

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра прикладной математики и программирования
Направление подготовки 01.03.02. Прикладная математика и информатика

РАБОТА ПРОВЕРЕНА

Рецензент, _____,

_____/В.Л. Дильман

« ____ » _____ 2018г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н.,
доцент

_____/А. А. Замышляева

« ____ » _____ 2018 г.

Задача линейного сопряжения (обратная граничная задача) для нахождения критических напряжений в неоднородном цилиндрическом стержне

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–01.03.02.2018.99.ПЗ ВКР

Руководитель работы, к.ф.-м.н.,
доцент

_____/Т. В. Карпета

« ____ » _____ 2018 г.

Автор работы

студент группы ЕТ-412

_____/Л. А. Палеева

« ____ » _____ 2018 г.

Нормоконтролер, к.э.н., доцент

_____/Д.А. Дрозин

« ____ » _____ 2018 г.

Челябинск,
2018

АННОТАЦИЯ

Палеева Л.А. Задача линейного сопряжения (обратная граничная задача) для нахождения критических напряжений в неоднородном цилиндрическом стержне. – Челябинск: ЮУрГУ, ММиКН-412, 49 с., 15 ил., библиогр. список – 38 наим., 12 прил.

В работе исследована математическая модель напряженного состояния цилиндрического соединения. Обратная граничная задача сформулирована и решена в виде приближенного соотношения между величинами. Также, построен и реализован алгоритм решения задачи сопряжения, вычислена критическая нагрузка. Сравнение полученных зависимостей с более ранними исследованиями показало, что результаты наиболее близки к данным реальных экспериментов при использовании моделей данной работы. Интерполяция функций осуществлялась в пакете MatLab с использованием узлов Чебышева.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
Глава 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	8
1.1 Объект изучения	8
1.2 Схема и методы исследования математической модели	11
1.3 Интерполирование по Чебышевским узлам	12
1.4 Выводы по главе	14
Глава 2. ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНТАКТНОЙ ГРАНИЦЕ	15
2.1. Использование метода характеристик для исследования НДС МП слоя в окрестности свободной границы	15
2.2 Приближенное интегрирование системы характеристических уравнений	16
2.3. Решение задачи сопряжения.	18
2.4. Нахождение значения координаты точки F в критический момент нагружения	20
2.5 Выводы по главе	22
Глава 3. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МЕНЕЕ ПРОЧНОГО СЛОЯ ПРИ ГРП	23
3.1. Исследование математической модели, при которой касательные напряжения изменяются линейно поперек менее прочного слоя.....	24
3.2 Исследование модели, когда касательные напряжения изменяются линейно в радиальном направлении.....	24
3.3 Выводы по главе	26
Глава 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ.....	27
4.1. Вычисление критической нагрузки, при линейном изменении касательных напряжения в радиальном направлении	28
4.2 Сравнение полученных данных с экспериментальными и с результатами более ранних исследований.	31
4.3 Выводы по главе	32
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	33
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	34
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Интерполяция функции	37
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Интерполяция функции	38

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Интерполяция функции	39
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Интерполяция функции	40
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Интерполяция функции	41
ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Интерполяция функции	42
ПРИЛОЖЕНИЕ 7. Интерполяция функции	43
ПРИЛОЖЕНИЕ 8. Интерполяция функции	44
ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Интерполяция функции	45
ПРИЛОЖЕНИЕ 10. Интерполяция функции	46
ПРИЛОЖЕНИЕ 11. Интерполяция функции	47
ПРИЛОЖЕНИЕ 12. Программа для построения графика зависимости критического напряжения от толщины прослойки	48

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

В работе используются следующие обозначения:

– относительная толщина слоя;

индекс «БП» («МП») сверху – указывает на отношение данной величины к более прочной (менее прочной) части соединения

В работе используются следующие сокращения:

ММ – математическая модель;

НС – напряженное состояние;

ОМ – основной материал;

МП – менее прочный; БП – более прочный;

ГППС – гипотеза плоских поперечных сечений;

ГРП – гипотеза разделения переменных.

ВВЕДЕНИЕ

Неоднородные соединения встречаются на практике повсеместно. К ним относятся, прежде всего, сварные соединения в различных конструкциях, конструкции из многослойных материалов, клееные, паяные соединения и др. Исследованию прочности таких соединений посвящена обширная литература. Одно из первых упоминаний данной темы встречается в работе Л. Прандтля (1924г., на языке оригинала [1], в переводе [2]) о НС при плоской деформации бесконечной пластичной прослойки, которая подвержена сжимающим усилиям. Существует большое количество статей, а также глав в монографиях и учебниках, относящихся, к сжатию (осадке) пластического слоя двумя жесткими плитами. В различных работах, посвященных общей теории обработки металлов давлением, исследовалась возможность скольжения пластического слоя (заготовки) по контактными поверхностям, что приводило к краевым задачам, условия которых были зависимы от трения между плитой и заготовкой. Среди наиболее известных в данной области исследований выделяют работы А.А. Ильюшина [3], Л.М. Качанова [4], В.Л. Колмогорова, А.А. Богатова и др [5], А. Надаи [6], Г.А. Смирнова-Аляева [7], В.В. Соколовского [8], И.Я. Тарновского, Д.А. Поздеева, О.А. Ганаго и др [9], А.Д. Томленова [10], Э. Томсена, Ч. Янга, Ш. Кобаяши [11], Е.П. Унксова, У. Джонсона, В.Л. Колмогорова и др. [12, 13]. В ряде работ Д.Д. Ивлева, его соавторов Р.И. Непершина, Л.А. Максимовой, Ю.Н. Радаева и др. (см [14] и литературу в [14]). В вышеупомянутых статьях и книгах изучалось НДС прослойки из идеально пластического материала методами, использующими гипотезу полной пластичности и условие пластичности Треска.

В данной работе рассмотрена математическая модель напряженного состояния сплошного круглого стержня из упрочняемого материала, содержащего поперечный слой из МП материала, подверженного осевой нагрузке. Геометрические размеры данного участка стержня изменяются при возрастании осевой нагрузки, что приводит к приращению напряжений, которые компенсируются за счет упрочнения материала стержня. Исследуется стадия нагружения, при которой основной металл подвергается деформации пластически устойчиво, а материал МП слоя находится в состоянии пластической неустойчивости и его деформация происходит без увеличения нагрузки извне, т. е. находится в критическом состоянии (состоянии предразрушения). За счет контактного упрочнения в МП слое в этот момент происходит вовлечение в неустойчивое пластическое течение приконтактных участков ОМ.

Цель работы – решить задачу сопряжения для нахождения критических напряжений в неоднородном цилиндрическом стержне, и на этой основе вычислить критическую нагрузку.

Для реализации цели работы решаются следующие задачи:

1. Исследовать математическую модель НС цилиндрического соединения с МП поперечным однородным слоем в условиях осесимметричной деформации;
2. Сформулировать задачу сопряжения в виде приближенного соотношения между величинами

3. Построить и реализовать алгоритм решения задачи сопряжения.

4. Вычислить критическую нагрузку

Актуальность работы вытекает из целесообразности уточнения нормативных документов, регламентирующих методы определения механических свойств сварных соединений. Исследования по этой теме проводились рядом авторов: Л. М. Качановым, О. А. Бакши, М. В. Шахматовым и их сотрудниками, японскими учёными К. Satoh , М. Toyoda, исследователями научной школы Д.Д. Ивлева и многими другими. Во многих из этих работ для упрощения математической модели были применены гипотеза полной пластичности и гипотеза Прандтля о независимости касательных напряжений от одной из двух переменных. При этом экспериментально полученные данные о распределении напряжений в менее прочном поперечном слое значительно отличаются от этих исследований, что делает разработку более точных моделей актуальной.

Практическая значимость. Полученные результаты делают возможным определение прочности сварных соединений стержней арматуры при осевых нагрузках. Также, при помощи данного исследования становится возможным определение разрушающей растягивающей нагрузки, оказывающей влияние на стержневые образцы, которые содержат прослойки из менее прочного материала.

Глава 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В этой главе изучается напряженное состояние МП однородного поперечного слоя сплошного круглого стержня, который подвергается осевой нагрузке. Осевое сечение МП слоя является прямоугольником. НС рассматривается в пластической зоне деформирования в момент нагружения и является зависимым от наибольшего значения касательных напряжений в конкретный момент нагружения на контактной поверхности. Когда приконтактные участки БП части цилиндра также вовлечены в пластическое деформирование (в критическом состоянии МП слоя), получены явные аналитические зависимости критической нагрузки от механических и геометрических параметров стержня.

1.1 Объект изучения

Рассмотрим напряженное состояние МП в сравнении с ОМ, поперечного слоя прямоугольного сечения круглого сплошного стержня под растягивающей осевой нагрузкой (см рис. 1.1).

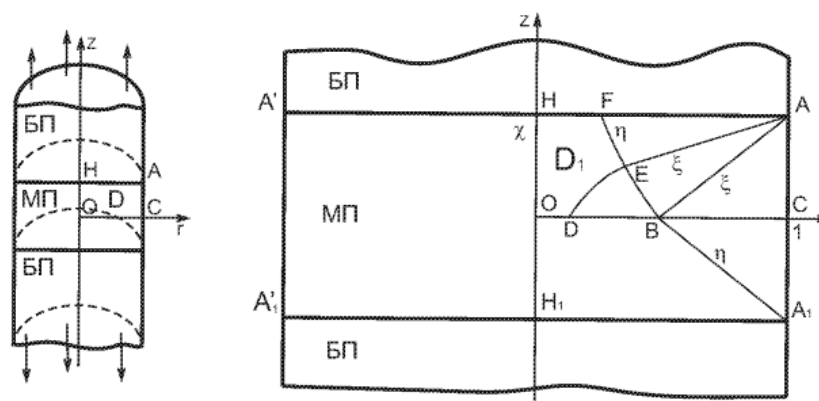


Рисунок 1.1 – Сплошной круглый стержень с МП поперечным слоем. Сечение МП слоя вдоль оси

Материалы слоя и ОМ стержня принимаются однородными, изотропными и упрочняемыми. Считается, что БП ОМ основного стержня, содержащего МП слой, деформируется упруго, а при высоких напряжениях участки, располагающиеся около слоя, также подвергаются пластической деформации. В случае, если ОМ и МП материал имеют одинаковые характеристики в упругой зоне, считается, что более высокие предел текучести и временное сопротивление имеет ОМ. Во время вывода ключевых формул материал МП слоя принято считать идеально жесткопластическим и удовлетворяющим допущениями, рассмотренным в [15, 4]. В данной работе в качестве условия пластичности принято условие Мизеса. По предположению, упрочнение носит изотропный характер. Полученные в данной работе результаты переносятся на упрочняемые материалы заменой в условии пластичности предела текучести

материала слоя на пластическую постоянную, которая характеризует момент достижения пластической неустойчивости материалом слоя.

В дальнейшем вычисления будут производиться с использованием безразмерных напряжений — — — —. В связи с тем, что различно в МП и БП частях стержня, то и нормировка напряжений в этих частях проводится по-разному.

В безразмерных обозначениях система записывается в виде:

$$\begin{aligned} & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} & (1.1) \\ & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} & (1.2) \\ & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} & (1.3) \\ & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} & (1.4) \\ & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} & (1.5) \end{aligned}$$

В данной системе используются следующие обозначения:
 – радиальное, осевое и кольцевое нормальные напряжения; – радиально-осевое касательное напряжение; – скорости перемещений.
 Условия (1.1), (1.2) называют уравнениями равновесия, (1.3) – условие пластичности Мизеса, (1.4) – закон пропорциональности девиаторов скоростей деформаций и напряжений; (1.5) – условие сохранения объёма пластического тела в процессе деформирования.

Пусть на поверхности НА (рис. 1)

$$(1.6)$$

Здесь α – коэффициент, который характеризует уровень внешней нагрузки. Его значение α^* в критический момент нагружения зависит от напряженного состояния всего соединения, а именно от того, будет ли пластически подвергаться пластической деформации БП часть соединения. Значение коэффициента α^* зависит от степени механической неоднородности соединения:

$$\text{---} \quad (1.7)$$

формы сечения, а также от относительной толщина слоя ϵ . Напряжения на контактной поверхности изменяются от нуля на оси стержня до своего наибольшего значения α (условие (1.6)). Известно, что

(1.8)

т.е. при $z = \infty$ максимум достигается в точке F (см. рис. 1.1) выхода на контактную поверхность характеристики, проходящей через точку A_1 . До начала течения слоя . Известная ранее методика, позволяющая вычислить α в критическом состоянии МП слоя ($\alpha^* = 1,22(K-1)$ при малых $K-1$ [16, 17]) имеет несоответствие с экспериментальными данными и приводит к заниженному оцениванию критической нагрузки. Дальнейшее исследование проводится в предположении, что на неконтактной границе (прямая AA_1 , рис. 1.1) осевого сечения нормальные и касательные внешние нагрузки отсутствуют:

(1.9)

На плоскости симметрии слоя $z = 0$ (ось ОС на рисунке 1.1) и на оси вращения значения касательных напряжений нулевые:

(1.10)

Уравнения равновесия на НА (контактной границе), с учетом нормировки размерных напряжений, имеют вид (учитывается, что в БП и МП частях стержня нормировка неодинакова):

(1.11)

На контактной поверхности распределение напряжений неизвестно, за исключением условия (1.6). При необходимости, можно вычислить значение коэффициента α^* в критический момент нагружения. Условия (1.6) – (1.10) не являются достаточными для получения единственного решения, что делает необходимым наложение некоторых ограничений на класс решений системы (1.1) – (1.5). Накладываемые ограничения базируются на опытных данных, особенностях исследуемой области, соображениях симметрии при рассмотрении сечения слоя. Соответственно, для наложения верных ограничений необходимо частично предугадывать НДС внутри исследуемой области. В рассмотренных работах использовались предположения о виде касательных и нормальных напряжений или соотношениях между ними [15, 18, 19, 20, 21, 22], а также о виде функций или скоростей перемещений (гипотезы плоских сечений [18, 19, 21]).

Во время решения осесимметричных задач возникает трудность, связанная со статической неопределимостью, т.е. два уравнения равновесия и уравнение пластичности содержат четыре неизвестных компоненты тензора напряжений , тогда система уравнений не является замкнутой в напряжениях.

В процессе деформации поперечные сечения МП слоя остаются практически плоскими в связи со сдерживающим влиянием БП части стержня, т.е.

(1.12)

где $W(z)$ – функция одной переменной. Эта гипотеза (ГППС) приводит к условию [23]. Тогда система уравнений (1.1) – (1.5) существенно упрощается, что позволяет описать НДС слоя замкнутой в напряжениях системой [23, 24]:

$$\text{---} \quad \text{---} \tag{1.13}$$

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \tag{1.14}$$

$$\text{---} \quad \text{---} \tag{1.15}$$

$$\text{---} \quad \text{---} \tag{1.16}$$

$$\text{---} \tag{1.17}$$

Если необходимо исследовать растяжение, то в равенстве (1.15) ставится знак «плюс». Соответственно, знак «минус» используется в случае, если дальнейшие рассуждения касаются сжатия. В случае растяжения упрощенный вариант равенства (1.15) выглядит следующим образом:

$$\text{---} \quad \text{---} \tag{1.18}$$

Данное выражение хорошо аппроксимирует (1.15) при малых значениях ϵ , присутствующих в слое при малой механической неоднородности, когда

Используя (1.9), (1.10) формулируются следующие граничные условия:

$$\tag{1.19}$$

Система (1.13) – (1.17) с использованием граничных условий (1.19) и (1.11) составляют математическую модель НДС пластического слоя при осесимметричной деформации в применении ГППС (1.12).

1.2 Схема и методы исследования математической модели

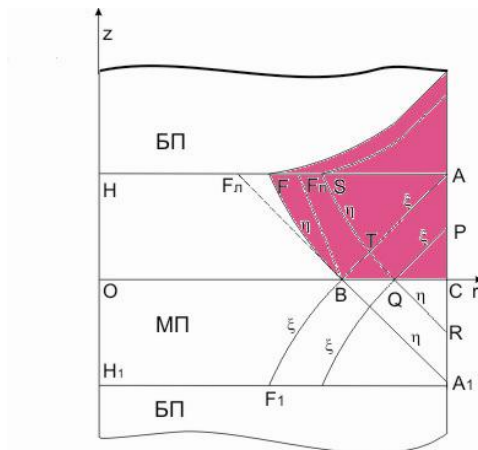


Рисунок 1.2 – Половина осевого сечения с МП поперечным слоем и фрагмент поля характеристик.

$$COHA = r; z, r \in 0; 1, z \in 0; \chi$$

I. Закрашенная область на рисунке (1.2) является окрестностью свободной границы. Для решения задачи напряжений на отрезке границы FA используем метод характеристик.

II. В окрестности оси вплоть до точки F находим приближённые решения, вводя ограничения на классы решений и используя результаты пункта.

Для решения систем нелинейных уравнений в частных производных использовались следующие методы:

1. Метод характеристик для решения краевой задачи системы уравнений гиперболического типа, с разрывными решениями на «внутренних» границах, в том числе в неоднородных средах.

2. В работе использовалось интерполирование по узлам Чебышева в пакете MATLAB многочисленных сложного вида функций, возникающих в процессе реализации вычислительных схем, что позволило получить явные зависимости от внешних параметров величины предельной нагрузки и сравнить ее с известными экспериментальными данными.

1.3 Интерполирование по Чебышевским узлам

В расчетах существенную роль играет интерполяция функций, то есть построение по заданной функции более простой и удобной в дальнейших вычислениях. При этом, значения новой и упрощаемой функций совпадают в некотором числе точек (рисунок 1.3). Здесь $f(x)$ – исходная функция, $\tilde{f}(x)$ – функция, совпадающая с исходной по значениям в узлах интерполяции, точки с координатами x_i – узлы интерполяции, а, b – границы отрезка интерполяции.

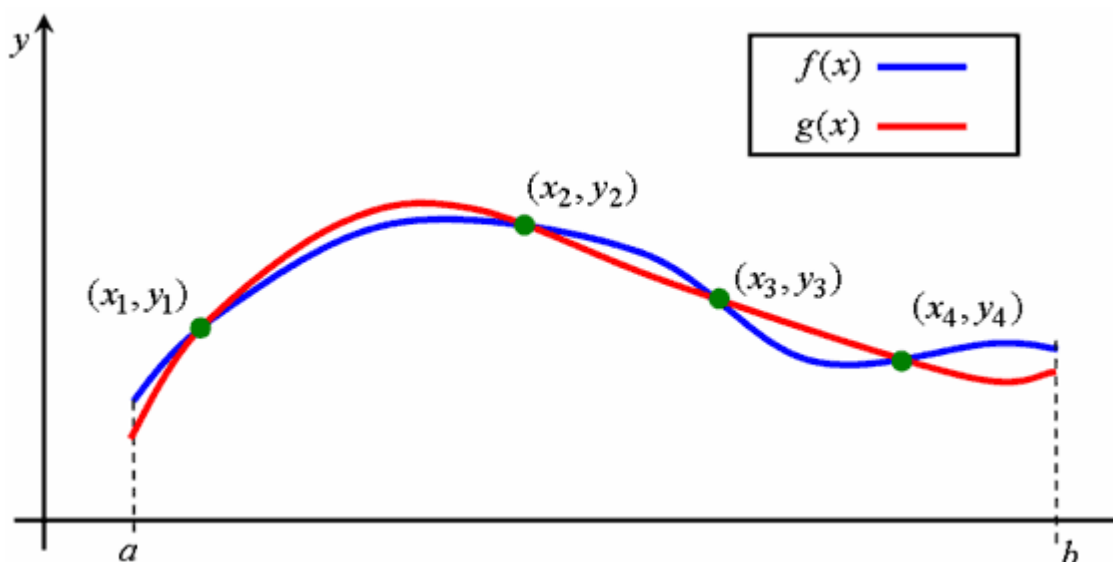


Рисунок 1.3 – Принцип интерполяции

На практике часто возникает задача построения функции по значениям, полученным в ходе эксперимента. В большинстве случаев эффективно осуществлять замену исходной функции полиномом [25].

Недостаток интерполяции полиномами заключается в том, что при увеличении степени полинома наблюдаются значительные отклонения от исходной функции на концах интервала. В данной работе решено использовать полиномы второй степени. Выбор связан с тем, что на отрезке интерполяции (величина левой границы принимается равной нулю, а правой 0,6) значения полученного полинома мало отличаются от значений исходной функции. Также, в связи с невысокой степенью полинома, на концах интервала значительных отклонений не наблюдается.

Существует много известных методов интерполирования, рассмотренных в [26, 27]. В данной работе будет использоваться интерполяция функций по Чебышевским узлам с применением пакета MatLab. Для расчета координат узлов интерполяции X используется формула:

$$, \quad (1.20)$$

где a – левая граница интерполяции, b – правая граница интерполяции, n – количество узлов интерполяции.

Для выражения погрешности интерполирования функции интерполяционным полиномом n -ой степени в точке применяется выражение:

$$\text{---} , \quad (1.21)$$

где ξ – некоторая точка из промежутка $[a, b]$ и P_n – полином степени n .

где x_i – узлы интерполяции полинома $P_n(x)$.

1.4 Выводы по главе

Напряженное состояние менее прочного поперечного слоя прямоугольного сечения круглого сплошного стержня под растягивающей осевой нагрузкой изучалось многие годы различными учеными. В связи с упрощением ими математических расчетов, полученные результаты значительно отличались от экспериментальных. Соответственно, для уточнения нормативных документов необходимо рассматривать более поздние математические модели. В данной работе рассмотрена математическая модель из работ [16, 17]. Дальнейшие упрощения для математических расчетов решено проводить при помощи Чебышевских узлов и с использованием пакета MatLab.

Глава 2. ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНТАКТНОЙ ГРАНИЦЕ

2.1. Использование метода характеристик для исследования НДС МП слоя в окрестности свободной границы

При исследовании осесимметричных задач возникает трудность, связанная с негиперболичностью для таких задач системы уравнений НДС пластической среды [28]. В работах [23, 24, 17] выявлено, что при выполнении ГППС (1.12), когда отсутствует зависимость скорости перемещения в направлении оси цилиндра от расстояния до нее в процессе осевого нагружения сплошного цилиндра, систему (1.1) – (1.5) можно значительно упростить, тогда она примет вид (1.13) – а(1.17) и станет гиперболической и статически квазиопределимой. Нормировка напряжений при упрощении проводится с учетом разной пластической постоянной для МП и БМ частей. От аналогичных плоских моделей данный случай отличается тем, что инварианты Римана этой системы не являются постоянными на характеристиках, а их дифференциалы вдоль характеристик зависят от искомым функций, в связи с чем метод характеристик, схожий с методом решения плоских задач теории пластичности, становится неприменимым в данной ситуации. Для преодоления возникающей трудности существует два подхода. Первый заключается в непосредственном интегрировании уравнений этой системы с допущением приближений и использованием теоретических знаний о виде характеристик и изменениях искомым функции при движении по характеристикам. Этот подход решено использовать в данной работе. Другой вариант решения основан на замене ММ на аналогичную изучаемой, но при этом свободной от указанного выше недостатка. Второй подход был применен в работах [23, 24, 17]. Там строилась приближенная модель напряженно-деформированного состояния пластического слоя при осесимметричной деформации и ГППС, основанная на аппроксимации зависимости $\sigma = \sigma(\epsilon)$ где σ — , функцией вида $\sigma = \sigma_0 \epsilon^n$, что позволило заменить систему (1.13), (1.14), (1.15) на другую, при этом имеющую инварианты на характеристиках. Такая аппроксимация является менее точной около свободной поверхности. Например, в рамках такой модели напряжения на отрезке FA (рис. 1.1) постоянны, что верно при плоской деформации, но не допускается при осесимметричной, поэтому поиск более точной модели оставался актуальным. В данной работе используется другая ММ, которая основана на непосредственном интегрировании инвариантов Римана. Такая математическая модель позволяет приближенно исследовать НДС в МП слое и его окрестностях около свободной поверхности. Для краткости записи введем обозначение $\sigma = \sigma(\epsilon)$.

Будем интегрировать уравнение (2.5) вдоль характеристик. Учтем, что все функции зависят только от переменной r (переменная z исключена через уравнение характеристики). Знак плюс в уравнении (2.5) соответствует ξ -характеристике, минус – η -характеристике.

Уравнения (2.3), (2.4) перепишем в инвариантной форме:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (2.9)$$

где функции

$$(2.10)$$

являются аналогами инвариантов Римана. Уравнения (2.3) на характеристиках (2.8) запишем в виде:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (2.11)$$

где дифференцирование производится по направлению характеристики. Рассмотрим η -характеристику RTS в МП части соединения (см рисунок 2.1).

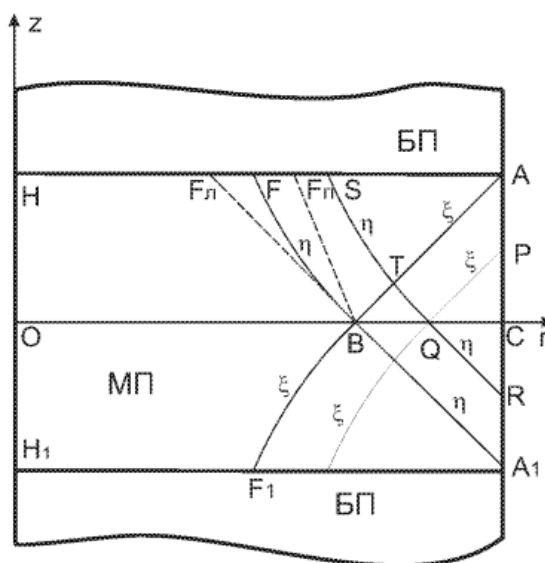


Рисунок 2.1 – Половина осевого сечения объекта с МП поперечным слоем и фрагмент поля характеристик

На свободной поверхности AA_1 и по условию, поэтому в связи с единственностью решения задачи Коши для системы (2.11) в характеристическом треугольнике . При этом, из (2.11) следует, что в нем

На границе AA_1 Поэтому в ΔABA_1 . Проинтегрируем вдоль кривой RTS:

$$\text{---} \tag{2.12}$$

Вычислим подробно второй интеграл равенства (2.12) (для упрощения, индекс i не пишем). Получим:

$$\text{---}$$

где определяется равенством

$$\text{-----} \tag{2.13}$$

Заметим, что , так как .

Интегрирование уравнения (2.5) вдоль кривой RTS дает:

$$\text{---} \tag{2.14}$$

Точка расположена между . Геометрические соображения и сравнение с практическими данными работ [26 и др] позволяют сделать предположение о том, что

$$\tag{2.15}$$

где В работе будем использовать значение $q = 0,10$. Обратим внимание, что расчеты критической нагрузки при изменений значений параметра $q = 0.10, 0.15, 0.20$ приводят к незначительно отличающимся результатам (разница на $0.01 \dots 0.02$) для значений . При $q = 0,10$ величину

$$\text{---} \tag{2.16}$$

можно оценить как

$$\text{-----} \tag{2.17}$$

2.3. Решение задачи сопряжения.

На отрезке FA (см. рис. 1.1) выразим величину касательных напряжений в зависимости от K. Из формул (1.15) (с плюсом) и (2.14) следует, что точка S отрезка FA (или F_1A_1) контактной границы

$$\text{-----} \tag{2.18}$$

Здесь при вычислении по ξ -характеристике (для случая растяжения), и на η -характеристике (см. рис. 1.1). Интерполируя функции и по Чебышевским узлам, получим (см. прил. 1, 2):

$$\text{---} \quad \text{---}, \quad (2.19)$$

$$\cdot \quad (2.20)$$

Проведем аналогичные вычисления для менее прочного случая (см. прил. 3):

$$\cdot \quad (2.21)$$

Интегрируем данное выражение и находим

$$\text{---} \quad ,$$

.

Интерполируем по Чебышеву до квадратов и упрощаем (см. прил. 4-7):

$$, \quad (2.22)$$

$$, \quad (2.23)$$

.

Тогда выражение для сигмы примет вид:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (2.24)$$

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (2.25)$$

Имеем:

$$\text{---} \\ \text{---} \\ \cdot$$

Обозначим K – отношение пластических постоянных более прочной и менее прочной частей стержня (коэффициент механической неоднородности). Тогда на контактной границе уравнения равновесия имеют вид:

$$\cdot \quad (2.26)$$

Таким образом, напряжения терпят скачок на контактной границе.

Сформулируем задачу сопряжения для напряжений на контактной границе: необходимо найти касательные и нормальные напряжения во всех точках отрезка FA с каждой его стороны.

Подставим в выражение (2.26) необходимые выражения из формулы (2.18) и, с учетом (2.17), получим уравнение относительно σ , которое можно записать следующим образом:

(2.27)

Обозначим:

(2.28)

Представим σ в виде:

(2.29)

Подставляя различные значения r и K в (2.27) с учетом (2.17), найдем σ и составим систему уравнений, которую после решим в Matlab (систему и используемые значения K и r см. в прил. 8).

Подставим в σ и аппроксимируем в тех же узлах (см. прил. 9).

(2.30)

Полученные формулы для вычисления σ могут быть применены только на отрезке FA (см. рис. 1.1), следовательно, необходимо знать координату точки F как функцию от параметров α и K .

2.4. Нахождение значения координаты точки F в критический момент нагружения

Найдем значение координаты y_F точки F выхода на контактную поверхность η -характеристики A_1BF . Предположим, что \bar{y} – среднее арифметическое координат точек A_1 и B (см. рис. 1.1), полученными таким образом, что углы наклона прямых A_1B и BF совпадают с углами наклона η -характеристики BF в точках B и F соответственно. Так как α – угол наклона η -характеристики, то в указанных точках угол α фактически известен. Тогда можно получить (α – относительная толщина МП слоя) :

Предполагая, что точка F находится в середине отрезка получим:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (2.31)$$

Откуда

$$(2.32)$$

(в общем случае,). Затем, для определения осталось решить систему уравнений (2.29), (2.32), учитывая в уравнении (2.29) следующие условия: . Исключив из системы (2.29), (2.32), неизвестную , получаем квадратное уравнение относительно , содержащее два параметра – α и K:

$$(2.33)$$

где

$$\begin{aligned} & , \\ & - , \\ & - . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Необходимо представить в следующем виде:

,

Выразив через и K (см. прил. 10), получим:

$$(2.35)$$

Подставим в (2.32) и выразим

,

откуда получаем:

Подставляя найденное для выражение (2.35) в формулу (2.30), получим значение в точке F как функцию от параметров α и K. Интерполяция точной

зависимости полиномом второй степени по α и K с узлами в точках, соответствующих значениям $\alpha = 0,05; 0,15; 0,25$ и $K = 1,2; 1,5$ с применением пакета MATLAB для решения возникающей при этом системы уравнений относительно шести неизвестных приводит к выражению (2.37) (см. прил. 11)

$$\text{Для } \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \quad (2.37)$$

2.5 Выводы по главе

В главе подробно описано решение задачи сопряжения на контактной границе, а также вычисление координаты точки F в критический момент нагружения. Система характеристических уравнений решается после интерполирования необходимых формул по Чебышевским узлам с использованием пакета MatLab. В итоге получены формулы для вычисления радиально-осевого касательного напряжения (формула (2.29)) и осевого напряжения (формула (2.30)). Вычисление координаты точки F (2.35) является необходимым, так как формулы (2.29), (2.30) имеют место только на отрезке FA (см. рисунок 1.1).

Глава 3. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МЕНЕЕ ПРОЧНОГО СЛОЯ ПРИ ГРП

Если исключить из выражений (1.13), (1.14), (1.18) нормальные напряжения при помощи дифференцирования уравнения (1.13) по переменной r , уравнения (1.14) проинтегрировав по z , с последующей подстановкой правой части (1.18) в разность полученных выражений, получим уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sigma_r}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_z}{r} \right) = 0 \quad (3.1)$$

Частные случаи напряженного состояния допускают гипотезу о разделении переменных (ГРП) для касательных напряжений

$$\sigma_{rz} = Z \cdot f(r) \quad (3.2)$$

в некоторой области осевого сечения, содержащего ось OZ . Обозначим пересечение этой полосы с областью D как D_1 (см. рис. 1.1); будем считать, что точка с координатами (r_F, z) принадлежит границе области D_1 . Определяющееся краевыми условиями на свободной границе решение на отрезке FA получено на основе метода характеристик. Оно является существенным обобщением применяемых ранее гипотез и позволяет приближенно аппроксимировать общий случай НС МП слоя.

Исследование уравнения (3.1) с учетом сделанных предположений приводит к нескольким математическим моделям НС МП слоя. С их помощью можно выявить аналитические выражения для приближенных расчетов напряжений в МП слое в критический момент нагружения, а также вычислить соответствующую осевую нагрузку.

Следствием применения ГРП (3.2) к (3.1) является уравнение

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right) + \frac{f(r)}{r^2} = 0 \quad (3.3)$$

Из условия (1.1.19) следуют условия

$$f(r) = C_1 r^2 + C_2 \quad (3.4)$$

Лемма 1. Уравнение (3.3) не имеет решений, за исключением следующих частных вариантов:

1. Функция Z постоянна.
2. Функция Z линейна.
3. Функция R линейна.

откуда в силу (3.2) и (3.26)

$$\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_{\phi}} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{r}{R}, \quad (3.29)$$

или

$$\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_{\phi}} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{r}{R}.$$

Отрицательные значения касательных напряжения соответствуют сжатию положительные – растяжению. Исходя из формулы (3.29) и условия (1.8) находим трансцендентное уравнение для вычисления А:

$$\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{r}{R} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{r}{R}. \quad (3.30)$$

С использованием аппроксимации $\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \approx 1 - 2\nu$, получим для А приближенное выражение

$$\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{r}{R} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{r}{R}. \quad (3.31)$$

Порядок ошибки в формуле (3.31) равен 2ν . Нормальные напряжения вычисляются по формуле:

$$\sigma_{\theta} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{r}{R} \sigma_{\phi}. \quad (3.32)$$

Далее необходимо рассмотреть два случая.

Первый случай. Пусть для всех $r < R$ (рисунок 1.6, а)). Тогда для вычисления постоянной С в формуле (3.32) надо положить

$\sigma_{\theta} = \sigma_{\phi}$. Тогда решение системы (1.13), (1.14), (1.18) в зоне D_1 (рисунок 1.6) можно записать в виде:

$$\sigma_{\theta} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{r}{R} \sigma_{\phi} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{r}{R} \sigma_{\phi}. \quad (3.33)$$

Второй случай. Пусть σ_{θ} максимальна в некоторой точке М (рисунок 1.6, б)). В первом случае на контактной поверхности на участке HF

$$\sigma_{\theta} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{r}{R} \sigma_{\phi}, \quad (3.34)$$

где C – некоторая константа. Во втором случае таким должно быть НС на отрезке MF , т.е. на этом отрезке

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = C \cdot \frac{r}{R} \quad (3.35)$$

При этом,

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = C \cdot \frac{r}{R} \quad ,$$

Используя формулу для вычисления A , получим

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{C \cdot r}{R} \quad (3.36)$$

откуда

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{C \cdot r}{R} \quad (3.37)$$

Заметим, что вычисляемая при помощи формулы (3.37) величина, ограничена при $\frac{r}{R} \leq 1$, так как

В качестве ограничения на параметр α установим критерий выполнения каждого из двух рассмотренных случаев. Второй случай можно использовать тогда и только тогда, когда $\frac{r}{R} \leq 1$. Поэтому условием для критерия является

$$\text{Используя формулу (3.36), запишем уравнение в виде} \quad (3.38)$$

Так как $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ зависят от α , это уравнение трудно решить аналитически. Его приближенное численное решение при $\frac{r}{R} = 1$ приводит к значению $\alpha = 0.5$.

3.3 Выводы по главе

В главе описаны следующие математические модели: модель напряженного состояния менее прочного слоя при ГРП (пункт 3.1); модель, когда касательные напряжения изменяются линейно поперек менее прочного слоя (пункт 3.2); модель, когда касательные напряжения изменяются линейно в радиальном направлении (пункт 3.3). Для каждой из этих моделей подробно расписаны используемые для вычисления необходимых промежуточных и итоговых величин формулы.

Глава 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Известные ранее математические модели и их упрощения [33, 29, 34, 22] дают противоречивые результаты. Наиболее достоверными являются источники [26, 35, 22, 34]. Теоретические результаты, описанные в [36, 37, 35, 30, 38] основаны на различных подходах, но дают «ступеньку» на графике зависимости — участок «равнопрочности», что не соответствует экспериментальным данным [29, 22] (теоретически полученные в отмеченных работах критические напряжения значительно выше, особенно для тонких прослоек, чем результаты, полученные экспериментально в работах [29, 22]). Мы считаем, что причина неточности таких теоретических построений заключается в следующем: в достаточно тонких менее прочных прослойках () при соответствующих внешних нагрузках напряжения вблизи оси достигают напряжений в соседствующих более прочных участках. Ясно, что наличие МП участка не может сделать критические напряжения в БП части соединения выше; а также значения критических напряжений в БП части не могут быть ниже, чем в МП. Следовательно, при уменьшении g прекращает рост в какой-то точке (рисунок 4.1(б), точка М), и напряжение в МП слое между осью стержня и этой точкой остается равномерным (рисунок 4.1, зона).

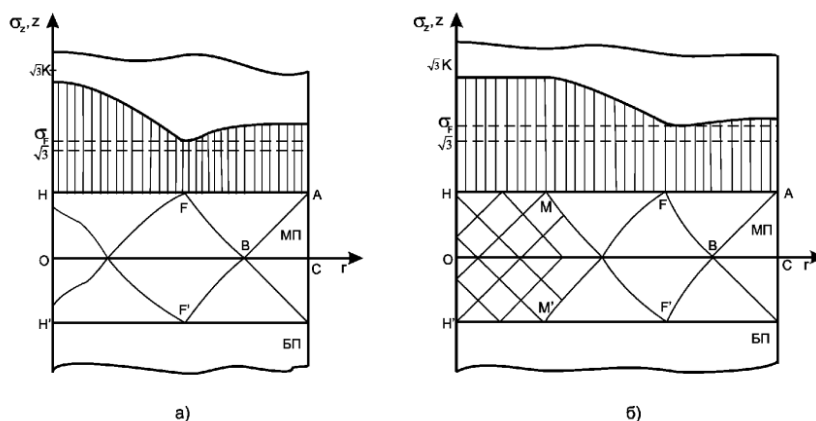


Рисунок 4.1 – Осевое сечение МП слоя и эпюра нормальных напряжений по контактной поверхности НА: а) — всюду на контактной поверхности; б) существует участок НМ, на котором — (в области — простое равномерное).

В указанных выше работах допускалось, что напряжения в МП слое могут неограниченно возрастать в окрестности оси с уменьшением толщины прослойки, значительно превышая в тонких прослойках напряжения в точках с соответствующей координатой r БП части стержня. Такое предположение приводило к завышению критической нагрузки. Методика вычисления критического напряжения должна, в силу отмеченного явления, различаться в зависимости от того, насколько тонкие прослойки используются (см. рисунок 4.1).

4.1. Вычисление критической нагрузки, при линейном изменении касательных напряжения в радиальном направлении

Первый случай. Подставим в формулу для вычисления на отрезке [HF] (3.32) значение . С использованием полученного выше выражения (2.30), представим нормальное напряжение на контактной поверхности (см. рисунок 4.1(a)) в виде:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{r}} \left(\frac{1}{2} \sigma_{\theta} + \frac{1}{2} \sigma_{\phi} \right) \quad (4.1)$$

где, в соответствии с формулами (3.31) и (2.30),

$$\sigma_{\theta} = \frac{2}{\sqrt{r}} \left(\frac{1}{2} \sigma_{\theta} + \frac{1}{2} \sigma_{\phi} \right) \quad (4.2)$$

$$(4.3)$$

$$(4.4)$$

Аналитические выражения для вычисления величин , и , участвующих в записи формул (4.11) и (4.2), получены выше (см. формулы (2.37), (2.36) и (2.35) соответственно).

Вычислим среднее критическое напряжение по формуле:

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{\theta} + \sigma_{\phi} \right) \quad (4.5)$$

где

В силу (4.11) для интеграла II получим выражение:

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{\theta} + \sigma_{\phi} \right) \quad (4.6)$$

Вычисление интеграла I приводит к выражению:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right) \\
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right) \\
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right) \\
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right) \\
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right) \\
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Графики зависимостей $\sigma_{\text{норм}}^{\text{конт}} / \sigma_{\text{норм}}^{\text{конт}}(a=0)$ от a/R представлены на рисунке 6 при $\nu = 0.3$.

Второй случай. Используя полученные выше результаты, представим нормальное напряжение на контактной поверхности (см. рисунок 4.1(б)) в виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right) \\
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right) \\
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

где

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right) \\
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Среднее критическое напряжение для данного случая находится по формуле:

,

где интеграл I такой же, как и в первом случае.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right) \\
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right) \\
 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2}}} \right)
 \end{aligned}$$

Для получения - наибольшей толщины прослойки, не оказывающей негативного влияния на несущую способность соединения, необходимо решить относительно δ уравнение \dots , которое решений не имеет. Зависимость от относительной толщины δ при различных значениях K представлена на рисунке 6. На участке \dots контактное упрочнение незначительно. В формуле (4.10) представлена зависимость \dots от δ при всех значениях \dots и \dots , продолжающая полученную выше теоретическую зависимость с участка \dots на весь промежуток \dots с учетом экспериментальных данных [15, 29, 34] (рисунок 4.2, прил. 12).

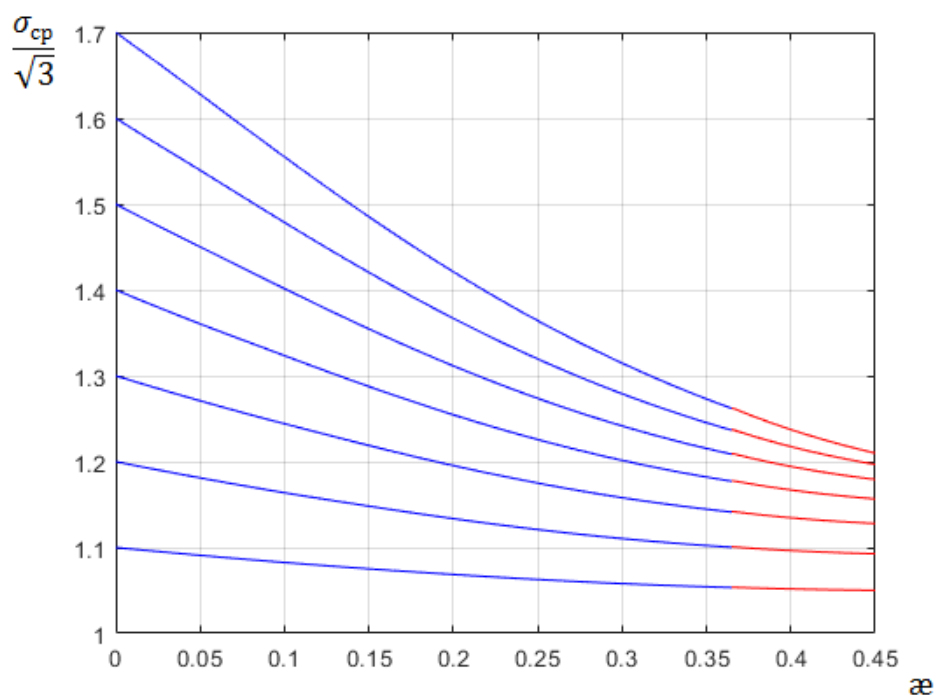


Рисунок 4.2 – Зависимость \dots от толщины слоя \dots при $K=1,1\dots1,7$

\dots

$$(4.10)$$

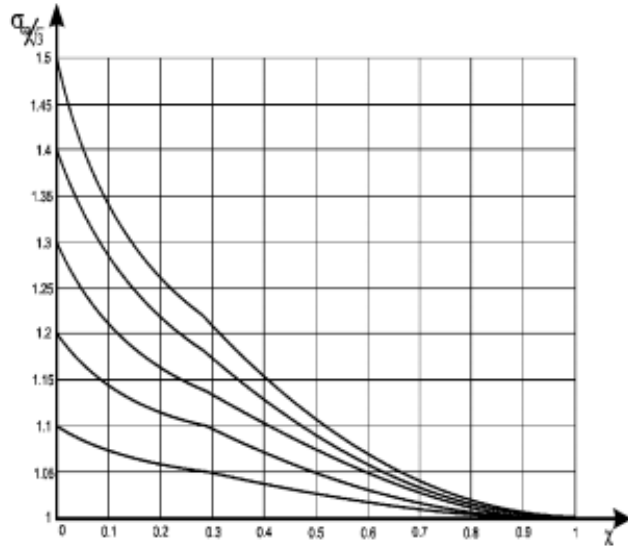


Рисунок 4.3 – Рисунок 4.2 – Зависимость от толщины слоя при $K=1,1 \dots 1,5$

4.2 Сравнение полученных данных с экспериментальными и с результатами более ранних исследований.

Сравнение полученной зависимости с экспериментальными данными представлено на рисунке 4.3.

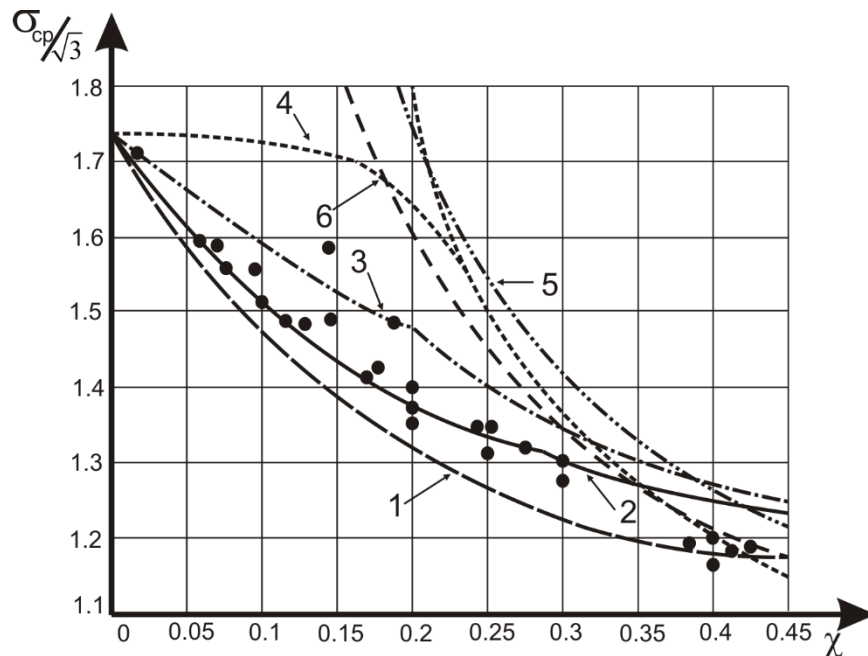


Рисунок 4.3 – Зависимость критической нагрузки от относительной толщины МП слоя, $K = 1.7$

Точками на графике обозначены экспериментально полученные данные.
1 – модель из работы В.Л. Дильмана (2005 г) [16]

- 2 – полученный в данной работе результат
- 3 – модель из работы В.Л. Дильмана (2011 г) [32]
- 4 – данные из работы Satoh K., Toyoda M (1975 г) [29]
- 5 – модель из работы О.А. Бакши и Л.М. Качанова (1965 г) [19]
- 6 – данные из работы А.В. Гурьева, В.П. Бармутова и др. (1973 г) [34]

Наилучшее соответствие с экспериментальными данными получается при использовании для решения задачи линейного сопряжения в неоднородном цилиндрическом стержне математической модели данной работы.

4.3 Выводы по главе

Данная глава посвящена вычислению критической нагрузки с учетом упрощенных в работе формул. В ней приведена зависимость критической нагрузки, от толщины прослойки и коэффициента механической неоднородности. В пункте (4.2) производится сравнение полученных результатов с данными экспериментов и более ранними моделями для разных значений коэффициента механической неоднородности K .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование интерполяции функций при помощи узлов Чебышева позволяет получать упрощенные формулы для соотношений между некоторыми известными величинами. Расчеты с использованием упрощенных таким образом формул позволяют получить наиболее точные результаты в сравнении с более ранними моделями.

В ходе работы была исследована математическая модель напряженного состояния цилиндрического соединения с менее прочным поперечным слоем в условиях осесимметричной деформации. Задачу линейного сопряжения удалось сформулировать в виде приближенного соотношения между величинами. В работе построен и реализован алгоритм решения задачи сопряжения, а также вычислена критическая нагрузка.

Сравнение полученных зависимостей с экспериментальными данными, представленными на рисунке 4.3, показывает, что при использовании данной модели для нахождения критической нагрузки дает наилучшее соответствие с данными эксперимента.

В перспективе можно рассмотреть другие способы интерполяции функций полиномами, например, использовать для этой цели нейронные сети, а затем сравнить новые данные с экспериментальными и полученными в данной работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Prandtl L. Beispiele der Anwendung des Hencky's Theorems zum Gleichgewicht der plastischen Körper // ZAMM – 1923. – Bd. 3. - №6. – S. 401-406.
- 2 Прандтль Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел // Теория пластичности / под ред. Ю.Н. Работнова. – М.: изд-во иностр. лит., 1948. – С. 103-113.
- 3 Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271с.
- 4 Качанов Л.М. Основы теоретической пластичности. – М.: Наука, 1969 – 420 с.
- 5 Пластичность и разрушение / В.Л. Колмогоров, А.А. Богатов, В.А. Мигачев и др. – М.: Металлургия, 1977. – 331с.
- 6 Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: изд-во иностр. лит., 1954. – 494с.
- 7 Смирнов-Аляев Г.А. Механические основы пластической обработки металлов. – Л.: Машиностроение, 1968. – 272с.
- 8 Соколовский В.В. Теория пластичности. – М. : Высшая школа, 1969. – 608с.
- 9 Гарновский И.Я., Поздеев Д.А., Ганаго О.А. и др. Теория обработки металлов давлением (вариационные методы расчета усилий и деформаций). – М.:Металлургиздат, 1963. – 672с.
- 10 Томленов А.Д. Теория пластического деформирования металлов. – М.: Металлургия, 1972. – 408с.
- 11 Томсэи Э., Янг Ч., Кобаяши Ш. Механика пластических деформаций при обработке металлов. – М.: Машиностроение, 1969. – 502с.
- 12 Е.П. Унксов, У. Джонсон, В.Л. Колмогоров и др. – М.: Машиностроение, 1983. – 598с.
- 13 Унксов Е.П., Джонсон У., Колмогоров В.Л. и др. Теорияковки и штамповки. – М.: Металлургиздат, 1963. – 672 с.
- 14 Ивлев Д.Д., Максимова Л.А., Непершин Р.И., Радаев Ю.Н., Сенашов С.И., Шемякин Е.И. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород. – М.: Физматлит, 2008. – 832с.
- 15 Ивлев Д.Д. Некоторые частные решения уравнений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности и обобщение решения Прандтля о сжатии пластического слоя двумя шероховатыми плитами //Приклад. математика и механика. – 1958. – Т.XXII. - №5. – С. 673-678.

16 Дильман В.Л., Ерошкина Т.В. Математические модели осесимметричного напряженного состояния пластического слоя при плоской деформации // Вест. ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып.6. - №6. – С. 19-23.

17 Дильман В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек. – Челябинск: изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202с.

18 Качанов Л.М. К задаче о деформировании пластического слоя // ДАН СССР. – 1954. – Т. ХСVI, №2. – С. 249-252.

19 Бакши О.А., Качанов Л.М. О напряженном состоянии пластической прослойки при осесимметричной деформации // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. - №2. – С. 134-137.

20 Качанов Л.М., Немчинский А.Л. Об одном способе определения сопротивления отрыву // Физика металлов и металловедение. – 1957. – Том 4, вып. 1. – С. 151-160.

21 Бакши О.А., Шрон Р.З. Прочность при статическом растяжении сварных соединений с мягкой прослойкой // Сварочное производство. – 1962. - №5. – С. 6-10.

22 Даунис М.А., Браженас А.П. Сопротивление деформированию и разрушению механически неоднородных сварных соединений при однократном нагружении // Проблемы прочности. – 1979. - №12. – С. 53-58.

23 Дильман В.Л., Остсемин А.А. Напряженное состояние и статическая прочность пластичной прослойки при плоской деформации// Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. - №4. – С. 38-48.

24 Дильман В.Л. О некоторых математических моделях напряженного состояния пластической среды при осесимметричной деформации // Вест. ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. - №2. – С. 20-25.

25 Иванов В.В.. Методы вычислений на ЭВМ. – Справочное пособие. – Киев. Издательство "Наукова думка", 1986 —584 с.

26 Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.

27 Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, – М.: ГИФМЛ, 1959. – 620с.

28 Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: Государств. изд-во технико-теоретич. литературы, 1956. – 407 с.

29 Satoh K., Toyoda M. Joint strength of heavy plastics with lower strength weld metal // Welding Journal. – Sept. – 1975. – №9. – P. 311-319.

30 Бродский А.Я., Евстратов Г.И. Сварка арматуры железобетонных конструкций на строительной площадке. – М.: Стройиздат, 1978. – 271 с.

31 Дильман В.Л., Ерошкина Т.В. Математические модели осесимметричного напряженного состояния при гипотезе разделения переменных для касательных напряжений // Изв. Челяб. науч. центра. – 2006. – Вып. 2(32). – С. 1-4.

32 Дильман В.Л. Математическое моделирование напряженного состояния поперечного пластического слоя в круглом стержне // Известия ВУЗов. Математика. – 2011. – №11. – С. 12-22.

33 Харченко Г.К. Прочность соединений с тонкой мягкой прослойкой. // Автомат. сварка. – 1968. – №5. – С. 31-33.

34 Гурьев А.В., Багмутов В.П., Хесин Ю.Д., Бойков Л.В./К вопросу о расчетной прочности составных образцов с мягкой прослойкой при статическом растяжении // Проблемы прочности. – 1973. – №1. – С. 9-13.

35 Saton K. Size effect on static tensile properties of welded joints including of soft interlayer // J. – Jap. Welding Soc. – 1968. – 37. – №11. – P. 242-249

36 Шахматов М.В., Ерофеев В.В., Остсемин А.А. О некоторых особенностях метода линий скольжения при решении осесимметричных задач теории пластичности // Проблемы прочности. – 1985. - №3. – С. 88-94.

37 Шахматов М.В., Храмова Л.И., Бакши О.А. Влияние геометрических параметров механически неоднородных сварных соединений арматуры железобетона на их предельную несущую способность // Свароч. пр-во. – 1986. - №6. – С. 28-30.

38 Когут Н.С., Шахматов М.В., Ерофеев В.В. Несущая способность сварных соединений. – Львов: Свит, 1991. – 184 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Интерполяция функции

Код программы:

```
clc%очистка Command Window
clear all%удаление переменных в Workspace
close all%закрывает все графические окна
%Dля малого количества узлов
a=0;%левая граница
b=0.9;%правая граница
n=2%количество узлов
x1=(a+b)/2+(b-a)/2*cos(((1:n+1)-0.5)/(n+1)*pi);%узлы интерполяции
f=@(x) sqrt(3*(1-x.^2)) %исходная функция
y1=f(x1)%таблица значений
x2=linspace(a,b,100);%мелкая сетка для графика
y2=f(x2);%вектор значений функции на этой сетке
V=vander(x1)%матрица Вандермонда
a=V\y1%решение системы уравнений относительно коэффициентов интерполяционного
многочлена
y3=polyval(a,x2);%вектор значений многочлена на этой сетке
max(abs(y3-y2));%максимальное отклонение многочлена от функции
figure(1);%создание графического окна
plot(x2,y3,x2,y2,x1,f(x1),'o');
grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Пересечение функции и интерполированного многочлена')%
figure(2);%
plot(x2,y3-y2,x1,0,'o'), grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Разность функции и интерполированного многочлена с малым количеством
узлов')%
```

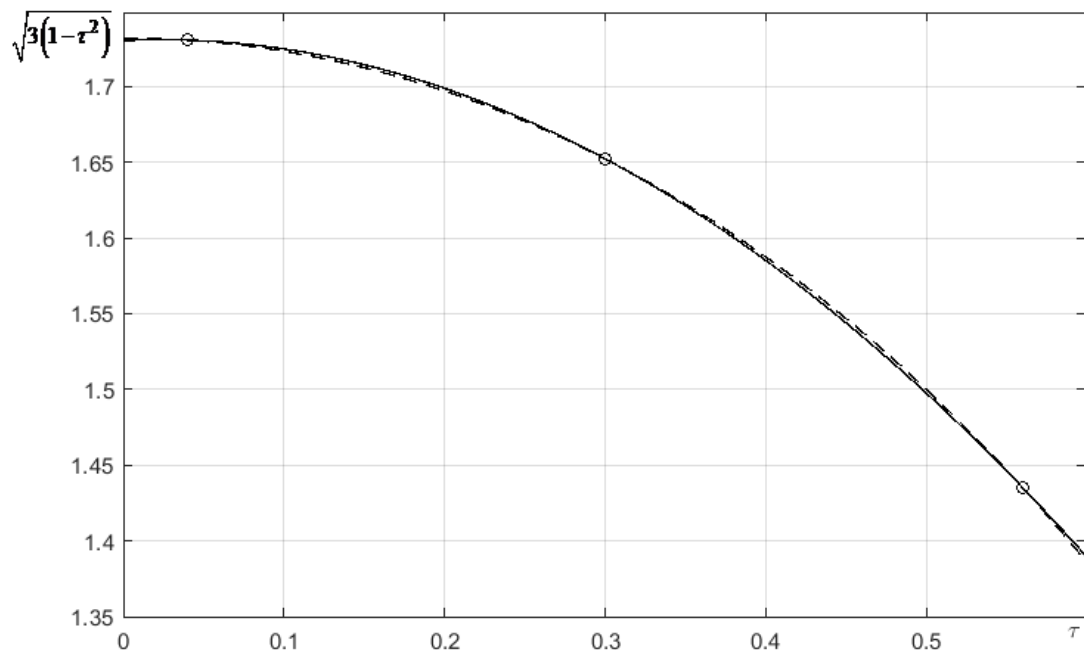


Рисунок 1.1 – Пересечение функции и интерполированного многочлена.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Интерполяция функции

Код программы:

```
clc%очистка Command Window
clear all%удаление переменных в Workspace
close all%закрывает все графические окна
%Dля малого количества узлов
a=0;%левая граница
b=0.6;%правая граница
n=2%количество узлов
x1=(a+b)/2+(b-a)/2*cos(((1:n+1)-0.5)/(n+1)*pi);%узлы интерполяций
f=@(x) (sqrt(4-x.^2)-(sqrt(3))*x)./(2*sqrt(1-x.^2)) %исходная функция
y1=f(x1')%таблица значений
x2=linspace(a,b,100);%мелкая сетка для графика
y2=f(x2);%вектор значений функции на этой сетке
V=vander(x1)%матрица Вандермонда
a=V\y1%решение системы уравнений относительно коэффициентов интерполяционного
многочлена
y3=polyval(a,x2);%вектор значений многочлена на этой сетке
max(abs(y3-y2));%максимальное отклонение многочлена от функции
figure(1);%создание графического окна
plot(x2,y3,x2,y2,x1,f(x1),'o');
grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Пересечение функции и интерполированного многочлена')%
figure(2);%
plot(x2,y3-y2,x1,0,'o'), grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Разность функции и интерполированного многочлена с малым количеством
узлов')%
```

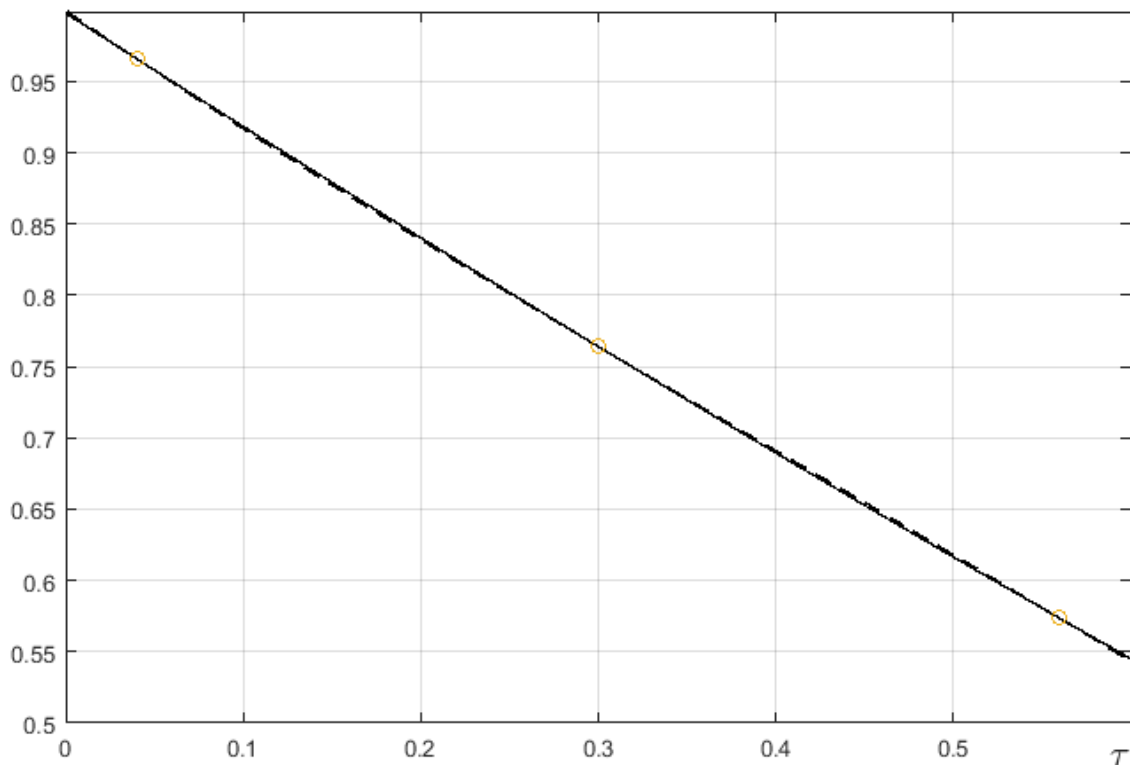


Рисунок 2.1 – Пересечение функции и интерполированного многочлена.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Интерполяция функции

Код программы:

```
clc%очистка Command Window
clear all%удаление переменных в Workspace
close all%закрывает все графические окна
%Dля малого количества узлов
a=0;%левая граница
b=0.6;%правая граница
n=2%количество узлов
x1=(a+b)/2+(b-a)/2*cos(((1:n+1)-0.5)/(n+1)*pi);%узлы интерполяций
f=@(x) (-sqrt(4-x.^2)-(sqrt(3))*x)/(2*sqrt(1-x.^2)) %исходная функция
y1=f(x1)%таблица значений
x2=linspace(a,b,100);%мелкая сетка для графика
y2=f(x2);%вектор значений функции на этой сетке
V=vander(x1)%матрица Вандермонда
a=V\y1%решение системы уравнений относительно коэффициентов интерполяционного
многочлена
y3=polyval(a,x2);%вектор значений многочлена на этой сетке
max(abs(y3-y2));%максимальное отклонение многочлена от функции
figure(1);%создание графического окна
plot(x2,y3,x2,y2,x1,f(x1),'o');
grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Пересечение функции и интерполированного многочлена')%
figure(2);%
plot(x2,y3-y2,x1,0,'o'), grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Разность функции и интерполированного многочлена с малым количеством
узлов')%
```

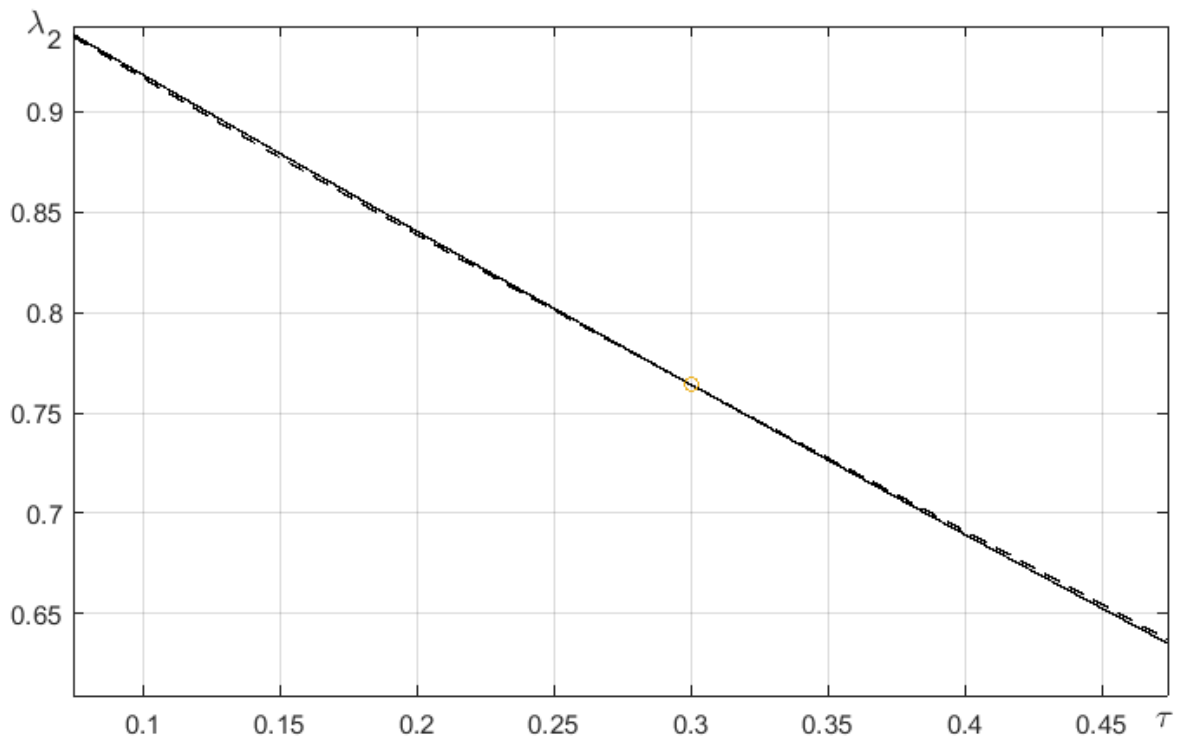


Рисунок 3.1 – Пересечение функции и интерполированного многочлена.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Интерполяция функции

Код программы:

```
clc%очистка Command Window
clear all%удаление переменных в Workspace
close all%закрывает все графические окна
%Dля малого количества узлов
a=0;%левая граница
b=0.9;%правая граница
n=2%количество узлов
x1=(a+b)/2+(b-a)/2*cos(((1:n+1)-0.5)/(n+1)*pi);%узлы интерполяций
f=@(x) 0.028*x.^3-0.402*x.^2+x %исходная функция
y1=f(x1')%таблица значений
x2=linspace(a,b,100);%мелкая сетка для графика
y2=f(x2);%вектор значений функции на этой сетке
V=vander(x1)%матрица Вандермонда
a=V\y1%решение системы уравнений относительно коэффициентов интерполяционного
многочлена
y3=polyval(a,x2);%вектор значений многочлена на этой сетке
max(abs(y3-y2));%максимальное отклонение многочлена от функции
figure(1);%создание графического окна
plot(x2,y3,x2,y2,x1,f(x1),'o');
grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Пересечение функции и интерполированного многочлена')%
figure(2);%
plot(x2,y3-y2,x1,0,'o'), grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Разность функции и интерполированного многочлена с малым количеством
узлов')%
```

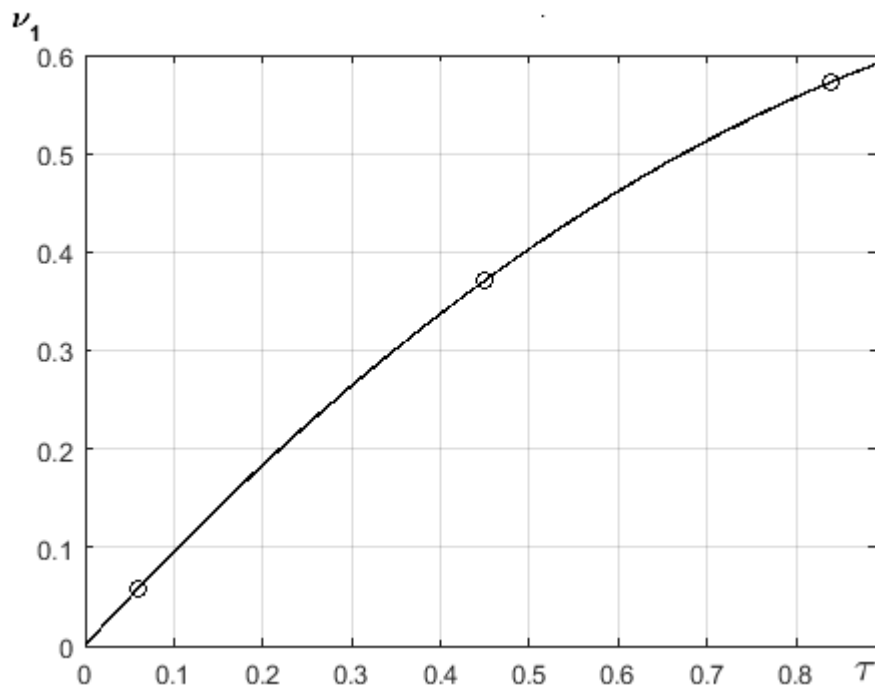


Рисунок 4.1 – Пересечение функции и интерполированного многочлена.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Интерполяция функции

Код программы:

```
clc%очистка Command Window
clear all%удаление переменных в Workspace
close all%закрывает все графические окна
%Dля малого количества узлов
a=0;%левая граница
b=0.6;%правая граница
n=2%количество узлов
x1=(a+b)/2+(b-a)/2*cos(((1:n+1)-0.5)/(n+1)*pi);%узлы интерполяций
f=@(x) -0.399*x.^3-0.323*x.^2-x;%исходная функция
y1=f(x1)%таблица значений
x2=linspace(a,b,100);%мелкая сетка для графика
y2=f(x2);%вектор значений функции на этой сетке
V=vander(x1)%матрица Вандермонда
a=V\y1%решение системы уравнений относительно коэффициентов интерполяционного
многочлена
y3=polyval(a,x2);%вектор значений многочлена на этой сетке
max(abs(y3-y2));%максимальное отклонение многочлена от функции
figure(1);%создание графического окна
plot(x2,y3,x2,y2,x1,f(x1),'o');
grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Пересечение функции и интерполированного многочлена')%
figure(2);%
plot(x2,y3-y2,x1,0,'o'), grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Разность функции и интерполированного многочлена с малым количеством
узлов')%
```

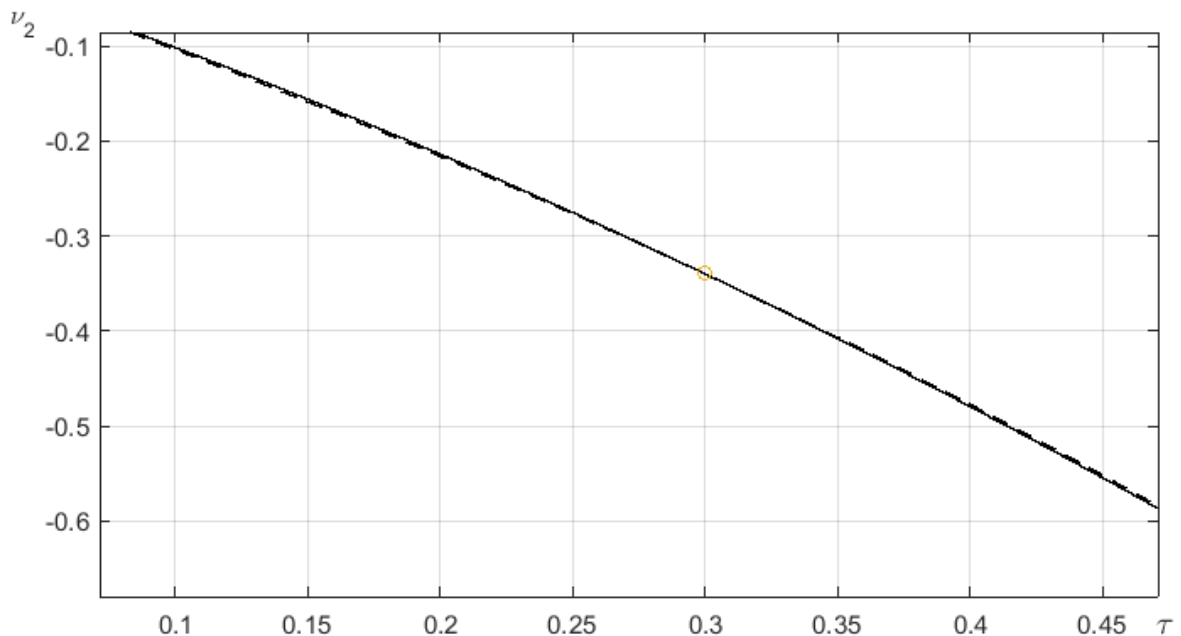


Рисунок 5.1 – Пересечение функции и интерполированного многочлена.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Интерполяция функции

Код программы:

```
clc%очистка Command Window
clear all%удаление переменных в Workspace
close all%закрывает все графические окна
%Dля малого количества узлов
a=0;%левая граница
b=0.6;%правая граница
n=2%количество узлов
x1=(a+b)/2+(b-a)/2*cos(((1:n+1)-0.5)/(n+1)*pi);%узлы интерполяций
f=@(x) 0.083*x.^3-0.804*x.^2+x %исходная функция
y1=f(x1')%таблица значений
x2=linspace(a,b,100);%мелкая сетка для графика
y2=f(x2);%вектор значений функции на этой сетке
V=vander(x1)%матрица Вандермонда
a=V\y1%решение системы уравнений относительно коэффициентов интерполяционного
многочлена
y3=polyval(a,x2);%вектор значений многочлена на этой сетке
max(abs(y3-y2));%максимальное отклонение многочлена от функции
figure(1);%создание графического окна
plot(x2,y3,x2,y2,x1,f(x1),'o');
grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Пересечение функции и интерполированного многочлена')%
figure(2);%
plot(x2,y3-y2,x1,0,'o'), grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Разность функции и интерполированного многочлена с малым количеством
узлов')%
```

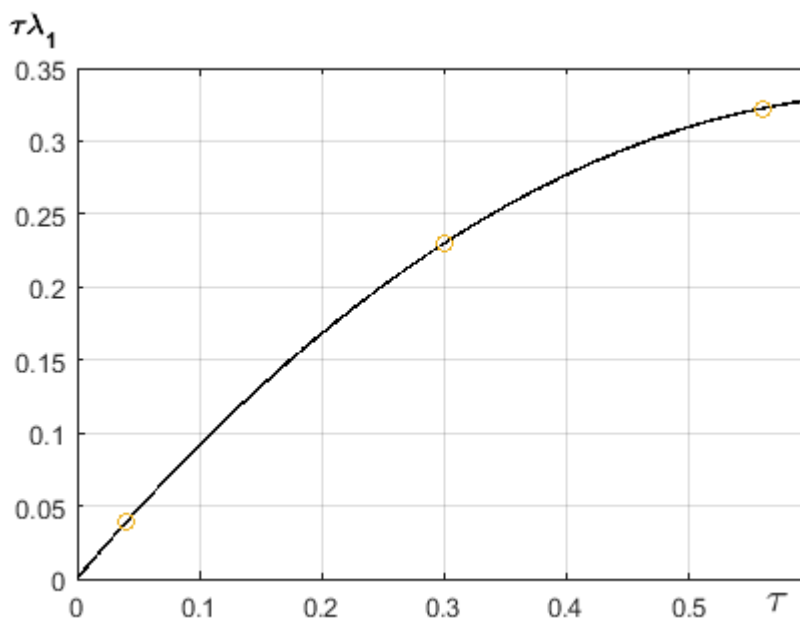


Рисунок 6.1 – Пересечение функции и интерполированного многочлена.

ПРИЛОЖЕНИЕ 7. Интерполяция функции

Код программы:

```
clc%очистка Command Window
clear all%удаление переменных в Workspace
close all%закрывает все графические окна
%Dля малого количества узлов
a=0;%левая граница
b=0.6;%правая граница
n=2%количество узлов
x1=(a+b)/2+(b-a)/2*cos(((1:n+1)-0.5)/(n+1)*pi);%узлы интерполяций
f=@(x) -1.197*x.^3-0.645*x.^2-x %исходная функция
y1=f(x1')%таблица значений
x2=linspace(a,b,100);%мелкая сетка для графика
y2=f(x2);%вектор значений функции на этой сетке
V=vander(x1)%матрица Вандермонда
a=V\y1%решение системы уравнений относительно коэффициентов интерполяционного
многочлена
y3=polyval(a,x2);%вектор значений многочлена на этой сетке
max(abs(y3-y2));%максимальное отклонение многочлена от функции
figure(1);%создание графического окна
plot(x2,y3,x2,y2,x1,f(x1),'o');
grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Пересечение функции и интерполированного многочлена')%
figure(2);%
plot(x2,y3-y2,x1,0,'o'), grid on;
xlabel('x'), ylabel('y')%
title('Разность функции и интерполированного многочлена с малым количеством
узлов')%
```

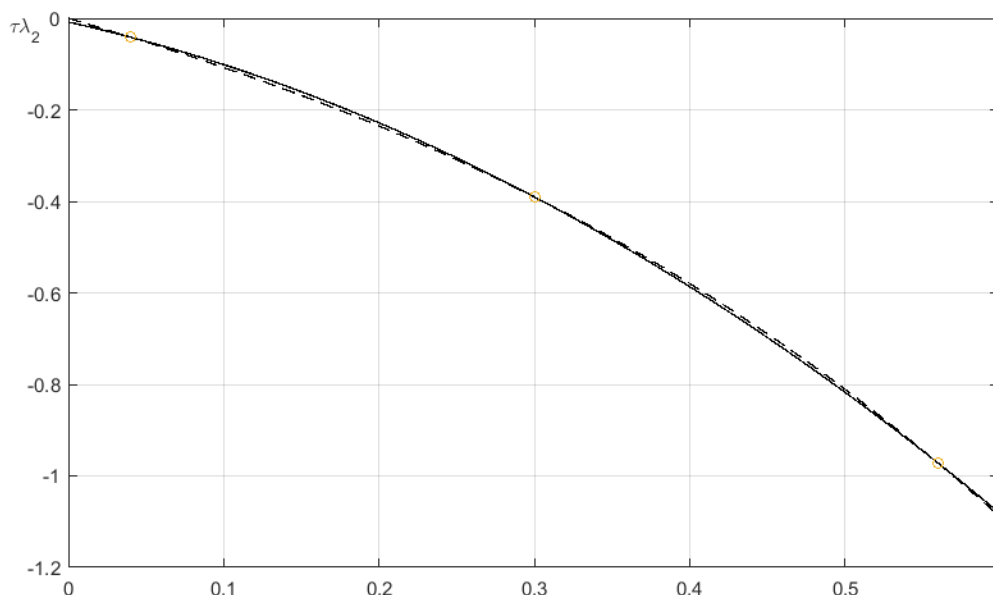


Рисунок 7.1 – Пересечение функции и интерполированного многочлена.

ПРИЛОЖЕНИЕ 8. Интерполяция функции

Исходная функция:

Необходимый вид:

Таблица 8.1

Выбор значений r и K и подсчет значения

	r	K	
1	0.5	1.2	0.197
2	0.7	1.2	0.186
3	1	1.2	0.178
4	0.5	1.4	0.397
5	0.7	1.4	0.372
6	1	1.4	0.355

Решение данной системы:

Полученный результат:

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Интерполяция функции

Исходные функции:

—

—————

Необходимый вид:

—

Таблица 9.1

Выбор значений r и K и подсчет значения

	r	K	
1	0.5	1.2	1.889
2	0.7	1.2	1.892
3	1	1.2	1.893
4	0.5	1.4	2.007
5	0.7	1.4	2.024
6	1	1.4	2.032

Решение данной системы:

Полученный результат:

—

ПРИЛОЖЕНИЕ 10. Интерполяция функции

Исходные функции:

Необходимый вид:

Таблица 10.1

Выбор значений α и K и подсчет значения

	α	K	
1	0.05	1.2	0.9036
2	0.15	1.2	0.7111
3	0.25	1.2	0.5196
4	0.05	1.5	0.9090
5	0.15	1.5	0.7279
6	0.25	1.5	0.5490

Решение данной системы:

Полученный результат:

ПРИЛОЖЕНИЕ 11. Интерполяция функции

Исходные функции:

—

Необходимый вид:

Таблица 11.1

Выбор значений α и K и подсчет значения

	α	K	
1	0.05	1.2	2.0111
2	0.15	1.2	2.0093
3	0.25	1.2	2.0045
4	0.05	1.5	2.3446
5	0.15	1.5	2.3187
6	0.25	1.5	2.2921

Решение данной системы:

Полученный результат:

—

ПРИЛОЖЕНИЕ 12. Программа для построения графика зависимости критического напряжения от толщины прослойки

Код программы:

```
for K1 = 1.1:0.1:1.7
    X0=0.365
    X=[0:0.001:X0];
    rf1=1-2.0058*X+0.017*(X.^2)+(-0.0001+0.35*X+0.186*(X.^2)).*(K1-1)
    A1=0.813+0.23*rf1+0.183*(rf1.^2)
    B1=-0.534-0.075*rf1+0.333*(rf1.^2)
    Sf1=sqrt(3)*(1+A1.*(K1-1)+B1.*((K1-1).^2))
    tf1=(K1-1)*(0.846+0.465*X)
    rm1=rf1-sqrt((2*((sqrt(3))*K1-Sf1).*X.*rf1)./(tf1.*(1+(3*tf1.*X)./(4*rf1))))
    S13=(sqrt(3))*K1.*(rf1.^2)-((sqrt(3))*K1-Sf1).*(rf1-rm1).*(0.5*rf1+(1/6)*rm1)
    S1I=(sqrt(3))-((sqrt(3)).*(rf1.^2)+2*(K1-1)*(0.466*(1-(rf1.^2))))-2*((K1-1)^2)*(0.643*(1-(rf1.^2))-0.323*(1-(rf1.^3))+0.0425*(1-(rf1.^4)))-2*((K1-1)^3)*(0.735*(1-(rf1.^2))-1.272*(1-(rf1.^3))+0.525*(1-(rf1.^4)))
    Ssr1=(S1I+S13)./(sqrt(3))
    X2=[X0:0.001:0.45]
    rf2=1-2.0058*X2+0.017*(X2.^2)+(-0.0001+0.35*X2+0.186*(X2.^2)).*(K1-1)
    tf2=(K1-1)*(0.846+0.465*X2)
    A2=0.813+0.23*rf2+0.183*(rf2.^2)
    B2=-0.534-0.075*rf2+0.333*(rf2.^2)
    Sf2=sqrt(3)*(1+A2.*(K1-1)+B2.*((K1-1).^2))
    S21=(sqrt(3))-((sqrt(3)).*(rf2.^2)+2*(K1-1)*(0.466*(1-(rf2.^2))))-2*((K1-1)^2)*(0.643*(1-(rf2.^2))-0.323*(1-(rf2.^3))+0.0425*(1-(rf2.^4)))-2*((K1-1)^3)*(0.735*(1-(rf2.^2))-1.272*(1-(rf2.^3))+0.525*(1-(rf2.^4)))
    S22=((rf2.^2)./4).*((((tf2.*rf2)./X2)+(3/4)*(tf2.^2))+4*Sf2)
    Ssr2=(S21+S22)./(sqrt(3))
    plot(X,Ssr1,'b',X2,Ssr2,'r')
    grid on
    hold on
end
```

График, построенный данной программой, представлен на рисунке 4.2