Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра уравнений математической физики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры математического и
компьютерного моделирования ЮУрГУ
__________ /М.А. Сагадеева/

«____» ____________ 2018 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой уравнений
математической физики,
доктор физ.-мат. наук, профессор
__________ /Г.А. Свиридюк/

«____» ____________ 2018 г.

Численное решение задачи на собственные числа возмущенного дискретного оператора, заданного на n-мерном параллелепипеде

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
01.04.01.2016.175.00.МД

Руководитель, кандидат физ.-мат. наук,
доцент
__________________ /Г.А. Закирова/
«____» ____________ 2018 г.

Автор, магистрант группы ЕТ-221
____________________ /Л.М. Фаткуллина/
«____» ____________ 2018 г.

Нормоконтролер, кандидат физ.-мат.
наук, доцент
____________________ /Д.Е. Шафранов/
«____» ____________ 2018 г.

Челябинск
2018

УДК 517.9

Фаткуллина Л.М.

Численное решение задачи на собственные числа возмущенного дискретного оператора, заданного на n-мерном параллелепипеде / Л. М. Фаткуллина. – Челябинск, 2018. – 33 с.

Выпускная квалификационная работа посвящена задаче на собственные числа для дискретного полуограниченного оператора на n-мерном параллелепипеде; на основе метода Галеркина разработан алгоритм и реализована программа для нахождения собственных чисел рассматриваемого оператора. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Список литературы: 24 названия; 2 рисунка; 4 таблицы.

Содержание

Введение

В настоящее время большое значение приобретает вопрос о нахождении собственных чисел и собственных векторов для различных операторов. Одна из важных задач общей спектральной теории — изучение спектральных свойств дифференциальных операторов с частными производными. Своим развитием эта область обязана задачам химии, физики, биологии и другим естественным наукам. Так, при изучении трехмерных упругих тел или при рассмотрении колебаний мембраны мы приходим к многомерным задачам на собственные значения [17].
В гидродинамике, теории оболочек и других разделах механики возникают схожие задачи [3]. Богатым источником задач спектральной является теории квантовая механика [1], [13], [14]. Для математического изложения квантовой механики в спектральной теории необходимым было построение самосопряженных неограниченных операторов и новых разделов линейных операторов. Все большее количество приложений, а так же спектральные задачи, решение которых невозможно найти аналитически, делает все более актуальным разработку новых численных методов нахождения собственных характеристик для широкого класса абстрактных операторов [2], [6], [11], [12], [16], [18], [19], [22].

В начале тридцатых годов прошлого столетия А.Н. Крыловым был представлен метод нахождения собственных значений и собственных векторов матриц. Для определения собственных векторов матрицы необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов характеристического полинома. В методе Крылова желательно использовать метод Гаусса с выбором в столбце. Ошибки округления метода Гаусса могут замаскировать линейную зависимость выбора, либо стать соизмеримым с ведущими элементами метода Гаусса. В обоих случаях вектор может иметь мало общего с коэффициентами характеристического полинома. В этом случае желательно взять другой вектор или произвести вычисления с повышенной точностью. Похожим на метод А.Н. Крылова является метод, предложенный П.Э. Самуэльсоном. В методе П.Э. Самуэльсона для вычисления коэффициентов характеристического полинома нужно составить прямоугольную матрицу. Ещё один метод нахождения собственных векторов и собственных значений в конце тридцатых годов прошлого столетия был предложен А.М. Данилевским. Среди многих методов построения собственного многочлена матрицы этот метод является экономичным. В основе метода лежит упрощение векового определителя к нормальному виду Фробениуса. Несмотря на очевидные плюсы: метод удобен для нахождения собственных векторов практически любой матрицы [18], метод имеет и некоторые недостатки. Одним из минусов метода Данилевского является накопление погрешности со скоростью геометрической прогрессии. Кроме того, приходится решать достаточно сложное уравнение порядка n (если решать с помощью приближенных методов, то снова получаем рост погрешности); в программном варианте используются достаточно большие объемы оперативной памяти, к примеру, приходится хранить до 4 матриц порядка n^2. После выхода в свет работ Э.Ч. Титчмарша и Г. Вейля все большее число исследований было связано с распределением собственных значений дифференциальных многомерных операторов с дискретным спектром [23], [24].

Актуальность. В 1990-х гг. В.А. Садовничим и В.В. Дубровским был разработан резольвентный метод . Основная идея резольвентного метода заключается в изучении резольвенты рассматриваемого оператора с последующим использованием тауберовых теорем. С этим методом связаны наибольшие достижения последних лет в области вычисления спектральных характеристик. Так, в работе И.И. Кинзиной [8] метод регуляризованных следов использован для нахождения собственных чисел возмущенного дискретного оператора, когда собственные числа невозмущенного оператора имеют произвольную кратность и при этом повышена эффективность применения метода при больших порядковых номерах собственных чисел. В работе О.А. Торшиной [15] метод применен к изучению существенного спектра оператора Лапласа- Бохнера. Изучается связь между характеристиками области и спектральными свойствами оператора, вычисляются собственные числа оператора. В работе Р.З. Даутова, А.Д. Ляшко, С.И. Соловьева [2] рассматриваются задачи на собственные значения вида $a(\lambda, u, v) = \lambda b(\lambda, u, v)$ с симметричными билинейными формами, зависящими специальным образом от спектрального параметра. Изучается вопрос существования дискретного спектра и исследуется сходимость метода Бубнова-Галеркина для указанного класса задач. В работе С.И. Кадченко, С.Н. Какушкина [6] предложен вычислительно эффективный алгоритм, позволяющий обойти трудность использования метода регуляризованных следов без непосредственного решения систем нелинейных уравнений связана с выражением значений сосбственных функций возмущенного оператора на ее сопряженную. Найденные значения собственных функций хорошо согласуются с результатами, полученными известными методами А.Н. Крылова и А.М. Данилевского. В работе Е.В. Кириллова и Г.А. Закировой [21] рассматривается прямая спектральная задача для оператора с ядерной резольвентой возмущенного ограниченным, имеющего кратный спектр. В результате применения резольвентного метода к относительному спектру возмущенного оператора получены формулы для относительных собственных числа возмущенного оператора с ядерной резольвентой. Таким образом, поставленная задача носит актуальный характер.

Постановка задачи: Пусть требуется найти относительные собственные числа возмущенного оператора $T+P$, действующего в n—мерном параллелепипеде.

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор $T+P$, заданный в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Его собственные значения ν определяются при нахождении нетривиального решения уравнения

$$(T+P)u = \nu L u \tag{1}$$

которое удовлетворяет некоторым однородным краевым условиям.

L — линейный непрерывно обратимый.

Цель работы: решение задачи на L — собственных чисел для возмущенного дискретного полуограниченного оператора. В соответствии с поставленной целью выделены следующие **задачи:** доказать сходимость метода Галеркина в применении к рассматриваемой задаче; решить задачу нахождения относительных собственных чисел для дискретного возмущенного полуограниченного оператора на n—мерном параллелепипеде; на основе метода Галеркина разработать алгоритм и реализовать программу для нахождения относительных собственных чисел дискретного возмущенного оператора; привести вычислительные эксперименты, иллюстрирующие работу программы.

Структура выпускной квалификационной работы: в 1-ом параграфе приведены основные определения и утверждения; во 2-ом постановка задачи для абстрактного дискретного полуограниченного оператора на $n-$ мерном параллелепипеде; в 3-ем параграфе описан метод Галеркина; в 4-ом параграфе доказана сходимость метода Галеркина; в 5-ом параграфе приведена и описана блок-схема; в 6-ом параграфе дано описание программы; в 7-ом параграфе проводится вычислительный эксперимент.

1. Предварительные сведения

Определение 1.1. *(см. [9]) Линейным пространством* $V = \{a, b, c, \dots\}$ *называется множество, относительно элементов которого определены операции сложения и умножения на число, причем результаты этих операций принадлежат этому же множеству (говорят, что* V *замкнуто относительно операций сложения и умножения на число):*

$$a + b \in V;$$

$$\lambda a \in V, \ \forall \lambda \in R.$$

Определение 1.2. *(см. [10]) Линейное пространство все функций* φ*, содержащиеся в области* Ω*, суммируемые на замкнутом ограниченном любом множестве, суммируемых в степени* $p \geq 1$*, имеющие в области* Ω *все обобщенные производные порядка* l*, назовем пространством Соболева* W_p^l*:*

$$\frac{\partial^l \varphi}{\partial^(\alpha_1) x_1 \dots \partial^(\alpha_n) x_n} \in L_p(\Omega), \ \sum \alpha_\imath = l. \tag{1}$$

Определение 1.3. *(см. [4]) Гильбертово пространство — множество* H *элементов* f*,* g*,* h*,* $\dots$*, обладающее следующими свойствами:*

1) в H *определены действия умножения их на число (комплексное или действительное), так как* H *— линейное пространство;*

2) в H *введено скалярное произведение, то есть числовая функция* (f, g) *от пары аргументов* f *и* g*, удовлетворяющая аксиомам:*

а) $(af, g) = a(f, g)$ *для любого числа* a*;*

б) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$*;*

в) $(f, g) = \overline{(g, f)}$*;*

г) $(f, f) > 0$ *при* $f \neq 0$*,* $(f, f) = 0$ *при* $f = 0$*;*

3) H *является полным метрическим пространством относительно расстояния* $\rho(f, g) = \|f - g\|$*, норма находится из соотношения* $\|h\| = (h, h)^{1/2}$*, для любого элемента* $h \in H$*.*

Определение 1.4. *(см. [7]) Решения уравнения* $Af = \lambda_1 f$*,* λ_1 *— фиксировано, образуют подпространство* H_{λ_1}*. Подпространство называется собственным* *подпространством, отвечающим собственному значению λ_1, а размерность называется кратностью собственного значения λ_1.*

Определение 1.5. *(см. [4]) Пусть $L^p(\Omega)$ — пространства Лебега, пространства измеримых функций, таких, что их p-я степень интегрируема, где $p \geq 1$.*

Определение 1.6. *(см. [4]) Пусть $W_p^l(\Omega)$ — пространства Соболева. Функциональное пространство состоит из пространства функций Лебега (L^p), имеет обобщенные производные заданного порядка из L^p. Пространства Соболева являются банаховыми пространствами при $1 \leq p \leq \infty$, а гильбертовым пространством при $p = 2$. Пусть H^k — обозначение гильбертовых пространств Соболева.*

Определение 1.7. *(см. [4]) Пусть $C^k[a;b]$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых на $[a;b]$ функций с нормой*

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a;b]} \mid x^{(i)}(t) \mid . \tag{2}$$

Определение 1.8. *(см. [4]) Сепарабельное пространство — гильбертово пространство, в котором существует множество, всюду плотное счетное, множество такое, что замыкание по метрике H совпадает со всем пространством H.*

Определение 1.9. *(см. [7]) Множество $M \subset L$ называется компактным, если из любой его последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Множество называется предкомпактным, если его замыкание компакт.*

Определение 1.10. *(см. [10]) Оператор A ($V \to P$ (P — поле)) называется линейным, если для любого комплексного числа λ и любых элементов x_1, x_2 пространства V выполняются условия:*

1) $A\lambda(x_1 + x_2) = \lambda A(x_1) + \lambda A(x_2)$ (свойство аддитивности оператора);

2) $A\lambda x = \lambda Ax$ (свойство однородности оператора).

Определение 1.11. *(см. [7]) Пусть λ — коэффициент пропорциональности (скаляр из поля P), который называется собственным значением оператора A,* *если ненулевой вектор $\vec{x} \in V$, который под действием A переходит в пропорциональный вектор*

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \tag{3}$$

называется собственным вектором оператора A.

Определение 1.12. *(см. [9]) Отображение A линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2 над полем P называется линейным оператором (обозначение $A : L_1 \to L_2$), если выполнены следующие аксиомы:*

1) $A(x + y) = A(x) + A(y)$ для любых x и y из L_1;

2) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$ для любого $x \in L_1$ и любого $\alpha \in P$.

Если $L_1 = L_2 = L$, то A называется линейным оператором в пространстве L. Множество D_A всех тех $x \in L_1$, для которых отображение A определено, называется областью определения оператора A.

Определение 1.13. *(см. [4]) Пусть H — гильбертово пространство. Для всех $f, g \in H$, выполнено*

$$(Af, g) = (f, A^*g), \tag{4}$$

тогда оператор A^* называется сопряженным к ограниченному, линейному оператору A.

Определение 1.14. *(см. [7]) Если линейный ограниченный оператор совпадает со своим сопряженным, то он называется (самосопряженным)*

Определение 1.15. *(см. [7]) Оператор A ограничен, если существует такая постоянная C, что для всякого $f \in L_1$ выполняется неравентство*

$$\|Af\| \leq C\|f\|. \tag{5}$$

Определение 1.16. *(см.[7]) Наименьшее из чисел C, удовлетворяющих этому неравенству, называется нормой оператора A и обозначается $\|A\|$.*

Определение 1.17. *(см. [4]) Оператор T называется дискретным, если $R_{\lambda_0} = (T - \lambda_0 E)^{-1}$ является вполне непрерывным оператором в H при существовании некоторого комплексного числа λ_0.*

Оператор T действует в гильбертовом сепарабельном пространстве H.

Определение 1.18. *(см. [4]) Каждый элемент, удовлетворяющий уравнению*

$$Af = \lambda f, \tag{6}$$

где λ — число, $f \neq 0$ называется собственным вектором (собственной функцией) оператора, а λ — собственным значением.

Определение 1.19. *(см. [4]) Спектром оператора A называется множество всех собственных значений оператора A, обозначается $\sigma(A)$.*

Определение 1.20. *(см.[4]) Если подмножество спектра $\sigma(A)$ одновременно замкнуто и открыто в его относительной топологии, то такое подмножество является спектральным множеством.*

Определение 1.21. *(см. [4]) Спектр оператора A — это множество всех значений λ, не являющихся регулярными.*

Пусть A — вполне непрерывный произвольный оператор. Построим оператор $B = AA$.

Последовательность отличных от нуля его собственных значений обозначим через $\{\lambda_k\}$, а ортонормированную последовательность его собственных векторов, отвечающих числам $\{\lambda_k\}$ обозначим $\{f_k\}$.

Тогда получим следующее выражение:

$$\lambda_k = (Af_k, Af_k) = s_k^2. \tag{7}$$

Определение 1.22. *(см. [4]) Числа s_k будем называть s—числами оператора A.*

Определение 1.23. *(см. [4]) Если сходится ряд из оператора A s—чисел, то этот оператор называется ядерным.*

Теорема 1.1. *(см. [11]) Если оператор $T = A_0^{-1}K$ вполне непрерывен в H_0, то процесс Бубнова-Галеркина в задаче об отыскании собственных значений сходится.*

2. Постановка задачи для абстрактного дискретного оператора

Поставим задачу о вычислении относительных собственных чисел оператора, действующего в n—мерном параллелепипеде.

Пусть

$$\Pi = \{x = x_1, x_2, ..., x_N) : 0 \leq x_j \leq a_j, j = 1, ..., N\}, a_j > 0. \tag{1}$$

где $V = \prod\limits_{j=1}^{N} a_j$ — объем параллелепипеда.

Пусть $H = L_2(\Pi)$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, h) = \int \int_{\Pi} f(x, y) g(x, y) dxdy, \tag{2}$$

генерирующим норму $\|h\| = \sqrt{(h, h)}$.

Пусть оператор $T : domT \subset H \to H$. T — дискретный самосопряженный полуограниченный снизу с плотной областью определения. Собственные числа оператора T обозначим через $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} = \sigma^L(T)$. $L \subset L_2$ — линейный непрерывно обратимый.

Пусть P — оператор умножения на вещественную функцию $p \in H$, называемую потенциалом.

$$\mathrm{dom} P = \{u \in H : Pu \in H\}, \|P\| = \frac{\|p\|}{\sqrt{V}}. \tag{3}$$

Рассмотрим оператор $T + P$. Обозначим через $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty} = \sigma^L(T + P)$ — где ν_n занумерованы в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности.

Пусть собственные числа λ_n и возмущение P известны.

Поставим следующую задачу: найти относительные собственные собственные числа возмущенного оператора $T + P$ такие, что

$$\begin{cases} (T + P)u = \mu L u, \\ u|_{\partial \Pi} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

3. Метод Галеркина вычисления собственных чисел возмущенного оператора

Метод Галеркина давно применяется как для решения дифференциальных уравнений с частными производными, так и для формирования основы метода конечных элементов.

Г.И. Петровым метод Галеркина был применен к исследованию задач устойчивости гидродинамических течений было реализовано, при этом было доказана сходимость метода Галеркина для отыскания собственных значений широкого класса уравнений, включая уравнения для консервативных систем, такие, как например уравнения колебаний в вязкой жидкости[16].

Кроме того, метод Галеркина эффективно работает в гидродинамике (в задачах о конвекции, задачи распространения коротких импульсов или визуализации полей, а также при решении задач рассеяния поля на самолете во временной области, распространение импульсов электромагнитных полей и через ноутбук, удар молнии в танк)[12], [19].

Алгоритм метода:

Постановка задачи:

$$\begin{cases} (T+P)u = \mu L u, \\ u|_{\partial \Pi} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Выбор набора базисных функций — это первый шаг в реализации метода Галеркина. Базисные функции должны

1) удовлетворять граничным условиям;

2) в пределе бесконечного количества элементов базиса образовывать полную систему.

В основном применяются ортогональные полиномы Чебышева, Эрмита, Лежандра и другие полиномы, тригонометрические функции.

Условие ортогональности:

$$\begin{cases} \int\limits_a^b \Phi_i(x)\Phi_j(x)dx = 0, i \neq j, \\ \int\limits_a^b \Phi_j^2(x)dx \neq 0, i = j. \end{cases} \tag{2}$$

Из условия минимальности интеграла, если подобрать коэффициенты, условие ортогональности не является обязательным при выборе базисных функций $\int\limits_a^b R^2(x, c_1, c_2, ..., c_n)dx$.

Например, можно выбрать в качестве базисных функций Φ_j линейные комбинаций функций из этой системы, взяв за основу ортогональные на отрезке $[a, b]$, полную систему функций. Были линейно независимы на отрезке $[a, b]$ выбранные функции (этого условия достаточно).

В виде разложения по базису решение представляется:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\Phi_k(x). \tag{3}$$

Затем приближенное решение подставляется в (3), и вычисляется его невязка:

$$L[\sum_{k=1}^{n} a_k\Phi_k(x)] = \sum_{k=1}^{n} a_k((T + P)\Phi_k(x) - \mu L\Phi_k(x)). \tag{4}$$

Далее выдвигается требование ортогональности невязки к базисным функциям, то есть:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(x)(a_k((T + P)\Phi_k(x) - \mu L\Phi_k(x))) = 0.$$

Отсюда получается однородная система уравнений для коэффициентов в разложении, и удается приближенно найти *собственные значения задачи:*

$$
\begin{cases}
a_1 \int\limits_a^b \Phi_1(x)(((T+P)\Phi_1(x) - \mu L\Phi_1(x)))dx + a_2 \int\limits_a^b \Phi_1(x)(((T+P)\Phi_2(x) - \\
-\mu L\Phi_2(x)))dx + a_3 \int\limits_a^b \Phi_1(x)(((T+P)\Phi_3(x) - \mu L\Phi_n(x)))dx + ...+ \\
+a_n \int\limits_a^b \Phi_1(x)(((T+P)\Phi_n(x) - \mu L\Phi_n(x)))dx = 0, \\
a_1 \int\limits_a^b \Phi_2(x)(((T+P)\Phi_1(x) - \mu L\Phi_1(x)))dx + a_2 \int\limits_a^b \Phi_2(x)(((T+P)\Phi_2(x) - \\
-\mu L\Phi_2(x)))dx + a_3 \int\limits_a^b \Phi_2(x)(((T+P)\Phi_3(x) - \mu L\Phi_n(x)))dx + ...+ \\
+a_n \int\limits_a^b \Phi_2(x)(((T+P)\Phi_n(x) - \mu L\Phi_n(x)))dx = 0, \\
a_1 \int\limits_a^b \Phi_3(x)(((T+P)\Phi_1(x) - \mu L\Phi_1(x)))dx + a_2 \int\limits_a^b \Phi_3(x)(((T+P)\Phi_2(x) - \\
-\mu L\Phi_2(x)))dx + a_3 \int\limits_a^b \Phi_3(x)(((T+P)\Phi_3(x) - \mu L\Phi_n(x)))dx + ...+ \\
+a_n \int\limits_a^b \Phi_3(x)(((T+P)\Phi_n(x) - \mu L\Phi_n(x)))dx = 0, \\
... \\
a_1 \int\limits_a^b \Phi_n(x)(((T+P)\Phi_1(x) - \mu L\Phi_1(x)))dx + a_2 \int\limits_a^b \Phi_n(x)(((T+P)\Phi_2(x) - \\
-\mu L\Phi_2(x)))dx + a_3 \int\limits_a^b \Phi_n(x)(((T+P)\Phi_3(x) - \mu L\Phi_n(x)))dx + ...+ \\
+a_n \int\limits_a^b \Phi_n(x)(((T+P)\Phi_n(x) - \mu L\Phi_n(x)))dx = 0.
\end{cases}
$$

По мере увеличения n — членов метода Галеркина, числа членов в приближенном представлении решения, точность выражения собственных значений низшего порядка быстро возрастает, тогда как точность выражения собственных значений высших порядков быстро снижается. Если учесть, что определяющее уравнение является самосопряжённым и положительно определенным, собственные значения, вычисленные по методу Галеркина, всегда будут получаться больше точных собственных значений.

4. Сходимость метода Галеркина

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор $T + P$, заданный в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Его собственные значения ν определяются при нахождении нетривиального решения уравнения

$$(T + P)u = \nu L u \tag{1}$$

которое удовлетворяет некоторым однородным краевым условиям.

Для нахождения собственных значений оператора $T + P$ воспользуемся методом Галеркина. Введем последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных пространств $H_n \subseteq H$, которая полна в H. Пусть ортонормированный базис пространства H_n известен и состоит из функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. При этом функции φ_k должны удовлетворять краевым условия задачи. Следуя методу Галеркина, будем искать приближённое решение спектральной задачи (1) в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(n)\varphi_k. \tag{2}$$

Теорема 4.1. *Пусть $T : domT \subset H \to H$ — дискретный самосопряженный полуограниченный снизу с плотной областью определения. Собственные числа оператора T обозначим через $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} = \sigma^L(T)$. $L \subset L_2$ — линейный непрерывно обратимый.*

Пусть P — оператор умножения на вещественную функцию $p \in H$, называемую потенциалом.

$$\mathrm{dom}P = \{v \in H : Pv \in H\}, \|P\| = \frac{\|p\|}{\sqrt{V}}.$$

Если система координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом H, то метод Галеркина в применении к задаче отыскания собственных значений спектральной задачи (1), построенный на этой системе функций, сходится.

Доказательство:

Будем следовать идеям, изложенным в работе [20].

Запишем уравнение (1) в виде $(T + PL - \lambda L)\varphi = (\nu L - \lambda L)\varphi$;

$$(T + PL - \lambda L)\varphi = (\nu - \lambda)L\varphi. \tag{3}$$

Для дискретного оператора L существует резольвентный оператор

$$R_\lambda(T+P) = (T+P-\lambda L)^{-1}, \tag{4}$$

который вполне непрерывен в H. Действуя слева на обе части уравнения (3) оператором $R_\lambda(T+P)$, получим

$\varphi = R_\lambda(T+P)(\nu L - \lambda L)\varphi = R_\lambda(T+P)L(\nu-\lambda)\varphi = R_\lambda(T+P)(\nu-\lambda)L\varphi =$
$= (\nu-\lambda)R_\lambda(T+P)L\varphi.$

На основании Теоремы 4.2 метод Галеркина в применении к задаче отыскания собственных значений уравнения (4), а следовательно, и уравнений (1), сходится.

Теорема 4.2. *Если оператор $T = A_0^{-1}K$ вполне непрерывен в H_0, то процесс Бубнова-Галеркина в задаче об отыскании собственных значений сходится.*

5. Алгоритм численного решения

На рис. 1a и рис. 1b представлена обобщенная схема алгоритма работы модулей программного комплекса.

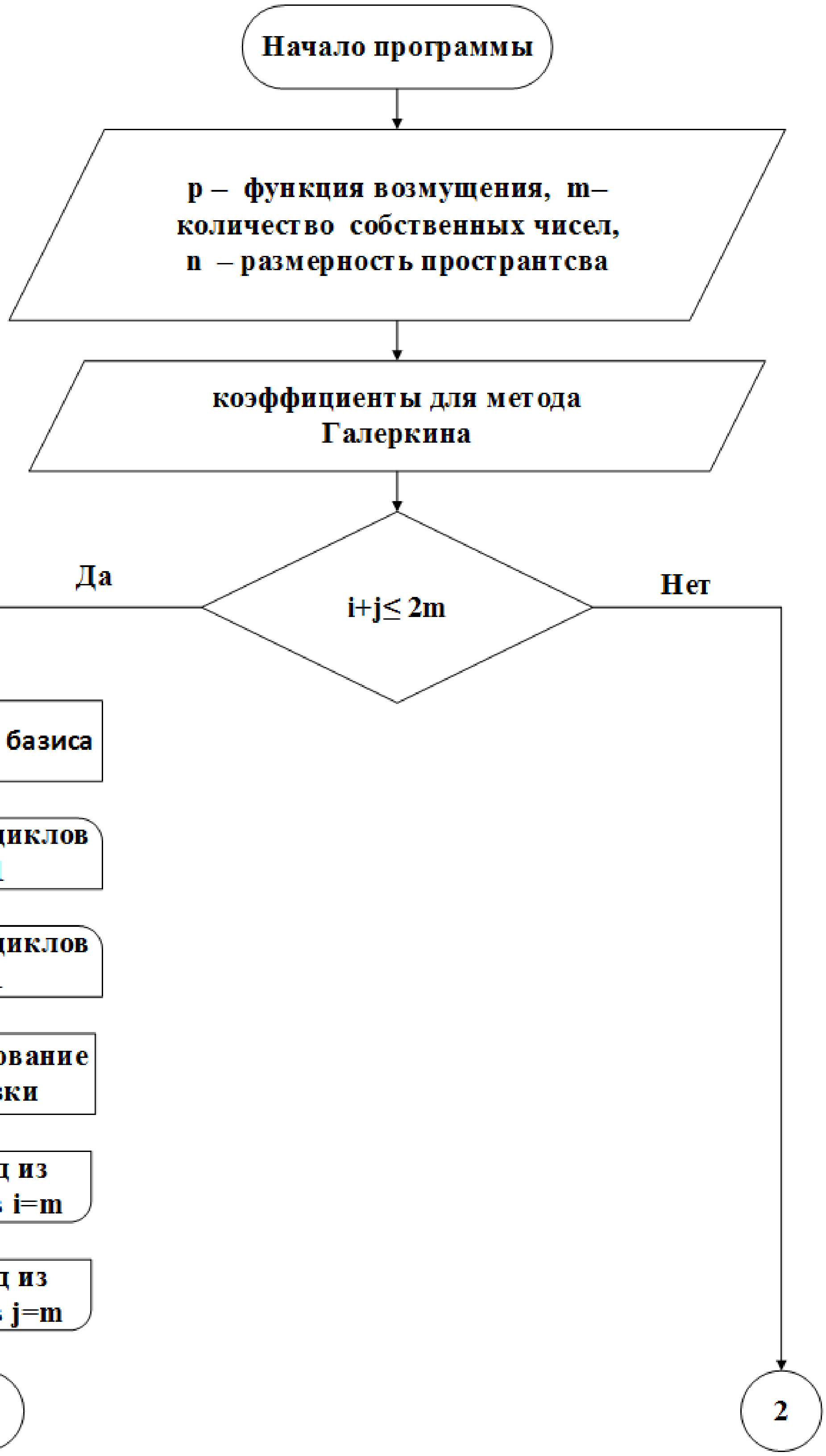

Рисунок 1a. Начало блок-схемы алгоритма численного решения задачи (1)

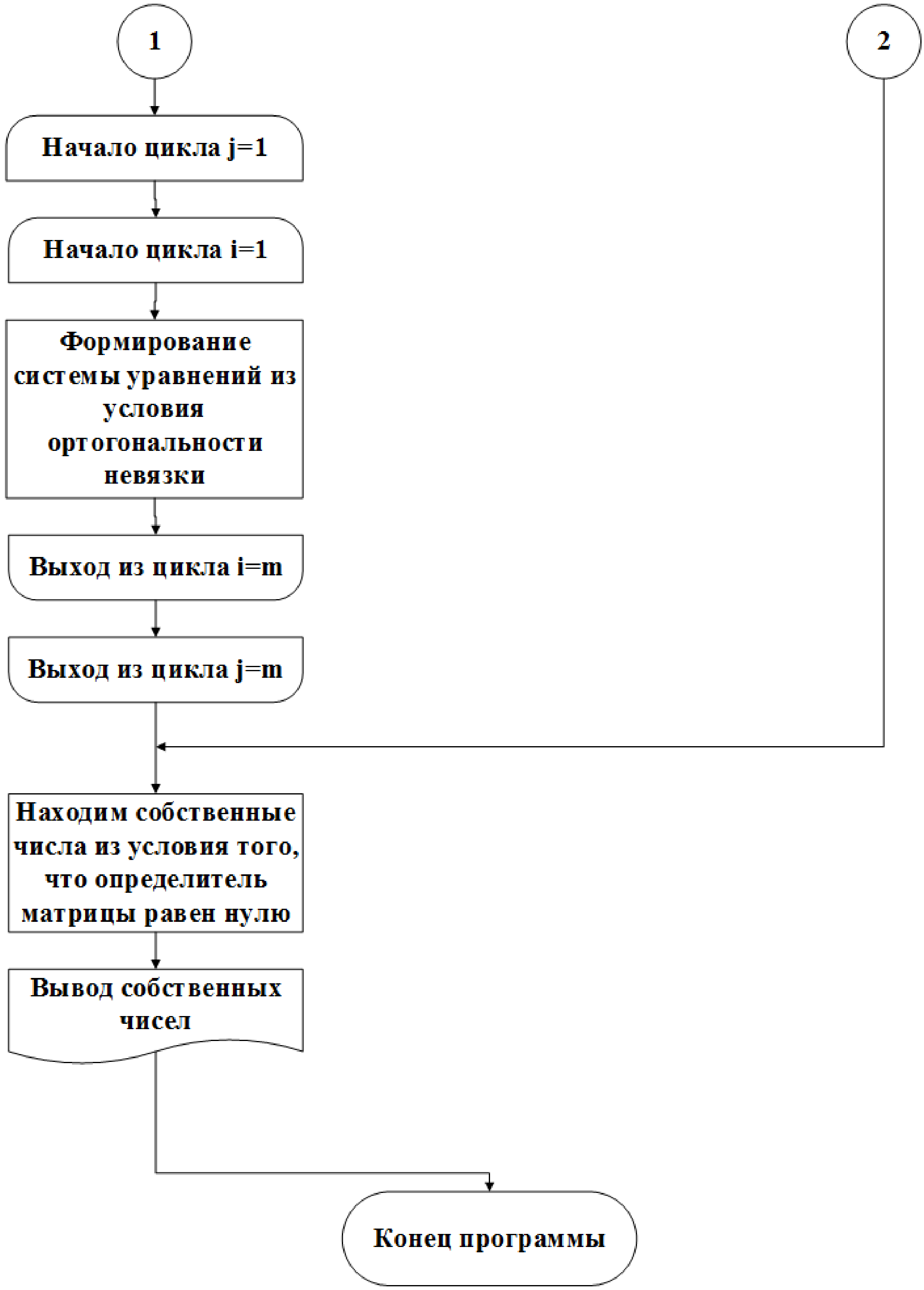

Рисунок 1b. Окончание блок-схемы алгоритма численного решения задачи (1)

Описание блок-схемы

Шаг 1. Ввод данных осуществляется пользователем в диалоговом окне. Входными являются следующие данные: p — потенциал, n — размерность параллелепипеда, $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ — коэффициенты для метода Галеркина, базис и m — количество собственных чисел

Шаг 2. Создание базиса с помощью коэффициентов $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$

Шаг 3. Вычисляется невязка

Шаг 4. С помощью цикла составление системы уравнений из условия ортогональности невязки к базисным функциям

Шаг 5. Для системы записываем определитель и из условия, что определитель системы равен нулю мы находим собственные числа

Используемые программные средства Для реализации вычислительных алгоритмов использовались встроенные функции и стандартные операторы программного пакета Maple 17.0.

6. Описание программы

На основе полученных теоретических результатов в пакете Maple 17.0 разработана программа численного решения прямой спектральной задачи для дискретного полуограниченного оператора на n—мерном параллелепипеде.

Пусть $\Pi = \{x = x_1, x_2, ..., x_n) : 0 \leq x_j \leq a_j, j = 1, ..., n\}, a_j > 0$.

$V = \prod\limits_{j=1}^{n} a_j$ — объем параллелепипеда.

Пусть $H = L_2(\Pi)$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, h) = \int\int_{\Pi} f(x, y)g(x, y)dxdy,$$

генерирующим норму $\|h\| = \sqrt{(h, h)}$.

Пусть операторы $T, L : U \to F$ заданы формулами:

$$U = \{u \in W_2^{k+2}(\Pi) : u|_{\partial\Pi} = 0\},$$

$$F = W_2^k(\Pi), k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

T — оператор Лапласа в пространстве H, определенный краевой задачей Дирихле

$$-\Delta u = \lambda u, v|_{\partial\Pi} = 0,$$

где $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа самосопряженный, дискретный оператор. Через $\partial\Pi$ — границу Π.

На первом этапе реализации алгоритма осуществляется на основе введения дискретного полуограниченного оператора P, коэффициентов a для метода Галеркина, количество собственных чисел и указания n (n—мерный параллелепипед). На втором этапе с помощью коэффициентов a создается базис. На третьем и на четвертом этапе с помощью цикла приближенное решение поставляется в сформированный базис, вычисляется невязка и далее выдвигается требование ортогональности невязки к базисным функциям. После четвертого этапа у нас получается однородная система уравнений. На пятом этапе для системы записываем определитель и из условия, что определитель равен нулю мы находим собственные числа.

Функциональное назначение программы, область ее применения.

Программный комплекс состоит из 5 модулей и предназначен для получения численного решения прямой спектральной задачи для дискретного полуограниченного оператора на n—мерном параллелепипеде. В программном комплексе реализован метод Галеркина. Программа предназначена для специалистов в области математической физики и математического моделирования. К примеру, программа может быть использована студентами ВУЗов при изучении специальных курсов и дисциплин, связанных с исследованием спектральных задач.

7. Вычислительный эксперимент

Пример 1. Рассмотрим задачу (1) о вычислении относительных собственных чисел оператора Лапласа, на прямоугольнике.

$$\begin{cases} (T+P)u = \mu L u, \\ u|_{\partial \Pi} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $T, L : U \to F$, заданные формулами

$$T = \Delta, L = E, P = 0, \Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}.$$

Пусть $\Pi = \{x = x_1, x_2) : 0 \leq x_j \leq a_j, j = 1, 2\}, a_j > 0$.

Пусть $V = \prod\limits_{j=1}^{2} a_j$ — объем параллелепипеда.

$H = L_2(\Pi)$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, h) = \int\int_{\Pi} f(x, y) g(x, y) dx dy,$$

генерирующим норму $\|h\| = \sqrt{(h, h)}$.

$$U = \{u \in W_2^{k+2}(\Pi) : u|_{\partial\Pi} = 0\},$$

$$F = W_2^k(\Pi), k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Методом Галеркина были подсчитаны собственные числа для невозмущенного оператора в двумерном случае. Данные приведены в (см. таб. 1). Полученные результаты сравнили с точными значениями (см. матрицу $\lambda_{i,j}$), $\lambda_{i,j} = (\frac{\pi i}{a_1})^2 + (\frac{\pi i}{a_2})^2$, где $a_1 = \pi$ и $a_2 = \pi$.

$$\lambda_{i,j} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 & 17 & 26 & 37 & 50 & 65 & 82 & 101 \\ 5 & 8 & 13 & 20 & 29 & 40 & 53 & 68 & 85 & 104 \\ 10 & 13 & 18 & 25 & 34 & 45 & 58 & 73 & 90 & 109 \\ 17 & 20 & 25 & 32 & 41 & 52 & 65 & 80 & 97 & 116 \\ 26 & 29 & 34 & 41 & 50 & 61 & 74 & 89 & 106 & 125 \\ 37 & 40 & 45 & 52 & 61 & 72 & 85 & 100 & 117 & 136 \\ 50 & 53 & 58 & 65 & 74 & 85 & 98 & 113 & 130 & 149 \\ 65 & 68 & 73 & 80 & 89 & 100 & 113 & 128 & 145 & 164 \\ 82 & 85 & 90 & 97 & 106 & 117 & 130 & 145 & 162 & 181 \\ 101 & 104 & 109 & 116 & 125 & 136 & 149 & 164 & 181 & 200 \end{pmatrix}$$

Таблица 1. **Для оператора Лапласа собственные числа для невозмущенного оператора в двумерном случае**

1	2		**21**	34		**41**	61		**61**	89		**81**	116
2	5		**22**	34		**42**	65		**62**	89		**82**	117
3	5		**23**	37		**43**	65		**63**	90		**83**	117
4	8		**24**	37		**44**	65		**64**	90		**84**	125
5	10		**25**	40		**45**	65		**65**	97		**85**	125
6	10		**26**	40		**46**	68		**66**	97		**86**	128
7	13		**27**	41		**47**	68		**67**	98		**87**	130
8	13		**28**	41		**48**	72		**68**	100		**88**	130
9	17		**29**	45		**49**	73		**69**	100		**89**	136
10	17		**30**	45		**50**	73		**70**	101		**90**	136
11	18		**31**	50		**51**	74		**71**	101		**91**	145
12	20		**32**	50		**52**	74		**72**	104		**92**	145
13	20		**33**	50		**53**	80		**73**	104		**93**	149
14	25		**34**	52		**54**	80		**74**	106		**94**	149
15	25		**35**	52		**55**	82		**75**	106		**95**	162
16	26		**36**	53		**56**	82		**76**	109		**96**	164
17	26		**37**	53		**57**	85		**77**	109		**97**	164
18	29		**38**	58		**58**	85		**78**	113		**98**	181
19	29		**39**	58		**59**	85		**79**	113		**99**	181
20	32		**40**	61		**60**	85		**80**	116		**100**	200

Пример 2. Рассмотрим задачу (2) для уравнения Дзекцера о вычислении относительных собственных чисел оператора для $n = 1$. Данные приведены в (см. таб. 2). Полученные результаты хорошо соотносятся в работе
Е.В. Кириллова [5].

$$\begin{cases} (T + P)u = \mu Lu, \\ u|_{\partial\Pi} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $T, L : U \to F$, заданные формулами
тогда $T = \alpha\Delta - \beta\Delta^2,\ L = a^2 - \Delta,\ \Delta = \frac{d^2}{dx^2},\ \alpha = \frac{8}{10},\ a^2 = \pi,\ \beta = \frac{1}{(\pi)^2},\ a1 = \pi.$
пусть $P = -0.0004 - 0.0005cos(2x) - 0.0008cos(4x) - 0.0013cos(6x) - 0.002cos(8x) - -0.0029cos(10x) - 0.004cos(12x) - -0.0053cos(14x)$.

Пусть $\Pi = \{x = x_1) : 0 \leq x_j \leq a_j, j = 1\}, a_j > 0$.

Пусть $V = \prod\limits_{j=1}^{1} a_j$ — объем параллелепипеда.

Пусть $H = L_2(\Pi)$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, h) = \int\int_{\Pi} f(x, y)g(x, y)dxdy,$$

генерирующим норму $\|h\| = \sqrt{(h, h)}$.

$$U = \{u \in W_2^{k+2}(\Pi) : u|_{\partial\Pi} = 0\},$$

$$F = W_2^k(\Pi), k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Таблица 2. **Для уравнения Дзекцера собственные числа для невозмущенного оператора в одномерном случае**

	λ_k	$\tilde{\lambda_k}$	$\lvert\lambda_k - \tilde{\lambda_k}\rvert$
1	-7.259418639	-7.063711637	0,195707002
2	-5.838254835	-5.538569839	0,299684996
3	-4.347571039	-4.213380367	0,134190672
4	-3.406629238	-3.086038510	0,320590728
5	-2.391547685	-2.152023500	0,239524185
6	-1.720404324	-1.5445123475	0,1758919765
7	-1.203830447	-1.400537806	0,196707359
8	-0.9016156223	-0.8034231563	0,098192466

Пример 3. Рассмотрим задачу (3) для уравнения Дзекцера о вычислении относительно собственных чисел оператора на прямоугольнике. Данные приведены в (см. таб. 3-4).

$$\begin{cases} (T+P)u = \mu L u, \\ u|_{\partial\Pi} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $T, L : U \to F$, заданные формулами

$$T = \alpha\Delta - \beta\Delta^2, L = a^2 - \Delta, \Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}.,$$

Пусть $P = x + y,\ a1 = \pi,\ a2 = \pi,\ \alpha = 5/8,\ \beta := 1/3,\ a^2 = 6/13$ (см. таб. 3);

пусть $P = y^3 + 4x^2 + 3xy,\ a1 = \pi,\ a2 = \pi,\ \alpha = 5/8,\ \beta = 1/3,\ a^2 = 6/13$ (см. таб. 4).

Пусть $\Pi = \{x = x_1, x_2) : 0 \le x_j \le a_j, j = 1, 2\}, a_j > 0.$

Пусть $V = \prod\limits_{j=1}^{2} a_j$ — объем параллелепипеда.

Тогда $H = L_2(\Pi)$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, h) = \int\int_{\Pi} f(x, y) g(x, y) dx dy,$$

генерирующим норму $\|h\| = \sqrt{(h, h)}$.

$$U = \{u \in W_2^{k+2}(\Pi) : v|_{\partial\Pi} = 0\},$$

$$F = W_2^k(\Pi), k \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Таблица 3. **Для уравнения Дзекцера собственные числа для возмущенного оператора на прямоугольнике, при** $P = x + y$

	По методу Галеркина
1	-0.279129660
2	1.663348136
3	1.663348136
4	2.898967585
5	3.644174068
6	3.644174068
7	4.716672360
8	4.716672360
9	6.106867099
10	6.106867099
11	6.450467075
12	7.134587034
13	7.134587034
14	8.832669627
15	8.832669627
16	9.170836180
17	9.170836180
18	10.18333589
19	10.18333589
20	11.19349190
21	11.86593355
22	11.86593355
23	12.87342542
24	12.87342542
25	13.87979351
26	13.87979351
27	14.21504246
28	14.21504246
29	15.55518683
30	15.55518683
31	17.22883482
32	17.22883482
33	17.22883482
34	17.89791809
35	17.89791809
36	18.23239134
37	18.23239134
38	19.90416794
39	19.90416794
40	20.90683181
41	20.90683181
42	22.24333448
43	22.24333448
44	22.24333448
45	22.24333448
46	23.24546678
47	23.24546678
48	24.58136677
49	24.91529781
50	24.91529781
51	25.24921272
52	25.24921272
53	27.25239676
54	27.25239676
55	27.92002122
56	27.92002122
57	28.92137342
58	28.92137342
59	28.92137342
60	28.92137342
61	30.25636788
62	30.25636788
63	30.59009341
64	30.59009341
65	32.92594578
66	32.92594578
67	33.25960960

	По методу Галеркина
68	33.92691740
69	33.92691740
70	34.26056179
71	34.26056179
72	35.26145905
73	35.26145905
74	35.92869566
75	35.92869566
76	36.92951138
77	36.92951138
78	38.26386497
79	38.26386497
80	39.26458397
81	39.26458397
82	39.59814878
83	39.59814878
84	42.26653393
85	42.26653393
86	43.26712298
87	43.93416723
88	43.93416723
89	45.93523338
90	45.93523338
91	48.93666717
92	48.93666717
93	50.27058216
94	50.27058216
95	54.60560745
96	55.27251062
97	55.27251062
98	60.94097646
99	60.94097646
100	67.27595871

Таблица 4. **Для уравнения Дзекцера собственные числа для возмущенного оператора на прямоугольнике, при** $P = y^3 + 4x^2 + 3xy$

	По методу Галеркина
1	-10.68685859
2	-2.853172611
3	-2.799743438
4	-0.111357883
5	1.353188771
6	1.384850504
7	2.838991361
8	2.842796858
9	4.752491204
10	4.772134283
11	5.078932033
12	5.908367524
13	5.911706847
14	7.840582908
15	7.841275509
16	8.283243697
17	8.296395493
18	9.335839180
19	9.338418518
20	10.41538596
21	11.13489877
22	11.13564375
23	12.24893347
24	12.25829292
25	13.26463845
26	13.26661731
27	13.60644722

	По методу Галеркина
28	13.60664270
29	15.00220949
30	15.00286911
31	16.72888673
32	16.76636348
33	16.77334198
34	17.41751035
35	17.41774819
36	17.76779574
37	17.76933874
38	19.47483442
39	19.47539145
40	20.49656620
41	20.49663757
42	21.85874113
43	21.85897180
44	21.88741391
45	21.89280820
46	22.88318976
47	22.88441746
48	24.23344111
49	24.57402912
50	24.57449504
51	24.91078614
52	24.91088044
53	26.93977380
54	26.93998250
55	27.63779485
56	27.64208505
57	28.62645564
58	28.62648653
59	28.63146091
60	28.63245680
61	29.97485285
62	29.97495041
63	30.31320074
64	30.31359162
65	32.66803275
66	32.66821692
67	33.00366317
68	33.67612460
69	33.67616788
70	34.03137278
71	34.03486419
72	35.02445818
73	35.02528016
74	35.69225639
75	35.69234931
76	36.70083369
77	36.70116411
78	38.04179398
79	38.04180907
80	39.04886767
81	39.04902888
82	39.38372991
83	39.38377689
84	42.06598921
85	42.06607469
86	43.07100120
87	43.74107687
88	43.74107687
89	43.74109897
90	45.75072945
91	45.75077601
91	48.76348570
92	48.76349376
93	50.10207696
94	50.10210183
95	54.45055886
96	55.11935915
97	55.11937137
98	60.80217316
99	60.80217777
100	67.15031825

Заключение

В выпускной квалификационной работе:

— доказана сходимость метода Галеркина для дискретного полуограниченного оператора $T+P$;

— решена задача нахождения относительных собственных чисел для дискретного возмущенного полуограниченного оператора на n—мерном параллелепипеде;

— на основе метода Галеркина разработан алгоритм и реализована программа для нахождения относительных собственных чисел дискретного возмущенного оператора.

— приведены вычислительные эксперименты, иллюстрирующие работу программы.

Список литературы

[1] Амосов, С.А. Об уравнении Власова-Эйнштейна и квантовании уравнения Власова / С. А. Амосов, В.В. Веденяпин // М. — 1997. — 16 с.

[2] Даутов, Р.З. Сходимость метода Бубнова–Галеркина с возмущениями для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра / Р.З. Даутов, А.Д. Ляшко, С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 27:7. — 1991. — 1144—1153 с.

[3] Дубровский, В. В. Проблема решения задач на собственные значения для дифференциальных операторов со сложным вхождением спектрального параметра / В. В. Дубровский, О. А. Торшина // Новые мат. методы. Электромагн. волны и электронные системы. — Т. 7. — — № 9. Т. 7. — 2002. — 4—10 с.

[4] Закирова, Г.А. Введение в спектральную теорию линейных дифференциальных операторов / Г. А. Закирова, Е. В. Кириллов / [Текст] : учебное пособие, М-во образования и науки Российской Федерации, Южно-Уральский гос. ун-т, Каф. уравнений мат. физики. — Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ. — 2013. — 91 с.

[5] Закирова, Г.А. Регулязированный L—след одного возмущенного оператора / Г.А. Закирова, Е.В. Кириллов // Вестник Одесского национального университета. Математика и механика. — Т. 18. Выпуск 2(18). — 2013. — 7—13 с.

[6] Кадченко, С.И. Алгоритм нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. — № 14. — 2012. — 83—88 с.

[7] Канатников, А.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко, В.Н. Четвериков // М.: Изд-во // МГТУ им. Н.Э. Баумана. — 2000. — 456 с.

[8] Кинзина, И.И. Нахождение собственных чисел возмущенных дискретных операторов / И.И. Кинзина // Вестник ЧелГУ. — Вып. № 10. — 2008. — 34—43 с.

[9] Кострикин, А.И. Введние в алгебру / А.И. Кострикин // Часть I. Основы алгебры: Учебник для вузов. — М.: Физико-математическая литература. — 2000. — 272 с.

[10] Кострикин, А.И. Введние в алгебру / А.И. Кострикин // Часть II. Основы алгебры: Учебник для вузов. — М.: Физико-математическая литература. — 2000. — 368 с.

[11] Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин // М. — 1970. — 512 с.

[12] Сальников, Н.Н. О построении конечномерной математической модели процесса конвекции-диффузии с использованием метода Петрова — Галеркина / Н.Н. Сальников , С.В. Сирик , И.А. Терещенко // Проблемы управления и информатики. — № 3. — 2010. — 94—109 с.

[13] Торшина, О.А. Алгоритм вычисления регуляризованного следа оператора Лаласа-Бельтрами с потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Вестник МаГУ. — В.4. — 2003. — 183—215 с.

[14] Торшина, О.А. О следе дифференциального оператора с потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Вестник Челябинского государственного университета. — Т.3. — № 3. — 2003. — 178—191 с.

[15] Торшина, О.А. Собственные числа возмущенного оператора Лапласа-Бохнера / О.А. Торшина // Общество с ограниченной ответственностью "Центр развития научного сотрудничества". — г. Новосибирск. — № 26—2. — 2013. — 48—52 с.

[16] Петров, Г.И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости / Г.И. Петров // ПММ. — Т.4. Вып.З. — 1940. — 3—12 с.

[17] Пожалостин, А.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного

натяжения / А. А. Пожалостин , Д. А. Гончаров // Фундаментальные и прикладные задачи механики. — М. — Вып. № 612. — 2013. — 224—231 с.

[18] Щербинина, И.О. Анализ численных методов вычисления собственных значений и собственных векторов / И.О. Щербинина // Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты. — Вып. № 10. — 2014. — 207—211 с.

[19] John, V. Finite element methods for time-dependent convection-diffusion-reaction equations with small diffusion / V. John, E. Schmeyer // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — Vol. 198. — 2008. — 475-494 p.

[20] Kadchenko, S.I. Computation of Eigenvalues of Discrete Lower Semibounded Operators // S.I. Kadchenko, G. F. Zakirova //
Applied Mathematical Sciences. — Vol. 10. — № 7. — 2016. — 323—329 p.

[21] Kirillov, E.V. A direct spectral problem for L-spectrum of the perturbed operator with a multiple spectrum / E. V. Kirillov, G. A. Zakirova //
J. Comp. Eng. Math. — 4:3. — 2017. — 19—26 p.

[22] Solovev, S.I. Metod Releya-Ritca dlya nelinejnyh spektralnyh zadach / S.I. Solovev // Trudy Matematicheskogo centra im. N.I. Lobachevskogo. — T.48. — 2013. — 64—83 p.

[23] Weil, H. Das asymptotische Verteilungsgesats der Eigenverte linearer partieller Differential-gleichungen(mit einer Anwendung auf Theorie Hohlraumstrahlungl / H. Weil // Math. Ann. — 71. —- 1912. — 441—479 p.

[24] Weil, H. Uber die Randwertaufgabe der Strahlunstheorie and asymptotische Spektralgesetze / H. Weil, J.Reine. // Angew. — 143. — № 3. — 1913.—
177—202 p.