

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра прикладной математики и программирования

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент,

_____ 2018г.
« ____ » _____

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н.,
доцент

_____ А.А.Замышляева
« ____ » _____ 2018 г.

Построение явной устойчивой схемы для решения одномерного квазилинейного
уравнения теплопроводности
ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–01.03.04.18.4.ПЗ ВКР

Руководитель работы,
к.ф.-м.н., доцент
_____ /А.В. Геренштейн
« ____ » _____ 2018 г.

Автор работы
студент группы ЕТ-413
_____ / И.М. Гужов
« ____ » _____ 2018 г.

Нормоконтролер,
к.ф.-м.н., доцент
_____ /Д.А. Дрозин
« ____ » _____ 2018 г.

Челябинск, 2018

АННОТАЦИЯ

Гужов И.М. Построение явной устойчивой схемы для решения одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности. Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-413, 73с., 5ил., 4табл., библиогр. список – 22наим., 1 прил.

Данная работа посвящена построению явной устойчивой схемы для решения одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности. В работе были произведены решения уравнений и разработана программа, которая реализует данный процесс. Полученный результат говорит о том, что модель является приближенной реальному процессу.

ОГЛАВЛЕНИЕ

АННОТАЦИЯ.....	2
ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	8
1.1. Методы решения квазилинейного уравнения теплопроводности	10
1.1.1. Метод бегущей волны	10
1.1.2. Метод предиктор-корректор для явной устойчивой схемы.....	11
1.2. Распространение тепла в пространстве	14
1.2.1. Постановка краевых задач	16
1.2.2. Разностные схемы.....	18
1.4. Вывод по главе	25
Постановка задачи.....	27
2. ПОЛУЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОЙ ЯВНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ТРЕТЬЕЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ.....	30
2.1. Вывод расчетной схемы и рабочих формул для задачи с постоянными коэффициентами	30
2.2. Устойчивость явной схемы для третьей смешанной задачи с постоянными коэффициентами	34
2.3. Дифференциально-разностная схема для третьей смешанной задачи теплопроводности с непостоянными коэффициентами.....	35
2.4. Вывод по главе	36
3. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ	37
3.1. Вывод рабочих формул для задачи с непостоянными коэффициентами .	37
3.2. Повышение порядка точности разностной схемы методом предиктор-корректор	41

3.3. Приближенное решение квазилинейного уравнения теплопроводности способом интегрирования на промежутках линейности непостоянных коэффициентов	43
3.4. Приведение задачи к безразмерному виду	50
3.5. Оценка результатов программы	53
3.6. Вывод по главе	55
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	57
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	59
ПРИЛОЖЕНИЕ	62

ВВЕДЕНИЕ

Одним из современных направлений математической физики считается изучение нелинейных математических моделей всевозможных физико-химических процессов и явлений. Появление таких моделей обосновано применениями в современной физике и технике влияний на вещество электрических полей высокой интенсивности, мощного лазерного когерентного излучения, пучков частиц высокой энергии, ударных волн большой интенсивности, мощных тепловых потоков. При описании различных процессов, линейные математические модели представляются всего лишь определенными приближениями. Ими можно воспользоваться только в том случае, когда изучаемые физические величины в исследуемом процессе изменяются в узком диапазоне значений.

Нелинейные модели позволяют нам увидеть процессы в более широком диапазоне изменения параметров. Нелинейности преобразуют качественную картину их протекания, а не только количественные характеристики процессов. В настоящее время не существует законченных теорий и общих методов решения задач нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые лежат в основе нелинейных моделей.

Фундаментом многих математических моделей являются нелинейные параболические уравнения второго порядка, которые используются в биологии и химии, физике и механике. К примеру, квазилинейное уравнение теплопроводности

$$c(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(q(x, t, u) \mathbf{grad} u) + F(x, t, u), \quad (1)$$

при определенных критериях описывает процессы распространения выбросов отрицательной плавучести, химической кинетики и биологической активности, ионной и электронной теплопроводности в плазме, течения крови в мелких

кровеносных сосудах, адиабатической фильтрации газов и жидкостей в пористых средах, диффузии нейтронов и альфа-частиц в реакторных материалах.

Применение основных законов сохранения при математическом моделировании разнообразных физических процессов зачастую приводит к одним и тем же нелинейным уравнениям параболического типа. Особенно часто встречается квазилинейное уравнение теплопроводности (1) среди уравнений данного типа. Поэтому есть основания утверждать, что исследование краевых задач для нелинейного уравнения теплопроводности остается до настоящего времени актуальной темой изучения. Несмотря на бесчисленные работы по исследованию процессов нелинейной теплопроводности, до сих пор не получены точные решения целого ряда краевых задач, описываемых нелинейным уравнением теплопроводности. Поэтому численные методы решения таких задач представляют большой интерес.

В работе рассматривается квазилинейное одномерное уравнение теплопроводности (1) в отсутствии источников тепла в среде, что означает $F \equiv 0$, и в предположении, что теплоемкость и теплопроводность являются непрерывными функциями температуры:

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (2)$$

Целью дипломной работы является построение явной устойчивой разностной схемы для решения третьей смешанной задачи для уравнения вида (2). Выбор третьей смешанной задачи для исследования обусловлен тем, что практически интересные постановки задач математической физики содержат условия на границе (краевые условия) именно третьего рода.

Новизна работы состоит в построении явной безусловно устойчивой разностной схемы для уравнения (2). В [1] и [2] говорится о нецелесообразности использования явных схем для решения подобных задач. Условие устойчивости

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\min c(u)}{\max q(u)},$$

накладывает сильные ограничения на шаг по времени τ , поэтому авторами [1] и [2] предлагается использовать для расчета безусловно устойчивые неявные схемы.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования предложенной схемы для расчета распределения температуры в тонком однородном стержне при наличии существенной зависимости теплоемкости и теплопроводности среды от температуры, а также в возможности обобщения предложенной схемы на многомерный случай и ее применения к целому ряду задач, о которых упоминалось ранее.

1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Решить большинство обыкновенных дифференциальных уравнений можно, используя лишь численные методы. Вообще всевозможных постановок задач крайне немного. Обычно это задача Коши, краевая задача для линейных и нелинейных уравнений. Существует очень малое количество теоретически исследованных и практически отработанных алгоритмов, которые позволяют часть задач, связанных с численным решением обыкновенных дифференциальных уравнений, решать крайне эффективно. В частности, ряд численных методов решения задачи Коши был разработан еще в прошлом веке.

В наше время, чтобы справиться с задачей Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, не нужно разрабатывать алгоритмы и методы её решения, достаточно просто обратиться к стандартной программе.

В уравнениях с частными производными число различных постановок задач гораздо выше. В курсе уравнений с частными производными обычно рассматривается незначительная часть таких постановок, главным образом связанных с линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. При этом количество задач, решаемых в явном виде, существенно мало. Постановок в теории уравнений с частными производными так много, из-за окружающих нас явлений в мире.

Из-за большого количества различных постановок задач, связанных с решением уравнений в частных производных, теории численных методов в этом направлении стали дробиться на большое число направлений. Сильно расширило возможности в исследовании подобных задач, применение ЭВМ в численных методах. К примеру, за последние пятьдесят лет были разработаны алгоритмы, дающие возможность решать большинство краевых задач одно- и многомерных уравнений параболического типа с переменными коэффициентами, в частности с

коэффициентами, нелинейно зависящими от решения, с приемлемой затратой машинного времени.

Безусловно в этом случае дело с обоснованием сходимости численных методов и оценкой погрешности обстоит иначе, чем в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Для широких классов типовых задач такие исследования проведены. Тем не менее, для большинства математиков часто остается неясным факт существования решения во многих важных классах прикладных задач.

В настоящее время, при таком состоянии вопроса, о существовании решения трудно ожидать получения строгих оценок погрешности и теорем сходимости сеточных методов при достаточно общих гипотезах. Тем не менее, математики создают численные методы решения и для таких задач пользуясь полуэмпирическими соображениями, аналогиями по сравнению со случаем линейных уравнений и численными экспериментами на задачах с известным точным решением. Наравне с экспериментом оказывают существенное влияние на развитие соответствующих разделов теории уравнений с частными производными результаты и анализ численных расчетов.

Математикам, занимающимся решением подобных прикладных задач, невзирая на отсутствие жестких обоснований чисто математической (в частности, алгоритмической) стороны вопроса, часто приходится брать на себя ответственность за достоверность получаемых численных результатов, включая правильность математической постановки задачи.

Конечно, все сказанное не умаляет роли чисто теоретических исследований. Но очень важно для выбора алгоритма их результаты, в частности теоремы существования. Они дают уверенность в правильности постановки, подсказывают информацию о качественных свойствах решения. Проводить проверку точности предлагаемых методов помогает наличие популярных частных решений. К примеру, в задачах газовой динамики. Чтобы облегчить численное решение более сложных задач, можно применить известные частные решения простейших задач.

1.1. Методы решения квазилинейного уравнения теплопроводности

Наиболее общее квазилинейное уравнение теплопроводности, как отмечалось ранее, имеет вид

$$c(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(q(x, t, u) \mathbf{grad} u) + F(x, t, u), \quad (1.1)$$

где c – теплоемкость единицы объема, q – коэффициент теплопроводности, F – функция плотности тепловых источников.

1.1.1. Метод бегущей волны

В [1] рассмотрено одномерное уравнение (1.1), в котором коэффициент теплопроводности зависит от температуры по степенному закону

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(q(u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right), \quad q(u) = q_0 u^m, \quad q_0 > 0, \quad m > 0. \quad (1.2)$$

Решение уравнения (1.2) предлагается искать в виде бегущей волны

$$u(x, t) = f(\xi), \quad \xi = x - ct.$$

При подстановке такого решения уравнение (1.2) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$c \frac{df}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left(q_0 f^m \frac{df}{d\xi} \right) = 0.$$

Однократное интегрирование этого уравнения дает соотношение

$$f(\xi) + \frac{q_0}{c} f^m(\xi) \frac{df}{d\xi} = \text{const}. \quad (1.3)$$

Если функция $f(\xi)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке ξ_0 , то константа в правой части (1.3) равна нулю и соотношение (1.3) нетрудно проинтегрировать еще раз:

$$f(\xi) = \left(\frac{cm}{q_0} (\xi_0 - \xi) \right)^{\frac{1}{m}}, \quad \xi \leq \xi_0.$$

При $\xi > \xi_0$ $f(\xi)$ полагается равным нулю, что удовлетворяет уравнению (1.2). Таким образом, автомодельное решение уравнения (1.2) выглядит следующим образом:

$$u(x,t) = \begin{cases} \left(\frac{cm}{q_0} (x_0 - x + ct) \right)^{\frac{1}{m}}, & x \leq x_0 + ct, \\ 0, & x > x_0 + ct. \end{cases} \quad (1.4)$$

Чтобы это решение могло существовать, начальные и граничные условия должны быть с ним согласованы. Например, если уравнение (1.2) рассматривается при $t > 0$ на полуоси $x \geq x_0$, то следует задать условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \geq x_0, \\ u(x_0, t) = \left(\frac{c^2 m}{q_0} t \right)^{\frac{1}{m}}, \quad t \geq 0. \quad (1.5)$$

Автомодельные решения иногда удается найти для квазилинейных уравнений или систем уравнений, коэффициенты которых зависят от переменных x , t и решения u по степенным законам.[1] Для построения решения надо «угадать» подходящую комбинацию независимых переменных и описанным выше приемом свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению. Найти решение численным интегрированием проще, чем решить исходное уравнение в частных производных, ведь выразить разрешение этого уравнения через элементарные функции, подобно (1.4), удастся далеко не всегда.

Если автомодельные решения дают отдельные режимы протекания этого процесса и позволяют исследовать многие его особенности (см., например, [3]), то уравнение в частных производных описывает сложный физический процесс.

1.1.2. Метод предиктор-корректор для явной устойчивой схемы

Другой подход к решению квазилинейных уравнений состоит в применении чисто неявных разностных схем. В [1] и [2] рассматривается первая смешанная задача для простейшего квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u), & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \end{cases} \quad (1.6)$$

где $q(u) > 0$. Для его решения предлагается использовать два варианта схем:

$$\frac{\mathfrak{F}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left(a_{i+1}(y) \frac{\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i}{h} - a_i(y) \frac{\mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_{i-1}}{h} \right) + f(y_i) \quad (1.7)$$

и

$$\frac{\mathfrak{F}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left(a_{i+1}(\mathfrak{F}) \frac{\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i}{h} - a_i(\mathfrak{F}) \frac{\mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_{i-1}}{h} \right) + f(\mathfrak{F}_i), \quad (1.8)$$

где

$$a_i(v) = q \left(\frac{v_i + v_{i-1}}{2} \right), \quad \mathfrak{F}_i = y_i^{j+1}, \quad y_i = y_i^j.$$

Обе схемы абсолютно устойчивы, имеют погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$ (доказательство см. в [4]).

Схема (1.7) линейна относительно значения функции y^{j+1} на слое t_{j+1} , и значения функции y^{j+1} находятся по значениям функции y^j на слое t_j , например, методом прогонки (матрица линейной системы относительно значений y^{j+1} получается трехдиагональной с преобладанием главной диагонали). Поскольку схема абсолютно устойчива, шаг τ выбирается только из соображений точности.

Схема (1.8) нелинейна относительно функции y^{j+1} и для ее решения используется метод итераций. Итерационный процесс строится следующим образом:

$$\frac{\mathfrak{F}_i^{(s+1)} - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left(a_{i+1}(\mathfrak{F}^{(s)}) \frac{\mathfrak{F}_{i+1}^{(s+1)} - \mathfrak{F}_i^{(s+1)}}{h} - a_i(\mathfrak{F}^{(s)}) \frac{\mathfrak{F}_i^{(s+1)} - \mathfrak{F}_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right) + f(\mathfrak{F}_i^{(s)}). \quad (1.9)$$

Относительно $\mathfrak{F}^{(s+1)}$ разностная схема оказывается линейной. В качестве начальной итерации берется функция y предыдущего шага по времени: $\mathfrak{F}^{(0)} = y^j$. Итерационный процесс для большинства встречающихся на практике коэффициентов q и f сходится. При счете по итерационной схеме (1.8), (1.9)

задают либо число итераций, либо точность сходимости итераций ε и требуют выполнения условия

$$\max_i |y_i^{(s+1)} - y_i^{(s)}| \leq \varepsilon.$$

Пример расходимости итерационного процесса для схемы (1.8) приведен в [5]. То есть фактически схема (1.8) не является абсолютно устойчивой. Однако в [5] отмечено, что даже в случае расходимости итераций полезно сделать две итерации для повышения точности схемы. Заметим, что при одной итерации (1.9) схема (1.8) совпадает с линейным вариантом (1.7).

Сложней, но эффективней метода последовательных приближений второй способ решения схемы (1.8) – метод Ньютона ([1]). С учетом того, что $a_{i+1}(\mathfrak{F}) = a_{i+1}(\mathfrak{F}_{i+1}, \mathfrak{F}_i)$, после подставки в уравнения (1.8) $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i^{(s)} + \delta \mathfrak{F}_i^{(s)}$ и линеаризации получаются довольно громоздкие уравнения, линейные и трехточечные относительно $\delta \mathfrak{F}_i^{(s)}$:

$$\begin{aligned} & \delta \mathfrak{F}_{i+1}^{(s)} \left[a_{i+1}^{(s)} + \frac{\partial a_{i+1}}{\partial \mathfrak{F}_{i+1}} \mathfrak{F}_{i+1}^{(s)} - \mathfrak{F}_i^{(s)} \right] - \delta \mathfrak{F}_i^{(s)} \left[\frac{h^2}{\tau} + a_{i+1}^{(s)} + a_i^{(s)} - \frac{\partial a_{i+1}}{\partial \mathfrak{F}_i} \mathfrak{F}_{i+1}^{(s)} - \mathfrak{F}_i^{(s)} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial a_i}{\partial \mathfrak{F}_i} \mathfrak{F}_i^{(s)} - \mathfrak{F}_{i-1}^{(s)} - h^2 \frac{\partial f(\mathfrak{F}_i^{(s)})}{\partial \mathfrak{F}_i} \right] + \delta \mathfrak{F}_{i-1}^{(s)} \left[a_i^{(s)} - \frac{\partial a_i}{\partial \mathfrak{F}_{i-1}} \mathfrak{F}_i^{(s)} - \mathfrak{F}_{i-1}^{(s)} \right] = \quad (1.10) \\ & = \frac{h^2}{\tau} (\mathfrak{F}_i^{(s)} - \mathfrak{F}_{i-1}^{(s)}) - a_{i+1}^{(s)} (\mathfrak{F}_{i+1}^{(s)} - \mathfrak{F}_i^{(s)}) + a_i^{(s)} (\mathfrak{F}_i^{(s)} - \mathfrak{F}_{i-1}^{(s)}) - h^2 f(\mathfrak{F}_i^{(s)}), \\ & \mathfrak{F}_i^{(s+1)} = \mathfrak{F}_i^{(s)} + \delta \mathfrak{F}_i^{(s)}, \end{aligned}$$

где $a_i^{(s)} = q \left(\frac{\mathfrak{F}_i^{(s)} + \mathfrak{F}_{i-1}^{(s)}}{2} \right)$. На каждой итерации уравнения (1.10) решают прогонкой.

Доказано, что вблизи корня сходимость итерационного метода квадратичная.

Достоинство рассмотренных методов решения квазилинейного уравнения теплопроводности с применением неявных схем состоит в их абсолютной устойчивости, что позволяет выбирать шаг по времени, исходя только из соображений точности решения и времени его поиска, а решение линейных систем с трехдиагональными матрицами прогонкой сегодня даже не требует

реализации алгоритма прогонки, т.к. он уже реализован во многих математических пакетах. Однако такие хорошие в одномерном случае схемы с трудом обобщаются на многомерный случай (см., например, продольно-поперечную и локально-одномерную схемы в [1]).

Этого недостатка лишены явные схемы. Более того, при переходе в пространство большей размерности вид рабочей формулы для расчета остается тем же.

1.2. Распространение тепла в пространстве

Процесс распространения тепла в пространстве может быть characterized температурой $u(x, y, z, t)$, являющейся функцией координат x, y, z и времени t . [6]

Если температура непостоянна, то возникают тепловые потоки, направленные от точек с более высокой температурой к точкам с более низкой температурой. В этом состоит закон Фурье, аналитическая форма записи которого выглядит следующим образом:

$$\mathbf{W} = -k \mathbf{grad} u, \quad (3.1)$$

где \mathbf{W} – вектор плотности теплового потока, k – коэффициент теплопроводности.

Если среда изотропная, то k есть скаляр. В случае анизотропной среды k есть тензор, а вектор теплового потока \mathbf{W} представляет собой произведение тензора k на вектор $-\mathbf{grad} u$. Далее рассматривается изотропная среда.

Рассмотрим площадку $d\sigma$ в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$ с нормалью \mathbf{n} (см. Рис. 3.1).

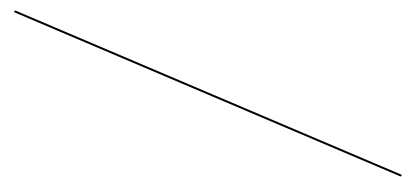


Рис. 3.1

Количество тепла, протекающего через $d\sigma$ в единицу времени, согласно закону Фурье, равно

$$(\mathbf{W}, \mathbf{n})d\sigma = -k(\mathbf{grad}u, \mathbf{n})d\sigma = -k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Рассмотрим теперь некоторый объём V , ограниченный замкнутой поверхностью S . Уравнение теплового баланса для объёма V за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$ запишется в следующем виде:

$$\iiint_V \left(\int_t^{t+\Delta t} c \frac{\partial u}{\partial t}(P, t) dt \right) dV_p = - \int_t^{t+\Delta t} \left(\iint_S (\mathbf{W}, \mathbf{n}) d\sigma \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\iiint_V F(P, t) dV_p \right) dt, \quad (3.2)$$

где $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ – точка интегрирования, $dV_p = d\xi d\eta d\zeta$ – элемент объёма, c – теплоёмкость единицы объёма, $F(P, t)$ – плотность тепловых источников (количество тепла, выделяющегося единицей объёма в единицу времени). Будем предполагать, что $F(P, t)$ – непрерывная функция своих аргументов.

Пусть функция $u(x, y, z, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x, y, z и один раз непрерывно дифференцируема по t в рассматриваемой области. В этом случае векторное поле $\mathbf{W} = -k \mathbf{grad}u$ является непрерывно дифференцируемым, и можно воспользоваться формулой Гаусса-Остроградского

$$\iint_S (\mathbf{W}, \mathbf{n}) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{W} dV. \quad (3.3)$$

Уравнение баланса преобразуется к виду

$$\iiint_V \left(\int_t^{t+\Delta t} c \frac{\partial u}{\partial t}(P, t) dt \right) dV_p = - \int_t^{t+\Delta t} \left(\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{W} dV_p \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\iiint_V F(P, t) dV_p \right) dt,$$

или же

$$\iiint_V \int_t^{t+\Delta t} \left(c \frac{\partial u}{\partial t}(P, t) + \operatorname{div} \mathbf{W} - F(P, t) \right) dt dV_p = 0.$$

В силу равенства интеграла нулю по любому объёму V и для любого промежутка времени Δt , а также непрерывности подынтегральной функции по

теореме о сохранении знака следует, что подынтегральная функция есть тождественный нуль:

$$c \frac{\partial u}{\partial t}(P, t) + \operatorname{div} \mathbf{W} - F(P, t) = 0.$$

Заменяя \mathbf{W} по формуле $\mathbf{W} = -k \operatorname{grad} u$, получим дифференциальное уравнение теплопроводности

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F. \quad (3.4)$$

В одномерном случае при отсутствии источников тепла получим уравнение линейной теплопроводности

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (3.5)$$

Применительно к задаче о распространении тепла в стержне будем предполагать, что стержень имеет конечную длину l , боковая поверхность стержня теплоизолирована и, кроме того, стержень настолько тонок, что в любой момент времени температура всех точек данного поперечного сечения стержня одна и та же.

1.2.1. Постановка краевых задач

Чтобы найти единственного решения уравнения теплопроводности следует к уравнению добавить начальные и граничные условия.

Первое что нужно сделать, это задать значения функции $u(x, t)$ в начальный момент t_0 , это будет начальным условием.

В зависимости от температурного режима на границах, будут различаться и граничные условия. Рассматривают три основных типа граничных условий, которые представлены в пособии Тиханова А.Н., Самарского А.А.[6-7]:

1. На конце стержня $x = 0$ задана температура

$$u(0, t) = \mu(t),$$

где $\mu(t)$ – функция, заданная в некотором промежутке $t_0 \leq t \leq T$, причем T есть промежуток времени, в течение которого изучается процесс.

2. На конце $x = l$ задано значение производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t).$$

К этому условию приходят, если задана величина теплового потока $Q(l, t)$, протекающего через торцевое сечение стержня,

$$Q(l, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(l, t),$$

откуда $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t)$, где $\nu(t)$ – известная функция, выражающаяся через заданный поток $Q(l, t)$ по формуле

$$\nu(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

3. На конце $x = l$ задано линейное соотношение между производной и функцией

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda(u(l, t) - \theta(t)).$$

Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой θ известна. Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, вытекающего через сечение $x = l$,

$$Q = h(u - \theta)$$

и

$$Q = -k \frac{\partial u}{\partial x},$$

получаем математическую формулировку третьего граничного условия в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda(u(l, t) - \theta(t)),$$

где $\lambda = \frac{h}{k}$ – коэффициент теплоотдачи, $\theta(t)$ – некоторая заданная функция (температура внешней среды). Для конца $x=0$ стержня третье граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda(u(0, t) - \theta(t)).$$

Граничные условия при $x=0$ и $x=l$ могут быть разных типов.

1.2.2. Разностные схемы

Задачи математической физики помимо дифференциального уравнения включают краевые и начальные условия, которые обеспечивают выделение единственного решения из всей совокупности возможных решений. Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих основное дифференциальное уравнение и краевые и начальные условия, называют разностной схемой.[7]

1.2.2.1. Сходимость и точность разностных схем

При решении некоторой задачи приближенным методом в конечном счете надо иметь предварительное суждение о том, с какой точностью можно приблизить при помощи этого метода точное решение задачи.[7]

Пусть в области G с границей Γ требуется найти решение линейного дифференциального уравнения

$$Lu = f(x), x \in G, \quad (3.6)$$

удовлетворяющее дополнительным (краевым или начальным) условиям

$$lu = \mu(x), x \in \Gamma, \quad (3.7)$$

где $f(x)$ и $\mu(x)$ – заданные функции (входные данные задачи), l – некоторый линейный дифференциальный оператор. Предположим, что решение задачи (3.6)–(3.7) существует и единственно.

Область $G + \Gamma$ непрерывного изменения аргумента заменяется дискретным множеством точек (узлов) x_i – сеткой.

Пусть h – векторный параметр, характеризующий плотность распределения узлов, ω_h – множество внутренних узлов сетки, γ_h – множество граничных узлов. Задаче (3.6)–(3.7) поставим в соответствие разностную задачу

$$L_h y_h = \varphi_h, \quad x \in \omega_h; \quad l_h y_h = \chi_h, \quad x \in \gamma_h, \quad (3.8)$$

где $\varphi_h(x)$ и $\chi_h(x)$ – известные сеточные функции. Здесь L_h и l_h – линейные операторы, действующие на сеточные функции, заданные для $x \in \overline{\omega_h} = \omega_h + \gamma_h$. Решение y_h задачи (3.8) есть сеточная функция, определяемая в узлах сетки $\overline{\omega_h}$. Меняя h , то есть выбирая различные сетки $\overline{\omega_h}$, получаем множество решений $\{y_h\}$, зависящих от параметра h . Таким образом, следует рассматривать семейство схем (3.3), соответствующих различным значениям параметра h .

Основной целью всякого приближенного метода является получение решения исходной (непрерывной) задачи с заданной точностью $\varepsilon > 0$ за конечное число действий. Чтобы выяснить принципиальную возможность приближения решения u задачи (3.6)–(3.7) решением y_h задачи (3.8) с любой заданной точностью $\varepsilon > 0$ в зависимости от выбора шага $h(\varepsilon)$, нужно иметь возможность сравнить y_h и $u(x)$.

Это сравнение будем проводить в пространстве H_h сеточных функций. Пусть u_h – проекция $u(x)$ на сетке ω_h , так что $u_h \in H_h$.

Рассмотрим погрешность разностной схемы (3.8):

$$z_h = y_h - u_h.$$

Подставив $y_h = z_h + u_h$ в (3.8), получим для z_h задачу того же типа, что и (3.8):

$$L_h z_h = \psi_h, \quad x \in \omega_h; \quad l_h z_h = \nu_h, \quad x \in \gamma_h, \quad (3.9)$$

где

$$\psi_h = \varphi_h - L_h u_h, \quad \nu_h = \chi_h - l_h u_h.$$

ψ_h называют погрешностью аппроксимации для схемы $L_h y_h = \varphi_h$ на решении $u(x)$ уравнения (3.6), а ν_h – погрешностью аппроксимации для условия $l_h y_h = \chi_h$ на решении задачи (3.6)–(3.7).

Для оценки погрешности схемы z_h и погрешности аппроксимации ψ_h и ν_h введем на множестве сеточных функций нормы $\|\cdot\|_{l_h}$, $\|\cdot\|_{2_h}$ и $\|\cdot\|_{3_h}$ соответственно.

Будем говорить, что решение разностной задачи (3.8) сходится к решению задачи (3.6)–(3.7) (схема (3.8) сходится), если $\|z_h\|_{l_h} = \|y_h - u_h\|_{l_h} \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$.

Разностная схема (3.8) сходится со скоростью $O(\|h\|^n)$ или имеет n -й порядок точности, $n > 0$, если

$$\exists M > 0 \exists h_0 \forall h : \|h\| < h_0 \quad \|z_h\|_{l_h} = \|y_h - u_h\|_{l_h} \leq M \|h\|^n.$$

Говорят, что разностная схема (3.8) аппроксимирует задачу (3.6)–(3.7), если $\|\psi_h\|_{2_h} = \|\varphi_h - L_h u_h\|_{2_h} \rightarrow 0$ и $\|\nu_h\|_{3_h} = \|\chi_h - l_h u_h\|_{3_h} \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$.

Разностная схема (3.8) обладает n -м порядком аппроксимации, если $\|\psi_h\|_{2_h} = O(\|h\|^{n_1})$ и $\|\nu_h\|_{3_h} = O(\|h\|^{n_2})$, $n = \min(n_1, n_2)$.

1.2.2.2. Понятие корректности разностной задачи

Применительно к задачам математической физики принято говорить, что задача поставлена корректно, если выполнены два условия[7]:

- 1) решение задачи существует и единственно при любых входных данных из некоторого класса,
- 2) решение задачи непрерывно зависит от входных данных.

Аналогично определяют понятие корректности разностной задачи. Пусть y_h – решение, а φ_h – входные данные некоторой разностной задачи. Они зависят от параметра h . Изменяя h , получим последовательности решений $\{y_h\}$ и входных данных $\{\varphi_h\}$. Понятие корректности вводится для семейства разностных задач (схем) при $\|h\| \rightarrow 0$.

Говорят, что разностная задача (схема) корректна, если для всех h таких, что $\|h\| < h_0$:

1) решение y_h существует и единственно для всех входных данных φ_h из некоторого семейства,

2) решение y_h непрерывно зависит от входных данных φ_h , причем эта зависимость равномерна относительно h .

Второе условие означает, что

$$\exists M > 0 \exists h_0 \forall h: \|h\| < h_0 \quad \|y_h - y_h^0\| \leq M \|\varphi_h - \varphi_h^0\|, \quad (3.10)$$

где y_h – решение задачи с входными данными φ_h .

Свойство непрерывной зависимости решения разностной задачи от входных данных, выраженное условием (3.10), называется устойчивостью схемы по входным данным или просто устойчивостью.

Пусть дана непрерывная задача (3.6)–(3.7). И пусть ее аппроксимирует разностная задача (3.8). Кроме того, задача для погрешности имеет вид (3.9). Вместо (3.9) напомним формально

$$L_h z_h = \psi_h.$$

Если оператор L_h линеен и разностная схема корректна, то, в силу (3.10), будем иметь

$$\|z_h\|_{l_h} \leq M \|\psi_h\|_{2_h} \quad \text{или} \quad \|z_h\|_{l_h} \leq M \|\psi_h\|_{2_h} + \|v_h\|_{2_h}. \quad (3.11)$$

Если, кроме того, разностная задача (3.8) обладает n -м порядком аппроксимации, то, в силу (3.11), будем иметь

где константа

Таким образом, если схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу, то она сходится, причем скорость сходимости равна ее порядку аппроксимации.

1.2.2.3. Устойчивость явной и неявной разностных схем для линейного уравнения теплопроводности

Рассмотрим первую смешанную задачу линейной теплопроводности с однородными краевыми условиями:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & t > 0, 0 < x < l, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Задача с неоднородными краевыми условиями

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & t > 0, 0 < x < l, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

может быть сведена к задаче с однородными краевыми условиями с помощью замены

$$u(x, t) = U(x, t) + \mu_1(t) + \frac{x}{L}(\mu_2(t) - \mu_1(t)),$$

где $U(x, t)$ – новая неизвестная функция.

На плоскости (x, t) введем сетку

$$\begin{aligned} \omega_{h\tau} &= \omega_h \times \omega_\tau, \\ \omega_h &= \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1\}, \\ \omega_\tau &= \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Аппроксимируем задачу (3.7) разностной схемой

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{dy_i}{dt} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + f_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \\ y_0^j = y_N^j = 0, & j = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (3.14)$$

Проинтегрируем каждое из уравнений в (3.14) по времени на промежутке $t_j \leq t \leq t_{j+1}$:

$$\frac{1}{a^2}(y_i^{j+1} - y_i^j) = \frac{1}{h^2} \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} y_{i-1} dt - 2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y_i dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} y_{i+1} dt \right) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_i dt.$$

Поделив обе части на τ , получим:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_i dt = \begin{cases} \varphi_i^j, \\ \varphi_i^{j+1}, \\ \frac{\varphi_i^j + \varphi_i^{j+1}}{2}. \end{cases}, \quad (3.15)$$

где $\varphi_i^j = \frac{1}{h^2} (y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j) + f_i^j$.

Различные разностные схемы будем получать на основе тех или иных аппроксимаций в (3.10):

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_i dt = \begin{cases} \varphi_i^j, \\ \varphi_i^{j+1}, \\ \frac{\varphi_i^j + \varphi_i^{j+1}}{2}. \end{cases}$$

Приходим к разностным схемам:

– явной схеме

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\lambda} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + f_i^j, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \\ y_0^j = y_N^j = 0, & j = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (3.16)$$

– неявной схеме

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\lambda} = \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + f_i^{j+1}, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \\ y_0^j = y_N^j = 0, & j = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (3.17)$$

Не нарушая общности, будем считать, что длина стержня $l=1$. Разложим решение y_i^j разностной схемы по системе функций $\left\{ \sin \frac{\pi ni}{N} \right\}$, $i=1, 2, \dots, N-1$.

Эти функции удовлетворяют нулевым граничным условиям: $\sin \frac{\pi n 0}{N} = \sin \frac{\pi n N}{N} = 0$

$$y_i^j = \sum_{n=1}^{N-1} Y_n^j \sin \frac{\pi ni}{N}, \quad f_i^j = \sum_{n=1}^{N-1} F_n^j \sin \frac{\pi ni}{N},$$

где

$$Y_n^j = \frac{1}{g_n} \sum_{i=1}^{N-1} y_i^j \sin \frac{\pi ni}{N}, \quad F_n^j = \frac{1}{g_n} \sum_{i=1}^{N-1} f_i^j \sin \frac{\pi ni}{N},$$

$$g_n = \sum_{i=1}^{N-1} \sin^2 \frac{\pi ni}{N}.$$

Из (3.16) получаем:

$$\frac{1}{\lambda} Y_n^{j+1} - Y_n^j \sin \frac{\pi ni}{N} = \frac{1}{h^2} \left(Y_n^j \sin \frac{\pi n(i-1)}{N} - 2Y_n^j \sin \frac{\pi ni}{N} + Y_n^j \sin \frac{\pi n(i+1)}{N} \right) + F_n^j \sin \frac{\pi ni}{N}.$$

Воспользовавшись тем, что $\sin \frac{\pi n(i-1)}{N} + \sin \frac{\pi n(i+1)}{N} = 2 \sin \frac{\pi ni}{N} \cos \frac{\pi n}{N}$, имеем:

$$\frac{1}{\lambda} Y_n^{j+1} - Y_n^j \sin \frac{\pi ni}{N} = \frac{1}{h^2} 2Y_n^j \left(\cos \frac{\pi n}{N} - 1 \right) \sin \frac{\pi ni}{N} + F_n^j \sin \frac{\pi ni}{N}$$

или

$$\frac{1}{\lambda} Y_n^{j+1} - Y_n^j = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi n}{2N} Y_n^j + F_n^j.$$

Пришли к рекуррентному соотношению

$$Y_n^{j+1} = \left(1 - \lambda \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi n}{2N} \right) Y_n^j + F_n^j.$$

Отсюда условие устойчивости для явной схемы (3.16) запишется в виде

$$\left| 1 - \lambda \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi n}{2N} \right| < 1.$$

Обозначим для удобства $\theta_n = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi n}{2N}$. Тогда

$$\begin{aligned} |1 - \lambda \theta_n| &< 1, \\ 0 &< \lambda \theta_n < 2. \end{aligned}$$

Левое неравенство верное, а из правого получим

$$\lambda < \frac{2}{\theta_n} = \frac{h^2}{2 \sin^2 \frac{\pi n}{2N}}.$$

Так как $\sin^2 \frac{\pi n}{2N} \leq 1$, то $\frac{h^2}{2 \sin^2 \frac{\pi n}{2N}} \geq \frac{h^2}{2}$. Поэтому условие

$$\frac{a^2 \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \tag{3.18}$$

является достаточным условием устойчивости.

Аналогичными рассуждениями из (3.17) получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов Y_n^j

$$\left(1 + \lambda \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi n}{2N} \right) Y_n^{j+1} = Y_n^j + F_n^{j+1}.$$

Условие устойчивости для неявной схемы (3.12) запишется в виде

$$\frac{1}{1 + \lambda \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi n}{2N}} < 1.$$

Это неравенство верно для всех n и для любых λ и h . Следовательно, неявная схема для уравнения теплопроводности безусловно (абсолютно) устойчива [14-16].

1.4. Вывод по главе

В данной главе рассматривались методы решения квазилинейного уравнения теплопроводности, а также распространение тепла в пространстве. Были рассмотрены методы: бегущей волны и предиктор-корректор, которые я буду использовать в своей работе.

При рассмотрении тепла в пространстве, можно сделать вывод о том, что задача распространения тепла в стержне предполагает, что стержень имеет конечную длину l , боковая поверхность стержня теплоизолирована и, кроме того, стержень настолько тонок, что в любой момент времени температура всех точек данного поперечного сечения стержня одна и та же. В дальнейшем нужно получить устойчивую явную схему для третьей смешанной задачи.

Постановка задачи

Целью данной дипломной работы является: построение безусловно устойчивой явной схемы для решения квазилинейного одномерного уравнения теплопроводности.

В рамках выполнения данной дипломной работы необходимо:

1. Построить явную устойчивую схему для численного решения следующей третьей смешанной задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности[5]

$$\begin{cases} c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), & 0 < t \leq T, 0 < x < L, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ - \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \lambda_l(u(0, t)) \theta_l - u(0, t) + Q_l, \\ \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} = \lambda_r(u(0, t)) \theta_r - u(0, t) + Q_r, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $u = u(x, t)$ – неизвестная функция (температура стержня), подлежащая отысканию;

L – длина стержня;

T – конечный момент времени;

$c(u)$ – известная объемная теплоемкость материала стержня;

$q(u)$ – известный коэффициент теплопроводности;

$\varphi(x)$ – известная непрерывная функция, задающая начальное распределение температуры стержня;

$\lambda_l(u)$ – коэффициент теплоотдачи на левом конце стержня;

θ_l – температура внешней среды на левом конце стержня;

Q_l – мощность потока тепла на левом конце стержня;

$\lambda_r(u)$ – коэффициент теплоотдачи на правом конце стержня;

θ_r – температура внешней среды на правом конце стержня;

Q_r – мощность потока тепла на правом конце стержня.

Величины θ_l , θ_r , Q_l , Q_r считаются постоянными, а функции $c = c(u)$, $q = q(u)$, $\lambda_l = \lambda_l(u)$ и $\lambda_r = \lambda_r(u)$ – непрерывными функциями температуры, заданными на конечных множествах значений температуры.

Числовые значения всех величин предполагаются заданными в системе единиц СИ.

Построение схемы предполагает решение следующих задач:

- упрощение вида исходного уравнения с учетом того, что коэффициент q явно зависит только от температуры;
- выбор сетки разбиения для множества, на котором определена функция $u = u(x, t)$;
- выбор разделенных разностей для аппроксимации частных производных, входящих в уравнение, получение разностного уравнения;
- сведение разностного уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно значения температуры на следующем временном слое;
- выбор способа задания нелинейных краевых условий, входящих в постановку задачи;
- обезразмеривание задачи;
- возможное использование схемы предиктор-корректор для повышения точности схемы.

2. Исследовать свойств полученной схемы (порядок аппроксимации, устойчивость).

3. Разработать программу на языке программирования C++ для численного решения поставленной задачи (2.1) с применением полученной схемы, линейного и нелинейного (с использованием метода итераций) вариантов чисто неявной схемы.

4. Провести сравнение решений задачи, полученных при использовании указанных выше схем.

5. Сделать заключение о возможностях практического применения построенной явной схемы для решения квазилинейного уравнения теплопроводности.

2. ПОЛУЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОЙ ЯВНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ТРЕТЬЕЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

2.1. Вывод расчетной схемы и рабочих формул для задачи с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующую третью смешанную задачу для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, 0 < x < L, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -\lambda_l (\theta_l - u(0, t)) - Q_l, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = \lambda_r (\theta_r - u(L, t)) - Q_r, \end{array} \right. \quad (3.19)$$

где λ_l – коэффициент теплоотдачи на левом конце стержня, θ_l – температура внешней среды на левом конце стержня, Q_l – мощность потока тепла на левом конце стержня, λ_r – коэффициент теплоотдачи на правом конце стержня, θ_r – температура внешней среды на правом конце стержня, Q_r – мощность потока тепла на правом конце стержня.

На плоскости (x, t) введем равномерную сетку

$$\begin{aligned} \omega_{ht} &= \omega_h \times \omega_\tau, \\ \omega_h &= \left\{ x_i = \left(i - \frac{1}{2} \right) h, i = 1, 2, \dots, N \right\}, \\ \omega_\tau &= \{ t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots \}, \end{aligned}$$

где $h = \frac{L}{N}$ – шаг по переменной x , τ – шаг по переменной t .

Через u_{i-1}, u_i, u_{i+1} обозначим значения функции u при $t = t_0$ (на оси x) в точках x_{i-1}, x_i, x_{i+1} , через $\bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}$ – значения функции u в момент времени $t = t_0 + \tau$ в тех же точках (см. Рис. 3.2).

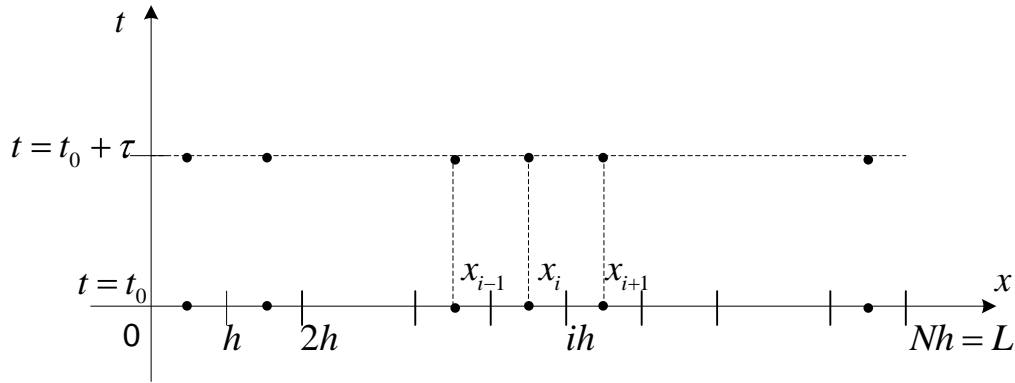


Рис. 3.2 – Расчетная схема

Явная схема для задачи (3.19) выглядит так:

$$\frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} = a^2 \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}, \quad (3.20)$$

а неявная схема имеет вид

$$\frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} = a^2 \frac{\bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}}{h^2}. \quad (3.21)$$

Применение неявной схемы приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений с так называемой трехдиагональной матрицей:

$$-\frac{a^2\tau}{h^2}u_{i-1} + \left(1 + 2\frac{a^2\tau}{h^2}\right)\bar{u}_i - \frac{a^2\tau}{h^2}u_{i+1} = u_i.$$

Для одномерного уравнения эта схема предпочтительнее, поскольку явная схема неустойчива при $\frac{a^2\tau}{h^2} > \frac{1}{2}$, в то время как неявная схема устойчива при любом соотношении τ и h . Но в многомерных случаях неявная схема оказывается не столь удобной, так как с увеличением размерности растет и число систем уравнений, подлежащих решению, а именно, при увеличении размерности на единицу число систем увеличивается в M раз, где M – число узлов сетки разностной схемы по соответствующей координате.

Имея в виду возможность применения численных методов к многомерному уравнению, запишем явную схему в виде

$$\frac{\bar{u}_i(t) - \bar{u}_i(t - \tau)}{\tau} + \frac{2a^2}{h^2}\bar{u}_i(t - \tau) = \frac{a^2}{h^2}(u_{i-1} + u_{i+1}) \quad (3.22)$$

и перейдем к пределу при $\tau \rightarrow +0$. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} + \frac{2a^2}{h^2}\bar{u}_i = \frac{a^2}{h^2}(u_{i-1} + u_{i+1}). \quad (3.23)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $\bar{u}_i(t) = C(t)e^{-\frac{2a^2}{h^2}t}$. Тогда получим

$$C'(t)e^{-\frac{2a^2}{h^2}t} = \frac{a^2}{h^2}(u_{i-1} + u_{i+1}),$$

$$C'(t) = \frac{a^2}{h^2}(u_{i-1} + u_{i+1})e^{\frac{2a^2}{h^2}t}.$$

Интегрируя левую и правую части от 0 до t , получим

$$C(t) = \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{2} \left(e^{\frac{2a^2}{h^2}t} - 1 \right) + C(0) = \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{2} \left(e^{\frac{2a^2}{h^2}t} - 1 \right) + u_i.$$

Окончательно, решением уравнения (3.23) является следующая функция

$$\bar{u}_i(t) = u_i e^{-\frac{2a^2}{h^2}t} + \left(1 - e^{-\frac{2a^2}{h^2}t} \right) \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{2}. \quad (3.24)$$

Полученная формула для определения значений \bar{u}_i на следующем временном слое справедлива для узлов с номерами $i = 2, \dots, N-1$. Для остальных узлов необходимо учесть краевые условия задачи (3.19). На левой границе должно выполняться условия

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -\lambda_l(\theta_l - u(0, t)) - Q_l, \quad (3.25)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = \lambda_r(\theta_r - u(L, t)) - Q_r. \quad (3.26)$$

Заведем фиктивные узлы с номерами 0 и $N+1$ (см. Рис. 3.3) и подберем температуры u_0 и u_{N+1} в этих узлах, чтобы обеспечить выполнение условий (3.25)–(3.26).

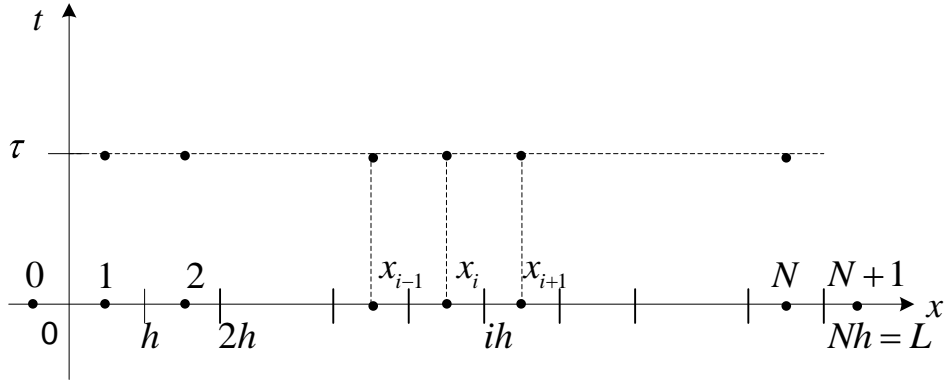


Рис. 3.3 – Расчетная схема с фиктивными узлами

Температура в точке $x = 0$ принимается равной полусумме температур u_0 и u_1

. Разностная аппроксимация условия (3.25) имеет вид

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = -\lambda_0 \left(\theta_0 - \frac{u_0 + u_1}{2} \right) - Q_0, \quad (3.27)$$

где λ_0 , θ_0 , Q_0 – соответственно коэффициент теплоотдачи, температура внешней среды и мощность потока тепла на левом конце стержня. Выразим из выражения (3.27) температуру u_0

$$u_0 = \frac{2 - h\lambda_0}{2 + h\lambda_0} u_1 + \frac{2h(\lambda_0\theta_0 + Q_0)}{2 + h\lambda_0}. \quad (3.28)$$

Аналогично находится температура u_{N+1}

$$u_{N+1} = \frac{2 - h\lambda_{N+1}}{2 + h\lambda_{N+1}} u_N + \frac{2h(\lambda_{N+1}\theta_{N+1} + Q_{N+1})}{2 + h\lambda_{N+1}}, \quad (3.29)$$

где λ_{N+1} , θ_{N+1} , Q_{N+1} – соответственно коэффициент теплоотдачи, температура внешней среды и мощность потока тепла на правом конце стержня.

Теперь формула (3.24) справедлива для узлов с номерами $1, \dots, N$.

Итак, в начальный момент времени t заданы значения u_1, u_2, \dots, u_N . Это либо начальные значения, либо значения, вычисленные в предыдущей итерации. По формулам (3.28) и (3.29) вычисляются значения u_0 и u_{N+1} . Наконец, по формуле (3.24) вычисляются значения $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N$, которые служат начальными значениями u_1, u_2, \dots, u_N для следующей итерации по времени.

2.2. Устойчивость явной схемы для третьей смешанной задачи с постоянными коэффициентами

Докажем сперва устойчивость предложенной схемы для внутренних узлов, т. е. узлов с номерами $i = 2, \dots, N - 1$. Пусть решение уравнения (3.23) имеет вид

$$\bar{u}_i = u_i^{\text{точное}} + \bar{\varepsilon}_i,$$

где $u_i^{\text{точное}}$ – точное решение задачи (3.19) на i -м узле и соответствующем слое по времени. Стало быть, $\bar{\varepsilon}_i$ есть допущенная ошибка. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_i}{dt} + \frac{2a^2}{h^2}\bar{\varepsilon}_i = \frac{a^2}{h^2}(\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_{i+1}).$$

Его решение

$$\bar{\varepsilon}_i(t) = \varepsilon_i e^{-\frac{2a^2}{h^2}t} + \left(1 - e^{-\frac{2a^2}{h^2}t}\right) \frac{\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_{i+1}}{2}$$

и, следовательно, для узлов сетки с номерами $i = 2, \dots, N - 1$ выполняется

$$|\bar{\varepsilon}_i(t)| \leq \max_{j=1, N} |\varepsilon_j| e^{-\frac{2a^2}{h^2}t} + \left(1 - e^{-\frac{2a^2}{h^2}t}\right) \max_{j=1, N} |\varepsilon_j| = \max_{j=1, N} |\varepsilon_j| \quad \forall t \in [0; \tau],$$

что и означает устойчивость схемы во внутренних узлах.

Рассмотрим узел с номером 1. Пусть в u_1 допущена ошибка ε_1 , т. е.

$$u_1 = u_1^{\text{точное}} + \varepsilon_1.$$

Тогда в соответствии с формулой (3.28)

$$u_0 = \frac{2 - h\lambda_0}{2 + h\lambda_0} (u_1^{\text{точное}} + \varepsilon_1) + \frac{2h(\lambda_0\theta_0 + Q_0)}{2 + h\lambda_0} = u_0^{\text{точное}} + \frac{2 - h\lambda_0}{2 + h\lambda_0} \varepsilon_1.$$

Обозначим $\varepsilon_0 = \frac{2 - h\lambda_0}{2 + h\lambda_0} \varepsilon_1$. Тогда

$$\bar{\varepsilon}_1(t) = \varepsilon_1 e^{-\frac{2a^2}{h^2}t} + \left(1 - e^{-\frac{2a^2}{h^2}t}\right) \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_2}{2} = \varepsilon_1 e^{-\frac{2a^2}{h^2}t} + \left(1 - e^{-\frac{2a^2}{h^2}t}\right) \frac{1}{2} \left(\frac{2 - h\lambda_0}{2 + h\lambda_0} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right)$$

и в силу того, что $\frac{2 - h\lambda_0}{2 + h\lambda_0} \leq 1 \quad \forall h > 0$,

$$|\bar{\varepsilon}_1(t)| \leq \max_{j=1, N} |\varepsilon_j| e^{-\frac{2a^2}{h^2}t} + \left(1 - e^{-\frac{2a^2}{h^2}t}\right) \max_{j=1, N} |\varepsilon_j| = \max_{j=1, N} |\varepsilon_j| \quad \forall t \in [0; \tau]$$

Аналогично для случая $i = N$ доказывается, что $|\bar{\varepsilon}_N(t)| \leq \max_{j=1, N} |\varepsilon_j| \quad \forall t \in [0; \tau]$.

Окончательно, имеем $|\bar{\varepsilon}_i(t)| \leq \max_{j=1, N} |\varepsilon_j| \quad \forall t \in [0; \tau] \quad \forall i = \overline{1, N}$.

2.3. Дифференциально-разностная схема для третьей смешанной задачи теплопроводности с непостоянными коэффициентами

В соответствии с формулой (3.5) уравнение одномерной теплопроводности с непостоянными коэффициентами записывается в виде

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(q \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (3.30)$$

Будем считать удельную теплоемкость единицы объема c и коэффициент теплопроводности q функциями температуры, т. е. $c = c(u)$ и $q = q(u)$.

Краевые условия на концах стержня выглядят так

$$-\left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \lambda_l(u(0, t)) \theta_l - u(0, t) + Q_l, \quad (3.31)$$

$$\left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} = \lambda_r(u(0, t)) \theta_r - u(0, t) + Q_r, \quad (3.32)$$

где $\lambda_l(u)$ и $\lambda_r(u)$ – коэффициенты теплоотдачи соответственно на левом и правом конце стержня (известные функции температуры), θ_l и θ_r – температура внешней среды соответственно на левом и правом конце стержня, Q_l и Q_r – мощность теплоисточника соответственно на левом и правом конце стержня.

Кроме того, задано распределение температуры на стержне в начальный момент времени $t = 0$:

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (3.33)$$

Записывая вместе уравнение (3.30), краевые условия (3.31), (3.32) и начальное условие (3.33), получим постановку третьей смешанной задачи одномерной теплопроводности с непостоянными коэффициентами, являющимися функциями температуры:

$$\left\{ \begin{array}{l} c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad t > 0, 0 < x < L, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ - \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \lambda_l(u(0, t)) \theta_l - u(0, t) + Q_l, \\ \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} = \lambda_r(u(0, t)) \theta_r - u(0, t) + Q_r \end{array} \right. \quad (3.34)$$

2.4. Вывод по главе

В данной главе я рассматривал третью смешанную задачу для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. В дальнейшем нужно решить краевую задачу для уравнения теплопроводности с непостоянными коэффициентами с теплофизическими параметрами зависящими от температуры.

3. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

3.1. Вывод рабочих формул для задачи с непостоянными коэффициентами

Введем в рассмотренную функцию $G(u) = \int_0^u q(\xi) d\xi$. Частная производная $\frac{\partial G}{\partial x}$

равна

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{dG}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = q(u) \frac{\partial u}{\partial x},$$

с учетом этого частная производная $\frac{\partial G}{\partial t}$ равна

$$\frac{\partial G}{\partial t} = q(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{q(u)}{c(u)} \cdot c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{q(u)}{c(u)} \frac{\partial}{\partial x} \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{q(u)}{c(u)} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}.$$

Следовательно, для функции G получаем уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2(u) \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad (3.35)$$

где $a^2(u) = \frac{q(u)}{c(u)}$.

Для расчета значений функции G можно воспользоваться разностной схемой (3.24), описанной в предыдущем пункте. Вводя аналогичные обозначения, что и в предыдущем пункте, расчетная формула для значений функции G во внутренних узлах сетки запишется в виде

$$\bar{G}_i(t) = G_i e^{-\frac{2a^2(u_i)_t}{h^2}} + \left(1 - e^{-\frac{2a^2(u_i)_t}{h^2}} \right) \frac{G_{i-1} + G_{i+1}}{2}, \quad i = 2, \dots, N-1. \quad (3.36)$$

Заведем фиктивные узлы с номерами 0 и $N+1$ (см. рис. 4.2) и подберем значения G_0 и G_{N+1} в этих узлах, чтобы обеспечить выполнение условий (3.31)–(3.32).

Перепишем краевое условие (3.31) в виде

$$-\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=0} = \lambda_l(u(0, t)) \theta_l - u(0, t) + Q_l.$$

Обозначим через G^{-1} функцию, обратную к функции G . В силу монотонности последней такая функция существует. Тогда $u(0, t)$ можно записать в виде

$$u(0, t) = G^{-1}(G(u(0, t))) = G^{-1}(G(0, t))$$

и

$$-\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=0} = \lambda_l(G^{-1}(G(0, t))) \theta_l - G^{-1}(G(0, t)) + Q_l.$$

Аппроксимируя производную $\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=0}$ разделенной разностью $\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{G_1 - G_0}{h}$, а

значение $G(0, t)$ – полусуммой $G(0, t) = \frac{G_0 + G_1}{2}$, получим соотношение

$$\frac{-G_1 + G_0}{h} = \lambda_l\left(G^{-1}\left(\frac{G_0 + G_1}{2}\right)\right)\left(\theta_l - G^{-1}\left(\frac{G_0 + G_1}{2}\right)\right) + Q_l.$$

Преобразуем левую часть этого соотношения:

$$\frac{-G_1 + G_0}{h} = \frac{-2G_1 + (G_0 + G_1)}{h} = -\frac{2G_1}{h} + \frac{2}{h} \cdot \frac{G_0 + G_1}{2} = -\frac{2G_1}{h} + \frac{2}{h} \cdot G\left(G^{-1}\left(\frac{G_0 + G_1}{2}\right)\right).$$

Отсюда получим, что краевое условие (3.31) запишется в виде

$$-\frac{2G_1}{h} + \frac{2}{h} \cdot G\left(G^{-1}\left(\frac{G_0 + G_1}{2}\right)\right) = \lambda_l\left(G^{-1}\left(\frac{G_0 + G_1}{2}\right)\right)\left(\theta_l - G^{-1}\left(\frac{G_0 + G_1}{2}\right)\right) + Q_l.$$

Обозначив $z = G^{-1}\left(\frac{G_0 + G_1}{2}\right)$, получим уравнение относительно z

$$\frac{2}{h} \cdot G z - \lambda_l z \theta_l - z = \frac{2G_1}{h} + Q_l. \quad (3.37)$$

Уравнение для правого конца можно получить, заменив в предыдущих выкладках G_0 на G_{N+1} , G_1 – на G_N и нижний индекс l – на нижний индекс r . То есть для выполнения краевого условия (3.32) требуется решить уравнение

$$\frac{2}{h} \cdot G z - \lambda_r z \theta_r - z = \frac{2G_N}{h} + Q_r, \quad (3.38)$$

$$\text{где } z = G^{-1}\left(\frac{G_N + G_{N+1}}{2}\right).$$

Пусть z^* – решение уравнения (3.37). Тогда искомое значение G_0 на фиктивном слое с номером 0 будет равно

$$G_0 = 2G(z^*) - G_1. \quad (3.39)$$

Аналогично, если z^* – решение уравнения (3.38), то значение G_{N+1} на фиктивном слое с номером $N + 1$ равно

$$G_{N+1} = 2G(z^*) - G_N. \quad (3.40)$$

Учитывая совпадение уравнений (3.37) и (3.38) с точностью до обозначений, далее будем рассматривать только первое из них.

Способ решения уравнения (3.37) зависит от способа задания функций $q(u)$ и λ_l и λ_r . Будем считать, что функции $q(u)$, $c(u)$, $\lambda_l(u)$ и $\lambda_r(u)$ заданы таблично в некотором конечном числе точек оси температур. Назовем эти точки отмеченными. Для задания каждой из функций между ее двумя соседними отмеченными точками будем использовать линейную аппроксимацию. Так что функции $q(u)$, $c(u)$, $\lambda_l(u)$ и $\lambda_r(u)$ являются кусочно-линейными. Кроме того, можно считать, что множества отмеченных точек функций совпадают. В противном случае эти множества можно просто объединить, а значения функций в новых отмеченных точках рассчитать по формуле

$$f(\xi) = f(u_k) + \frac{f(u_{k+1}) - f(u_k)}{u_{k+1} - u_k}(\xi - u_k),$$

где u_k – ближайшая слева к точке ξ отмеченная точка функции f .

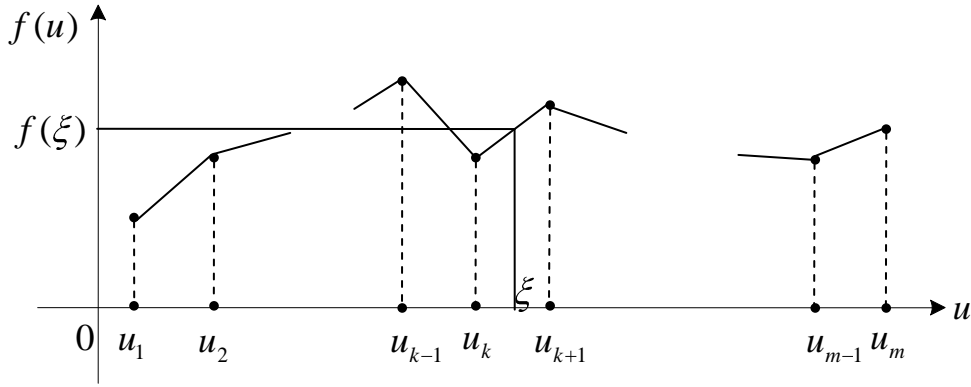


Рис. 3.4 – Кусочно-линейная аппроксимация функции

Вернемся к уравнению (3.37). Перепишем его, опустив индексы l :

$$\frac{2}{h} \cdot G(z) - \lambda(z)(\theta - z) = \frac{2G}{h} + Q. \quad (3.41)$$

Под G будем понимать G_1 , если речь идет о граничном условии на левом конце, или G_N , если рассматривается граничное условие на правом конце. Считаем, что функции $q(z)$ и λz заданы в одних и тех же отмеченных точках. Пусть это множество точек есть множество чисел $\{z_1 = 0, z_2, \dots, z_m\}$.

Рассмотрим промежуток $[z_i; z_{i+1}]$, $i = \overline{1, m-1}$. На этом промежутке в силу линейности функции $q(z)$ функция $G(z) = \int_0^z q(\xi) d\xi$ является квадратичной.

Действительно,

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_0^z q(\xi) d\xi = \int_0^{z_i} q(\xi) d\xi + \int_{z_i}^z q(\xi) d\xi = g_i + \int_{z_i}^z \left(q(z_i) + \frac{q(z_{i+1}) - q(z_i)}{z_{i+1} - z_i} (\xi - z_i) \right) d\xi = \\ &= g_i + q(z_i)(z - z_i) + \frac{q(z_{i+1}) - q(z_i)}{z_{i+1} - z_i} \cdot \frac{(z - z_i)^2}{2}. \end{aligned}$$

Для $\lambda(z)$ верно

$$\lambda(z) = \lambda(z_i) + \frac{\lambda(z_{i+1}) - \lambda(z_i)}{z_{i+1} - z_i} (z - z_i).$$

времени t_j решение в следующий момент времени t_{j+1} ищется в два шага: сначала по схеме первого порядка аппроксимации и со значительным запасом устойчивости находится решение в момент времени $t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{\tau}{2}$ – предиктор, после чего на втором этапе исходное уравнение расписывается по схеме более высокого порядка аппроксимации (чаще всего, второго) – корректор.

В соответствии с (3.36) расчетная формула для решения задачи

$$\begin{cases} c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), & t > 0, 0 < x < L, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ - \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \lambda_l(u(0, t)) \theta_l - u(0, t) + Q_l, \\ \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} = \lambda_r(u(0, t)) \theta_r - u(0, t) + Q_r \end{cases}$$

такова:

$$\bar{G}_i(t) = G_i e^{-\frac{2a^2(u_i)t}{h^2}} + \left(1 - e^{-\frac{2a^2(u_i)t}{h^2}} \right) \frac{G_{i-1} + G_{i+1}}{2}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Решение по схеме предиктор-корректор строится следующим образом (см. Рис. 3.5):

- 1) находится решение в момент времени $\frac{\tau}{2}$ по формуле

$$\begin{array}{c} \text{-----} \quad \text{-----} \quad \text{-----} \\ \text{-----} \quad \text{-----} \quad \text{-----} \end{array}; \quad (3.46)$$

- 2) находится решение \bar{G}_i в момент времени τ по формуле

$$\bar{G}_i = \text{-----} + \text{-----} \text{-----}, \quad (3.47)$$

где $i = 1, \dots, N$, \bar{G}_i – значение температуры в момент времени $\frac{\tau}{2}$, соответствующее значению функции $G(u)$, равному G_i .

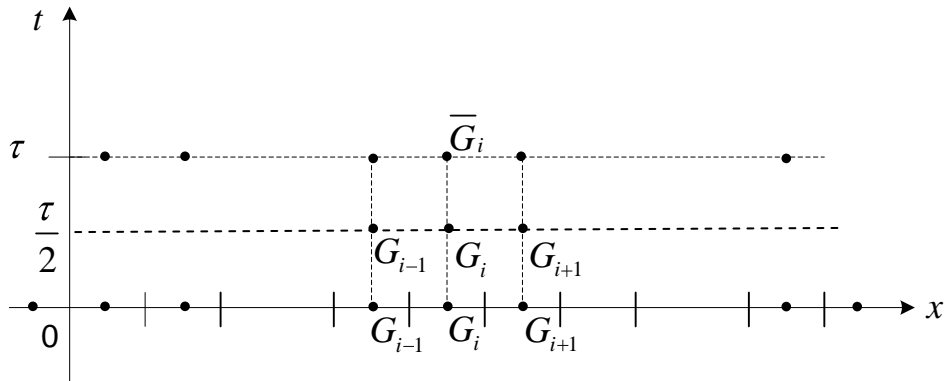


Рис. 3.5 – Предиктор-корректорная схема

3.3. Приближенное решение квазилинейного уравнения теплопроводности способом интегрирования на промежутках линейности непостоянных коэффициентов

В п. 3.1 была введена функция [20] $G(u) = \int_0^u q(\xi) d\xi$ и было показано, что она

должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2(u) \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad (3.48)$$

где $a^2(u) = \frac{q(u)}{c(u)}$. Используя разностные аппроксимации производных, получим

разностную аппроксимацию уравнения (3.48)

$$\frac{\bar{G}_i - G_i}{\tau} = a^2(u_i) \frac{G_{i-1} - 2G_i + G_{i+1}}{h^2}, \quad (3.49)$$

при условии расчета значений функции G в фиктивных слоях по формулам (3.39) и (3.40) верную для узлов с номерами $i = 1, \dots, N$. Проведем преобразования уравнения (3.49), учитывая, что $G_i = \bar{G}_i(t - \tau)$ и $u_i = \bar{u}_i(t - \tau)$:

$$\frac{\bar{G}_i(t) - \bar{G}_i(t - \tau)}{\tau} + \frac{2a^2(\bar{u}_i(t - \tau))}{h^2} \bar{G}_i(t - \tau) = \frac{2a^2(\bar{u}_i(t - \tau))}{h^2} \frac{G_{i-1} + G_{i+1}}{2}. \quad (3.50)$$

Перейдем в (3.50) к пределу при $\tau \rightarrow +0$:

$$\frac{d\bar{G}_i(t)}{dt} + \frac{2a^2(\bar{u}_i(t))}{h^2} \bar{G}_i(t) = \frac{2a^2(\bar{u}_i(t))}{h^2} \frac{G_{i-1} + G_{i+1}}{2}.$$

Обозначив $f_i = \frac{G_{i-1} + G_{i+1}}{2}$, запишем

$$\frac{d\bar{G}_i(t)}{dt} + \frac{2a^2(\bar{u}_i(t))}{h^2} \bar{G}_i(t) = \frac{2a^2(\bar{u}_i(t))}{h^2} f_i. \quad (3.51)$$

Теперь (3.51) перепишем в виде

$$-\frac{h^2}{2} \frac{d\bar{G}_i}{a^2(\bar{u}_i)(\bar{G}_i - f_i)} = dt, \quad (3.52)$$

где $\bar{u}_i = \bar{u}_i(\bar{G}_i)$.

Значение \bar{G}_i в начальный момент времени может быть равно, меньше или больше f_i . Если $G_i = f_i$, то из (3.51) следует, что $\bar{G}_i(t) = const = G_i$. Докажем, что если $G_i < f_i$ ($G_i > f_i$), то $\bar{G}_i(t)$ – возрастающая (убывающая) функция на промежутке $[0; \tau]$, и $\bar{G}_i(t) \leq f_i - \varepsilon$ ($\bar{G}_i(t) \geq f_i + \varepsilon$), $\varepsilon > 0, \forall t \in [0; \tau]$.

Рассмотрим случай $G_i < f_i$. Запишем уравнение (3.51) в виде

$$\frac{d\bar{G}_i}{dt} = -\frac{2a^2(\bar{u}_i)}{h^2} (\bar{G}_i(t) - f_i).$$

При $t = 0$ имеем

$$\left. \frac{d\bar{G}_i}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{2a^2(\bar{u}_i|_{t=0})}{h^2} (G_i - f_i) > 0.$$

Следовательно, в силу непрерывности производной $\frac{d\bar{G}_i}{dt}$

$\exists \tau_1 \in (0; \tau) : \bar{G}_i(0) = G_i < \bar{G}_i(t) < f_i \quad \forall t \in [0; \tau_1]$ и $\bar{G}_i(t)$ – возрастающая функция на $[0; \tau_1]$. Теперь рассмотрим промежуток времени $[\tau_1; \tau]$. При $t = \tau_1$ имеем

$$\left. \frac{d\bar{G}_i}{dt} \right|_{t=\tau_1} = -\frac{2a^2(\bar{u}_i|_{t=\tau_1})}{h^2} (\bar{G}_i(\tau_1) - f_i) > 0.$$

Следовательно, $\exists \tau_2 \in (\tau_1; \tau) : \bar{G}_i(\tau_1) < \bar{G}_i(t) < f_i \quad \forall t \in [\tau_1; \tau_2]$ и $\bar{G}_i(t)$ – возрастающая функция на $[\tau_1; \tau_2]$. Продолжая описанный процесс, придем к выводу, что $\bar{G}_i(t)$ является возрастающей функцией на всем промежутке $[0; \tau]$.

Докажем вторую часть утверждения. Если предположить противное, то при $\bar{G}_i(t) \rightarrow f_i - 0$ в силу того, что $a^2(\bar{u}_i)$ – ограниченная функция, интеграл от левой части уравнения (3.52) будет расходящимся, тогда как интеграл от правой части есть константа, равная τ . Для случая $G_i > f_i$ доказательство аналогично.

Обозначим первообразную функции $\frac{1}{a^2(\bar{u}_i)(\bar{G}_i - f_i)}$ через $F(\bar{G}_i)$. Задача состоит в нахождении значения $\bar{G}_i^* = \bar{G}_i(\tau)$ такого, что выполнялось бы равенство

$$-\frac{h^2}{2} F(\bar{G}_i^*) - F(G_i) = \tau. \quad (3.53)$$

Для нахождения \bar{G}_i^* будем выделять промежутки монотонности функции $F(\bar{G}_i)$ и на каждом из промежутков монотонности методом дихотомии пытаться находить

корень x^* уравнения $F(x) = -\frac{2\tau}{h^2} + F(G_i)$. Если для найденного дихотомией

значения x^* выполняется равенство $-\frac{h^2}{2} F(x^*) - F(G_i) = \tau$ с заданной

погрешностью, то полагаем $\bar{G}_i^* = x^*$.

Как и в п. 3.1 будем считать, что функции $q(u)$ и $c(u)$ заданы на одном и том же конечном множестве температур $\{u_1 = 0, u_2, \dots, u_m\}$ (здесь и далее в этом пункте нижний индекс j при u_j не является сеточным обозначением).

Рассмотрим промежуток $[u_k; u_{k+1}]$, $k = \overline{1, m-1}$. На этом промежутке функция $q(u)$ является линейной. Поэтому можно записать

$$\begin{aligned} \bar{G}_i &= \int_0^{\bar{u}_i} q(\xi) d\xi = \int_0^{u_k} q(\xi) d\xi + \int_{u_k}^{\bar{u}_i} q(\xi) d\xi = g_k + \int_{u_k}^{\bar{u}_i} \left(q_k + \frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k} (\xi - u_k) \right) d\xi = \\ &= g_k + q_k (\bar{u}_i - u_k) + \frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k} \cdot \frac{(\bar{u}_i - u_k)^2}{2}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

где $g_k = \int_0^{u_k} q(\xi) d\xi$.

Возможны два случая:

- 1) $q_{k+1} = q_k$;
- 2) $q_{k+1} \neq q_k$.

Рассмотрим первый из них. Так как $q_{k+1} = q_k$, то из (3.54) получаем

$$\bar{u}_i - u_k = \frac{\bar{G}_i - g_k}{q_k}. \quad (3.55)$$

Далее, в силу линейности $q(u)$ и $c(u)$ на рассматриваемом промежутке $[u_k; u_{k+1}]$ имеем

$$q(\bar{u}_i) = q_k + \frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k} (\bar{u}_i - u_k) = q_k,$$

$$c(\bar{u}_i) = c_k + \frac{c_{k+1} - c_k}{u_{k+1} - u_k} (\bar{u}_i - u_k) = c_k + \frac{c_{k+1} - c_k}{u_{k+1} - u_k} \cdot \frac{\bar{G}_i - g_k}{q_k}.$$

С учетом этого уравнение (3.52) преобразуется к виду

$$-\frac{h^2}{2q_k} \left(c_k + \frac{c_{k+1} - c_k}{u_{k+1} - u_k} \cdot \frac{\bar{G}_i - g_k}{q_k} \right) \cdot \frac{d\bar{G}_i}{\bar{G}_i - f_i} = dt. \quad (3.56)$$

Обозначим первообразную функции $\left(c_k + \frac{c_{k+1} - c_k}{u_{k+1} - u_k} \cdot \frac{\bar{G}_i - g_k}{q_k} \right) \cdot \frac{1}{\bar{G}_i - f_i}$ на

промежутке $[u_k; u_{k+1}]$ через $F_k(\bar{G}_i)$:

$$F_k(\bar{G}_i) = \int \left(c_k + \frac{c_{k+1} - c_k}{u_{k+1} - u_k} \cdot \frac{\bar{G}_i - g_k}{q_k} \right) \cdot \frac{d\bar{G}_i}{\bar{G}_i - f_i} = c_k \ln |\bar{G}_i - f_i| + \frac{c_{k+1} - c_k}{q_k(u_{k+1} - u_k)} \cdot \bar{G}_i + (f_i - g_k) \ln |\bar{G}_i - f_i| =$$

$$= \left(c_k + \frac{c_{k+1} - c_k}{q_k(u_{k+1} - u_k)} \cdot (f_i - g_k) \right) \ln |\bar{G}_i - f_i| + \frac{c_{k+1} - c_k}{q_k(u_{k+1} - u_k)} \cdot \bar{G}_i. \quad (3.57)$$

Введем обозначения $n_{ki} = c_k + \frac{c_{k+1} - c_k}{q_k(u_{k+1} - u_k)} \cdot (f_i - g_k)$, $d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{q_k(u_{k+1} - u_k)}$. Тогда (3.57)

можно записать в более компактном виде:

$$F_k(\bar{G}_i) = n_{ki} \ln |\bar{G}_i - f_i| + d_k \bar{G}_i. \quad (3.58)$$

Интегрируя (3.56) на промежутке $t \in [0; \tau]$, получаем

$$-\frac{h^2}{2q_k}(F_k(\bar{G}_i) - F_k(G_i)) = \tau. \quad (3.59)$$

Корень уравнения (3.59), принадлежащий промежутку $[\max(g_k, G_i); \min(g_{k+1}, f_i)]$ в случае роста температуры в i -м узле и промежутку $[\max(g_k, f_i); \min(g_{k+1}, G_i)]$ в случае уменьшения температуры в i -м узле, и является искомым значением \bar{G}_i^* .

Обратимся к случаю $q_{k+1} \neq q_k$. Запишем (3.54) в виде

$$\frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k} \cdot \frac{(\bar{u}_i - u_k)^2}{2} + q_k(\bar{u}_i - u_k) + g_k - \bar{G}_i = 0. \quad (3.60)$$

Получили квадратное уравнение относительно $\bar{u}_i - u_k$. Его корни равны

$$\bar{u}_i - u_k = \frac{-q_k \pm \sqrt{q_k^2 - 2 \cdot \frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k} \cdot (g_k - \bar{G}_i)}}{\frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k}}. \quad (3.61)$$

С учетом этого

$$q(\bar{u}_i) = q_k + \frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k} (\bar{u}_i - u_k) = \pm \sqrt{q_k^2 - 2 \cdot \frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k} \cdot (g_k - \bar{G}_i)}.$$

Но так как теплопроводность строго положительна, то перед корнем следует оставить знак плюс, т. е.

$$q(\bar{u}_i) = \sqrt{q_k^2 - 2 \cdot \frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k} \cdot (g_k - \bar{G}_i)}.$$

Теплоемкость $c(\bar{u}_i)$ равна

$$\begin{aligned} c(\bar{u}_i) &= c_k + \frac{c_{k+1} - c_k}{u_{k+1} - u_k} (\bar{u}_i - u_k) = c_k + \frac{c_{k+1} - c_k}{q_{k+1} - q_k} \cdot \left(-q_k + \sqrt{q_k^2 - 2 \cdot \frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k} \cdot (g_k - \bar{G}_i)} \right) = \\ &= \frac{c_k q_{k+1} - c_{k+1} q_k}{q_{k+1} - q_k} + \frac{c_{k+1} - c_k}{q_{k+1} - q_k} \sqrt{q_k^2 + 2 \cdot \frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k} \cdot (\bar{G}_i - g_k)}. \end{aligned}$$

Уравнение (3.52) преобразуется к виду

$$-\frac{h^2}{2(q_{k+1} - q_k)} \cdot \left(\frac{c_k q_{k+1} - c_{k+1} q_k}{\sqrt{q_k^2 + 2 \cdot \frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k} \cdot (\bar{G}_i - g_k)}} + c_{k+1} - c_k \right) \cdot \frac{d\bar{G}_i}{\bar{G}_i - f_i} = dt. \quad (3.62)$$

Введем обозначения:

$$a_k = 2 \cdot \frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k}, \quad b_k = q_k^2, \quad p_k = c_{k+1} - c_k,$$

$$s_k = c_k q_{k+1} - c_{k+1} q_k.$$

Тогда уравнение (3.62) запишется в виде

$$-\frac{h^2}{2(q_{k+1} - q_k)} \left(\frac{s_k}{\sqrt{b_k + a_k(\bar{G}_i - g_k)}} + p_k \right) \frac{d\bar{G}_i}{\bar{G}_i - f_i} = dt. \quad (3.63)$$

Найдем $\Phi_k(\bar{G}_i) = \int \frac{d\bar{G}_i}{(\bar{G}_i - f_i) \sqrt{b_k + a_k(\bar{G}_i - g_k)}}$. Обозначим $\bar{G}_i - f_i$ за новую

переменную x .

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{b_k + a_k(f_i - g_k) + a_k x}} = \left[\begin{array}{l} b_k + a_k(f_i - g_k) + a_k x = t^2 \\ x = \frac{t^2 - (a_k(f_i - g_k) + b_k)}{a_k} \\ dx = \frac{2tdt}{a_k} \end{array} \right] = \frac{2}{a_k} \int \frac{tdt}{t \cdot \frac{t^2 - (a_k(f_i - g_k) + b_k)}{a_k}} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{t^2 - (a_k(f_i - g_k) + b_k)}.$$

Возможны три случая:

1) $a_k(f_i - g_k) + b_k = 0$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{b_k + a_k(f_i - g_k) + a_k x}} = 2 \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{2}{t} = -\frac{2}{\sqrt{b_k + a_k(f_i - g_k) + a_k x}} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{a_k(\bar{G}_i - g_k) + b_k}};$$

2) $a_k(f_i - g_k) + b_k > 0$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{b_k + a_k(f_i - g_k) + a_k x}} &= -\frac{2}{a_k(f_i - g_k) + b_k} \int \frac{dt}{1 - \frac{t^2}{a_k(f_i - g_k) + b_k}} = \\
&= -\frac{2}{\sqrt{a_k(f_i - g_k) + b_k}} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{a_k(f_i - g_k) + b_k} - t}{\sqrt{a_k(f_i - g_k) + b_k} + t} \right| = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{a_k(f_i - g_k) + b_k}} \ln \left| \frac{\sqrt{a_k(f_i - g_k) + b_k} - \sqrt{a_k(\bar{G}_i - g_k) + b_k}}{\sqrt{a_k(f_i - g_k) + b_k} + \sqrt{a_k(\bar{G}_i - g_k) + b_k}} \right| = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{a_k(f_i - g_k) + b_k}} \ln \left| 1 - \frac{2\sqrt{a_k(\bar{G}_i - g_k) + b_k}}{\sqrt{a_k(f_i - g_k) + b_k} + \sqrt{a_k(\bar{G}_i - g_k) + b_k}} \right|;
\end{aligned}$$

3) $a_k(f_i - g_k) + b_k < 0$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{b_k + a_k(f_i - g_k) + a_k x}} &= \left[\alpha^2 = -(a_k(f_i - g_k) + b_k) \right] = \\
&= 2 \int \frac{dt}{t^2 + \alpha^2} = \frac{2}{\alpha} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\alpha} \right) = \frac{2}{\sqrt{-(a_k(f_i - g_k) + b_k)}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{a_k(\bar{G}_i - g_k) + b_k}}{\sqrt{-(a_k(f_i - g_k) + b_k)}} \right).
\end{aligned}$$

Обозначим первообразную функции $\left(\frac{s_k}{\sqrt{b_k + a_k(\bar{G}_i - g_k)} + p_k \right) \frac{1}{\bar{G}_i - f_i}$ (см.

(3.63)) на промежутке $[u_k; u_{k+1}]$ через $F_k(\bar{G}_i)$. С учетом найденной функции $\Phi_k(\bar{G}_i)$

$$F_k(\bar{G}_i) = s_k \Phi_k(\bar{G}_i) + p_k \ln |\bar{G}_i - f_i|. \quad (3.64)$$

Интегрируя (3.63) на промежутке $t \in [0; \tau]$, получаем

$$-\frac{h^2}{2(q_{k+1} - q_k)} (F_k(\bar{G}_i) - F_k(G_i)) = \tau, \quad (3.65)$$

где конкретный вид функции $F_k(\bar{G}_i)$ определяется выполнением одного из рассмотренных выше трех условий.

3.4. Приведение задачи к безразмерному виду

Одним из первых вопросов, возникающих при численном решении какой-либо практически интересной задачи, является вопрос о выборе системы единиц, в которой будут измеряться все физические параметры [17-19]. Обойти связанные с этим трудности позволяет так называемое обезразмеривание задачи, т. е. приведение системы уравнений, граничных и начальных условий к безразмерному виду[8].

Напомним постановку третьей краевой задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности:

$$\left\{ \begin{array}{l} c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad t > 0, 0 < x < L, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ - \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \lambda_l(u(0, t)) \theta_l - u(0, t) + Q_l, \\ \left(q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} = \lambda_r(u(0, t)) \theta_r - u(0, t) + Q_r \end{array} \right. \quad (3.66)$$

В соответствии с теорией размерностей выберем среди размерностей величин, входящих в систему уравнений (3.66), размерности, образующие размерно-независимый базис, т. е. такие, что формула, выражающая размерность одной из величин, не может быть представлена в виде степенного одночлена из формул размерностей других величин[9]. В качестве таких размерностей можно

взять размерности длины $[x]^1 = m$, теплоемкости $[c] = \frac{Дж}{m^3 \cdot ^\circ C}$, теплопроводности

$[q] = \frac{Дж}{m \cdot c \cdot ^\circ C}$ и температуры $[u] = ^\circ C$, т. е. размерно-независимый базис будет

следующим

$$\left\{ m, \frac{Дж}{m^3 \cdot ^\circ C}, \frac{Дж}{m \cdot c \cdot ^\circ C}, ^\circ C \right\}. \quad (3.67)$$

¹ Запись $[F]$ означает размерность величины F .

Размерности остальных величин будут, как говорилось ранее, иметь вид степенных одночленов из базисных размерностей:

$$[F] = x^k c^l q^m u^n, \quad (3.68)$$

где F – некоторая величина, входящая в систему (3.66), k , l , m и n – целые числа.

Теперь определим значения k , l , m и n для размерности величин: времени t , коэффициента теплоотдачи λ и мощности теплоисточника Q , – входящих в систему (3.66). Для времени $k = 2$, $l = 1$, $m = -1$, $n = 0$. Действительно,

$$m^2 \cdot \frac{\text{Дж}}{m^3 \cdot ^\circ C} \cdot \left(\frac{\text{Дж}}{m \cdot c \cdot ^\circ C} \right)^{-1} \cdot (^\circ C)^0 = m^2 \cdot \frac{\text{Дж}}{m^3 \cdot ^\circ C} \cdot \frac{m \cdot c \cdot ^\circ C}{\text{Дж}} = c = [t].$$

Для коэффициента теплоотдачи $k = -1$, $l = 0$, $m = 1$, $n = 0$:

$$m^{-1} \cdot \left(\frac{\text{Дж}}{m^3 \cdot ^\circ C} \right)^0 \cdot \left(\frac{\text{Дж}}{m \cdot c \cdot ^\circ C} \right)^1 \cdot (^\circ C)^0 = m^{-1} \cdot \frac{\text{Дж}}{m \cdot c \cdot ^\circ C} = \frac{\text{Дж}}{m^2 \cdot c \cdot ^\circ C} = [\lambda].$$

Наконец, для мощности теплоисточника $k = -1$, $l = 0$, $m = 1$, $n = 1$:

$$m^{-1} \cdot \left(\frac{\text{Дж}}{m^3 \cdot ^\circ C} \right)^0 \cdot \left(\frac{\text{Дж}}{m \cdot c \cdot ^\circ C} \right)^1 \cdot (^\circ C)^1 = m^{-1} \cdot \frac{\text{Дж}}{m \cdot c \cdot ^\circ C} \cdot ^\circ C = \frac{\text{Дж}}{m^2 \cdot c} = [Q].$$

Таким образом,

$$[t] = x^2 c^1 q^{-1} u^0, \quad (3.69)$$

$$[\lambda] = x^{-1} c^0 q^1 u^0, \quad (3.70)$$

$$[Q] = x^{-1} c^0 q^1 u^1. \quad (3.71)$$

Изменим теперь единицы измерения величин x , c , q и u соответственно в x_0 , c_0 , q_0 и u_0 раз. Численные значения этих величин и величин t , λ , Q в новой системе единиц будут соответственно равны:

$$\begin{aligned} & , & , & , & , \\ & , & , & Q & Q. \end{aligned}$$

Положим $c_0 = \frac{1}{c(0)}$, $q_0 = \frac{1}{q(0)}$, $u_0 = 1$, а $x_0 = \frac{N}{L}$, где N – число узлов сетки по пространственной координате, чтобы значение величины x , равное 1, соответствовало значению величины x , равному шагу $h = \frac{L}{N}$ разностной схемы.

Тогда получим

$$- , \quad - , \quad - , \quad u = u, \quad (3.72)$$

$$-t, \quad - , \quad - . \quad (3.73)$$

Выразив прежние величины (в обозначениях которых не присутствует \sim) из формул (3.72), (3.73) и подставив их выражения в систему уравнений (3.66), получим систему в частично безразмерном виде:

$$\begin{aligned} & - \quad - \quad - \\ & \quad \quad - \\ & \quad \quad - \end{aligned} \quad (3.74)$$

в которой величины x , t , c , q , λ_l , λ_r являются безразмерными, а величины u , θ_l , θ_r , Q_l и Q_r имеют размерность $^{\circ}C$.

Нетрудно видеть, что если в полученной системе уравнений (3.74) опустить волну над всеми функциями, то она совпадет с системой уравнений (3.66) в размерном виде. Поэтому в расчетах можно использовать обычную систему уравнений, рассматривая ее как частично безразмерную [21-22]. Числовые значения параметров, определяющие конкретное решение задачи (шаги по пространственной и временной координате, значения известных функций), следует предварительно преобразовать в соответствии с формулами (3.72), (3.73).

3.5. Оценка результатов программы

1) Распределение температур при переменных теплофизических параметрах.

На левой границе поддерживается температура 1000°C.

На правой границе поддерживается температура 0°C.

Таблица 1

Распределение температуры вдоль стержня

986	958.1	930.3	902.6	875	847.6	820.5	793.7	767.2	741.1
715.4	690.2	665.4	641.2	617.5	594.6	572.5	551.3	531	511.4
492.6	474.5	457	440.2	423.8	408.1	392.8	378	363.8	349.9
336.6	323.7	311.3	299.2	287.6	276.3	265.5	255	244.8	235
225.5	216.4	207.5	199	190.8	182.8	175.2	167.8	160.6	153.7
147.1	140.7	134.5	128.6	122.9	117.3	112	106.9	102	97.3
92.8	88.4	84.2	80.2	76.3	72.6	69	65.5	62.2	59
56	53	50.2	47.5	44.9	42.3	39.9	37.6	35.3	33.2
31.1	29.1	27.1	25.2	23.4	21.6	19.9	18.3	16.6	15.1
13.5	12	10.5	9.1	7.6	6.2	4.8	3.4	2.1	0.7

Число итераций 20000. Время 200 сек.

2) Распределение температур при постоянных теплофизических параметрах, соответствующих 800°C.

На левой границе поддерживается температура 1000°C.

На правой границе поддерживается температура 0°C.

Таблица 2

Распределение температуры вдоль стержня

980.2	940.5	901	861.8	822.9	784.4	746.4	709.1	672.4	636.5
-------	-------	-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

601.4	567.3	534.1	501.9	470.7	440.7	411.8	384	357.5	332.1
307.9	284.9	263.1	242.5	223	204.7	187.5	171.4	156.3	142.3
129.3	117.2	106	95.7	86.2	77.5	69.5	62.2	55.6	49.5
44	39.1	34.6	30.5	26.9	23.7	20.8	18.2	15.9	13.9
12.1	10.5	9.1	7.8	6.7	5.8	5	4.3	3.6	3.1
2.6	2.2	1.9	1.6	1.3	1.1	1	0.8	0.7	0.6
0.5	0.4	0.3	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
0.1	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Число итераций 20000. Время 200 сек.

3) Установившееся распределение температур при переменных теплофизических параметрах.

На левой границе поддерживается температура 1000°C.

На правой границе поддерживается температура 0°C.

Таблица 3

Распределение температуры вдоль стержня

994.8	984.5	974.1	963.8	953.4	943.1	932.7	922.4	912.1	901.7
891.4	881.1	870.7	860.4	850.1	839.8	829.5	819.2	808.9	798.6
788.3	778.1	767.8	757.5	747.3	737	726.8	716.6	706.4	696.1
685.9	675.8	665.6	655.4	645.2	635.1	625	614.8	604.7	594.6
584.5	574.5	564.4	554.4	544.4	534.4	524.4	514.4	504.4	494.5
484.6	474.6	464.7	454.8	444.9	435	425.1	415.3	405.4	395.5
385.7	375.9	366	356.2	346.4	336.6	326.8	316.9	307.1	297.4
287.6	277.8	268	258.2	248.5	238.7	228.9	219.2	209.4	199.6
189.9	180.1	170.4	160.6	150.9	141.1	131.4	121.7	111.9	102.2
92.5	82.7	73	63.3	53.5	43.8	34.1	24.3	14.6	4.9

Число итераций 230508. Время 2305.08 сек.

4) Установившееся распределение температур при постоянных теплофизических параметрах, соответствующих 800°C .

На левой границе поддерживается температура 1000°C .

На правой границе поддерживается температура 0°C .

Таблица 4

Распределение температуры вдоль стержня

994.8	984.3	973.8	963.3	952.8	942.3	931.8	921.3	910.8	900.4
889.9	879.4	869	858.5	848.1	837.6	827.2	816.8	806.4	795.9
785.5	775.2	764.8	754.4	744	733.7	723.4	713	702.7	692.4
682.1	671.8	661.6	651.3	641.1	630.9	620.7	610.5	600.3	590.1
580	569.8	559.7	549.6	539.5	529.4	519.4	509.3	499.3	489.3
479.3	469.3	459.3	449.4	439.4	429.5	419.6	409.7	399.8	390
380.1	370.3	360.5	350.7	340.9	331.1	321.3	311.6	301.8	292.1
282.4	272.7	263	253.4	243.7	234	224.4	214.8	205.2	195.5
185.9	176.4	166.8	157.2	147.6	138.1	128.5	119	109.4	99.9
90.4	80.8	71.3	61.8	52.3	42.8	33.3	23.8	14.3	4.8

Число итераций 370805. Время 3708.05 сек.

3.6. Вывод по главе

В данной главе было найдено приближенное решение квазилинейного уравнения теплопроводности способом интегрирования на промежутках линейности непостоянных коэффициентов. Также задача была приведена к безразмерному виду.

При подстановке полученных формул в программу были получены результаты приведенные выше. По этим результатам можно сделать вывод: при переменных теплофизических параметрах стержень прогревается быстрее, а выход на установившийся температурный режим происходит раньше, нежели при постоянных параметрах. Код программы представлен в приложении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения данной работы были получены следующие результаты:

- рассмотрены способы численного решения квазилинейного уравнения с применением чисто неявных схем;
- исходное квазилинейное уравнение теплопроводности с помощью замены сведено к виду, в котором коэффициент теплопроводности не входит под знак дивергенции;
- получено обыкновенное дифференциальное уравнение явной разностной схемы относительно значения неизвестной функции на следующем временном слое;
- для задания краевых условий выбран метод введения фиктивного слоя, получено квадратное уравнение, один из корней которого является значением искомой функции в фиктивном слое;
- выполнено обезразмеривание задачи;
- предложены два варианта реализации явной схемы:
 - а) с использованием значений коэффициентов уравнения на предыдущем временном слое (коэффициенты уравнения суть константы);
 - б) с интегрированием полученного дифференциального уравнения по времени на промежутке $[0; \tau]$, где τ – временной шаг разностной схемы, и нахождением значения искомой функции методом дихотомии на промежутках монотонности полученной первообразной (коэффициенты уравнения являются непостоянными).

В дальнейшем планируется составить программу на языке программирования C++, реализующие оба варианта построенной явной схемы, а также линейный и нелинейный вариант чисто неявной схемы, провести сравнение решений третьей смешанной задачи, полученных при использовании указанных выше схем. По результатам сравнения сделать заключение о возможностях практического

применения построенной явной схемы для решения квазилинейного уравнения теплопроводности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
3. Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры. // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж. – 1986. – 28. – С. 95–205.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 415 с.
5. Геренштейн А.В., Хайрисламов М.З. Явная разностная схема решения одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – том 5, № 1. – С. 12–17.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Уче. пособие. – 6-е изд., испр. и доц. – М.: Изд-во МГУ, 1999.
7. Тихонов Н.А., Токмачев М.Г. Курс лекций «Основы математического моделирования» // Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2012.
8. Валова О.В. Математическое моделирование процессов теплообмена при электроосмотической фильтрации: диссертация ... кандидата технических наук: 05.13.18-Чита, 2007-210с.
9. Самарский А.А., Попов Ю.И. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992. – 424 с.
10. Седов Л.И. Методы теории размерностей и теории подобия в механике. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1944. – 136 с.

11. Геренштейн А.В., Машрабов Н., Геренштейн Е.А. Устойчивые явные схемы для уравнения теплопроводности. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 15. – С. 9–11.
12. Чекмарев Д.Т. Устойчивость и повышение эффективности явных схем решения задач теории упругости и теории оболочек.
13. Чекмарев, Д.Т. Граничная неустойчивость численных решений трехмерных динамических задач теории упругости / Д.Т. Чекмарев // Вестник ННГУ. Серия Механика, 2004. - вып. 1 (6). – С. 84 - 90.
14. Баженов, В.Г. Оценки устойчивости явной конечно-разностной схемы “крест” решения нестационарных задач теории упругости и теории оболочек / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. – Горький, 1984. – С. 42 - 49.
15. Баженов В.Г., Ломунов В.К. Методика расчета динамического деформирования геометрически изменяемых плоских стержневых систем // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб., 2002, Вып. 64, с. 55-63.
16. Баженов В.Г., Прокопенко М.Б. Численное решение осесимметричных нелинейных нестационарных задач динамики составных упругопластических конструкций. // Прикладные проблемы прочности и пластичности, Численное моделирование физико-механических процессов: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т., Нижний Новгород - 1991. С. 55-63.
17. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608с.
18. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н.Новгород: Издательство ННГУ, 2002. 400 с.
19. Данилин А.Н., Марков А.В. Моделирование динамики развертывания гибких стержневых систем при различных способах изменения их начальной геометрии // Материалы VIII Международного симпозиума

- «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Ярополец 11 – 15 февраля 2002 г.). Москва. 2002, с. 61.
- 20.Р. Рихтмайер, К. Мортон. Разностные методы решения краевых задач // М., Мир, 1972. – с.300-304.
- 21.М. П. Галанин, Т. Г. Еленина. Тестирование разностных схем для линейного уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1999. № 40.
- 22.М. П. Галанин, Т. Г. Еленина. Сравнительный анализ разностных схем для линейного уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1998. № 52.

```

Main.cpp
#include <stdio.h>
#include <math.h>

void main(int nargs, char **argv)
{
double G, ul, gl, hh, nulgranz(int k, double uu, double gg), t,
x, dt, l, ur, gr, z, Tb, Te, *u, koefdat(double, int i = -1,
FILE *tb = 0);
int k, n, i, j, flag = 0, shem = 0;
long var, iter, gleichwar(double, double, double, double, double,
double *,
long, int, FILE *tab = 0), integwar(double dt, double ql, double
qr,
double ul, double ur, double *u, long vvar, int n, FILE *tab =
0);
FILE *tb;
namdatat("nelinwar.0", nargs, argv);
tb = readname("r", name);
fclose(name);
l = readdat(dat); // длина стержня
if(l < 0.)
{
l = -1;
flag = 1;
}
n = intread(dat); // число элементарных участков
hh = l/(double)n;
ul = readdat(dat); // температура окружающей среды
слева
gl = readdat(dat)*hh; // плотность мощности теплоисточника
слева
ur = readdat(dat); // температура окружающей среды
справа
gr = readdat(dat)*hh; // плотность мощности теплоисточника
справа
dt = t = readdat(dat); // шаг по времени
shem = 0; // дифф. ур., а не численно
var = read_l(dat); // вариант краевых условий
var += read_l(dat)*10; // + удешаженное число итераций
tipe(dat, tab, 12);
x = koefdat(l, n, tb);
fclose(tb);
if(x < -1e100)
{
fprintf(tab, " Неполадки в таблицах.\n");
goto ABC;
}
}

```

```

}
dt *= koefdat(1, 20);           // обезразмерили шаг по времени
hh = koefdat(1, 21);           // Начальная теплопроводность
z = koefdat(1, 22);           // Начальная теплоемкость
if(flag)
{
fprintf(tab, " Безразмерный шаг по времени %lg.\n", dt);
fprintf(tab, " Начальная теплопроводность %lg.\n", hh);
fprintf(tab, " Начальная теплоемкость %lg.\n", z);
}
gl /= hh;
gr /= hh;
G = nulgranz(0, ul, gl);
hh = koefdat(gl, 0);
if(flag)
{
fprintf(tab, " Левая граница:");
fprintf(tab, " G = %lg, Tg = %lg, G0 = %lg, T0 = %lg.\n", G, ul,
gl, hh);
}
G = nulgranz(0, ur, gr);
hh = koefdat(gr, 0);
if(flag)
{
fprintf(tab, " Правая граница:");
fprintf(tab, " G = %lg, Tg = %lg, G0 = %lg, T0 = %lg.\n", G, ur,
gr, hh);
hh = x/15.;
fprintf(tab, " На входе потенциал потока тепла G.\n");
fprintf(tab, " № G T q c lam0 ");
fprintf(tab, "lam1 a\n");
for(G = 0, k = 1; G < x+1.; G += hh, k++)
{
fprintf(tab, " %2d %s", k, krap(G, 6, 3));
for(i = 0; i < 6; i++)
{
z = koefdat(G, i);
fprintf(tab, " %s", krap(z, 5, 3));
}
fprintf(tab, "\n");
}
Tb = koefdat(0., 0);
Te = koefdat(G, 0);
hh = (Te-Tb)/15.;
fprintf(tab, " На входе температура T.\n");
fprintf(tab, " № T G q c lam0 ");
fprintf(tab, "lam1 a\n");
for(x = Tb, k = 1; x < Te+1.; x += hh, k++)
{
fprintf(tab, " %2d %s", k, krap(x, 5, 3));
for(i = 10, j = 1; i < 16; i++, j = 0)
{

```

```

z = koefdat(x, i);
fprintf(tab, " %s", krap(z, 5+j, 3));
}
fprintf(tab, "\n");
}
fflush(tab);
}
u = new double[n+2];
for(i = 0; i < n+2; i++)
u[i] = 0.;
hh = 1/(double)n;
if(shem)
iter = integwar(dt, gl, gr, ul, ur, u, var, n, tab); // численно
else
iter = gleihwar(dt, gl, gr, ul, ur, u, var, n, tab); // формула
t *= (double)iter;
Te = (u[0] + u[1])/2.;
if(iter < var/10)
fprintf(tab, " Установившееся распределение температур.\n");
fprintf(tab, "      Число итераций %ld. Время %lg сек.\n", iter, t);
fprintf(tab, "Температура на левой границе %lg.\n", Te);
for(i = 1; i < n+1; i++)
{
Te = koefdat(u[i], 0);
if(i > 1 && !((i-1)%10))
fprintf(tab, "\n");
if((i-1)%10)
fprintf(tab, " ");
fprintf(tab, "%s", krap(u[i], 4, 1));
}
fprintf(tab, "\n");
Te = (u[n] + u[n+1])/2.;
fprintf(tab, "Температура на правой границе %lg.\n", Te);

if(flag)
{
Te = koefdat(u[0], 0);
fprintf(tab, "Потенциал левого фиктивного слоя %lg.\n", Te);
fprintf(tab, "      Потенциалы потока тепла.\n");
for(i = 1; i < n+1; i++)
{
Te = koefdat(u[i], 0);
if(i > 1 && !((i-1)%10))
fprintf(tab, "\n");
fprintf(tab, " %s", krap(Te, 4, 1));
}
fprintf(tab, "\n");
Te = koefdat(u[n+1], 0);
fprintf(tab, "Потенциал правого фиктивного слоя %lg.\n", Te);
}
ABC:
x = koefdat(x, -2);

```



```

fclose(tab);
if(u) delete [] u;
}

```

Тепло.cpp

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>
double koefdat(double t, int i = -1, FILE *dat = 0)
{
    // Если i < 10, то t - потенциал теплопроводности
    static int N = 0; // Если i > 9, то t - температура
    int k;
    static double *q, *c, *lam0, *lam1, *gT, T0, h, *qal[5], qq[5];
    double x, y, z = -1e-150, T, readdat(FILE *), eps = 1e-8;
    if(i < 0 || (i > 5 && i < 10 || i > 15 && i < 20 || i > 22) &&
!dat && N)
        goto ABC;
    if(!N && dat)
    {
        x = t/(double)i; // Длина : число участков
        T0 = readdat(dat); // Температура начала отсчета
        h = readdat(dat); // Шаг по шкале температур
        N = (int)(readdat(dat) + 0.1); // Число отметок температуры
        c = new double[N]; // Теплоемкости
        q = new double[N]; // Теплопроводности
        lam0 = new double[N]; // Теплоотдачи на левом конце
        lam1 = new double[N]; // Теплоотдачи на правом конце
        gT = new double[N]; // Интегралы от 0 до T0 + k·h от
q·dt, // или мощность потока тепла
        for(k = 0; k < N; k++)
        {
            c[k] = readdat(dat);
            if(c[k] < eps)
            {
                printf("Теплоемкость отрицательна: c[%d] = %lg.\n", k+1, c[k]);
                goto ABC;
            }
        }
        for(k = 0; k < N; k++)
        {
            q[k] = readdat(dat);
            if(q[k] < eps)
            {
                printf("Теплопроводность отрицательна: q[%d] = %lg.\n", k+1, q[k]);
                goto ABC;
            }
        }
        for(k = 0; k < N; k++)
        {
            lam0[k] = readdat(dat);
            if(lam0[k] < eps)
            {

```

```

printf("Теплоотдача слева отрицательна: lam0[%d] = %lg.\n", k+1,
lam0[k]);
goto ABC;
}
}
for(k = 0; k < N; k++)
{
lam1[k] = readdat(dat);
if(lam1[k] < eps)
{
printf("Теплоотдача справа отрицательна: lam1[%d] = %lg.\n", k+1,
lam0[k]);
goto ABC;
}
}
y = readdat(dat);
if(y > 0. && y < 1e200)
goto ABC;
for(k = 1, gT[0] = 0.; k < N; k++)          // Интеграл от
теплопроводности
gT[k] = gT[k-1] + (q[k-1] + q[k])*h/2.; // по температуре, или
qq[1] = q[0];
qq[2] = c[0];
qq[0] = q[0]/c[0]/x/x; // обезразмеривающий коэффициент времени
for(k = 0; k < N; k++) // В результате обезразмеривания
расстояния
{
// между узлами предполагаемой сетки равно 1
gT[k] /= qq[1];
q[k] /= qq[1];
c[k] /= qq[2];
lam0[k] *= x/qq[1];
lam1[k] *= x/qq[1];
}
qal[0] = gT; // мощность потока тепла
qal[1] = q; // Теплопроводности
qal[2] = c; // Теплоемкости
qal[3] = lam0; // Теплоотдачи на левом конце
qal[4] = lam1; // Теплоотдачи на правом конце
z = gT[N-1];
return(z);
}
k = -1;
if(i < 10) // t - мощность потока тепла
{
if(t < gT[0])
k = 0;
else if(t > gT[N-1])
k = N-1;
if(k == 0 || k == N-1)
{
if(i < 1 || i > 5) // Нужна температура
z = T0 + (double)k*h;
}
}
}

```



```

else
z = qal[i][k]*x + qal[i][k+1]*y;
}
}
else if(i < 23)           // t - температура
{
i -= 20;
z = qq[i];
}
return(z);
ABC:
if(c) delete [] c;
if(q) delete [] q;
if(lam0) delete [] lam0;
if(lam1) delete [] lam1;
if(gT) delete [] gT;
if(qal) delete [] qal;
N = 0;
return(z);
}
double granz(double G, int k = 0, double uu = -500., double gg =
0.)
{
static double u0, G0, v; // k = 0 - левая граница, k = 1 - правая
double T, l, f;
if(k < 0)
{
koefdat(G, -2);
return(0.);
}
if(uu > -450.)
{
u0 = uu; // Температура окружающей среды
G0 = gg; // Мощность потока тепла на крайнем узле
v = koefdat(gg, 0)/2.;
}
T = koefdat(G, 0)/2. + v;
l = koefdat(T, 12+k); // k = 0 - левый край, 1 - правый
f = G - G0 + l*(T - u0);
return(f);
}
double nulgranz(int k, double uu, double gg)
{
double h = 10., G, x, y, sgn = 1., eps = 1e-10;
x = granz(gg, k, uu, gg); // Модифицированная дихотомия
if(k < 0)
return(0.);
if(fabs(x) < eps)
return(gg);
if(x < 0.)
sgn = -1.;
x *= sgn;
}

```

```

y = x;
for(G = gg; x > 0. && y > 0.; G += h, gg -= h)
{
x = sgn*granz(G, k);
y = sgn*granz(gg, k);
}
if(x < 0.)
h = -h;
else if(y < 0.)
G = gg;
sgn = -sgn;
for( ; fabs(h) > eps; G += h)
{
x = sgn*granz(G, k);
if(x < 0.)
{
sgn = -sgn;
h = -h/2.;
}
}
return(G);
}
double dtime(double u, double p)
{
double eps = 1e-10, f;
f = 2.*koefdat(u, 5);
f *= p - u;
if(fabs(f) < eps)
return(0.);
return(1./f);
}

```

Yravnenie.cpp

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <CONIO.H>
long gleihwar(double dt, double ql, double qr, double ul, double
ur,
double *u, long vvar, int n, FILE* tab = 0)
{
double nulgranz(int k, double uu, double gg), x, y, z, eps = 1e-
4, tmp,
koefdat(double, int i = -1, FILE *tb = 0), *v, *u0, *u1, *w;
int i, j, k, var;
long it, N = 10;
char ch = 1;
var = (int)(vvar%10);
N = vvar/10;
v = new double[n+2];
u1 = u;
u0 = v;

```

```

    for(it = 0, k = 0, tmp = 1.; (N > 0 && it < 2*N || N < 1) && tmp
> eps
    && ch != 27; it++, k = 1-k, ch = 1)
    {
    w = u1;
    u1 = u0;
    u0 = w;
    w = u;
    if(var < 3)
    u0[0] = nulgranz(0, u1, u0[1]); // слева теплоотдача
    else if(var < 6)
    u0[0] = u0[1] + q1; // слева теплоисточник
    else
    u0[0] = 2.*u1 - u0[1]; // слева температура
    if(!(var%3))
    u0[n+1] = nulgranz(1, ur, u0[n]); // справа теплоотдача
    else if(var%3 == 1)
    u0[n+1] = u0[n] + qr; // справа теплоисточник
    else
    u0[n+1] = 2.*ur - u0[n]; // справа температура
    if(k) // корректор
    {
    x = dt;
    tmp = 0.;
    }
    else
    x = dt/2.; // предиктор
    for(i = 1; i < n+1; i++)
    {
    y = koefdat(u0[i], 5);
    z = exp(-2.*y*x);
    if(k)
    y = w[i];
    u1[i] = w[i]*z + (1. - z)*(u0[i-1] + u0[i+1])/2.;
    if(k)
    tmp += fabs(u1[i] - y);
    }
    if(k)
    tmp /= (double)n;
    if(kbhit())
    ch = getch();
    }
    if(v) delete [] v;
    if(var < 3)
    u[0] = nulgranz(0, u1, u[1]); // слева теплоотдача
    else if(var < 6)
    u[0] = u[1] + q1; // слева теплоисточник
    else
    u[0] = 2.*u1 - u[1]; // слева температура
    if(!(var%3))
    u[n+1] = nulgranz(1, ur, u[n]); // справа теплоотдача
    else if(var%3 == 1)

```

```
u[n+1] = u[n] + qr;           // справа теплоисточник
else
u[n+1] = 2.*ur - u[n];       // справа температура
return(it/2);
}
```