

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)»  
Институт естественных и точных наук  
Факультет математики, механики и компьютерных технологий  
Кафедра прикладной математики и программирования  
Направление подготовки Прикладная математика

РАБОТА ПРОВЕРЕНА

Рецензент, доцент кафедры  
МАиМПП, к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ А.А.Баязитова  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н.,  
доцент

\_\_\_\_\_ А.А.Замышляева  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

Исследование нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной  
в цилиндрических координатах

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ  
ЮУрГУ–01.03.04.2018.76.ПЗ ВКР

Руководитель работы, доцент  
кафедры МиКМ, к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_ /М.А.Сагадеева  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

Автор работы  
студент группы ЕТ-413

\_\_\_\_\_ /М.С.Литвин  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

Нормоконтролер, к.э.н., доцент

\_\_\_\_\_ /Д.А.Дрозин  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

## АННОТАЦИЯ

Литвин М. С. Исследование нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах. – Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-413, 45 с., 7 ил., библиогр. список – 23 наим., 1 прил.

В рамках данной работы происходит ознакомление с теорией уравнений соболевского типа, построение и изучение решения уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной в цилиндрических координатах, а так же визуализация процесса. В первом разделе подробно рассматривается предметная область. Во втором разделе описано построение решения уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, разработан алгоритм численного решения уравнения и проведен вычислительный эксперимент.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	6
1 ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА .....	9
1.1. Относительно – ограниченные операторы .....	9
1.2. Вывод решения уравнений соболевского типа в относительно ограниченном случае .....	14
1.3. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной. Редукция к абстрактному уравнению .....	17
Вывод по разделу.....	21
2 РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА – ЖЕЛТОВА – КОЧИНОЙ .....	22
2.1. Задача Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах .....	22
2.2. Решение уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах .....	26
2.3. Алгоритм численного метода.....	29
2.4 Вычислительный эксперимент.....	32
Вывод по разделу.....	38
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	39
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	41
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. КОД ПРОГРАММЫ.....	44

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^n$  с бесконечно гладкой границей. Рассмотрим задачу Дирихле

$$(0.1)$$

для нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(0.2)$$

моделирующего динамику давления вязкоупругой жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде [1]. Параметр  $\lambda$  и скалярная функция характеризуют среду; функция играет роль внешней нагрузки. Вдобавок, тщательный разбор вывода уравнения (0.2), сделанный в [2], выявил, что отрицательные значения параметра  $\lambda$  не противоречат физическому смыслу, и поэтому в этом уравнении оператор в правой части может зануляться. Отметим, что уравнение (0.2) вместе с граничными условиями Дирихле (0.1) может являться моделью процесса влагопереноса в почве [3], а также процесса теплопроводности в среде с «двумя температурами» [4].

Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной относится к неклассическим уравнениям математической физики [5], иллюстрирующим применение теории уравнений соболевского типа, развиваемой профессором Г. А. Свиридюком и его учениками. В первый раз уравнения, не разрешенные сравнительно выделенной производной, были замечены в работе А. Пуанкаре в 1885 году. Впрочем, начало регулярных исследований этих уравнений было положено в работе С.Л. Соболева [6], изданной в 1954 году. С тех пор уравнения соболевского типа активно изучались в связи с большим количеством приложений.

Ранее уравнение (0.2) с различными начальными краевыми условиями рассматривались многими авторами (обзор по этому поводу можно найти в [6], [7]). Можно еще отметить работу [8], в которой рассматривается

стационарное уравнение БЖК в цилиндрических координатах и основной задачей исследования являются другие вопросы. В отличие от предыдущих исследований мы рассматриваем уравнение (0.2) в нестационарном случае. Так как уравнение БЖК описывает процессы фильтрации и подобные им, то естественно выбирать цилиндрическую систему координат, так как она.... Задачу Дирихле (0.1) для уравнения (0.2) будем рассматривать в цилиндрических координатах. Уравнения соболевского типа, с коэффициентами, зависящими от времени, впервые были рассмотрены в диссертации [9], после чего начали применяться для рассмотрения моделей различных процессов [17], [18], [19].

Целью выпускной квалификационной работы является исследование решения нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах, визуализация и численное моделирование решения в зависимости от заданных параметров уравнения, коэффициентов и начальных данных.

Для достижения цели работы были представлены следующие задачи:

- изучить основную литературу по теме выпускной квалификационной работы;
- найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах;
- решить нестационарное уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной в цилиндрических координатах;
- провести численный эксперимент для нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах.

В рамках данной работы происходит ознакомление с теорией уравнений соболевского типа, построение и изучение решения уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах, а так же визуализация процесса. Основными методами исследования являются методы функционального анализа [10], уравнений математической физики

[11]. Для построения численного решения использована среда математических расчетов Maple [12], [13], [20], [21], [22], [13].

Данная выпускная квалификационная работа содержит 2 раздела. В первом разделе подробно рассмотрена предметная область. В нем описывается теория уравнений соболевского типа, так же приведены определения и формулировки теорем, которые используются для проведения основных построений, которые взяты в основном из [10], [14], [3].

Во втором разделе описано построение решения уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной. В первом параграфе описано решение задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах. Данное уравнение решалось методом Фурье, используя классические учебники по теории уравнений математической физики [11], [15], [16]. Во втором параграфе содержится построение решения самого уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, используя результаты предыдущего параграфа. В третьем и четвертом параграфах, на основе теоретических результатов приведенных в предыдущих параграфах были разработаны алгоритм и численный метод решения задачи.

# 1 ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

## 1.1. Относительно $M$ – ограниченные операторы

Доказательства приведенных в этой главе результатов можно найти в [23].

Пусть  $X$  и  $Y$  – банаховы пространства, оператор  $M$  с нетривиальным ядром  $N(M)$  и  $M^{-1}$ .

**Определение 1.1.1.** Множество  $\sigma_L(M)$  называется  $L$ -резольвентным множеством оператора  $M$  относительно оператора  $L$ . Множество  $\sigma(M)$  называется спектром оператора  $M$  относительно оператора  $L$ .

Ясно, что при условии  $M^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$  имеем  $\sigma(M) = \sigma_L(M)$ .

**Определение 1.1.2.** Для комплексной переменной  $\lambda$  определим операторнозначные функции  $R_L(\lambda, M)$ ,  $R(\lambda, M)$ ,  $R_L^+(\lambda, M)$ ,  $R_L^-(\lambda, M)$  будем называть соответственно резольвентой, правой резольвентой, левой резольвентой оператора  $M$  относительно оператора  $L$ .

**Теорема 1.1.1.** Пусть операторы  $M, L \in \mathcal{L}(X, X)$ ,  $M^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ . Тогда  $L$ -резольвента, правая и левая  $L$ -резольвенты оператора  $M$  аналитичны в  $\mathbb{C} \setminus \sigma(M)$ .

**Лемма 1.1.1.**  $M$ -корневой линеал оператора  $L$  состоит только из  $M$ -присоединенных векторов оператора  $L$  и нулевого вектора.

**Лемма 1.1.2.** Пусть  $x$  –  $M$ -присоединенный вектор оператора  $L$  высоты  $r$ , тогда  $L^r x = Mx$  выполнено

Рассмотрим задачу Коши

(1.1.1)

для однородного уравнения соболевского типа

(1.1.2)

**Определение 1.1.3.** Оператор  $M$  называется *спектрально ограниченным относительно* оператора  $L$  (или, коротко,  $(L, M)$  – ограниченным), если

**Замечание 1.1.1.** Если существует оператор  $N$ , то оператор  $(L, M)$  – ограничен. Если оператор  $L$  компактен, то оператор  $M$  не будет  $(L, M)$  – ограничен.

Возьмем  $(L, M)$ -ограниченный оператор  $M$ , выберем в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  замкнутый контур

(1.1.3)

Тогда имеют смысл следующие интегралы, как интегралы от аналитических функций по замкнутому контуру:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (1.1.4)$$

Операторы  $P$  и  $Q$  являются проекторами. Положим

Итак,  $P^2 = P$ .

Через  $P$  обозначим сужение оператора  $M$  на  $\text{Im } P$ .

**Теорема 1.1.2.** Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -ограничен. Тогда

- (i)  $M$  – ограничен;
- (ii)  $M$  – ограничен;
- (iii) существуют операторы  $P$  и  $Q$ .

Будем рассматривать уравнение (1.1.2) вместе с эквивалентным ему при  $P$  уравнением



(1.1.5)

как конкретные интерпретации уравнения

(1.1.6)

с операторами

– банаховы пространства.

**Определение 1.1.4.** *Решением* уравнения (1.1.6) будем называть вектор-функцию , удовлетворяющую этому уравнению на  $\mathbb{R}$ .

**Определение 1.1.5.** Отображением называется *группой разрешающих операторов* (или просто *разрешающей группой*) уравнения (1.1.6), если

(i) для любых ;

(ii) при любом вектор-функция есть решение уравнения (1.1.6) (в смысле определения 1.1.4).

**Определение 1.1.6.** Разрешающая группа называется *аналитической*, если она допускает аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  с сохранением свойств (i) и (ii).

**Теорема 1.1.3.** [3] Пусть оператор – ограничен. Тогда существует аналитическая группа уравнения (1.1.2) ((1.1.5)), причем ее операторы задаются интегралами типа Данфорда-Тейлора:

$$\text{---} \text{---} \tag{1.1.7}$$

где замкнутый контур удовлетворяет условию (1.1.3).

При условии -ограниченности оператора М согласно теореме 1.1.2 существуют операторы , используя которые можно разложить L-резольвенту оператора М в кольце в ряд Лорана

При этом бесконечность является

- (i) *устранимой особой точкой*, если  $\dots$  ;
- (ii) *полюсом* порядка  $\dots$ , если  $\dots$  ;
- (iii) *существенно особой точкой*, если  $\dots$  .

**Определение 1.1.7.**  $\dots$ -ограниченный оператор  $M$  назовем:

- (i)  $\dots$ -ограниченным, если бесконечность является *устранимой особой точкой*  $L$ -резольвенты оператора  $M$ ;
- (ii)  $\dots$ -ограниченным, если бесконечность является *полюсом* порядка  $L$ -резольвенты оператора  $M$ ;
- (iii)  $\dots$ -ограниченным, если бесконечность является *существенно особой точкой*  $L$ -резольвенты оператора  $M$ .

**Теорема 1.1.5.** [3] Пусть оператор  $M$ :

- (i)  $\dots$ -ограниченно Тогда оператор  $L$  не имеет  $M$ -присоединенных векторов,  $\dots$ -присоединенных векторов,  $\dots$  ;
- (ii)  $\dots$ -ограничен,  $\dots$ . Тогда длина любой цепочки  $M$ -присоединенных векторов оператора  $L$  ограничена числом  $r$ , цепочка длины  $r$  при этом существует, и  $M$ -корневой линеал оператора  $L$  совпадает с подпространством  $\dots$  ;
- (iii)  $\dots$ -ограничен. Тогда  $M$ -корневой линеал оператора  $L$  содержится в  $\dots$  .

**Определение 1.1.9.** Замкнутое множество  $\dots$  называется *фазовым пространством* уравнения (1.1.6), если

- (i) любое решение уравнения (1.1.6) лежит в  $\dots$  (поточечно);
- (ii) для любого  $\dots$  из  $\dots$ , существует единственное решение задачи для уравнения (1.1.6).

**Следствие 1.1.1.** [3] Пусть оператор  $M$   $r$ -ограничен,  $r > 0$ . Тогда фазовым пространством уравнения (1.1.2) ((1.1.5)) является множество

Напомним, что фредгольмовым называется оператор  $L$ , если его индекс

**Теорема 1.1.6.** [3] Пусть оператор  $L$ -фредгольмов. Тогда следующие условия эквивалентны

- (i) оператор  $M$   $r$ -ограничен,  $r > 0$ .
- (ii) длина любой цепочки  $M$ -присоединенных векторов оператора  $L$  не превосходит  $r$ .

## 1.2. Вывод решения уравнений соболевского типа в относительно ограниченном случае

Наконец, опишем решение неоднородного уравнения соболевского типа

$$(1.2.1)$$

с функцией

В дальнейшем будем обозначать

и

**Теорема 1.2.1.** [3] Пусть оператор  $M$  -ограничен, . Тогда для любой функции и любого начального значения

существует единственное решение имеющее вид

задачи (1.1.1), (1.2.1),

**Замечание 1.2.1.** Используя изложенные выше результаты, уравнение (1.2.1) мы можем представить в виде системы уравнений

$$(1.2.2)$$

$$(1.2.3)$$

на подпространствах и соответственно. В представленном в предыдущей теореме решении уравнения (1.2.1) первые два слагаемых разрешают уравнение (1.2.2), а третье – уравнение (1.2.3).

Пусть и – банаховы пространства, оператор с нетривиальным ядром и . Рассмотрим задачу Шоуолтера – Сидорова

$$(1.2.4)$$

для уравнения вида

(1.2.5)

где  $\mu(t)$  - скалярная функция, характеризующая изменение во времени параметров взаимовлияния состояний исследуемой системы, вектор-функция  $F(t, x)$  характеризует внешнее воздействие. Уравнение (1.2.5) называется нестационарным уравнением соболевского типа. Уравнения такого вида позволяют более точно описывать исследуемое явление, так как многие модели физических процессов так или иначе имеют коэффициенты, зависящие от времени.

**Определение 1.2.1.** Вектор-функция  $x(t)$  называется *классическим решением уравнения* (1.1.2), если она почти всюду на  $(0, T)$  обращает его в тождество. *Сильное решение* уравнения (1.2.5) называется *классическим решением задачи Шоултера – Сидорова* (1.2.4), (1.2.5), если оно удовлетворяет (1.2.4).

Используя изложенные выше результаты, уравнение (1.1.2) мы можем представить в виде системы двух уравнений

(1.2.6)

(1.2.7)

на подпространствах  $L^p$  и  $L^q$  соответственно.

**Теорема 1.2.2.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -ограничен,  $\mu(t) \in L^q$ . Тогда для любых  $f(t) \in L^p$  и  $g(t) \in L^q$  существует единственное классическое решение задачи Шоултера – Сидорова (1.2.4) для уравнения (1.2.5), имеющие вид

(1.2.8)

Здесь первые для слагаемых являются решением уравнения (1.2.6), а последние – (1.2.7).

Построим решение задачи (1.2.4) для уравнения (1.2.5). Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -ограничен, тогда в силу теоремы 1.1.3 справедлива следующая.

**Теорема 1.2.3.** Пусть оператор  $M$   $(L,p)$ -ограничен,  $\varphi \in L^p$ , а функция  $f \in L^p$ . Тогда для любых  $\lambda \in \mathbb{C}$  и  $\mu \in \mathbb{C}$  существует единственное классическое решение задачи Шоултера – Сидорова (1.2.4) для уравнения (1.2.5), причем

$$(1.2.9)$$

где  $\mathcal{R}_\lambda$  и  $\mathcal{S}_\mu$  —

### 1.3. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной. Редукция к абстрактному уравнению

Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

(1.3.1)

моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде. Трещиноватая среда состоит из пористых и проницаемых блоков, отделенных один от другого системой трещин. Размер блоков может отличаться для различных пород весьма в широких пределах, в зависимости от того насколько развитой является система трещиноватость породы.

Данное уравнение также описывает такие процессы как течение жидкости второго порядка, теплопроводность с «двумя температурами», влагопереноса в почве [1].

В уравнении (1.3.1) вещественный параметр  $\lambda$  определяется следующим соотношением

—

в котором  $\lambda$  – безразмерная характеристика трещиноватой породы (определяет интенсивность обмена жидкостью блоков и трещин, зависит от проницаемости блоков и степени развитости трещиноватой породы),  $\mu$  – величина проницаемости системы трещин. Параметр  $\lambda$  является составной величиной, зависящей от свойств среды и жидкости, его величина определяется формулой

—————

где  $\lambda_0$  – безмерная характеристика трещиноватой среды,  $\eta$  – вязкость жидкости,  $\mu_0$  – величина пористости белков при стандартном давлении,  $\mu_1$  – коэффициент сжимаемости белков,  $\mu_2$  – коэффициент сжимаемости жидкости [1]. Для повышения адекватности параметра  $\lambda$  реальным физическим процессам, коэффициенты  $\mu_0$  и  $\mu_1$  целесообразнее брать зависящими от

времени и рассматривать этот параметр как скалярную функцию от времени.

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  из класса  $C^2$ . Рассмотрим в цилиндре  $\Omega \times \mathbb{R}$  задачу Дирихле

$$\Delta u = f \quad (1.3.2)$$

для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной

$$\Delta u + \lambda u = f \quad (1.3.3)$$

с условием Шоуолтера-Сидорова

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (1.3.4)$$

Здесь вещественный параметр  $\lambda \in \mathbb{R}$  и скалярная функция  $f$  описаны выше, а вектор-функция  $\mathbf{g}$  характеризует внешнее воздействие на систему и является функцией управления.

Уравнение (1.3.3) относится к широкому классу уравнений соболевского типа, составляющих обширную область неклассических уравнений математической физики [5].

Редуцируя задачу (1.3.3), (1.3.4) к задаче (1.2.4), (1.2.5), положим

где  $H^1(\Omega)$  – пространства Соболева  $H^1(\Omega)$ . Операторы  $L$  и  $M$  зададим формулами

$$L u = \Delta u + \lambda u, \quad M u = \mathbf{g} \cdot \nabla u \quad (1.3.5)$$

**Лемма 1.3.1.** *Для любых  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  операторы  $M, L \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^1(\Omega))$  являются фредгольмовыми.*

**Доказательство.** Утверждение леммы следует из линейности, непрерывности и фредгольмовости оператора Лапласа и формул, определяющих операторы  $L$  и  $M$ .

Обозначим через  $\sigma(\Delta)$  спектр однородной задачи Дирихле в области  $\Omega$  для оператора Лапласа  $\Delta$ . Спектр  $\sigma(\Delta)$  отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к  $0$ . Через  $\sigma(\Delta)$  обозначим множество



собственных значений, занумерованное по невозрастанию с учетом кратности, а через  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  – семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведения  $(\cdot, \cdot)_M$  в  $L^2(\Omega)$ ,

**Теорема 1.3.1.** *Для любых  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  оператор  $M(L, \lambda)$  – ограничен.*

**Доказательство.** Оператор  $L$  является самосопряженным, фредгольмовым, поэтому для доказательства теоремы достаточно показать отсутствие  $M$ -присоединенных векторов у любого вектора  $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ . Если  $\varphi \in \ker L$  и оператор  $L$  не имеет собственных векторов [7].

Если  $\lambda > 0$ , положим  $\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} L e_n$ ,  $\psi_n = e_n$  – собственные функции оператора Лапласа  $\Delta$ , отвечающие собственному значению  $\lambda$ , причем их можно выбрать ортогональными в смысле скалярного произведения  $(\cdot, \cdot)_M$  в  $L^2(\Omega)$ . Тогда

и поэтому

если  $\lambda > 0$ .

Пусть  $\varphi \in \ker M(L, \lambda)$ , тогда относительноная  $L$ -резольвента и правая  $L$ -резольвента оператора  $M$  имеют вид

$$\frac{1}{\lambda - L} \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi, e_n)_M}{\lambda - \lambda_n} e_n \quad (1.3.6)$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi, e_n)_M}{\lambda - \lambda_n} e_n \quad (1.3.7)$$

Откуда ясно, что при  $\lambda > 0$   $L$  – спектр оператора  $M$   $\sigma(M) =$

— В случае  $\lambda = 0$   $L$  – спектр оператора  $M$   $\sigma(M) =$

поэтому везде далее . В силу того, что точки спектра оператора Лапласа вещественны, дискретны, конечнократны и сгущаются только к , то относительный спектр очевидно обладает теми же свойствами, а следовательно ограничен.

Построим проекторы. В случае, если проектор  $P =$  , а если  $\lambda \in$  , то

Проектор Q имеет тот же вид, но определен на пространстве . Итак, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.3.2.** Пусть , вектор-функция , функция и

(i) . Тогда при любых существует единственное решение задачи (1.3.6), (1.3.7), представимое в виде

$$\text{---} \qquad \qquad \qquad \text{---} \qquad \text{---}$$

(ii) . Тогда при любых существует единственное решение задачи (1.3.6), (1.3.7), представимое в виде

$$\text{---} \qquad \qquad \qquad \text{---}$$

$$\text{---} \qquad \qquad \qquad \text{---}$$

**Доказательство.**

(i) В этом случае оператор L непрерывно обратим, следовательно, задача однозначно разрешима для любых , и решение представимо в виде

где  $\Gamma$  — разрешающая группа. Учитывая, что

\_\_\_\_\_

получаем

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

следовательно,

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

(ii) В этом случае оператор  $M$  непрерывно обратим, следовательно, задача однозначно разрешима для любых  $\lambda$ , и решение представимо в виде

\_\_\_\_\_

Получим выражение для последнего слагаемого

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Первые для слагаемых получаются аналогично пункту (i), исключаящее во всех суммах слагаемые, соответствующие тем номерам  $l$ , для которых \_\_\_\_\_.

### Вывод по разделу

В первом разделе подробно рассмотрена предметная область. В нем описывается теория уравнений соболевского типа, так же приведены определения и формулировки теорем, которые используются для проведения основных построений. Это поможет нам при решении задачи Штурма – Лиувилля и уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной.

## 2 РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА – ЖЕЛТОВА – КОЧИНОЙ

### 2.1. Задача Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах.

Пусть задается следующим образом

Требуется найти все собственные значения и собственные функции оператора Лапласа с граничным условием

(2.1.1)

Будем вводить цилиндрическую систему координат  $(r, \phi, z)$ , где начало в центре нижнего основания цилиндра и ось  $z$ , которая направлена вдоль оси цилиндра.

В цилиндрических координатах оператор Лапласа принимает вид:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1.2)$$

Следовательно, задача Штурма–Лиувилля будет иметь вид:

(2.1.3)

В рассматриваемой задаче решение будем строить, используя метод разделения переменных: отделяя переменную  $z$

(2.1.4)

Подставим выражение (2.1.4) в дифференциальное уравнение (2.1.3), получаем:

Разделив переменные, получаем:

$$\frac{1}{z} \frac{d^2 z}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 R}{d\phi^2} = 0$$

Учитывая граничные условия (2.1.1) данной задачи, получим две задачи Штурма – Лиувилля. Определение собственных функций и собственных значений на отрезке и в круге.

(2.1.5)

Задача (2.1.5) есть задача Штурма – Лиувилля для круга. Ее собственные функции будем искать в виде

Разделяя переменные, получаем задачу Штурма – Лиувилля для функции

(2.1.6)

Собственные значения и собственные функции задачи (2.1.6)

Для функции  $R(r)$  получим дифференциальное уравнение

В этом уравнении без ограничения общности можно считать

а) если  $\alpha = 0$ , то это уравнение Эйлера:

Его общее решение

В силу ограниченности решения при  $r = 0$ , имеем  $B = 0$ . Тогда, опуская произвольный множитель  $A$ , получим

б) если  $\alpha \neq 0$ , то сделаем замену  $\rho = \alpha r$ , тогда

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\rho^2 - \alpha^2) R = 0$$

и, аналогично,

Теперь дифференциальное уравнение принимает вид

Это уравнение называется уравнением Бесселя  $n$ -го порядка. Любое его решение называется цилиндрической функцией  $n$ -го порядка. Общее решение можно записать в виде:

где  $J_n(x)$  – это функция Бесселя  $n$ -го порядка,  $Y_n(x)$  – функция Неймана  $n$ -го порядка. Все цилиндрические функции – квазипериодические.

Учитывая неограниченность функции  $Y_n(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , находим, что  $Y_n(x)$  будем считать  $0$ , поскольку собственная функция определяется с точностью до числового множителя, который определяется из условия нормировки. Поэтому собственная функция будет иметь вид

Теперь подставим функцию  $J_n(x)$  в граничные условия.

1)

Отсюда получим:

Поскольку для задачи Дирихле все собственные значения  $\lambda_k$ , то  $J_n(\sqrt{\lambda_k} r) = 0$ , и должно выполняться равенство

Функция Бесселя  $J_n(x)$  имеет счетное число положительных нулей  $x_k$ ,  $k=1,2, \dots$ . Им будут соответствовать собственные значения  $\lambda_k = x_k^2$ .

Таким образом, функции  $R(r)$ , удовлетворяющие условию Дирихле  $R(r)=0$ , имеют вид:

Тогда получаем собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля на круге.

—

собственные значения — есть корни уравнения

—

Теперь для функции — получаем

—

С учетом граничных условий —, —, имеем задачу Штурма–Лиувилля на отрезке:

(2.1.7)

Собственные значения и собственные функции задачи (2.1.7)

— —

Далее собственные значения и собственные функции задачи (2.1.3) будут иметь вид

—  
— —

## 2.2. Решение уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах

Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной – это уравнение вида

$$(2.2.1)$$

моделирующее динамику вязкоупругой жидкости в трещиновато-пористой среде [1]. Здесь  $\mu$  – вещественные параметры, характеризующие среду; параметр  $\gamma$ , функция  $\varphi$  играет роль внешних воздействий на систему.

Пусть  $\Omega$  – ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^2$ . Будем искать функцию  $u$ , определенную в цилиндре  $\Omega \times [0, \infty)$ , удовлетворяющую уравнению (2.2.1), начальному

$$(2.2.2)$$

и краевому

$$(2.2.3)$$

условиям.

Задачу (2.2.2) и (2.2.3) для уравнения (2.2.1) сводим к задаче Коши для неоднородного уравнения, взяв в качестве пространства  $L^2(\Omega)$  и  $L^2(\partial\Omega)$ , например, пространства Соболева

$$(2.2.4)$$

где  $\Delta$  – лапласиан. Тогда операторы

$$(2.2.5)$$

будут принадлежать классу  $\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\partial\Omega))$ , а также фредгольмовыми (т.е.

$\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\partial\Omega))$ ). Очевидно, что при  $\mu > 0$  относительный спектр  $\sigma_{rel}(M)$ .

Поэтому мы будем брать  $\mu > 0$ .

Вспользуемся вспомогательной леммой

**Лемма 2.2.1.** [3] Пусть пространства  $L^2(\Omega)$  и  $L^2(\partial\Omega)$  определены в (2.2.4), а операторы  $L$  и  $M$  определены в (2.2.5). Тогда оператор  $M(L, 0)$ -ограничен.

**Теорема 2.2.1.** [3] Пусть выполнены условия леммы (2.2.1), тогда



(i) если  $\dots$ , то для всех  $\dots$  и  $\dots$  существует единственное решение задачи (2.2.1)-(2.2.3), имеющее вид

$$\dots$$

(ii) если  $\dots$ , то для всех  $\dots$  существует единственное решение задачи (2.2.1)-(2.2.3), имеющий вид

$$\dots$$

Здесь  $\{ \dots \}$  и  $\{ \dots \}$  – множества ортонормированных собственных функций и соответствующих им собственных значений однородной смешанной краевой задачи для оператора Лапласа в области  $\Omega$ , занумерованные по убыванию собственных значений с учетом их кратности. Штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами  $n, k, m$  такими, что  $\dots$ .

По функции  $\dots$  подберем решение таким образом, чтобы выполнялось

Для этого подставим в данное уравнение  $\{ \dots \}$  и  $\{ \dots \}$  – собственные функции и соответствующие им собственные значения однородной смешанной задачи для оператора Лапласа.

Для решения получения вида решения в цилиндрических координатах перейдем в  $(r, \varphi, z)$  и учитывая результаты пункта 2.1 для цилиндрической области

и собственных значений и собственных функций

Таким образом, для случая 1) ( $\lambda = 0$ ) теоремы (2.2.1) получаем

Соответственно, для случая 2) ( $\lambda = -\mu^2$ ) теоремы (2.2.1) получим

### 2.3. Алгоритм численного метода

Пусть задана ограниченная область

Рассмотрим в цилиндре задачу Дирихле (2.3.1)

для нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной (2.3.2)

Численное решение задачи (2.3.1) – (2.3.2) будем искать в виде

где  $\lambda_n$  и  $\mu_m$  - собственные значения и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах. Будем искать сумму конечного числа слагаемых, для этого зададим  $N, M, K$ .

В данной работе для нахождения численного решения уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной используется прикладной математический пакет MAPLE обладающий большим набором инструментов для работы с дифференциальными уравнениями в частных производных. В данной работе так же использовался пакет plots для выведения графических изображений.

Численное решение уравнения будем находить методом Фурье (метод разделения переменных). Основными этапами построения решения методом разделения переменных являются:

Алгоритм нахождения приближенного решения уравнения (2.3.2) и построения графика состоит из 3 этапов.

Этап 1. Решение нестационарного уравнения методом разделения переменных.

Этап 2. Вывод общего решения в развернутом виде и его преобразование.

Этап 3. Построение графика в зависимости от различных временных и пространственных переменных.

На рисунке 1 представлена схема алгоритма работы программы. Подробно опишем представленный алгоритм.

*Шаг 1.* Задается нестационарное уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной.

*Шаг 2.* Решается задача Штурма – Лиувилля.

*Шаг 3.* Строится общее решение уравнения.

*Шаг 4.* Учитываются начальные условия и определяются коэффициенты разложения.

*Шаг 5.* Задаются требуемые параметры нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной.

*Шаг 5.* Выводится общее решение в развернутом виде.

*Шаг 6.* Построение графика решения уравнения.



Рисунок 1 – Алгоритм программы

## 2.4 Вычислительный эксперимент

На основе полученных теоретических результатов был разработан численный метод решения нестационарного уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в цилиндрических координатах в зависимости от заданных параметров уравнения, коэффициентов и начальных данных. Данный метод реализован в среде «Maple 17». Программа предназначена для численного решения нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах и вывод графического изображения в различные моменты времени. В алгоритме используется метод Фурье. Рассмотрим основные этапы работы программы. В начале программы вводятся параметры уравнения, а именно параметр  $\lambda$ , функция  $\alpha(t)$  и начальные условия, а так же задаются функция  $\beta(r)$  и  $\gamma(z)$ . На следующем шаге уравнение решается методом Фурье, определяются коэффициенты разложения и выводится общее решение. Программа позволяет строить график решения уравнения в определенный момент времени на определенной высоте цилиндра.

Для реализации алгоритмов программы были использованы стандартные функции и операторы Maple.

Функцию  $u(r, z, t)$  зададим как произведение трех функций

а функцию  $u(r, z, t)$  зададим как произведение четырех функций

Для нахождения собственных значений и собственных функций зададим уравнение и разделим его на переменные. Подставим значения постоянных и решим разделенные переменные, а так же определим коэффициенты разложения.

**Пример 1.** Решить задачу (2.3.1) – (2.3.2) при следующих условиях

Так же будем искать решение уравнения на высоте  $z = 0$  в момент времени  $t = 0$ . Заметим, что  $\lambda = 0$  не попадает в спектр оператора Лапласа. График найденного решения  $u(r, \theta, z, t)$  представлен на рисунке 2.

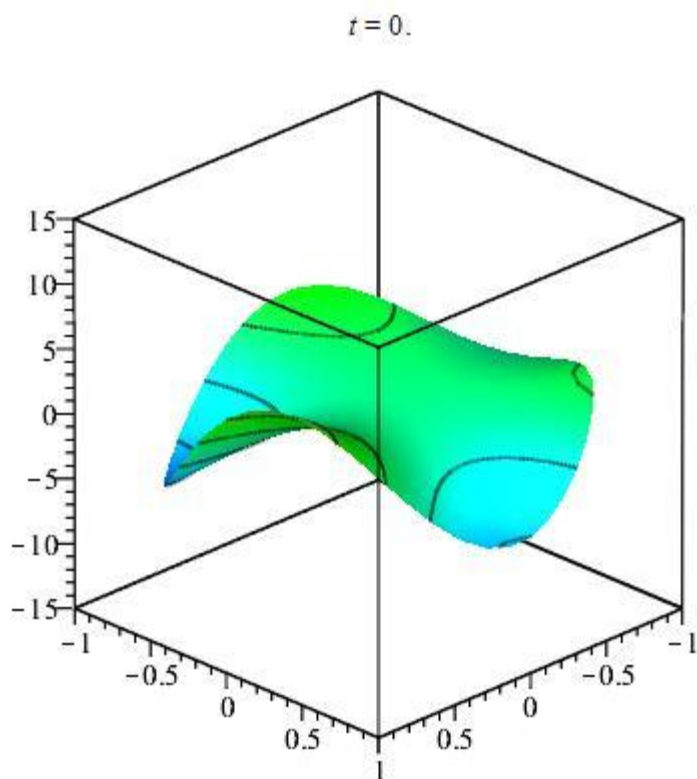


Рисунок 2 – График решения нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах в момент времени  $t = 0$

**Пример 2.** Решить задачу (2.3.1) – (2.3.2) при следующих условиях

Так же будем искать решение уравнения на высоте  $z = 0$  в момент времени  $t = 0$ . Заметим, что  $\lambda = 0$  не попадает в спектр оператора Лапласа. График найденного решения  $u(r, \theta, z, t)$  представлен на рисунке 3.

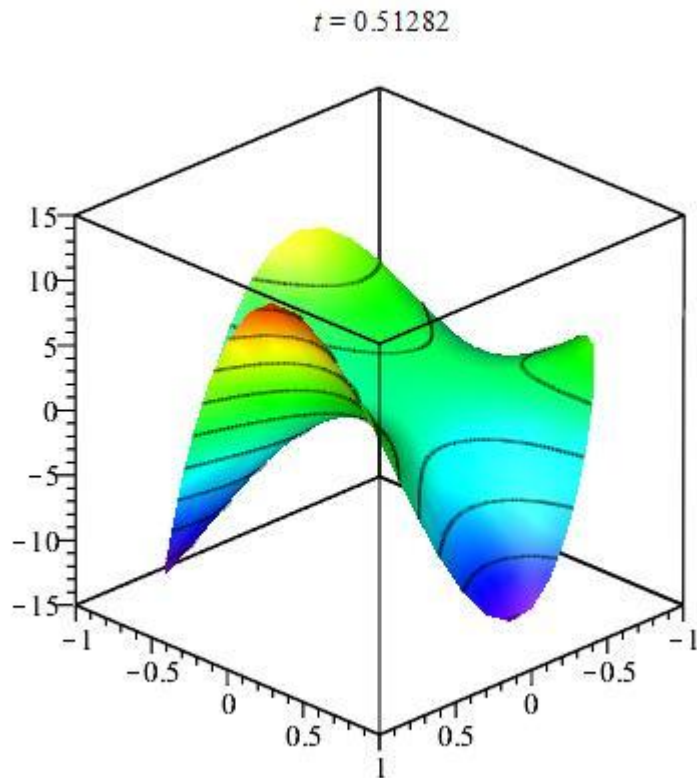


Рисунок 3 – График решения нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах в момент времени

**Пример 3.** Решить задачу (2.3.1) – (2.3.2) при следующих условиях

Так же будем искать решение уравнения на высоте \_\_\_\_\_ в момент времени \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_. Заметим, что \_\_\_\_\_ не попадает в спектр оператора Лапласа.

График найденного решения \_\_\_\_\_ представлен на рисунке 4.



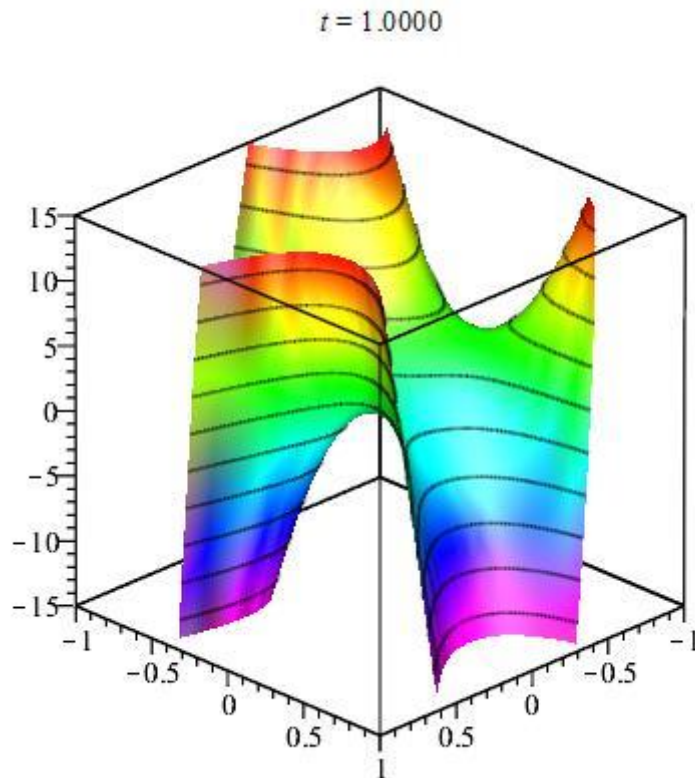


Рисунок 4 – График решения нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах в момент времени

**Пример 4.** Решить задачу (2.3.1) – (2.3.2) при следующих условиях

Так же будем искать решение уравнения на высоте \_\_\_\_\_ в момент времени \_\_\_\_\_

. Заметим, что \_\_\_\_\_ не попадает в спектр оператора Лапласа.

График найденного решения \_\_\_\_\_ представлен на рисунке 5.

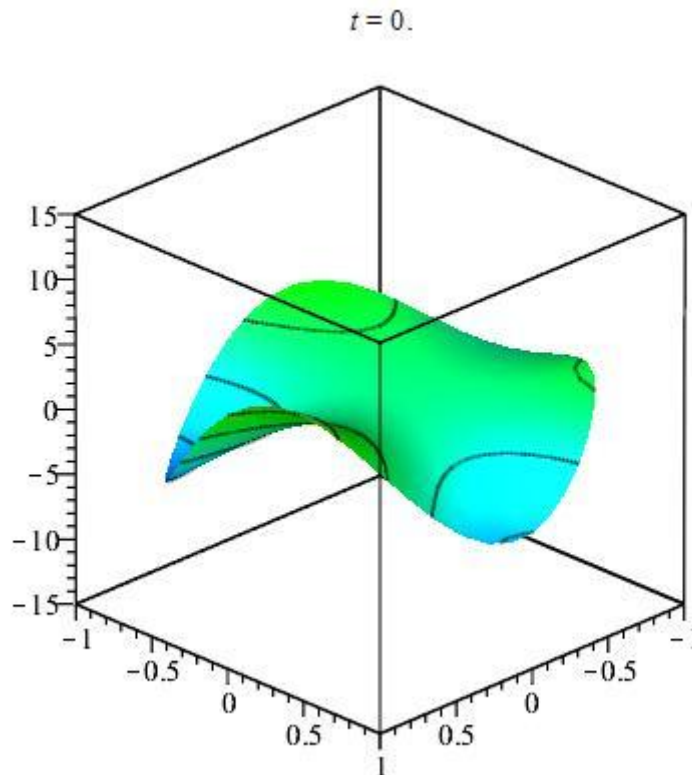


Рисунок 5 – График решения нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах в момент времени

**Пример 5.** Решить задачу (2.3.1) – (2.3.2) при следующих условиях

Так же будем искать решение уравнения на высоте  $z = 0$  в момент времени  $t = 0$ .

. Заметим, что  $\lambda = 0$  не попадает в спектр оператора Лапласа.

График найденного решения  $u(r, \theta, z, t)$  представлен на рисунке 6.

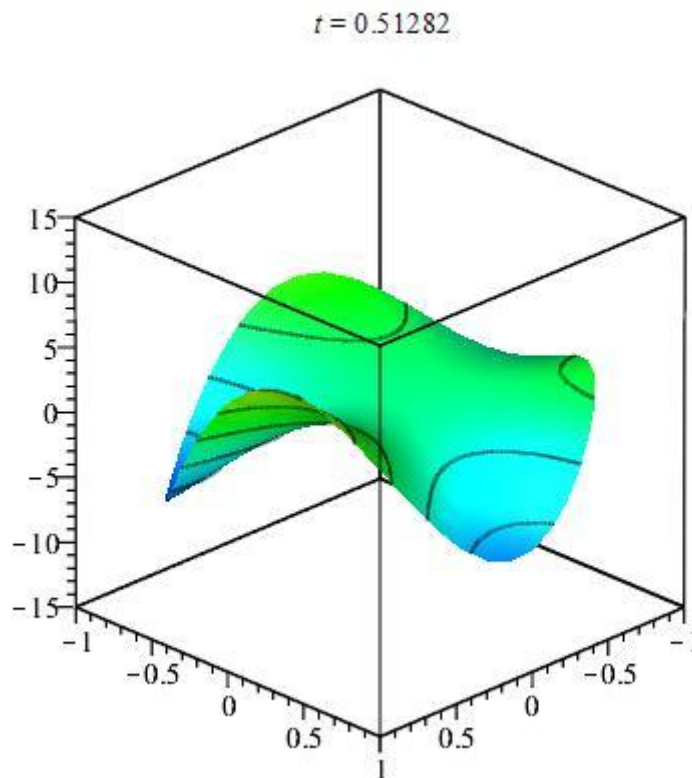


Рисунок 6 – График решения нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах в момент времени

**Пример 6.** Решить задачу (2.3.1) – (2.3.2) при следующих условиях

Так же будем искать решение уравнения на высоте  $z = 1$  в момент времени  $t = 0.51282$ .

. Заметим, что  $\lambda = 1$  не попадает в спектр оператора Лапласа.

График найденного решения  $u(r, \theta, z, t)$  представлен на рисунке 7.

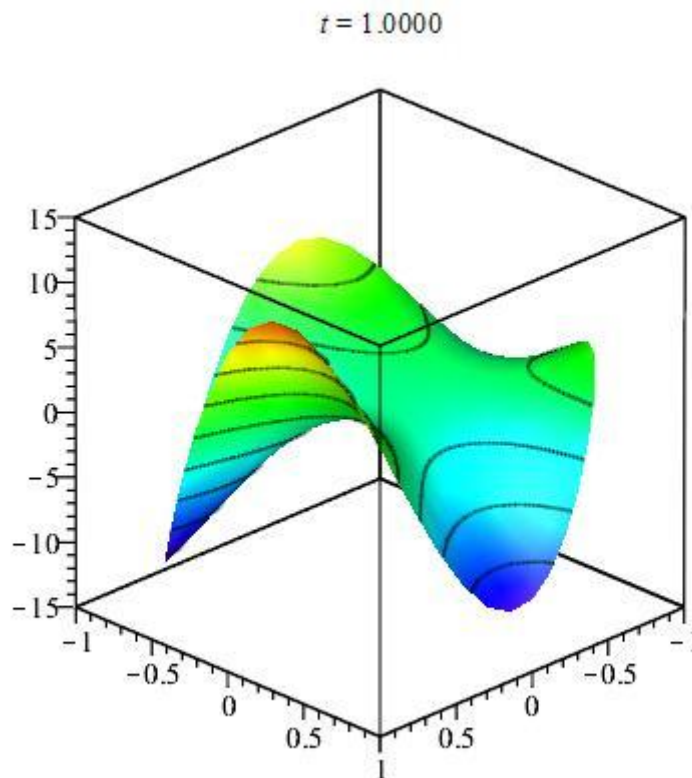


Рисунок 7 – График решения нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах в момент времени

#### Вывод по разделу

Во втором разделе описано построение решения уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной. В первом пункте получили решение задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах. Во втором пункте содержится построение решения самого уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, используя результаты предыдущего параграфа. В третьем и четвертом пунктах, на основе теоретических результатов приведенных в предыдущих параграфах были разработаны алгоритм и численный метод решения задачи, проведен вычислительный эксперимент.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы были изучены основные положения теории уравнения соболевского типа. Был проведен обзор литературы по теме исследования.

В первой главе была рассмотрена предметная область, где описывается теория уравнений соболевского типа, так же приведены определения и формулировки теорем, которые используются для проведения основных построений. В работе были рассмотрены нестационарные уравнения соболевского типа, где один из параметров уравнения является скалярной функцией и характеризует изменение во времени параметров взаимовлияния состояний исследуемой системы. Была исследована модель фильтрации жидкости Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Во второй главе описали построение решения уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной. В первом пункте для построения решения описали решение задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах, были найдены собственные значения и собственные функции. Данное уравнение решалось методом Фурье, используя классические учебники по теории уравнений математической физики. Во втором пункте описали построение решения самого нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрических координатах. В третьем и четвертом пунктах, на основе теоретических результатов приведенных в предыдущих пунктах разработали алгоритм и численный метод решения задачи, а также проведен вычислительный эксперимент на основе разработанного алгоритма и построены графики в зависимости от заданных параметров уравнения, коэффициентов и начальных данных. С помощью теории уравнений соболевского типа решение получено и в случае классической задачи, и в случае, когда оператор при производной по времени зануляется.

Таким образом, выполнены все поставленные задачи, основная цель данной выпускной квалификационной работы достигнута.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И.Баренблатт, Ю.П.Желтов, И.Н.Кочина // ПММ. – 1960. – Т. 24 №5. – С. 58 – 73.
2. Свиридюк, Г.А. Линейные соболевские уравнения / Г.А.Свиридюк // рук. доп. в ВИНТИ 1985. № 4265. – 40 С.
3. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения соболевского типа / Г.А.Свиридюк, В.Е.Фёдоров – Челябинск, 2003. – 239 с.
4. Загребина, С.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно р-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом / С.А.Загребина, Е.А.Солдатова // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2013. – № 1. – С. 20 – 34.
5. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А.Свиридюк, С.А.Загребина // Вестник ЮУрГУ. Мат. моделирование и программирование. – 2012. - № 40(299). – С. 7 – 18.
6. Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л.Соболев // Изв. АН СССР. Сер.матем – 1954. – Т.18. – С. 3 – 50.
7. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А.Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.
8. Гусейнов, Ф.Б. О смешанной задаче для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в цилиндрической по пространственным переменным области / Ф.Б.Гусейнов, Б.А.Искандеров // УМН – 2006. – Т.61, вып.2 (№368), С. 165-166.
9. Сагадеева, М.А. Исследование устойчивости решений линейных уравнений соболевского типа: дис. канд. ф.-м.н. – 2006.
10. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функции и функционального анализа / А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин – М., 1976. – 544 с.

11. Владимирив, В.С. Уравнения математической физики / В.С.Владимиров, В.В.Жаринов. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.
12. Голоскоков, Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple / Д.П.Голоскоков. – СПб.: Питер. – 2004. – 539 с.
13. Тихоненко, А.В. Решение краевых задач для двумерного уравнения Лапласа методом разделения переменных в MAPLE. – Обнинск: ИАТЭ, 2005. – 80 с.
14. Свиридьюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.С.Свиридьюк, А.В.Келлер // Изв. вузов. Математика. – 1997. – №5. – С. 60 – 68.
15. Кириллов, А.И. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / Под ред. А.И.Кириллова – М.: Физматлит, 2003. – 400 с.
16. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н.Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
17. Sagadeeva, M.A. The problem of optimal control over solutions of nonstationary Varenblatt – Zhelтов – Cochina / M.A.Sagadeeva, A.D.Badoyan – Вестник ЮУрГУ. Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2014. – Т.14. – №2. – 5 – 11 p.
18. Sagadeeva, M.A. The nonautonomous linear oskolkov model on a geometrical graph: the stability of solutions and the optimal control problem / M.A.Sagadeeva, G.A.Sviridyuk. – Semigroups of operators – Theory and applications. – 2015. – 257 – 271 p.
19. Sagadeeva, M.A. Mathematical bases of optimal measurements theory in nonstationary case / M.A.Sagadeeva. – Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – Т.3. - №3. – 19 – 32 p.
20. Wang, F. Physics with Maple: The Computer Algebra Resource for Mathematical Methods in Physics. – John Wiley & Sons. – 2006.
21. Aladjev, V.Z., Bogdevicius M.A. Maple Programming Physical and Engineering Problems. – Fultus Publishing. – 2006.



22. Tikhonenko, A.V. Equations of mathematical Physics in MAPLE. – Waterloo MAPLE Inc. – 2005.

23. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A.Sviridyuk, V.E.Fedorov. – Utrecht, Boston:VSP, 2003. – 216 p.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1. КОД ПРОГРАММЫ

```

PDE := diff(u(r, phi, z), t) = alpha*(diff(u(r, phi, z), r,
r)+(diff(u(r, phi, z), r))/r+(diff(u(r, phi, z), phi,
phi))/r^2+diff(u(r, phi, z), z, z))
struc := pdsolve(PDE, HINT = R(r)*varphi(phi)*Z(z))
dsolve(diff(varphi(phi), phi$2) = _c[2]*varphi(phi));
dsolve(diff(R(r), r$2) = -R(r)*_c[2]/r^2-R(r)*_c[3]-
(diff(R(r), r))/r);
dsolve(diff(Z(z), z$2) = _c[3]*Z(z))
dsolve(diff(varphi(phi), phi$2) = -n^2*varphi(phi))
dsolve(diff(Z(z), z$2) = -m^2*Z(z))
dsolve({Z(0) = 0, diff(Z(z), z$2) = -Pi^2*m^2*Z(z)/h^2}, Z(z))
dsolve(diff(R(r), r$2) = R(r)*n^2/r^2-R(r)*eta-(diff(R(r),
r))/r)
BesselJ(n, sqrt(eta(k))*a) = 0
eta := proc (k) options operator, arrow; BesselJZeros(0, k)
end proc
R := proc (r) options operator, arrow; C1(n, k)*BesselJ(n,
sqrt(eta(k))*r) end proc
varphi := proc (phi) options operator, arrow;
C2(n)*sin(n*phi)+C3(n)*cos(n*phi) end proc
Z := proc (z) options operator, arrow; C4(m)*sin(Pi*m*z/h) end
proc
u := proc (r, phi, z) options operator, arrow; R[n,
k](r)*varphi[n](phi)*Z[m](z) end proc
mu := proc (n, k, m) options operator, arrow;
eta[k]+Pi^2*m^2/h end proc
T := proc (t) options operator, arrow; exp(-alpha*mu(n, k,
m)*t/(lambda-mu(n, k, m))) end proc
C1 := proc (n, k) options operator, arrow; 2*(int(r*BesselJ(n,
sqrt(eta(k))*r)*(r^2-r), r = 0 .. a))/BesselJ(1, BesselJZeros(0,
k))^2 end proc
C2 := proc (n) options operator, arrow;
(int((5*cos(3*phi)+2*cos(2*phi))*cos(n*phi), phi = 0 ..
2*Pi))/Pi end proc;
C3 := proc (n) options operator, arrow;
(int((5*sin(3*phi)+2*sin(2*phi))*sin(n*phi), phi = 0 ..
2*Pi))/Pi end proc;
C4 := proc (m) options operator, arrow;
2*(int((sin(Pi*z/h)+sin(2*Pi*z/h))*sin(Pi*m*z/h), z = 0 .. h))/h
end proc;
D1 := proc (n, k) options operator, arrow;
2*(int(r^2*BesselJ(n, sqrt(eta[k])*r), r = 0 .. a))/BesselJ(1,
BesselJZeros(0, n))^2 end proc;
D2 := proc (n) options operator, arrow;
(int(cos(5*phi)*cos(n*phi), phi = 0 .. 2*Pi))/Pi end proc;
D3 := proc (m) options operator, arrow;
2*(int(sin(2*Pi*z/h)*sin(Pi*m*z/h), z = 0 .. h))/h end proc
f1 := 0; f2 := 0;
for k to 3 do
for n to 3 do

```

```

    for m to 3 do
      f1 := C1(n, k)*C2(n)*C3(n)*C4(m)*T(t)*u(r, phi, z);
      f2 := f1+f2 end do
    end do
  end do;
  f3 := 0;
  f4 := 0;
  for k to 3 do
    for n to 3 do
      for m to 3 do
        f3 := int(D1(n, k)*D2(n)*D3(m)*exp(-alpha*mu(n, k, m)*(t-
s)/(lambda-mu(n, k, m)))*u(r, phi, z)/((s^2+1)*(lambda-mu(n, k,
m))), s = 0 .. t);
        f4 := f3+f4
      end do
    end do
  end do;
  u1 := proc (t, r, phi, z) options operator, arrow;
    f2+f4 end proc
  lambda := 1; alpha := ln(t+1); h := 1; a := 1
  with(plots);
  u2 := proc (r, phi, z) options operator, arrow;
    subs(t = 0, u1(t, r, phi, z)) end proc;
  u2(t, r, phi);
  u3 := proc (r, phi) options operator, arrow;
    subs(z = .5, u2(r, phi, z)) end proc;
  u3(r, phi)
  addcoords(M_cylindrical, [z, r, phi], [r*cos(phi), r*sin(phi),
z]);
  animate(plot3d, [u2(t, r, phi), r = 0 .. a, phi = 0 .. 2*Pi,
coords = M_cylindrical], t = 0 .. 1, view = [-1 .. 1, -1 .. 1, -
15 .. 15], frames = 40, axes = BOXED, lightmodel = light1,
numpoints = 1000, orientation = [45, 65], shading = ZHUE, style
= PATCHCONTOUR)

```