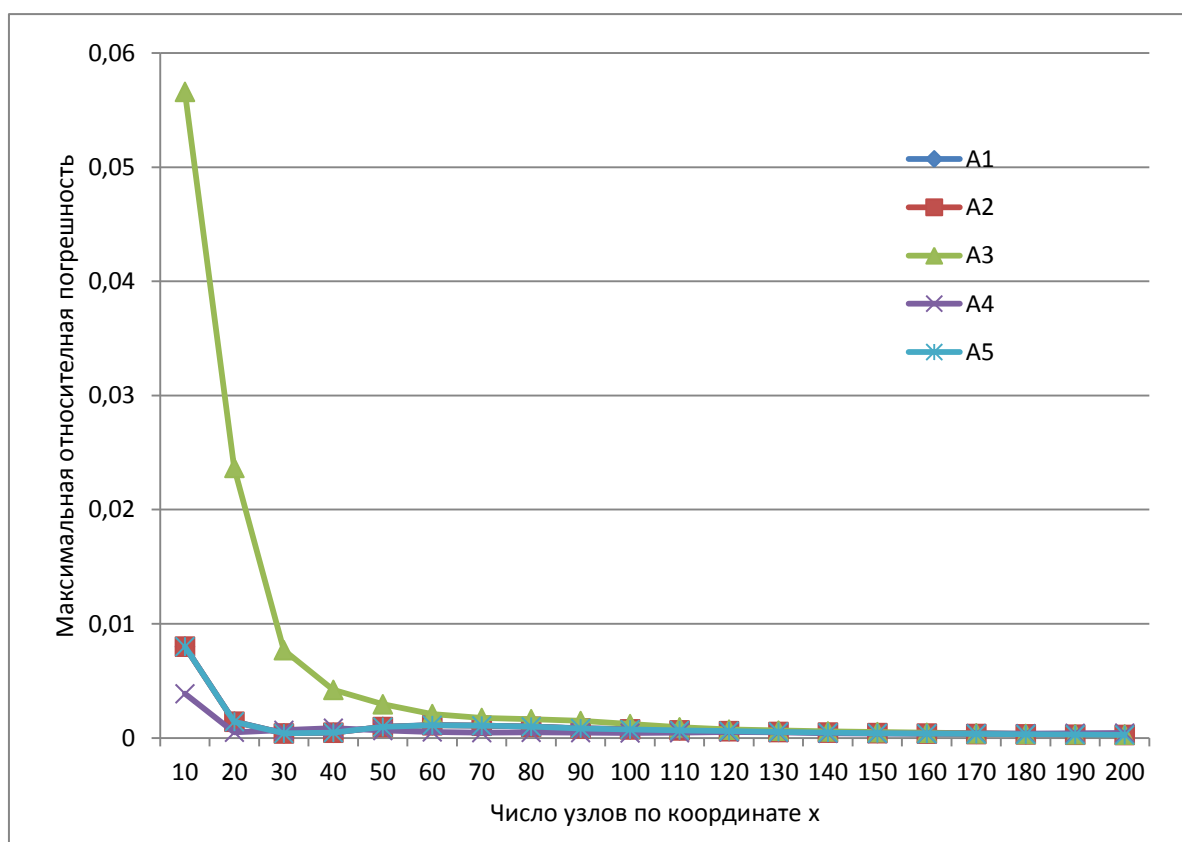


Рисунок 4.2 Результаты расчета с шагом по времени 0,05с

Для шага с результаты приведены в таблице 4.6. Графическое отображение представлено на рисунке 4.3.

Таблица 4.6

Результат расчета при времени

| Число узлов | Максимальная относительная погрешность решения по схеме | | | | |
|-------------|---|---------|---------|---------|---------|
| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 |
| 10 | 0,00806 | 0,00803 | 0,05698 | 0,00385 | 0,00802 |
| 20 | 0,00160 | 0,00152 | 0,02407 | 0,00041 | 0,00152 |
| 30 | 0,00067 | 0,00053 | 0,00811 | 0,00056 | 0,00053 |
| 40 | 0,00084 | 0,00057 | 0,00381 | 0,00075 | 0,00056 |

Окончание таблицы 4.6

| | | | | | |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|
| 50 | 0,00127 | 0,00108 | 0,00277 | 0,00054 | 0,00107 |
| 60 | 0,00149 | 0,00108 | 0,00242 | 0,00039 | 0,00119 |
| 70 | 0,00141 | 0,00120 | 0,00213 | 0,00037 | 0,00116 |
| 80 | 0,00136 | 0,00118 | 0,00201 | 0,00040 | 0,00106 |
| 90 | 0,00128 | 0,00108 | 0,00183 | 0,00044 | 0,00094 |
| 100 | 0,00119 | 0,00097 | 0,00155 | 0,00046 | 0,00087 |
| 110 | 0,00112 | 0,00090 | 0,00126 | 0,00049 | 0,00079 |
| 120 | 0,00108 | 0,00084 | 0,00104 | 0,00052 | 0,00072 |
| 130 | 0,00104 | 0,00076 | 0,00089 | 0,00054 | 0,00067 |
| 140 | 0,00099 | 0,00074 | 0,00079 | 0,00058 | 0,00063 |
| 150 | 0,00096 | 0,00073 | 0,00068 | 0,00062 | 0,00059 |
| 160 | 0,00094 | 0,00074 | 0,00062 | 0,00067 | 0,00056 |
| 170 | 0,00092 | 0,00076 | 0,00057 | 0,00073 | 0,00054 |
| 180 | 0,00092 | 0,00080 | 0,00050 | 0,00080 | 0,00052 |
| 190 | 0,00092 | 0,00084 | 0,00042 | 0,00089 | 0,00050 |
| 200 | 0,00093 | 0,00091 | 0,00050 | 0,00099 | 0,00048 |

Здесь явно прослеживается монотонное убывание погрешности численных решений по каждой из схем с ростом числа узлов по пространственной координате до определенного значения, а далее монотонное возрастание погрешности решений. Вновь при малых x наибольшую погрешность имеют решения по схеме А3.

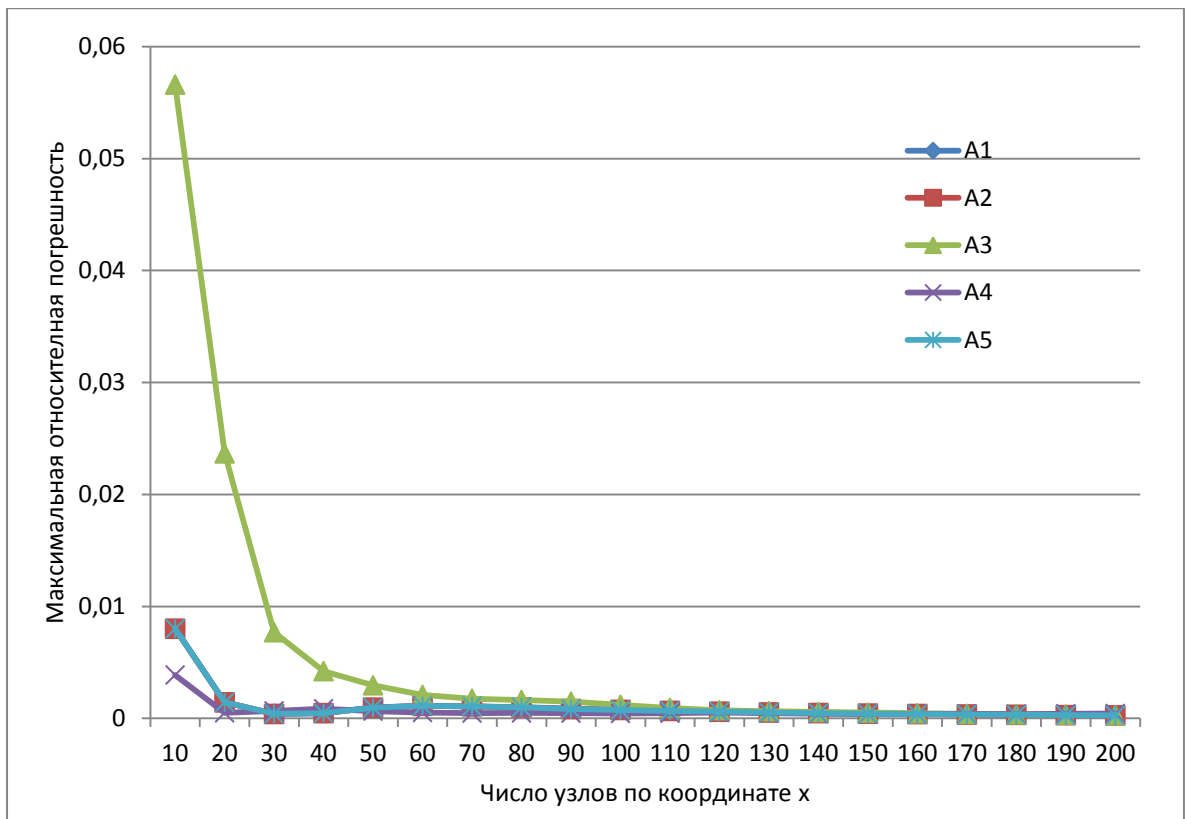


Рисунок 4.3 Результаты расчета с шагом по времени 0,1с

Для шага с результаты приведены в таблице 4.7. Графическое отображение представлено на рисунке 4.4.

Таблица 4.7

Результат расчета при времени

| Число узлов | Максимальная относительная погрешность решения по схеме | | | | |
|-------------|---|---------|---------|---------|---------|
| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 |
| 10 | 0,00826 | 0,00814 | 0,05859 | 0,00375 | 0,00811 |
| 20 | 0,00228 | 0,00192 | 0,02584 | 0,00107 | 0,00192 |
| 30 | 0,00304 | 0,00154 | 0,00992 | 0,00128 | 0,00152 |
| 40 | 0,00340 | 0,00175 | 0,00540 | 0,00148 | 0,00172 |
| 50 | 0,00423 | 0,00221 | 0,00449 | 0,00186 | 0,00215 |
| 60 | 0,00435 | 0,00226 | 0,00407 | 0,00211 | 0,00218 |
| 70 | 0,00426 | 0,00238 | 0,0369 | 0,00222 | 0,00220 |
| 80 | 0,00440 | 0,00242 | 0,00345 | 0,00249 | 0,00215 |
| 90 | 0,00456 | 0,00265 | 0,00315 | 0,00274 | 0,00221 |
| 100 | 0,00459 | 0,00284 | 0,00270 | 0,00297 | 0,00225 |
| 110 | 0,00456 | 0,00327 | 0,00222 | 0,00339 | 0,00226 |
| 120 | 0,00469 | 0,00268 | 0,00192 | 0,00381 | 0,00232 |
| 130 | 0,00475 | 0,00433 | 0,00242 | 0,00446 | 0,00238 |
| 140 | 0,00475 | 0,00506 | 0,00304 | 0,00522 | 0,00241 |
| 150 | 0,00476 | 0,00601 | 0,00385 | 0,00615 | 0,00243 |
| 160 | 0,00482 | 0,00721 | 0,00494 | 0,00737 | 0,00249 |
| 170 | 0,00484 | 0,00862 | 0,00631 | 0,00879 | 0,00254 |
| 180 | 0,00483 | 0,01029 | 0,00795 | 0,01044 | 0,00257 |
| 190 | 0,00486 | 0,01231 | 0,00990 | 0,01248 | 0,00261 |
| 200 | 0,00489 | 0,01458 | 0,01213 | 0,01477 | 0,00267 |

Здесь, как и в расчетах при с, прослеживается влияние погрешности аппроксимации схем A2-A4 на погрешность получаемых численных решений. Действительно, погрешность аппроксимации построенных схем A2-A4 равна — . А это и приводит к тому, что при убывании до определенного значения величины шага точность аппроксимации схем увеличивается за счет убывания — , но при дальнейшем уменьшении величина — растет, что приводит к увеличению погрешности. Погрешность аппроксимации схемы A5 равна — , соответственно, погрешность решений по этой схеме с увеличением растет медленнее.

Окончание таблицы 4.8

| | | | | | | |
|-----|-----------------|---------|---------|---------|---------|----------------|
| 280 | 0,00495 | 0,04571 | 0,04336 | 0,04065 | 0,00316 | 0.23994 |
| 290 | 0,00494 | 0,05134 | 0,04902 | 0,04589 | 0,00324 | 0.27681 |
| 300 | 0,00495 | 0,05745 | 0,05514 | 0,05761 | 0,00334 | 0.29622 |
| 310 | 0,00496 | 0,06383 | 0,06154 | 0,06400 | 0,00334 | 0.31630 |
| 320 | 0,00495 | 0,07079 | 0,06853 | 0,07094 | 0,00343 | 0.33704 |
| 330 | 0,00498 | 0,07804 | 0,07580 | 0,07819 | 0,00365 | 0.35843 |
| 340 | 0,00497 | 0,08569 | 0,08348 | 0,08569 | 0,00376 | 0.38048 |
| 350 | 0,00497 | 0,09379 | 0,09160 | 0,09393 | 0,00398 | 0.40319 |
| 360 | 0,00498 | 0,10211 | 0,09995 | 0,10226 | 0,00403 | 0.42656 |
| 370 | 0,00498 | 0,11100 | 0,10886 | 0,11112 | 0,00416 | 0.45059 |
| 380 | 0,00498 | 0,12011 | 0,11800 | 0,12023 | 0,00432 | 0.47528 |
| 390 | 0,00514 | 0,12952 | 0,12745 | 0,12964 | 0,00448 | 0.50062 |
| 400 | 15,82934 | 0,13937 | 0,13732 | 0,13948 | 0,00465 | 0.52662 |
| 410 | 24.01707 | 0,14936 | 0,14733 | 0,14946 | 0,00484 | 0.55328 |
| 420 | 29,86263 | 0,15974 | 0,15775 | 0,15974 | 0,00503 | 0.58060 |

Как видно, построенные схемы А2-А5 остаются устойчивыми при нарушении условия (4.3), а существенная погрешность решений, получаемых по схемам А2-А4, обусловлена порядком аппроксимации этих схем, влекущим жесткие ограничения на соотношение шагов по времени и пространственной координате.

4.4. Машинное время счета для построенных схем

С практической точки зрения для решения прикладных задач представляется интересным вопрос о скорости счета с применением построенных схем. Для его выяснения для каждой из схем А1-А5 было замерено время решения задачи (4.1) с шагом по времени с. Замеры времени работы проводились на персональном компьютере с процессором архитектуры x86 с тактовой частотой 2,01 ГГц, объемом ОЗУ 2ГБ, ОС Microsoft 7 32-bit. Результаты приведены в таблице 4.9.

Таблица 4.9

Время решения задачи построенными схемами

| Число узлов | Время решения, с | | | | |
|-------------|------------------|-------|-------|-------|-------|
| | А1 | А2 | А3 | А4 | А5 |
| 10 | 0,078 | 0,172 | 0,312 | 0,406 | 0,156 |
| 20 | 0,141 | 0,281 | 0,531 | 0,765 | 0,282 |
| 30 | 0,203 | 0,407 | 0,782 | 1,078 | 0,406 |
| 40 | 0,266 | 0,516 | 1,016 | 1,437 | 0,531 |
| 50 | 0,344 | 0,641 | 1,250 | 1,766 | 0,640 |
| 60 | 0,360 | 0,766 | 1,500 | 2,110 | 0,765 |
| 70 | 0,438 | 0,891 | 1,735 | 2,500 | 0,891 |
| 80 | 0,500 | 1,000 | 1,985 | 2,813 | 1,000 |

| | | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 90 | 0,578 | 1,125 | 2,219 | 3,078 | 1,140 |
| 100 | 0,625 | 1,235 | 2,437 | 3,375 | 1,297 |
| 110 | 0,687 | 1,359 | 2,703 | 5,344 | 1,469 |
| 120 | 0,735 | 1,484 | 2,985 | 3,922 | 1,891 |
| 130 | 0,781 | 1,594 | 3,172 | 5,016 | 1,641 |
| 140 | 0,860 | 1,750 | 3,422 | 4,922 | 1,734 |
| 150 | 0,906 | 1,875 | 3,641 | 4,641 | 1,843 |
| 160 | 0,953 | 1,969 | 3,875 | 4,859 | 1,984 |
| 170 | 1,031 | 2,078 | 4,125 | 5,078 | 2,094 |
| 180 | 1,078 | 2,219 | 4,359 | 5,422 | 2,203 |
| 190 | 1,141 | 2,328 | 4,594 | 5,500 | 2,328 |
| 200 | 1,187 | 2,437 | 4,828 | 5,657 | 2,469 |

Из данных в таблице видно, что по сравнению с традиционной явной схемой скорость счета по схемам А2, А3 и А4 ниже примерно в 2, 4 и 5 раз соответственно. Скорость счета по схем А5 такая же, как и по схеме А2. Полученные результаты для схем А2, А2 и А5 вполне соотносятся с расчетными формулами, выведенными для этих схем в данной работе, и использование предиктор-корректорного метода повышения точности этих схем. Действительно, просчет на один временной слой по схемам А2 и А5 требует в 2 раза больше арифметических действий, чем по схеме А1. А расчет по схеме А3 требует в 2 раза больше действий по сравнению со схемой А2, что связано с необходимостью вычисления коэффициента температуропроводности в двух полуцелых узлах – и – для расчета значения искомой функции в узле с номером . При использовании схемы А4 число операций при переходе на следующий временной слой не является постоянной величиной. Этот показатель зависит от конкретного вида функции в уравнении (3.69), которая может быть различной на разных промежутках линейности непостоянных коэффициентов задачи (4.1). Этим вызваны «скачки» времени счета, которые можно наблюдать в таблице 4.9.

4.5. Выводы по разделу

В данном разделе проведены сравнительные численные расчеты на примере решения конкретной смешанной задачи третьего рода для оценивания сходимости разработанных алгоритмов. Было получено практическое подтверждение эффективности использования предиктор-корректорного метода повышения точности. На основе анализа полученных результатов можно сделать вывод о достаточно хороших свойствах предложенных методов даже при . Для получения приемлемой точности, конечно, следует выбирать не слишком большой шаг по времени. Однако с уменьшением шага по времени пропорционально увеличивается время машинного счета.

Результаты численных экспериментов также показали, что все построенные разностные схемы А2-А5, остаются устойчивыми при нарушении критического для традиционной явной схемы условия устойчивости

— — — — —

Среди построенных схем с практической точки зрения наилучшими свойствами обладает схема А5. Во всех проведенных испытаниях погрешность полученных по ней решений оказалось минимальной.

В случае решения задачи для одномерного уравнения теплопроводности лучше использовать один из вариантов чисто неявной разностной схемы. Построенные же явные схемы могут с успехом применяться для решения многомерных смешанных задач для квазилинейного уравнения теплопроводности, тогда как попытка обобщения на случай многих измерений чисто неявной схемы наталкивается на ряд принципиальных трудностей [10]. Кроме того, явная схема удобна для распараллеливания вычислений на многопроцессорных ЭВМ. Исследуемая область разбивается на требуемое количество подобластей, на каждую из которых приходится соответствующая доля от общего числа узлов исходной разностной сетки. Вычисление температур на текущем шаге в таких подобластях ведется параллельно потоками, независимо друг от друга, при этом время счета сокращается пропорционально общему количеству выделенных подобластей [11].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения данной работы были рассмотрены вопросы численного решения третьей смешанной задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности. В рассмотренной постановке коэффициенты, зависящие от температуры, предполагались заданными таблично в отдельных точках, на основе которых затем строилась их кусочно-линейная аппроксимация. Использование именно такой аппроксимации гарантирует, что в любой точке диапазона задания коэффициентов их значение не становится отрицательным, что противоречило бы физической сущности этих величин.

Традиционно применяемые для решения поставленной задачи методы: линейный и нелинейный итерационный варианты чисто неявной разностной схемы, метод Ньютона, - являются безусловно сходящимися, что позволяет выбирать шаг по времени, исходя только из соображений точности решения и времени его нахождения. Но они обладают серьезным недостатком: при решении многомерных задач возникают принципиальные трудности при попытке обобщения этих методов на пространство переменных размерности больше 1.

В работе на основе комбинации явной и неявной разностных схем с использованием линейных дифференциальных уравнений первого порядка были построены и программно реализованы варианты явной разностной схемы решения поставленной задачи, легко обобщающиеся на пространство переменных большей размерности:

- явная схема для функции (см. п. 3.4.4.1);
- явная для функции количества теплоты единицы объема (см. п. 3.4.4.2).

С применением принципа замороженных коэффициентов было получено подтверждение безусловной устойчивости этих систем.

Для расчета значений искомой функции в фиктивных узлах с учетом кусочно-линейной аппроксимации известных функций, входящих в постановку задачи, предложен алгоритм, в котором для аппроксимации значений искомой функции в граничных точках используются формулы третьего порядка точности, а нахождение значения в фиктивном узле сводится к решению набора квадратных уравнений.

После проведения серии численных экспериментов было установлено, что теоретический порядок аппроксимации — построенных схем на практике приводит к тому, что погрешность получаемых решений при нарушении условия устойчивости для традиционной явной схемы становится весьма существенной, хотя профиль температуры при этом остается гладким.

После анализа построенных вариантов явной схемы был предложен способ повышения точности аппроксимации ими квазилинейного уравнения теплопроводности, состоящий в разложении сечений неизвестной функции в пространственных узлах сетки на следующем временном слое в ряд Тейлора в окрестности значений на текущем временном слое (с удержанием членов

разложения порядка малости до первого включительно). Был построен еще один вариант явной схемы с порядком аппроксимации — .

Результаты численных расчетов показали, что при счете по схеме повышенного порядка аппроксимации погрешность решения существенно уменьшилась.

Возможные направления дальнейшей работы по затронутым вопросам:

- теоретическое исследование сходимости предложенных методов и получение теоретических оценок их точности;
- применение идеи, положенных в основу разработанных методов, в задачах большей размерности;
- исследование вопросов распараллеливания предложенных алгоритмов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. –М.: Наука, 1978. – 512 с.
- 2 Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. –М.: Наука, 1971. – 552 с.
- 3 Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков; под общ. ред. Н.И. Тихонова. – 2-е изд.- М.: Физматлит, 2002. – 630 с.
- 4 Галактионов, В.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры /В.А. Галактионов, В.А. Дородницын, Г.Г. Еленин // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж. – 1986. – 28. – С. 95-205.
- 5 Самарский, А.А. Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин. –М.: Наука, 1973. – 415 с.
- 6 Волчинская, В.И. Об итерационной схеме решения квазилинейного уравнения теплопроводности / В.И. Волчинская // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1971. – 11:2. – С. 518-520.
- 7 Самарский, А.А. Разностные методы решения задачи газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.И. Попов. –М.: Наука, 1992. – 424 с.
- 8 Геренштейн, А.В. Устойчивые явные схемы для уравнения теплопроводности / А.В. Геренштейн, Н. Машрабов, Е.А. Геренштейн //Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – С. 9-11.
- 9 Седов, Л.И. Методы теории размерностей и теории подобия в механике / Л.И. Седов. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1944. – 136 с.
- 10 Самарский, А.А. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа / А.А. Самарский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1962. – 2:1. – С. 25-26.
- 11 Багмутов, В.П. Моделирование тепловых процессов при поверхностной обработке неоднородных металлических тел высокотемпературным движущимся импульсным источником / В.П. Багмутов, И.Н. Захаров // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. Т. 4, №1. С. 5-16.
- 12 Кудряшов, Н.А. Приближенное решение одномерных задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке / Н.А. Кудряшов, М.А. Чмыхов // Журнал вычислительной математики и физики. – 2007. – Т. 47, №1. С. 110-120.
- 13 Зельдович, Я.Б. К теории распределения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры / Я.Б. Зельдович, А.С. Компанеец // К 70-летию А.Ф. Иоффе: сб. науч. тр. – М.: Изд-во АН СССР, 1950. – С. 61-71.
- 14 Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. – М.: Мир, 1982. – 235 с.
- 15 Абловиц М., Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур – М:Мир, 1987. — 480 с.

- 16 Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. Харьков: Онти-НКТП-ДНТВУ, 1939. — 720 с.
- 17 Андрианов, И.В. Асимптотическая математика и синергетика / И.В. Андрианов, Р.Г. Баранцев, Л.И. Маневич. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 304 с.
- 18 Арсенин, В.Я. Методы математической физики и специальные функции / В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1984. — 384 с.
- 19 Ахромеева, Т.С. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский. М.: Наука, 1992. — 542 с.
- 20 Баренблатт, Г.И. // ПММ, 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 67—78.
- 21 Баренблатт, Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. — М.: Недра, 1984. — 208 с.
- 22 Бахолдин, И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды / И.Б.Бахолдин. — М.: Физматлит, 2004. — 318 с.
- 23 Борисов, А.В. Динамика твердого тела / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. — М.:—Ижевск: РХД, 2001. — 384 с.
- 24 Борисов, А.В. Неголономные динамические связи / А.В. Борисов, И. С. Мамаев. — М.—Ижевск: РХД, 2002. — 328 с.
- 25 Брюно, А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях / А.Д. Брюно. М.: Наука, Физматлит, 1998. — 288 с.
- 26 Брюно А.Д. // Успехи математических наук, 2004. Т.59. №3. С. 31–80.
- 27 Бхатнагар, П. Нелинейные волны в однородных дисперсных системах / П. Бхатнагар. М.: Мир, 1983. — 136 с.
- 28 Вернов С.Ю. // Теоретическая и математическая физика, 2006. Т.146. №1. С. 161–171.
- 29 Волосевич, П.П. Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса / П.П. Волосевич, Е.И. Леванов. — М.: МФТИ, 1997. — 234 с.
- 30 Гельфанд И.М., Левитан Б.М. // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1951. Т.45. №4. С. 309–360.
- 31 Гинзбург, В.И. К теории сверхпроводимости / В.И. Гинзбург, Л.Д. Ландау // ЖЭТФ, 1950. Т.20. С. 1064.
- 32 Голубев, В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки / В.В. Голубев. — М.: РХД, 2002.— 288 с.
- 33 Голубев, В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев. — М.: ГИТТЛ, Физматлит, 1941. — 400 с.
- 34 Доод, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Доод, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. — М.: Мир, 1988. — 696 с.
- 35 Дубровин, Б.А. Римановы поверхности и нелинейные уравнения / Б.А. Дубровин. — М.:—Ижевск: РХД, 2001. — 213 с.
- 36 Зельдович, Я.Б. Физика ударных волн и высоко температурных гидродинамических явлений / Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. — М.: Наука, 1966. — 686 с.
- 37 Зельдович, Я.Б. Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либрович, Г.М. Махвиладзе. — М.: Наука, 1980. — 478 с.

- 38 Ильичев, А.Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики / А.Т. Ильичев.-М.: Физматлит, 2003. — 256 с.
- 39 Ибрагимов, Н.Х. Группы преобразований в математической физике / Н.Х. Ибрагимов. –М. Наука, 1983. — 280 с.
- 40 Ибрагимов, Н.Х. Алгебра группового анализа / Н.Х. Ибрагимов. –М.: Знание, 1989. —48 с.
- 41 Ибрагимов, Н.Х. Опыт группового анализа / Н.Х. Ибрагимов. –М.: Знание, 1991. —48 с.
- 42 Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. –М.: Наука, 1978. — 512 с.
- 43 Карташов, А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташов, Б.Л. Рождественский. –М.: Наука, 1986. — 288 с.
- 44 Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. –М.: Наука, 1971. — 576 с.
- 45 Полубаринова – Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова - Кочина. –М.: Наука, 1977. — 664 с.
- 46 Marray, J.D. Mathematical Biology / J.D. Marray. Springer–Verlag, 2001. 556 p.
- 47 Newell, A.C. Review of the finite bandwidth concept, in "Integrability of Continuous Systems" Ed. H.H.E. Leipholz / A.C. Newell, J.A. Whitehead. Berlin:Springer–Verlag, 284 140.
- 48 Olver, P.J. Lecture Notes in Physics / P.J. Olver. N.Y.: Springer, 1984. N195. P.273–290.