Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра прикладной математики и программирования
Направление подготовки Прикладная математика

РАБОТА ПРОВЕРЕНА	ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Рецензент, к.ф. – м.н.,	Заведующий кафедрой, д.ф. – м.н.,
доцент	доцент
_____________/Е.В. Бычков	______________/А.А. Замышляева
«____»_____________2018 г.	«____»_____________2018 г.

Исследование нестационарной модели Дзекцера в цилиндрических координатах

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–01.03.04.2018.70.ПЗ ВКР

Руководитель работы, к.ф. – м.н.,
доцент
__________/М.А. Сагадеева
«____»_____________2018 г.

Автор работы,
студент группы ЕТ-413
_____________/ Б.М. Бармутин
«____»_____________2018 г.

Нормоконтролёр, к.э.н.,
доцент
_________/Д.А. Дрозин
«____»_____________2018 г.

Челябинск,
2018

АННОТАЦИЯ

Бармутин Б.М. Исследование нестационарной модели Дзекцера в цилиндрических координатах. – Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-413, 30 с., библиогр. список – 18 наим.

Работа посвящена исследованию нестационарной модели Дзекцера в цилиндрических координатах, описываемой с помощью уравнения Дзекцера. Это уравнение относится к обширному классу неклассических уравнений в частных производных – уравнений соболевского типа. Причем оно рассмотрено в предположении, что коэффициенты уравнения зависят от времени, что, например, описывает размытие почвы при фильтрации.

В рамках данной работы происходит ознакомление с теорией уравнений соболевского типа, изучаем решения модели Дзекцера в цилиндрических координатах.

В первом разделе подробно рассматривается предметная область. В нём описывается теория уравнений соболевского типа, также приводятся определения и формулировки теорем, которые используются для проведения основных построений.

Во втором разделе подробно рассматриваются функции Бесселя, для построения решения уравнения Дзекцера выявляются собственные значения и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля в цилиндрических координатах через функции Бесселя. А также найдено решение нестационарного уравнения Дзекцера в цилиндрических координатах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Пусть – ограниченная область с границей класса . В цилиндре рассмотрим задачу Дирихле

(a)

для уравнения соболевского типа [4]

(b)

которая моделирует эволюцию поверхности фильтрации жидкости [2]. Здесь – параметры уравнения и скалярная функция характеризует среду. Вектор–функция – характеризующая внешнее воздействие на систему. Вдобавок, тщательный разбор вывода уравнения (b), сделанный в [13], выявил, что отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу. Уравнение (b) принадлежит классу уравнений соболевского типа, которые являются основой большого количества неклассических моделей математической физики [3]. Отметим, что уравнение (b) вместе с граничными условиями Дирихле (a) может являться моделью процесса влагопереноса в почве [14], а также процесса теплопроводности в среде [11].

Уравнение Дзекцера относится к неклассическим уравнениям математической физики [3], иллюстрирующих применение теории уравнений соболевского типа, развиваемой профессором Г. А. Свиридюком и его учениками. Подробный исторический обзор уравнений соболевского типа и обширную библиографию можно найти в [6]. Заметим, что в отличие от ранних исследований уравнения (b), рассмотрим его с коэффициентом, зависящим от времени.

Решение задачи Дирихле для (b) с условием Шоуолтера – Сидорова [5]

(c)

которое в этой ситуации более применимо, чем традиционное условие Коши (более подробно см. [5], [9]).

Ранее уравнение (b) с различными начальными краевыми условиями рассматривались многими авторами (обзор по этому поводу можно найти в [8],

[7]). Можно еще отметить работу [2], в которой рассматривается стационарное уравнение Дзекцера в цилиндрических координатах и основной задачей исследования являются другие вопросы. В отличие от предыдущих исследований уравнение (b) рассматривается в нестационарном случае. Задачу Дирихле для уравнения (b) будем рассматривать в цилиндрических координатах. Уравнения соболевского типа, с коэффициентами, зависящими от времени, впервые были рассмотрены в диссертации [16], после чего начали применяться для рассмотрения моделей различных процессов [17], [18].

Целью выпускной квалификационной работы является исследование нестационарной модели Дзекцера в цилиндрических координатах.

Для достижения цели работы были представлены следующие задачи:

- ознакомиться с моделью Дзекцера;
- ознакомиться с теоретической частью;
- решить задачу Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах;
- получить решение.

В рамках данной работы происходит ознакомление знакомимся с теорией уравнений соболевского типа, описываем решение задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах, используя функции Бесселя, выполняем построение и изучаем решения уравнения Дзекцера в цилиндрических координатах. Основными методами исследования являются методы функционального анализа [12], уравнений математической физики [3].

Данная выпускная квалификационная работа содержит 2 раздела. В первом разделе подробно рассмотрена предметная область. В нем описывается теория уравнений соболевского типа, так же приводятся определения и формулировки теорем, которые используются для проведения основных построений.

Во втором разделе описано построение решения уравнения Дзекцера. В первом параграфе рассматриваются функции Бесселя. Во втором параграфе описано решение задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах. В третьем параграфе содержится построение решения самого уравнения Дзекцера, используя результаты предыдущего параграфа.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Относительно секториальный оператор

Пусть , – банахово пространство, оператор (линейный непрерывный оператор из в) с нетривиальным ядром оператор (линейный замкнутый плотный оператор в).

Множества

называется –резольвентным множеством и –спектром оператора соответственно. Если

Для комплексной переменной определим операторнозначные функции , будем называть соответственно резольвентой, правой резольвентой, левой резольвентой оператора относительно оператора .

Теорема 1.1.1. Пусть операторы то –резольвента, правая и левая –резольвенты оператора аналитичны в .

Определение 1.1.1. Пусть Оператор–функция

называется правой –резольвентой (левой –резольвентой) оператора относительно оператора соответственно (кратко, правая –резольвента и левая –резольвента оператора).

Определение 1.1.2. Оператор М называется сильно –секториальным, если существуют константы – такие, что сектор

для каждого

и существует плотная линейная в пространстве , такая, что для каждого

Теорема 1.1.2. Пусть оператор является сильно –секториальным, тогда

(i) существует сильно непрерывная справа нулевая полугруппа

, аналитическая в секторе – и решение уравнения

, вида

где контур

(ii)

проекторы этого расщепления являются тождествами этих полугрупп

(iii)

(iv) существуют операторы и оператор нильпотентен, а степень его нильпотентности не превосходит

Обозначим

Рассмотрим решение задачи Шоуолтера – Сидорова (с) для нестационарного соболевского уравнения

(1.

1.1)

где скалярная функция и функция – функция характеризующая внешнее воздействие на систему.

Определение 1.1.3. Вектор–функция называется решением уравнения (1.1.1), если оно преобразует (1.1.1) к тождеству. Решение из (1.1.1) называется решением задачи Шоуолтера – Сидорова (с), (1.1.1), если это удовлетворяет (с).

Теорема 1.1.3. Пусть оператор является сильно –секториальным, тогда для каждого отделенных от нуля, существует единственное решение (с), (1.1.1) из

(1.1.2)

где —

Теорема 1.1.4. Пусть оператор – секториален. Тогда

(i)

(ii) ;

(iii) существуют операторы .

Будем рассматривать уравнение (1.1.1) вместе с эквивалентным ему при уравнением

(1.1.3)

как конкретные интерпретации уравнения

(1.1.4)

с операторами – банаховы пространства.

1.2. Описание модели Дзекцера. Редукция и абстрактные средства

Грунтовые воды – это свободные (гравитационные) воды первого от поверхности Земли постоянного водоносного горизонта, располагающегося на региональном слое грунта, который обладает очень низкой или полной водонепроницаемостью. Их бассейн совпадает с зоной распределения водопроницаемой породы. Верхняя граница фреатической зоны называется фреатической линией. Насыщенная горная порода с водой называется водоносным горизонтом с вместимостью, определяемой вертикальным расстоянием от фреатической линии до ограничивающего слоя. Пополнение подземных вод происходит из-за инфильтрации осадков, иногда из-за инфильтрации водных рек и других водных объектов, а также из более глубоких водоносных горизонтов [1].

Движение грунтовых вод подчиняется силам тяжести и осуществляется в виде потоков по трещинам и сообщающимся порам. Фреатическая линия грунтовых вод повторяет рельеф поверхности и грунтовые потоки движутся от повышенных участков к пониженным, где происходит их разгрузка в виде нисходящих источников. Грунтовый поток, направленный к местам разгрузки, образует криволинейную поверхность. Течение грунтовой воды называется фильтрацией. Она зависит от наклона фреатической линии или гидравлического (напорного) градиента, а также от водопроницаемости горных пород. В большинстве своём грунтовые воды имеют свободную поверхность и непосредственную связь с атмосферой [1].

Уравнение

(1.
2.1)

чаще всего представляется в теории движения подземных вод. Это обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью и моделирования эволюции свободной поверхности фильтрации жидкости [2]. Данное уравнение относится к обширному классу неклассических уравнений математической физики [3], так как левое выражение в уравнении (1.2.1) может быть нулевым при некоторых значениях параметра . Данное исследование проведено в рамках теории уравнений соболевского типа [4].

Параметр α в (1.2.1) определяется следующей формулой

где μ – доля пустот, – мощность модуля движения через свободную поверхность, k – коэффициент проницаемости, – давление на свободную поверхность [2]. Параметры λ и β определяются следующей формулой

Уравнение (1.2.1) представляется следующим образом

Доля пустот μ характеризует отношение объема пор к объему минеральной части. Учитывая, что во многих случаях это отношение изменяется во времени, то этот параметр является скалярной функцией, зависящей от времени. Переименуем коэффициенты уравнения (1.2.1) следующим образом тогда

Принимая во внимание формулу, определяющую эти параметры, получаем

Пусть – ограниченная область с границей из класса . Рассмотрим в цилиндре задачу Дирихле

(1.2.2)

для уравнения Дзекцера

(1.
2.3)

с условием Шоуолтера – Сидорова

(1.
2.4)

Здесь вещественный параметр и скалярная функция , описаны выше, а вектор–функция характеризует внешнее воздействие на систему.

Уравнение (1.2.4) относится к широкому классу уравнений соболевского типа, составляющих обширную область неклассических уравнений математической физики.

Редуцируя задачу (1.2.3), (1.2.4) положим

где – пространства Соболева. Операторы и зададим формулами

(1.
2.5)

Лемма 1.2.1. Для любых операторы ,
с .

Утверждение леммы следует из линейности, непрерывности и фредгольмовости оператора Лапласа и формул, определяющих операторы и .

Обозначим через спектр однородной задачи Дирихле в области для оператора Лапласа . Спектр отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к . Через обозначим множество собственных значений, занумерованное по невозрастанию с учетом кратности, а через – семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведения в ,

Теорема 1.2.1. [18] Для любых оператор сильно – секториален.

Теорема 1.2.2. Пусть , вектор–функция , функция и

(i) . Тогда при любых

(ii) . Тогда при любых существует

Вывод по разделу

В первом разделе подробно рассмотрена предметная область. В нём описывается теория уравнений соболевского типа, также приведены определения и формулировки теорем, которые используются для проведения основных построений. Это поможет нам при решении задачи Штурма – Лиувилля и уравнения Дзекцера.

2. МОДЕЛЬ ДЗЕКЦЕРА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

2.1. Функции Бесселя

Рассмотрим уравнение

(2.1.1)

называемое уравнением Бесселя [10].

Уравнение (2.1.1) возникает при решении задач математической физики для круглых и цилиндрических тел методом разделения переменных в цилиндрических и полярных координатах. Любое нетривиальное решение уравнения Бесселя называется цилиндрической функцией. Частными примерами цилиндрических функций являются функции Бесселя и Неймана.

Функцию Бесселя индекса можно определить рядом

(2.1.2)

где – гамма–функция Эйлера.

Функция Бесселя (2.1.1) представима в виде

где ζ) – целая функция.

По признаку Даламбера ряд (2.1.2) сходится равномерно при всех , где и — произвольные числа. Так как члены ряда представляют собой целые функции по переменной ζ при фиксированном и по переменной при фиксированном ζ, то является целой функцией ζ при любом комплексном и целой функцией при любом фиксированном комплексном ζ. Все производные от функции как по переменной ζ, так и по переменной могут вычисляться перестановкой суммирования и дифференцирования.

Проверим, что функция удовлетворяет уравнению (2.1.1). Пользуясь соотношением , получим

Цилиндрическая функция называется функцией Бесселя порядка ,

(2.1.3)

Если целому числу, то функция и линейно независимо. Это следует из (2.1.2) в силу

.

Если же – целому числу, то

так что функции линейно зависимы.

Справедливы следующие рекуррентные соотношения:

(2.1.4)

Формула (2.1.4) следует из (2.1.2)

Формулу (2.1.4) можно переписать в виде

При получаем следующее

(2.1.5)

В частности, из (2.1.3) и (2.1.5) при

В конечном счёте получаем следующее рекуррентное соотношение:

Теорема 2.1.1. Корни уравнения

(2.1.6)

при – вещественные, простые, кроме, возможно, 0; они симметрично расположены относительно точки 0 и не имеют конечных предельных точек. Доказательство приведено в [10].

Пусть Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

(2.1.7)

где К области определения оператора

отнесем функции x(класса удовлетворяющий граничным условиям (2.1.7) и условию плотно в (0,1).

Из определения непосредственно вытекает: если , то

Оператор –положительный, причём

Следовательно

Каждое собственное значение оператора неотрицательное и простое. Для того чтобы было собственным значением оператора , необходимо и достаточно, чтобы и ; ему соответствует (единственная) собственная функция .

Пусть – корень уравнения (2.1.6). Тогда из уравнения Бесселя (2.1.1) следует, что – собственное значение и – соответствующая собственная функция оператора . Обратно, пусть – (положительное) собственное значение и – соответствующая собственная функция оператора . Тогда

Но из первого граничного условия (2.1.7) следует, что . А тогда и из второго граничного условия (2.1.7) следует, что есть корень уравнения (2.1.6).

Таким образом

– все собственные значения и соответствующие собственные функции оператора .

Наряду с функциями Бесселя , большое значение для нашей задачи имеет другой тип цилиндрической функции. Функция Неймана

2.2. Задача Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах.

Пусть задается как

Найти все собственные значения и собственные функции оператор Лапласа с граничным условием

(2.2.1)

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид:

Решение в виде:

(2.2.2)

Подставим уравнение Лапласа в исходное уравнение

(2.2.3)

Подставляем (2.2.2) в (2.2.3)

(2.2.4)

Следовательно, уравнения переписываются по-другому

Получаются 2 уравнения:

1)

2) $- \overline{\qquad} \quad --$

Уравнение 2) так же разбивается ещё на 2 уравнения

a)

b)

Пусть — Не ограничивая общности рассуждений можем считать, что

Тогда

(2.2.5)

откуда

Общее решение дифференциального уравнения (2.2.5) имеет вид

Условие выполняется только если где .

Поэтому задача 1) имеет бесконечное множество решений

(2.2.6)

где используя условие произвольная постоянная.

Таким образом получаем

(2.2.7)

Рассмотрим уравнение а) Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$- \qquad -$

Условие выполняется если где .

Поэтому задача а) имеет бесконечное множество решений

(2.2.8)

где – произвольные постоянные (при получаются решения, отличающиеся от только знаком).

Задача b) при имеет только решение При общее решение дифференциального уравнения задачи b) при значениях (так как множества совпадают, то это равенство можно представить следующими способами или) имеет вид

.

Или с учётом

где функции Бесселя и Неймана. Все цилиндрические функции – квазипериодические.

Учитывая неограниченность функции при , находим, что . Будем считать , поскольку собственная функция определяется с точностью до числового множителя, который определяется из условия нормировки. Поэтому собственная функция будет иметь вид

Теперь подставим функцию в граничные условия.

1)

Отсюда получим:

Поскольку для задачи Дирихле все собственные значения , то , и должно выполняться равенство

Функция Бесселя имеет счетное число положительных нулей , k=1,2, … : . Им будут соответствовать собственные значения

. Таким образом, функции R(r), удовлетворяющие условию Дирихле R(r)=0, имеют вид:

Тогда получаем собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля на круге.

собственные значения есть корни уравнения

Теперь для функции получаем

С учетом граничных условий , , имеем задачу Штурма–Лиувилля на отрезке:

(2.2.9)

Собственные значения и собственные функции задачи (2.1.7)

.

Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в области с граничными условиями (2.2.1) имеют вид

(2.2.10)

2.3. Решение нестационарного уравнения Дзекцера в цилиндрических координатах

Уравнение Дзекцера – это уравнение вида

(2.3.1)

являющееся обобщением уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью, моделирующее эволюцию свободной поверхности фильтрации жидкости [2]. Здесь – вещественные параметры, характеризующие среду; функция , функция играет роль внешних воздействий на систему.

Пусть задается как

Будем искать функцию , определенную в цилиндре , удовлетворяющую уравнению (2.3.1), начальному

(2.3.2)

и краевому

(2.3.3)

условиям.

Задачу (2.3.2) и (2.3.3) для уравнения (2.3.1) сводим к задаче Коши для неоднородного уравнения, взяв в качестве пространства и , например, пространства Соболева

(2.3.4)

где Тогда при операторы

(2.3.5)

таковы, что , а . Очевидно, что при относительный спектр . Поэтому будем брать .

Воспользуемся вспомогательной леммой:

Лемма 2.3.1. [18] Пусть пространства и определены в (2.3.4), а операторы и определены в (2.3.5). Тогда оператор сильно – секториален.

Теорема 2.3.1. Пусть выполнены условия леммы 2.3.1, тогда

(i) если , то для всех и существует единственное решение задачи (2.3.1) – (2.3.3), имеющее вид

(ii) если , то для всех существует единственное решение задачи (2.3.1) – (2.3.3), имеющий вид

Здесь { } и { } – множества ортонормированных собственных функций и соответствующих им собственных значений однородной смешанной краевой задачи для оператора Лапласа в области , занумерованные по убыванию собственных значений с учетом их кратности. Штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами такими, что .

По функции подберем решение таким образом, чтобы выполнялось

Для этого подставим в данное уравнение { } и { } – собственные функции и соответствующие им собственные значения однородной смешанной задачи для оператора Лапласа.

Таким образом, для случая 1) ( ) теоремы (2.3.1) получаем

Соответственно, для случая 2) ( ) теоремы (2.3.1) получим

Вывод по разделу

Во втором разделе были подробно рассмотрены функции Бесселя, для построения решения уравнения Дзекцера были найдены собственные значения и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля в цилиндрических координатах через функции Бесселя. А также найдено решение нестационарного уравнения Дзекцера в цилиндрических координатах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы были изучены основные положения теории уравнения соболевского типа. Был проведен обзор литературы по теме исследования. В работе были рассмотрены нестационарные уравнения соболевского типа, где один из параметров уравнения является скалярной функцией и характеризует изменение во времени параметров взаимовлияния состояний исследуемой системы.

Была исследована модель Дзекцера. Рассмотрены функции Бесселя для нахождения решения поставленной задачи в цилиндрических координатах. Для построения решения были найдены собственные значения и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля в цилиндрических координатах через функции Бесселя. А также найдено решение нестационарного уравнения Дзекцера в цилиндрических координатах.

Таким образом, выполнены все поставленные задачи, основная цель данной выпускной квалификационной работы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
2. Дзекцер, Е.С. Обобщенные уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е.С. Дзекцер // ДАН СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031 – 1033.
3. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (229). – С. 7 – 18.
4. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston:VSP, 2003. – 216 p.
5. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутстк. гос. ун-та. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104 – 125.
6. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 438 с.
7. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.
8. Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер.матем – 1954. – Т.18. – С. 3 – 50.
9. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107 – 115.
10. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров, В.В.Жаринов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
11. Загребина, С.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом / С.А. Загребина,

Е.А. Солдатова // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2013. – № 1. – С. 20 – 34.

12. Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер.матем – 1954. – Т. 18. – С. 3 – 50.
13. Свиридюк, Г.А. Линейные соболевские уравнения/ Г.А. Свиридюк // рук. доп. в ВИНИТИ 1985. № 4265. – С. 40.
14. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения соболевского типа / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров. – Челябинск, 2003. – 216 с.
15. Сагадеева, М.А. Вырожденные потоки разрешающих операторов / М.А. Сагадеева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2017. – Т. 9, № 1. – С. 22 – 30.
16. Сагадеева, М.А. Исследование устойчивости решений линейных уравнений соболевского типа: дис. канд. ф.-м.н. – 2006.
17. Sagadeeva, M.A. The nonautonomous linear oskolkov model on a geometrical graph: the stability of solutions and the optimal control problem / M.A. Sagadeeva, G.A. Sviridyuk. – Semigroups of operators – Theory and applications. – 2015. – 257 – 271 p.
18. Sagadeeva, M.A. The Numerical Solution to the Optimal Control Problem for the Nonstationary Dzektser Model / M.A. Sagadeeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. - 2014. - V. 1, № 3. - P. 46-54.