Министерство образования и науки Российской федерации Федеральной государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» Институт естественных и точных наук Факультет математики, механики и компьютерных технологий Кафедра «Уравнения математической физики»

РАБОТА ПРОВЕРЕНА

#### ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Рецензент Доцент кафедры «КиПР» ЮУрГУ к.ф.-м.н., доцент Заведующий кафедрой «Уравнения математической физики»

д.ф.-м.н., проф.

\_\_\_\_\_/А.Б. Хашимов/

«\_\_\_\_»\_\_\_\_2018г.

/Г.А. Свиридюк/ «\_\_\_\_»\_\_\_\_\_2018г.

# ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШИМОСТИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ УСТРОЙСТВА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА 01.04.01.2016.159.00.МД

Руководитель работы, к.ф.-м. н.

\_\_\_\_/Д.Е. Шафранов/ «\_\_\_\_»\_\_\_\_\_2018г.

Автор работы, студент группы ЕТ-221

\_\_\_\_/Д.С. Клыгач/ « » 2018г.

Нормоконтролер, к. ф.-м. н.

\_\_\_\_/Д.Е.Шафранов/ «\_\_\_\_\_\_2018г.

Челябинск 2018 517.9

Клыгач, Д.С. Исследование решимости одного уравнения математической физики при моделировании устройства сверхвысоких частот – Челябинск: ЮУрГУ (НИУ), 2018. – 26 с.

В выпускной квалификационной работе показана редукция задачи о плоской волне в неоднородной среде, описываемой уравнением Гельмгольца, к задаче с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Описаны граничные условия для электромагнитных волн в случае стационарных и нестационарных полей. приведены результаты вычислений на основе поставленной задачи и их сравнение с экспериментальными данными.

Список литературы: 15 названий; рисунков – 13.

2

# оглавление

Введение	
Граничные условия монохроматической электродинамики	8
Граничные условия в нестационарной электродинамике	11
Редукция задачи о плоской волне в неоднородной среде	
Вычислительные эксперименты	17
Заключение	24
Список литературы	25

Введение

При проектировании систем мобильной связи, радиотехнических систем посадки самолетов необходимо учитывать влияние местных предметов на электромагнитной поле, создаваемое такими системами. Для уменьшения влияния применяют различные средства и методы для уменьшения влияния местных предметов.

В последнее время одним из направлением уменьшения отражённой электромагнитной волны стало применение радиопоглощающих покрытий. В качестве радиопоглощающего покрытия материалы на основе керамики или применение ферритов. Широко применяются в керамических покрытиях корунд, а для ферритов - гексаферрит бария.

В качестве покрытия используется не только керамический материал, но и полиуретан с различными добавками. В качестве добавки, влияющей на электрические свойства материала и коэффициент отражения, могут выступать наночастицы углерода. Полиуретан с различной концентрацией углеродных наночастиц наносили на хлопчатобумажную ткань [1]. Применение подобной технологии позволяет существенно уменьшить коэффициент отражения в X (8.2–12.4 ГГц) и Ku (12-18 ГГц) диапазоне частот.

При использовании ферритов, рассматриваются параметры не самого чистового материала, а с добавлением доли того или иного элемента. Например при добавлении в гексаферрит бария алюминия Al, бериллия Bi, хрома Cr и марганца Mn [2] приводит к тому, что в Ku диапазоне частот на определённых частотах наблюдается уменьшение коэффициента отражения. При добавлении кобальта Co наблюдается уменьшение отражения на определённых частотах в диапазоне от 0.1 до 10 ГГц [3, 4], в X диапазоне в узкой полосе частот наблюдается ослабление до -28 дБ, а в полосе частот до -15.8 дБ [5]. С

4

введением в гексаферрит бария магний Mg на отдельных частотах наблюдается ослабление до -55 дБ [6].

Применение полиуретановой основы с добавлением различных добавок имеет ряд преимуществ над покрытиями на основе керамики и ферритиов. Большинство керамических покрытий представляют собой пластинки разной формы или толщины. Поэтому возникают трудности с защитой объекта с большим радиусом кривизны или С множеством выступов. Поскольку необходимо изготавливать пластины по форме защищаемого объекта, либо изготавливать покрытие из небольших ячеек, но тогда возникают сложности закрепления множества мелких элементов на поверхности объекта. За счёт гибкости полиуретана, покрытия на его основе можно применять на телах сложной формы.

В качестве решения задачи объекта сложной формы, рассмотрим материал, состоящий из полиуретановой матрицы и корунда. Полиуретан в данном случае будет играть роль несущей основы, в котором будут множество зёрен корунда. Гибкость и пластичность полиуретановой смолы, будет обеспечивать возможность укрытия объекта сложной формы.

Однако для измерения электродинамических свойств слоя материала необходимо проводить эксперименты в безэховой камере. Для этого необходимо изготовить образцы для измерения достаточно больших размеров. Большинство материалов покрытий очень дорогие и изготовление больших партий для измерения требует большого вклада финансов, времени и труда.

Одним из путей сокращения времени на определения электродинамических свойств материала это математическое моделирование. Гораздо проще измерить параметры материала его диэлектрическую и магнитную проницаемость и на их основе рассчитать коэффициент отражения и поглощения для слоя материала.

Существующие математические модели отражения электромагнитных волн от слоя материала описывают материал с однородными параметрами по частоте. За счет внедрения в слой частиц других материалов, это приводит к

5

изменению распространения волн в слое. За счет многократного отражения электромагнитной волны в слое материала, происходит интерференция волн и, как следствие, изменение поведения коэффициента отражения по частоте и во времени.

Необходимо разработать математическую модель учитывающую изменение электродинамических параметров материала, таких как диэлектрическая и магнитная проницаемость от частоты и со временем.

#### Объект и предмет исследования

Объектом исследования в настоящей работе является разработанная математическая модель для расчета коэффициента отражения от слоя материала с неоднородными параметрами. Математическая модель основа на дифференциальном уравнении, которое получено редукцией из уравнения Гельмгольца для электромагнитных волн.

Предметом исследования являются полученные решения уравнения задачи редукции.

Целью работы является:

- разработка математической модели падения электромагнитной волны на слой материала с неоднородными параметрами;
- 2) редукция задачи о плоской волне на слоистой среде;
- 3) расчет коэффициента отражения от слоя материала.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) выводе граничных условий для нестационарных электромагнитных полей;
- на основе полученного решения задачи падения электромагнитной волны на слой материала рассчитать комплексный коэффициент отражения;

3) сравнения расчетных и экспериментальных данных.

**Теоретическую значимость и прикладную ценность** представляют следующие результаты работы:

1. Предложена математическая модель падение плоской электромагнитной волны на слой материала с неоднородными параметрами.

2. На основе разработанной математической модели, рассчитаны коэффициенты отражения для различных слоев материала.

#### Апробация работы.

Материалы ВКР были доложены на:

- 1) XXXII URSI General Assembly and Scientific Symposium (2017);
- The nineteenth edition of the International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA 2017);
- IEEE MTT-S International Microwave Workshop Series on Advanced Materials and Processes (2017);

По результатам работы опубликован в трех международных журналах [7-9] и трех трудах конференций [10-12].

#### Граничные условия монохроматической электродинамики

Электромагнитные поля с частотной зависимостью и гармонической зависимостью от времени описываются с помощью комплексных амплитуд поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , которые удовлетворяют системе уравнений Максвелла в комплексной форме:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = i\omega \dot{\varepsilon}_{a} \vec{E} + \vec{j}^{\text{CT}}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega \dot{\mu}_{a} \vec{H}, \\ \operatorname{div}(\dot{\varepsilon}_{a} \vec{E}) = \rho^{\text{CT}}, \\ \operatorname{div}(\dot{\mu}_{a} \vec{H}) = 0. \end{cases}$$
(1)

где  $\dot{\varepsilon}_a$  - абсолютная комплексная диэлектрическая проницаемость;  $\dot{\mu}_a$  - абсолютная комплексная магнитная проницаемость;  $\omega$  - циклическая частота.

Пусть задано евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ . Для постановки задач электродинамики необходимо сформулировать граничные условия, связывающие комплексные амплитуды электромагнитного поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  по обе стороны поверхности **G**, разделяющей область  $D_j$  с комплексными характеристиками среды  $\varepsilon_{aj}$ ,  $\mu_{aj}$ , где j = 1, 2.



Рис. 1 - Геометрия задачи

Для описания векторов электромагнитного поля  $\dot{\vec{E}}$ ,  $\dot{\vec{H}}$ , представим вектора как сумму тангенциальной (касательной) и нормальной (перпендикулярной) составляющей

$$\begin{cases} \vec{E}_n = \dot{E}_n \vec{n} + \dot{E}_\tau \vec{\tau}, \\ \dot{\vec{H}}_\tau = \dot{H}_n \vec{n} + \dot{H}_\tau \vec{\tau}. \end{cases}$$
(2)

Получим граничные условия для тангенциальных составляющих комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля:

$$\begin{cases} \left[ \vec{n}, \left( \dot{\vec{H}}_{2} - \dot{\vec{H}}_{1} \right) \right] \Big|_{G} = \dot{\vec{J}} \\ \left[ \left[ \vec{n}, \left( \dot{\vec{E}}_{2} - \dot{\vec{E}}_{1} \right) \right] \right]_{G} = 0. \end{cases}$$
(3)

где  $\vec{j}$  - комплексная поверхностная плотность электрического тока.

Для нормальных составляющих комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля:

$$\left( \begin{pmatrix} \dot{\mu}_{a2} \dot{\vec{H}}_{2}, \vec{n} \end{pmatrix} \Big|_{\boldsymbol{G}} - \begin{pmatrix} \dot{\mu}_{a1} \dot{\vec{H}}_{1}, \vec{n} \end{pmatrix} \Big|_{\boldsymbol{G}} = 0,$$

$$\left( \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{a2} \dot{\vec{E}}_{2}, \vec{n} \end{pmatrix} \Big|_{\boldsymbol{G}} - \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{a1} \dot{\vec{E}}_{1}, \vec{n} \end{pmatrix} \Big|_{\boldsymbol{G}} = \dot{\sigma}.$$

$$(4)$$

где  $\dot{\sigma}$  - комплексная поверхностная плотность электрических зарядов;

 $\vec{n}$  - единичная нормаль к поверхности **G** направленная в область  $D_2$ .

**Теорема 1.** Если на поверхности раздела двух сред **G** заданы граничные условия (3) и (4), связывающие комплексные амплитуды электромагнитного поля  $\dot{\vec{E}}$ ,  $\dot{\vec{H}}$ , тогда  $\dot{\vec{j}}$  и  $\dot{\sigma}$  - связаны соотношением:

$$i\omega\dot{\sigma} = \left(\dot{\vec{J}}_{2}^{\text{CT}}, \vec{n}\right)\big|_{G} - \left(\dot{\vec{J}}_{1}^{\text{CT}}, \vec{n}\right)\big|_{G} - div_{\tau}\dot{\vec{j}}$$
(5)

Доказательство: умножим второе уравнение системы (3) на іω, получим

$$i\omega\dot{\sigma} = \left(i\omega\dot{\varepsilon}_{a2}\dot{\vec{E}}_{2},\vec{n}\right)\Big|_{\boldsymbol{G}} - \left(i\omega\dot{\varepsilon}_{1}\dot{\vec{E}}_{a1},\vec{n}\right)\Big|_{\boldsymbol{G}}$$
(6)

Выразим из первого уравнения системы (1) величину  $i\omega\dot{\varepsilon}_a \vec{E}$  для областей  $D_1$  и  $D_2$ 

$$\begin{cases} i\omega\dot{\varepsilon}_{a1}\vec{\vec{E}}_{1} = \vec{j}_{1}^{\text{CT}} - rot\dot{\vec{H}}_{1} \\ i\omega\dot{\varepsilon}_{a2}\vec{\vec{E}}_{2} = \vec{j}_{2}^{\text{CT}} - rot\dot{\vec{H}}_{2} \end{cases}$$
(7)

Подставим полученные значения (7) в (6)

$$\begin{split} i\omega\dot{\sigma} &= \left( \left( \vec{J}_{2}^{\text{CT}} - rot\dot{\vec{H}}_{2} \right), \vec{n} \right) \Big|_{G} - \left( \left( \vec{J}_{1}^{\text{CT}} - rot\dot{\vec{H}}_{1} \right), \vec{n} \right) \Big|_{G} = \\ &= \left( \dot{J}_{2}^{\text{CT}}, \vec{n} \right) \Big|_{G} - \left( rot\dot{\vec{H}}_{2}, \vec{n} \right) \Big|_{G} - \left( \vec{J}_{1}^{\text{CT}}, \vec{n} \right) \Big|_{G} + \left( rot\dot{\vec{H}}_{1}, \vec{n} \right) \Big|_{G} = \\ &= \left( \dot{J}_{2}^{\text{CT}}, \vec{n} \right) \Big|_{G} - \left( \vec{J}_{1}^{\text{CT}}, \vec{n} \right) \Big|_{G} - \left( \left( rot\dot{\vec{H}}_{2}, \vec{n} \right) \Big|_{G} - \left( rot\dot{\vec{H}}_{1}, \vec{n} \right) \Big|_{G} \right) = \\ &= \left( \vec{J}_{2}^{\text{CT}}, \vec{n} \right) \Big|_{G} - \left( \vec{J}_{1}^{\text{CT}}, \vec{n} \right) \Big|_{G} - \left[ \vec{n}, \left( \dot{\vec{H}}_{2} - \dot{\vec{H}}_{1} \right) \right] \Big|_{G} = \\ &= \left( \vec{J}_{2}^{\text{CT}}, \vec{n} \right) \Big|_{G} - \left( \vec{J}_{1}^{\text{CT}}, \vec{n} \right) \Big|_{G} - div_{\tau} \vec{j} \end{split}$$
(8)

## Граничные условия в нестационарной электродинамике

Пусть задано евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ . Рассмотрим область  $D_1$  и  $D_2$ , в которых заданы сторонние плотности токов  $\mathbf{j}^{cr}$ , заполненные средами достаточно общей природы, которые разделены поверхностью **G**. Пусть на поверхности **G** задана  $\dot{\sigma}$ . Пусть в заданных средах распространяются нестационарные поля  $\mathbf{\vec{E}}, \mathbf{\vec{H}}$ , которые описываются системой уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} rot \vec{H} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{J}^{CT}, \\ rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ div \vec{D} = \rho + \rho^{CT}, \\ div \vec{B} = 0 \end{cases}$$
(9)

Запишем граничные условия для тангенциальной и нормальной компоненты, но уже для нестационарных полей.

Для тангенциальных составляющих векторов  $\dot{\vec{E}}$ ,  $\dot{\vec{H}}$  граничные условия будут выглядеть так же, как и для комплексных

$$\begin{cases} \left[ \vec{n}, \left( \vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right) \right] \right|_{G} = \vec{J} \\ \left[ \left[ \vec{n}, \left( \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \right] \right]_{G} = 0.' \end{cases}$$
(10)

Для нормальных компонент составляющих векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  граничные условия можно записать

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \left( \vec{\boldsymbol{D}}_{2}, \vec{\boldsymbol{n}} \right) \right|_{\boldsymbol{G}} - \left( \vec{\boldsymbol{D}}_{1}, \vec{\boldsymbol{n}} \right) \right|_{\boldsymbol{G}} + \left( \vec{\boldsymbol{j}}_{2}, \vec{\boldsymbol{n}} \right) |_{\boldsymbol{G}} - \left( \vec{\boldsymbol{j}}_{1}, \vec{\boldsymbol{n}} \right) |_{\boldsymbol{G}} \right) \\ \left( \vec{\boldsymbol{B}}_{2}, \vec{\boldsymbol{n}} \right) |_{\boldsymbol{G}} - \left( \vec{\boldsymbol{B}}_{1}, \vec{\boldsymbol{n}} \right) |_{\boldsymbol{G}} = 0 \end{cases}$$
(11)

Проинтегрируем уравнение (11) по времени *t* на отрезке (0,*t*) и получим граничное условие для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля:

$$\begin{cases} \sigma = \left(\vec{\boldsymbol{D}}_{2}, \vec{\boldsymbol{n}}\right)\big|_{\boldsymbol{G}} - \left(\vec{\boldsymbol{D}}_{1}, \vec{\boldsymbol{n}}\right)\big|_{\boldsymbol{G}} + \int_{0}^{t} (\vec{\boldsymbol{j}}_{2}, \vec{\boldsymbol{n}})\big|_{\boldsymbol{G}} dt - \int_{0}^{t} (\vec{\boldsymbol{j}}_{1}, \vec{\boldsymbol{n}})\big|_{\boldsymbol{G}} dt + \sigma_{0} \\ \left(\vec{\boldsymbol{B}}_{2}, \vec{\boldsymbol{n}}\right)\big|_{\boldsymbol{G}} - \left(\vec{\boldsymbol{B}}_{1}, \vec{\boldsymbol{n}}\right)\big|_{\boldsymbol{G}} = 0 \end{cases}$$
(12)

**Теорема 2.** Если на поверхности раздела двух сред **G** заданы граничные условия (10) и (11), связывающие амплитуды электромагнитного поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , тогда  $\vec{j}$  и  $\sigma$  - связаны соотношением:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \left(\vec{J}_{2}^{CT}, \vec{n}\right)\big|_{G} - \left(\vec{J}_{1}^{CT}, \vec{n}\right)\big|_{G} - div_{\tau}\vec{J}$$
(13)

## Редукция задачи о плоской волне в неоднородной среде

Рассмотрим евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ , в котором находится слой неоднородной среды. Пусть слой неоднородный слой занимает часть пространства  $L_0 < x < L$ . Плоская волна с единичной амплитудой, которую можно записать по формуле:

$$u_0 = e^{-ik(x-L)} \tag{14}$$

где  $u_0 \in \mathbb{C}^2$ 

Падающая волна падает на слой материала из области x > L.





Волновое поле в слое неоднородного материала описывается уравнением Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x) + k^2(x)u(x) = 0 \tag{15}$$

где

$$k^{2}(x) = k^{2} \left( 1 + \varepsilon(x) \right) \tag{16}$$

Функция  $\varepsilon(x)$  описывает неоднородность среды. Вне слоя будем считать, что волновое число k(x) = k, т.е. будем считать что

$$\varepsilon(x) = 0 \tag{17}$$

внутри слоя предполагаем, что

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\gamma(x) \tag{18}$$

где  $\varepsilon_1(x)$  - действительная часть, ответственная за процессы рассеивания, а мнимая часть  $\gamma(x)$  описывает поглощение в среде.

В области x > L волновое поле имеет структуру

$$u(x) = e^{-ik(x-L)} + \dot{R}_L e^{ik(x-L)}$$
(19)

где  $\dot{R}_L$  - комплексный коэффициент отражения.

В области  $x < L_0$  волновое поле имеет структуру

$$u(x) = \dot{T}_L e^{ik(L_0 - x)}$$
(20)

где  $\dot{T}_L$  - комплексный коэффициент прохождения.

Краевыми условиями для уравнения (1) являются условия непрерывности функции и ее производной на границе слоя, которые можно задать в виде

$$u(L) + \frac{i}{k} \frac{\partial u(x)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 2$$
(21)

$$u(L_0) - \frac{i}{k} \frac{\partial u(x)}{\partial x} \bigg|_{x=L_0} = 0$$

Таким образом, волновое поле в слое неоднородной среды описывается уравнением (14) с краевыми условиями (21). Отметим, что с этом случае функция  $\varepsilon(x)$  разрывна на границах задачей и мы будем называть краевую задачу (14), (21) краевой задачей с несогласованными границами. Для таких задач рассеяние волны происходит не только на неоднородностях среды, но и на скачках функции  $\varepsilon(x)$ на границах слоя.

Если параметры среды  $\varepsilon_1(x)$  заданы статистически, то решение стохастической задачи (14), (21) состоит из нахождения статистических характеристик величин:

$$\dot{R}_L = u(L) - 1, \quad \dot{T}_L = u(L_0)$$
 (22)

связанных со значением поля на границах слоя, и интенсивности волнового поля

$$I(x) = |u(x)|^2$$
(23)

Если затухание в среде отсутствует, т.е.  $\gamma(x) = 0$ , то сохранение плотности потока энергии выражается равенством

$$\left|\dot{R}_{L}\right|^{2} + \left|\dot{T}_{L}\right|^{2} = 1 \tag{24}$$

Хорошо известно, что уравнение второго порядка (14) можно расщепить на два уравнения первого порядка, вводя новую функцию:

$$\psi(x) = \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial x} \ln u(x)$$
(25)

Тогда уравнение (1) можно переписать

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = ik[\psi^2(x) - \varepsilon(x) - 1], \quad \psi(L_0) = 1.$$
(26)

Из краевого условия на границе x = L, следует, что

$$u(L) = \frac{2}{1+\psi(L)}$$
 (27)

и, следовательно, коэффициент отражения определяется по решению уравнения (26) на основе равенства

$$\dot{R}_{L} = \frac{1 - \psi(L)}{1 + \psi(L)}$$
(28)

Введем новую функцию  $\dot{R}(x) \in \mathbb{C}^2, \psi(x) \in \mathbb{C}^2$ 

$$\dot{R}(x) = \frac{1 - \psi(x)}{1 + \psi(x)}, \quad \psi(x) = \frac{1 - \dot{R}(x)}{1 + \dot{R}(x)}$$
(29)

тогда уравнение (26) можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\dot{R}(x) = 2ik\dot{R}(x) + \frac{i}{k}\varepsilon(x)\left(1 + \dot{R}(x)\right)^2, \quad \dot{R}(L_0) = 0 \tag{30}$$

решение уравнения (30) при x = L определяет коэффициент отражения, т.е.

$$\dot{R}_L = \dot{R}(L) \tag{31}$$

Волновое поле u(x) внутри среды выражается при этом через функцию  $\dot{R}(x)$  с помощью равенства

$$u(x) = \left(1 + \dot{R}(L)\right) exp\left[ik \int_{x}^{L} \frac{1 - \dot{R}(\xi)}{1 + \dot{R}(\xi)} d\xi\right]$$
(32)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x) + k^2(x)u(x) = 0 \tag{33}$$

$$u(L) + \frac{i}{k} \frac{\partial u(x)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 2$$
(34)

$$u(L_0) - \frac{i}{k} \frac{\partial u(x)}{\partial x} \Big|_{x=L_0} = 0$$
(35)

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. Решение задачи (33) – (35) выражается через решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\dot{R}(x) = 2ik\dot{R}(x) + \frac{i}{k}\varepsilon(x)\left(1 + \dot{R}(x)\right)^2, \quad \dot{R}(L_0) = 0 \tag{36}$$

по формуле (32).

#### Вычислительные эксперименты

Для подтверждения правильности предложенной математической модели, выполним численные эксперименты при различных параметрах неоднородной среды. Выполним измерения электродинамических параметром образца материала, а затем используя предложенную математическую модель, выполним расчет коэффициента отражения.

Измерение диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь проводилось с помощью программно-аппаратного комплекса SPEAG, который позволяет использовать векторные анализаторы цепей (ВАЦ) для измерения электрических параметров материалов.

С помощью электронномикроскопического исследования были получены фотографии срезов полученных образцов, приведённых на Рис.3.



Рис. 3 - Срезы полученных образцов материала 1 - образец №1; 2 - образец №2; 3 - образец №3; 4 - образец №4; 5 - образец №5.

На Рис.3 для всех 5 образцов на срезе видна чёткая структура материала композитов. На поперечном срезе образца №1, который представляет собой чистый полиуретан, видно, что структура материала однородная, в самом материале отсутствуют посторонние механические примеси и пузырьки воздуха. На поперечном срезе образцов № 3 - № 5 присутствуют в большом

количестве зерна корунда, заполняя максимально доступное им пространство, а полиуретановая связка полностью заполняет пространство между зернами. Это улучшает защитные свойства композита при проникновении сквозь него твердых объектов.

Рентгенофлуоресцентный анализ подтвердил высокую чистоту полиуретана и корунда, использованного в образцах № 2 - № 4 (менее 0,5 масс. % примесей).

В образце № 5 зерна электрокорунда черного цвета и содержат небольшую долю примесь, которые придают корунду чёрный цвет. Доля и содержание примесей по массе в 5 образце представлены в таблице №2

Таблица №1 - Процентное содержание примеси по массе в образце № 5

Элемент	Ca	Ti	Mg	Fe	Cr
Массовая	6.2	3.5	0.8	0.5	0.2
доля, %					

На основе предложенной методике, были выполнены измерения диэлектрической и магнитной проницаемости, получены их зависимости от от частоты.



Рис. 4 - Линия измерения и калибровочные меры

При измерении S параметров коаксиальной линии передачи с исследуемым материалом в качестве диэлектрика, использовалась двухпортовая TRL калибровка. В качестве калибровочных мер использовались: Calibration Kit RPC-N, 50  $\Omega$ , LRL Version производства Rosenberger, дополнительная воздушная линия (type N Beadless Air Line) 2553T15 производства Maury и измерительные адаптеры.

На Рис.5 - Рис.7 приведены зависимости диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь для исследуемых образцов материалов.





Рис. 5 - Зависимость реальной части диэлектрической проницаемости образцов материала от частоты

Рис. 6 - Зависимость мнимой части диэлектрической проницаемости образцов материала от частоты



Рис. 7 - Зависимость тангенса угла диэлектрических потерь образцов материала от частоты

Для чистого гексаферрита бария, зависимости реальной и мнимой части диэлектрической и магнитной проницаемость качественно и количественно совпадают с зависимостями, приведёнными в работах [13-15].

Наибольшее значение по массе в примеси составляют Са 6.5 % и Ті 3.5%.

На основе измеренных значений реальной и мнимой части диэлектрической и магнитной проницаемости был выполнен расчет коэффициент отражения для электромагнитных волн на основе предложенной математической модели от неоднородного слоя материала.

На рисунках 8 – 12 приведены зависимости коэффициента отражения от частоты при различной толщине слоя.







Рис. 9 - Зависимость коэффициента отражения для 2 образца материала от частоты









Рис. 12 - Зависимость коэффициента отражения для 5 образца материала от частоты

Внесение примеси в виде зёрен корунда с диаметром частиц менее 100 нм (образец №2), приводит только к увеличению диэлектрической проницаемости

равной  $\varepsilon_2$ =3.75 в полосе частот для полученного материала, по сравнению с чистым полиуретаном  $\varepsilon_1$  =2.5.

Использование очищенного корунда в виде зёрен с диаметром частиц 1мм, приводит не только к увеличению защитных свойств материала, но и увеличению диэлектрической проницаемости по частоте  $\varepsilon_{3,4} = 4.25$ . при этом для полученных образцов №1 и №2 характерна линейная зависимость диэлектрической проницаемости от частоты, для образцов №3 - №5 с увеличенной долей концентрации корунда, полученный зависимости диэлектрической проницаемости от частоты зависимости диэлектрической проницаемости от частоты.

Использование неочищенного корунда с примесями в виде зёрен с диметром равным 1 мм, приводит к увеличению диэлектрической проницаемости в полосе частот и нелинейной зависимости от частоты. Существенное увеличение тангенса угла диэлектрических потерь модно объяснить диспергирующими свойствами полученного материла. Основные диэлектрические потери вносят примеси Са и Ті, которые присутствуют в материале образца №5.

За счёт высоких потерь в исследуемой полосе частот, применение полученного материала, возможно в качестве радиопоглощающего материала в Х - диапазоне. За счёт высокой мнимой составляющей диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь, электромагнитная волна будет существенно затухать при распространении в материале образца №5.

За счёт потерь в материале при изменении толщины образцов материала достигается значение коэффициента до – 16 дБ.

Для сравнения полученных теоретических расчетов и экспериментальных данных, было выполнено измерение в безэховой камере для неоднородного слоя материала.

Измерение коэффициента отражения производилось в безэховой камере Rainford EMC3 с использованием векторного анализатора электрических цепей

22

Rohde&Schwarz ZVA50. Исследуемые образцы располагались на расстоянии 1,5 м. от измерительной антенны Rohde&Schwarz HF907. Измерения проводились при вертикальной поляризации излучаемого электромагнитного поля.

Для устранения влияния паразитных отражений от элементов фидерного тракта и объектов внутри камеры на результаты измерений, использовалась штатная функция временной фильтрации (TimeGate) векторного анализатора цепей Rohde&Schwarz ZVA50.

При измерении коэффициента отражения, исследуемый образец укладывался на металлической пластине.



Рис. 13 - Зависимость коэффициента отражения от частоты для 4 образца (толщина слоя 20 мм)

Из рис. 13 видно, что экспериментальные данные имеют хорошее количественное и качественное совпадение с расчетными значениями, полученными с помощью разработанной математической модели.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты ВКР заключаются в следующем:

1. Сформулированы и доказаны теоремы о граничных условиях для стационарных и нестационарных электромагнитных полей.

2. Сформулирована и доказана теорема редукции задачи для случая падения плоской волны на слой неоднородного материала.

3. Проведены вычислительные эксперименты для различных параметров неоднородного слоя. Полученные теоретические результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными измерениями.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Korolev, K.A., Chen, S., Barua, R., Afsar, M.N., Chen, Y., Harris, V.G. Millimeter wave transmittance/absorption measurements on micro and nano hexaferrites (2017) AIP Advances, 7 (5), art. no. 056101.

2. Trukhanov, A.V., Trukhanov, S.V., Panina, L.V., Kostishyn, V.G., Kazakevich, I.S., Trukhanov, A.V., Trukhanova, E.L., Natarov, V.O., Turchenko, V.A., Salem, M.M., Balagurov, A.M. Evolution of structure and magnetic properties for BaFe11.9Al0.1O19 hexaferrite in a wide temperature range (2017) Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 426, pp. 487-496.

3. Hosseinkhan Nejad, E., Farzin, Y.A., Heydari, M.A. Enhancement of soft magnetic properties of La–Zn co-doped nanocrystalline Ni2Y hexaferrite (2017) Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 423, pp. 226-231.

4. Ghzaiel, T.B., Dhaoui, W., Schoenstein, F., Talbot, P., Mazaleyrat, F. Substitution effect of Me = Al, Bi, Cr and Mn to the microwave properties of polyaniline/BaMeFe11O19 for absorbing electromagnetic waves (2017) Journal of Alloys and Compounds, 692, pp. 774-786.

5. Lee, S.-E., Kim, H.-J., Lee, J.-H., Oh, K.-S., Hahn, H.T., Choi, J.-W. Magnetodielectric hexaferrite flake/polymer substrate for implantable antenna with an enhanced insensitivity to implant position (2017) Materials Letters, 187, pp. 94-97.

6. Pignard, S., Vincent, H., Flavin, E., Boust, F. Magnetic and electromagnetic properties of RuZn and RuCo substituted BaFe12O19 (2003) Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 260 (3), pp. 437-446.

7. D.S. Klygach, M.G. Vakhitov, D.A. Vinnik, A.V. Bezborodov, S.A. Gudkova, V.E. Zhivulin, D.A. Zherebtsov, C.P. SakthiDharan, S.V. Trukhanov, A.V. Trukhanov, A.Yu. Starikov, Measurement of permittivity and permeability of barium hexaferrite, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Volume 465, 2018, Pages 290-294.

8. Vinnik, D.A., Klygach, D.S., Zhivulin, V.E., Malkin, A.I., Vakhitov, M.G., Gudkova, S.A., Galimov, D.M., Zherebtsov, D.A., Trofimov, E.A., Knyazev, N.S., Atuchin, V.V., Trukhanov, S.V., Trukhanov, A.V. Electromagnetic properties of BaFe12O19:Ti at centimeter wavelengths (2018) Journal of Alloys and Compounds, 755, pp. 177-183.

9. Klygach, D.S., Vakhitov, M.G., Zherebtsov, D.A., Kudryavtsev, O.A., Knyazev, N.S., Malkin, A.I.Investigation of electrical parameters of corundum-based material in X-band (2017) Journal of Materials Science: Materials in Electronics, 28 (18), pp. 13621-13625.

10. Vakhitov, M.G., Klygach, D.S. The reflection coefficient of the corundum-based material in X band (2017) 2017 32nd General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science, URSI GASS 2017, 2017-January, pp. 1-4.

11. Vakhitov, M.G., Klygach, D.S. Reflection coefficient of the composites consisting of polyurethane matrix in 12-18 GHz (2018) 2017 IEEE MTT-S International Microwave Workshop Series on Advanced Materials and Processes for RF and THz Applications, IMWS-AMP 2017, 2018-January, pp. 1-3.

12. Vakhitov, M.G., Klygach, D.S. Experimental studies of reflection coefficient for corundum-based material (2017) Proceedings of the 2017 19th International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications, ICEAA 2017, статья № 8065521, pp. 1335-1337.

13. Alam, R.S., Moradi, M., Rostami, M., Nikmanesh, H., Moayedi, R., Bai, Y. Structural, magnetic and microwave absorption properties of doped Ba-hexaferrite nanoparticles synthesized by co-precipitation method (2015) Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 381, pp. 1-9.

14. Nikmanesh, H., Moradi, M., Bordbar, G.H., Shams Alam, R. Effect of multi dopant barium hexaferrite nanoparticles on the structural, magnetic, and X-Ku bands microwave absorption properties (2017) Journal of Alloys and Compounds, 708, pp. 99-107.

15. Tehrani, M.K., Ghasemi, A., Moradi, M., Alam, R.S. Wideband electromagnetic wave absorber using doped barium hexaferrite in Ku-band (2011) Journal of Alloys and Compounds, 509 (33), pp. 8398-8400.