Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра уравнений математической физики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, кандидат физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры математического и
компьютерного моделирования ЮУрГУ
____________________ /М.А. Сагадеева/
«_____» ____________________ 2018 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой уравнений
математической физики,
доктор физ.-мат. наук, профессор
_______________ /Г.А. Свиридюк/
«_____» _______________ 2018 г.

Численное исследование одной модели соболевского типа с трехточечным начально-конечным условием

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
01.04.01.2016.176.00 МД

Руководитель, д.ф.-м.н., доцент
______________ /Н.А. Манакова/
«____» ____________ 2018 г.

Автор, студент группы ЕТ - 221
____________ /Ф.Н. Шаяхметова/
«____» ____________ 2018 г.

Нормоконтролер, к.ф.-м.н., доцент
________________ /Д.Е. Шафранов/
«____» ____________ 2018 г.

Челябинск, 2018

Оглавление

Введение

В настоящее время актуальным является исследование многокомпонентной технической системы, главными компонентами которой являются: технология и техника, производство, потребление и внешняя среда. Все указанные элементы взаимосвязаны и приводят к потребности исследования физических процессов и создание на их основе математических моделей. На основе развития многокомпонентной технической системы, возможно изучение различных физических процессов, например, процессов подземной гидромеханики: движение жидкостей, газов и их смесей в трещиноватых и пористых горных породах. В связи с этим появляется необходимость в разработке методов для расчетов полей давлений, параметров и температур, описывающих исследуемые среды. Изучение фильтрационных потоков является теоретической основой разработки газовых и нефтяных месторождений.

Прикладные численные методы считаются одним из основных математических средств решения прикладных задач. Главным инструментом для решения сложных инженерных задач в настоящее время являются численные методы, позволяющие свести решение к выполнению конечного числа арифметических действий, при этом результаты получают в виде числовых значений с некоторой заданной точностью. Многие численные методы известны давно, но лишь с появлением вычислительной техники начался период их бурного развития и внедрения в практику. Применение компьютеров позволяет существенно сократить трудоемкость решения многих современных задач. В исследуемой работе изучен модифицированный проекционный метод Галеркина [25]. Данный метод уже давно используется для формирования основы метода решения дифференциальных уравнений с частными производными. Применение данного метода к изучению задач устойчивости гидродинамических течений, было проведено Г.И.Петровым [19], который доказал сходимость метода Галеркина для отыскания собственных значений широкого класса уравнений, включая уравнения для консервативных систем. В гидродинамике наиболее эффективно метод Галеркина работает в задачах о конвекции, в силу их самосопряжённости. Необходимо отметить, что метод Галеркина и модели соболевского типа, также изучались в работах Г.А. Свиридюка и его учеников [13, 17, 23].

Основное формирование подземной гидромеханики было изучено французским инженером А. Дарси [5, 14, 15], который в процессе работы над проектом водоснабжения г. Дижона во Франции провел многочисленные опыты по изучению фильтрации воды через вертикальные песчаные фильтры. Крупное значение в развитие теории фильтрации в нефтегазоводоносных пластах внесли советские ученые: Л.С. Лейбензон – основатель советской школы специалистов и ученых, занимающихся развитием теории фильтрации применительно к затруднениям разработки газовых и нефтяных месторождений, академик С.А. Христианович, профессоры Б.Б. Лапук, И.А. Чарный, В.Н. Щелкачев и другие. Выдающийся вклад в развитие технологий нефтеотдачи внесли работы по теории фильтрации известного американского специалиста М. Маскета и работы С. Бакли, М. Леверетта по основам теории двухфазной фильтрации. В наибольшей степени широкое использование из всего многообразия гидродинамических моделей фильтрации жидкости в трещиновато-пористых пластах приобрело уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной [2, 3], в котором описание течения в трещиновато-пористой пластах выполняется методами механики сплошной среды. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной впервые было получено Г.И. Баренблаттом, Ю.П. Желтовым и И.Н. Кочиной [2].

Рассмотрим уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной [2]

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u + f, \tag{0.1}$$

$$0 < s_1 < l_1, \quad 0 < s_2 < l_2, \quad t_1 < t \leq t_3,$$

$$u = u(s_1, s_2, t).$$

Здесь α и λ — коэффициенты, описывающие среду; параметр $\alpha \in \mathbb{R}_+$, а параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, которые не противоречат физическому смыслу задачи, функция $f = f(s_1, s_2, t)$ — характеризует внешнюю нагрузку (т.е. истоки или стоки жидкости соответственно). Различные начально-краевые задачи для уравнения (0.1) рассматривались в работах [9, 11]. Уравнение (0.1) относится к широкому классу уравнений соболевского типа [10, 12, 16, 20].

Добавим к уравнению (0.1) граничные и начальные условия:

$$u(0, s_2, t) = u(l_1, s_2, t) = u(s_1, 0, t) = u(s_1, l_2, t) = 0, \qquad t \in [t_1, t_3], \tag{0.2}$$

$$\begin{gathered} P_1(u(s_1, s_2, t_1) - u^1(s_1, s_2)) = 0, \qquad 0 \leq s_1 \leq l_1,\ 0 \leq s_2 \leq l_2, \\ P_2(u(s_1, s_2, t_2) - u^2(s_1, s_2)) = 0, \quad 0 \leq s_1 \leq l_1,\ 0 \leq s_2 \leq l_2,\ t_2 \in [t_1, t_3], \\ P_3(u(s_1, s_2, t_3) - u^3(s_1, s_2)) = 0, \qquad 0 \leq s_1 \leq l_1,\ 0 \leq s_2 \leq l_2, \end{gathered} \tag{0.3}$$

где $P_1,\ P_2,\ P_3$ – специальным образом построенные относительно спектральные проекторы [10]; $u^1(s_1, s_2),\ u^2(s_1, s_2),\ u^3(s_1, s_2)$ – заданные функции. Уравнение (0.1) с граничным условием (0.2) образуют модель Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Модель Баренблатта – Желтова – Кочиной (0.1), (0,2) можно рассматривать в рамках абстрактного линейного уравнения соболевского типа [16]

$$L\dot{u} = Mu + f, \quad \ker L \neq \{0\}. \tag{0.4}$$

Уравнениями соболевского типа называют вырожденные уравнения, также уравнения неразрешенные относительно старшей производной. Активное их изучение началась в середине прошлого века с работ С.Л. Соболева [24]. Впервые термин "уравнения соболевского типа" ввел Р.Е. Шоултер [22]. Уравнения соболевского типа в различных аспектах изучались в работах Г.В. Демиденко, И.В. Мельниковой, С.Г. Пяткова, Г.А. Свиридюка, Т.Г. Сукачевой, А. Фавини, В.Е. Федорова, Р.Е. Шоуолтера, А. Яги и многих других. История начально-конечной задачи для уравнения (0.4) начинается с работы Г.А. Свиридюка и С.А. Загребиной [21], где она первоначально называлась задачей Веригина. Далее, начально-конечное условие было обобщено на более общее многоточечное начально-конечное условие.

Целью выпускной квалификационной работы является численное исследование одной модели соболевского типа с трехточеным начально-конечным условием.

Для достижения цели необходимо:

1. Исследовать разрешимость трехточечной начально-конечной задачи на основе метода Галеркина.
2. Разработать алгоритм численного метода решения трехточечной начально-конечной задачи.
3. Реализовать алгоритм численного метода в виде программы для ЭВМ.
4. Провести вычислительные эксперименты.

1. Математическая модель Баренблатта – Желтова – Кочиной в области

Понятия и уравнения теории фильтрации

Фильтрационные процессы, часто встречаются в повседневной жизни. Например, простые процессы видны нам при смачивание губки в бытовых условиях, при движение табачного дыма в сигарете, а также в очистке водопроводной воды в фильтре и др., а более сложными примерами являются передвижение природного газа и нефти в подземных пластах, работа технологических устройств химических заводов, миграция влаги в плодородных движениях и др. Мотив фильтрационного процесса различен, например, действие внешних массовых сил, перепад давлений на границе среды, деформация пористой среды и другие.

Природные жидкости, такие как нефть, газ, подземные воды и их смеси, находятся в порах и в трещинах коллекторов. Коллектора называют пористыми или трещиноватыми в зависимости от геометрии пустот, а также горных пород, которые могут служить вместилищами нефти и газа и отдавать их при разработке. Существуют различные модели коллекторов:

а) идеализированные модели пористых сред (рис. 1, рис. 2);

б) геометрические модели (рис. 3, рис. 4).

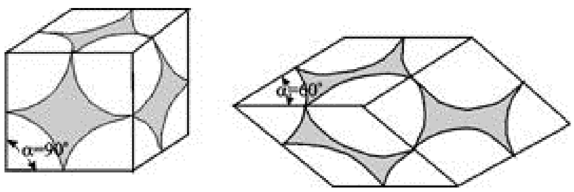

Рис. 1. Элемент фиктивного грунта

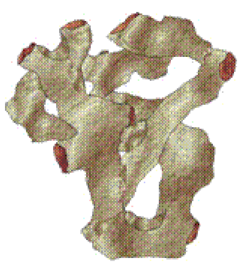

Рис. 2. Слепок поровых каналов сцементированного песчаника

Перейдем к определению емкостных и фильтрационных характеристик пористой среды. Рассмотрим параметры, характеризующие перенос и накопление жидкости в пористой среде.

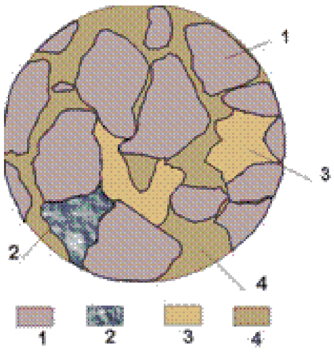

Рис. 3. Шлиф пористого коллектора

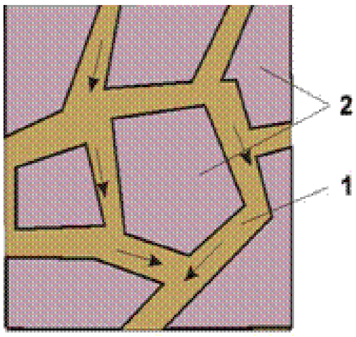

Рис. 4. Схема трещинно-пористого коллектора: 1 – трещины; 2 – пористые блоки

Пористость характеризует количество жидкости, которое располагается в определенном объеме пористой среды:

$$c = \frac{\tau_{por}}{\tau}, \tag{1.1}$$

где c – пористость, τ_{por} – объем пор, τ – общий объем однородного пористого материала. В отдельных пористых материалах часть пор изолирована от прочего связанного порового пространства. Примером может послужить среда с различными полными и активными пористостями.

Рассмотрим свойство *просветности* среды. Обозначим через S_{pros} – площадь, которую будут занимать поры, через $(S - S_{pros})$ – площадь твердого вещества пористой среды. Тогда

$$p = \frac{S_{pros}}{S}, \tag{1.2}$$

где p – просветность, S_{pros} – площадь просветности сечения, S – общая площадь сечения. Величина просветности находится в зависимости от того через какую точку и в каком направлении проводится разрез среды.

Скорость фильтрации – векторная величина при фильтрации жидкости:

$$V = \frac{Q}{S}, \tag{1.3}$$

где V – скорость фильтрации, Q – объем расхода жидкости, S – площадь поперечного сечения. Тогда *средняя скорость* движение жидкости:

$$W = \frac{Q}{S_{pros}}, \tag{1.4}$$

где W – средняя скорость, Q – объем расхода, S_{pros} – площадь просветов.

Связь между скоростью фильтрации и средней скоростью движения имеет вид:

$$W = \frac{V}{c}, \tag{1.5}$$

где W – средняя скорость, V – скорость фильтрации, c – пористость.

При рассмотрении скорости фильтрации будем рассматриваеть некоторый фиктивный поток, в котором:

– расход через любое сечение равен реальному расходу,

– поля давлений фиктивного и реального потоков идентичны,

– сила сопротивления фиктивного потока равна реальной.

Сформулируем закон Дарси для анизотропных сред:

При фильтрации в антизотропных пористых средах линейная зависимость между объемным расходом несжимаемой жидкости и потерей напора имеет вид:

$$u_i \equiv -\frac{K_{ij}}{\nu}\frac{\partial P}{\partial x_j} \equiv -\frac{h^3}{\nu l}K^0_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{1.6}$$

где K^0_{ij} – тензор трещинной проницаемости; ν – вязкость; u_i – компоненты вектора скорости фильтрации; h – среднее раскрытие трещин; l – размер блока. Теория проницаемости трещиноватых массивов разработана Д.Сноу [12] для непрерывных систем сетей трещин, состоящих из произвольного числа систем, при этом в каждой системе ориентировка, пустота и ширина считаются строго постоянными.

Обозначим через P_1 – давление в трещинах, P_2 – в блоках, принебрегая фильтрационным потоком. Трещиновато-пористый пласт будем рассматривать как сочетание двух пористых сред с порами разных масштабов: среда 1 – укрупненная среда, в которой роль зерен играют пористые блоки, которые рассматриваются как непроницаемые, а роль поровых каналов – трещины (давление в этой среде P_1); среда 2 – система пористых блоков, состоящая из зерен, разделенных мелкими порами (давление в ней P_2). Таким образом, вместо одного давления жидкости в данной точке пласта рассматривается два – давление в трещинах P_1 и давление в порах блоков P_2.

Проницаемость – фильтрующее свойство пористых сред, которые пропускают сквозь себя жидкости и газы. Это свойство описывается коэффициентом проницаемости τ. В отличие от коэффициента фильтрации c коэффициент проницаемости τ зависит только от свойств пористой среды.

Сформируем уравнения баланса жидкости в трещинах и в блоках:

$$\frac{\partial(c_1\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\overrightarrow{u}) - q = 0; \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial(c_2\rho)}{\partial t} + q = 0; \tag{1.8}$$

$$q = \alpha\frac{\rho K_2}{l^2}\frac{P_2 - P_1}{\nu}, \tag{1.9}$$

где c_1 – трещиноватая пористость; c_2 – пористость блоков; ρ – плотность жидкости, K_2 – проницаемость блоков; α – безразмерный коэффициент, характеризующий породу.

Поскольку трещиноватая пористость c_1 мала, ею пренебрежем. Пористость блоков c_2 есть функция обоих давлений. Возьмем линейное приближение

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = c_{20}\left(\beta_{21}\frac{\partial P_1}{\partial t} + \beta_{22}\frac{\partial P_2}{\partial t}\right), \tag{1.10}$$

где c_{20}, β_{21}, β_{22} считаем постоянными. Кроме того, для капельных жидкостей имеет место соотношение

$$\rho = \rho_0\exp[\beta_*(P_* - P_0)] \approx \rho_0[1 + \beta_*(P_* - P_0)], \tag{1.11}$$

где ρ – плотность жидкости, ρ_0 – начальная плотность жидкости, β_* – коэффициент сжимаемой жидкости, $P_* = P_{1,2}$ (P_1 – средние давление жидкости в трещинах, а P_2 – среднее давление в блоках), P_0 – паровое давление.

Подставляя (1.5), (1.9) – (1.11) в (1.7), (1.8), получаем

$$\frac{\rho_0}{\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial P_1}{\partial x_j}\right) - \frac{\alpha\rho_0 K_2}{l^2}\frac{P_2 - P_1}{\nu} = 0, \tag{1.12}$$

$$c_{20}\rho_0\left[-\beta_{21}\frac{\partial P_1}{\partial t} + (\beta_{22} + \beta_*)\frac{\partial P_2}{\partial t}\right] + \frac{\alpha\rho_0 K_2}{l^2}\frac{P_2 - P_1}{\nu} = 0. \tag{1.13}$$

Если среда является однородной и изотропной, тогда $K_{ij} = k_1\delta_{ij}$ и (1.12), (1.13) приведем к виду

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} - \beta\frac{\partial P_1}{\partial t} + A(P_2 - P_1) = 0, \tag{1.14}$$

$$k\Delta P_1 - A(P_2 - P_1) = 0, \tag{1.15}$$

где $k = \frac{k_1}{\nu}$ – коэффициент пьезопроводности. Подставляя (1.15) в (1.14), получим

$$[(\beta - 1) - \gamma\Delta]\frac{\partial}{\partial t}P_1 = k\Delta P_1, \tag{1.16}$$

причем $\gamma > 0$, а $\beta = \beta_{21}(\beta_{22} + \beta_*)$ может в силу (1.6) принимать значения меньше единицы. Обозначив через $\lambda = \frac{\beta - 1}{\gamma}$, $\alpha = \frac{k}{\gamma}$, $P_1 = u$, отсюда получим уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u. \tag{1.17}$$

В случае наличия внешних факторов, функция $f = f(s_1, s_2, t)$ — характеризует внешнюю нагрузку (т.е. истоки или стоки жидкости), получим неоднородное уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + f. \tag{1.18}$$

2. Кратные тригонометрические ряды Фурье

Система ортогональных функций в $L^2(\Omega)$

Пусть Ω — открытая область в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $L^2(\Omega)$ — совокупность всех интегрируемых в квадрате функций на Ω, то есть $f \in L^2(\Omega)$, если f измеримая функция от $s = (s_1, ..., s_n) \in \Omega$, для которой $\int\limits_\Omega |f(s)|^2 ds < +\infty$. Определим норму

$$||f(s)||_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

Отождествляем функции $f(s)$ и $g(s)$, если они совпадают почти всюду в Ω.

Определение 2.1. [18] Пространство $L^2(\Omega)$ является *полным*, если для любой последовательности $\{f_n\}$ такой что $f_n \in L^2(\Omega),\ n = 1, 2, ...$, фундаментальна, т.е.

$$||f_n - f_m||_{L^2(\Omega)} \to 0, \quad (n, m \to \infty), \tag{2.2}$$

существует такая функция $f \in L^2(\Omega)$, *что* $||f_n - f||_{L^2(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 2.2. [6, 18] Функции $\{\varphi_n\}$, где $\varphi_n \in L^2(\Omega)$ образуют ортонормальную систему, если они образуют ортогональную систему, то есть

$$\int\limits_\Omega \varphi_n(s)\varphi_m(s) ds = 0, \quad n \neq m, \tag{2.3}$$

и удовлетворяют условию

$$\int\limits_\Omega |\varphi_n(s)|^2 ds = 1, \quad n = 1, 2... \tag{2.4}$$

Пусть функции $\{\varphi_n\}$ образуют ортонормальную систему. Рассмотрим разложение функции $f \in L^2(\Omega)$ в ряд Фурье:

$$f(s) \sim c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s) + ... + c_n\varphi_n(s) + ..., \tag{2.5}$$

где

$$c_n = \int\limits_\Omega f(s)\varphi_n(s) ds. \tag{2.6}$$

Числа c_n называются *коэффициентами Фурье.*

Определение 2.3. [18] Ортонормальная система $\{\varphi_n\}$ называется *полной*, если из равенств $\int\limits_\Omega f(s)\varphi_n(s) ds = 0,\ n = 1, 2...$, для функции $f \in L^2(\Omega)$ вытекает, что $f(s) \equiv 0$.

Теорема 2.1. [18] (i) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(s)$ сходится равномерно в открытом подмножестве Ω_1 области Ω и $\varphi_n(s)$ непрерывны в Ω_1, то

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(s),\ s \in \Omega_1. \tag{2.7}$$

(ii) Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n||\varphi_n(s)| < +\infty \tag{2.8}$$

сходится не равномерно, но почти всюду в Ω_1 и если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n||\varphi_n(s)| \leq \Phi(s), \quad \int\limits_{\Omega} \Phi^2(s)ds < +\infty, \tag{2.9}$$

тогда

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(s) \tag{2.10}$$

почти всюду в Ω_1.

Теорема 2.2. [7] Тригонометрическая система функций

$$\left\{1, \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi s}{l}, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi s}{l}, \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi s}{l}, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{2\pi s}{l}, ..., \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n s}{l}, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi n s}{l}, ...\right\} \tag{2.11}$$

на сегменте $[-l, l]$ является ортонормированной.

Многомерные ряды Фурье

Многомерные ряды Фурье записываются в комплексной форме. Двумерный комплексный ряд Фурье периодической функции $f(s_1, s_2) = f(s_1 + T_{s_1}, s_2 + T_{s_2})$ имеет вид:

$$f(s_1, s_2) = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} c_{km} e^{i2\pi(\nu_{s_1 k} s_1 + \nu_{s_2 k} s_2)}, \tag{2.12}$$

где $c_{km} = \frac{1}{T_{s_1} T_{s_2}} \int\limits_0^{T_{s_1}} \int\limits_0^{T_{s_2}} f(s_1, s_2) e^{i2\pi(\nu_{s_1 k} s_1 + \nu_{s_2 k} s_2)} ds_1 ds_2$, T_{s_1}, T_{s_2} – пространственные периоды функции по осям s_1 и s_2 соответственно.

Сведения из теории кратных рядов Фурье

Рассмотрим функции $f(s)$, $s = (s_1, ..., s_n)$, от многих переменных, заданных на некотором n-мерном прямоугольнике $\Delta = a_j \leq s_j \leq b_j$, $j = 1, ..., n$, где a_j, b_j – действительные числа.

Теорема 2.3. [8] Если функция $f \in C(\Omega)$, то

$$\|f(s) - \sigma_N(f; s)\|_{C(\Omega)} \to 0 \ (N_j \to \infty, j = 1, ..., n). \tag{2.13}$$

где, $\sigma_N = \sigma_N(f; s) = \frac{S_0 + S_1 + ... + S_N}{N+1}$, N-я средняя-арифметическая сумма Фурье функции f. Функция $\sigma_N(f; s)$ называется суммой Фейера порядка N. $C(\Omega)$ — класс непрерывных функций с нормой $\|f\|_{c(\Omega)} = \max\limits_{s \in \Delta} |f(s)|$.

Множество всех кусочно-непрерывных функций, определенных в Ω, для которого введено скалярное произведение по формуле $(f, \varphi) = \int\limits_{\Omega} f(s)\varphi(s)ds$, обозначим $L_2' = L_2'(\Omega)$.

Теорема 2.4. [8] Ряд Фурье $f(s) \sim \sum c_k e^{iks}$ функции $f \in L_2(\Omega)$ сходится в $f(s)$ в смысле среднего квадратичного

$$\|f(s) - S_N(f; s)\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \ \ (N_\varepsilon \to \infty) \tag{2.14}$$

и имеет место равенство Парсеваля

$$\|f\|^2_{L_2(\Omega)} = (2\pi)^n \sum |c_k|^2. \tag{2.15}$$

В теории рядов Фурье доказывается, что для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ имеет место $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(\Omega)(s) = f(s)$, то есть ряд Фурье функции $f \in L_2(\Omega)$ сходится к ней в любой точке s, S_N — сумма первых N членов ряда.

Теорема 2.5. [7] Пусть $m = (m_1, ..., m_n)$ – вектор с целыми положительными компонентами и функция $f \in C(\Omega)$ вместе со своими частными производными $f^{(k)}(s) = \frac{\partial^{|k|} f(s)}{\partial s_1^{k_1} \partial s_2^{k_2} ... \partial s_n^{k_n}}$ порядка $|k| \le |m|$ $(k_j \le m_j,\ j = 1, ..., n)$ включительно и выполняются неравенства

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Delta} |f^{(l)}(s)|^2 ds \le M^2 \tag{2.16}$$

для любого вектора $l = (l_1, ..., l_n)$, имеющего компоненты l_j равные нулю или же m_j. Тогда сумма Фурье $S_N(f; s)$ $(N = (N_1, ..., N_n))$ функции f отклоняется от $f(s)$ с оценкой

$$|f(s) - S_N(f; s)| \le cM \sum_{j=1}^{n} (N_j + 1)^{-m_j + \frac{1}{2}}, \tag{2.17}$$

где c не зависит от M и N_j и зависит только от m.

Следствие 2.1. [7] Если функция f и ее частные производные вида $\frac{\partial f}{\partial s_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial s_n}$ принадлежит к $C(\Omega)$, то кратный ряд Фурье функции f сходится равномерно на Δ, к функции $f(s)$.

Лемма 2.1. [7] Если ряд

$$f_0(s) + f_1(s) + ...$$

непрерывных на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функций сходится в смысле среднего квадратического к непрерывной функции $S(s)$ и в то же время он сходится равномерно на Ω к функции $\varphi(s)$, то для всех точек $s \in \Omega$

$$S(s) = \varphi(s). \tag{2.18}$$

Метод Фурье для функции многих независимых переменных

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область n-мерного пространства с гладкой границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим оператор

$$Lf = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s_i} \left(A_{ij} \frac{\partial f}{\partial s_j} \right) - C(s_1, ..., s_n) f, \tag{2.19}$$

где A_{ij} постоянные, с граничным условиям в виде

$$f|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.20}$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} + \sigma f|_s = 0, \tag{2.21}$$

где σ – постоянная, $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial f}{\partial s_j} \cos(\nu, s_i)$.

Оператор Lf предполагается эллиптическим, то есть

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} a_i a_i \geq c \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad c = const > 0. \tag{2.22}$$

Определение 2.4. [1] Если $f(s_1, ..., s_n)$ абсолютно интегрируема по области Ω, то ее рядом Фурье по собственным функциям оператора L называется ряд

$$f(s_1, ..., s_n) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n(s), \quad c_n = \int\limits_{\Omega} f(s_1, ..., s_n) \varphi_n(s_1, ..., s_n) ds. \tag{2.23}$$

Замечание 2.1. [1] Если $f(s)$ квадратично интегрируема, то ряд (2.23) сходится к ней в смысле среднего квадратичного

$$\int\limits_{\Omega} |f - \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n|^2 ds \to 0, \tag{2.24}$$

и имеет место формула замкнутости (формула Парсеваля)

$$\int\limits_{\Omega} |f(s)|^2 ds = \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2. \tag{2.25}$$

Теорема 2.6. [1] Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса C^∞, тогда ряд Фурье (2.23) сходится равномерно и допускает m-кратное почленное дифференцирование, если в случае краевого условия $f|_{\partial\Omega} = 0$ функция f имеет $2m + 2[\frac{n}{2}]$ непрерывных производных и

$$f|_{\partial\Omega} = Lf|_{\partial\Omega} = ... = L^{\left[\frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{m}{2}\right]} f|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.26}$$

В случае краевого условия $\frac{\partial f}{\partial n} + \sigma u|_{\partial\Omega} = 0$ ряд (2.23) сходится и допускает m-кратное почленное дифференцирование, если

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial n} + \sigma f\right\}|_{\partial\Omega} = ... = \left\{\frac{\partial}{\partial n} L^{\left[\frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{m-1}{2}\right]} f + \sigma L \left[\frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{m-1}{2}\right] f\right\}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.27}$$

3. Задача Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа на прямоугольнике

Рассмотрим задачи Штурма – Лиувилля с разными граничными условиями.

3.1. Требуется найти собственные функции и собственные значения задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа на прямоугольнике:

$$X''_{s_1s_1} + X''_{s_2s_2} = \lambda X, \quad s_1 \in (0, l_1), \quad s_2 \in (0, l_2), \tag{3.1}$$

$$X(0, s_2) = X(l_1, s_2) = X(s_1, 0) = X(s_1, l_2) = 0. \tag{3.2}$$

Задача решается методом разделения переменных. Представим

$$X(s_1, s_2) = X_1(s_1)X_2(s_2). \tag{3.3}$$

Подставим данное выражение в ДУ (3.1). В итоге получим

$$\frac{X_1''}{X_1} = -\frac{X_2''}{X_2} + \lambda = \mu. \tag{3.4}$$

Для функции $X_1(s_1)$ получим задачу:

$$\begin{cases} X_1'' - \mu X_1 = 0, \ s_1 \in (0, l_1), \\ X_1(s_1) \mid_{s_1=0} = 0, \\ X_1(s_1) \mid_{s_1=l_1} = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Общее решение уравнения $X_1'' - \mu X_1 = 0$, имеет вид

$$X_1(s_1) = C_1 s_1 + C_2, \quad \mu = 0; \tag{3.6}$$

$$X_1(s_1) = C_1 e^{\sqrt{\mu} s_1} + C_2 e^{-\sqrt{\mu} s_1}, \quad \mu > 0; \tag{3.7}$$

$$X_1(s_1) = C_1 \cos(\sqrt{-\mu} s_1) + C_2 \sin(\sqrt{-\mu} s_1), \quad \mu < 0. \tag{3.8}$$

Проанализируем три случая:

1) При $\mu = 0$ получаем из краевого условия $X_1(0) = 0$, что

$$C_2 = 0 \Rightarrow X_1(s_1) = C_1 s_1.$$

Вследствие этого из второго краевого условия $X_1(l_1) = 0$ получаем,что $C_1 = 0$, т.е. задача Штурма – Лиувилля (3.5) имеет только тривиальное решение.

2) При $\mu > 0$ получаем из краевого условия $X_1(0) = 0$, что

$$C_1 = -C_2 \Rightarrow X_1(s_1) = C_2 e^{\sqrt{\mu} s_1} - C_2 e^{-\sqrt{\mu} s_1}.$$

Вследствие этого из второго краевого условия $X_1(l_1) = 0$ получаем, что $C_2 = 0$, т.е. задача Штурма – Лиувилля (3.5) имеет только тривиальное решение.

3) При $\mu < 0$ имеем из краевого условия $X_1(0) = 0$, что

$$C_1 = 0 \Rightarrow X_1(s_1) = C_2 \sin(\sqrt{-\mu} s_1).$$

Поэтому из второго краевого условия $X_1(l_1) = 0$ получаем, что $\sqrt{-\mu} l_1 = \pi n$, откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

$$\mu_n = -\left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2, \ n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_{1n}(s_1) = C_n^1 \sin\left(\frac{\pi n}{l_1} s_1\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Итак, выпишем собственные значение и собственные функции задачи (3.5):

$$X_{1n}(s_1) = C_n^1 \sin\left(\frac{\pi n}{l_1} s_1\right), \quad n = 1, 2..., \tag{3.9}$$

$$\mu_n = -\left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2, \quad n = 1, 2... \tag{3.10}$$

Для функции $X_2(s_2)$ получим задачу:

$$\begin{cases} X_2'' + \upsilon X_2 = 0, \ s_2 \in (0, l_2), \\ X_2(s_2) \mid_{s_2=0} = 0, \\ X_2(s_2) \mid_{s_2=l_2} = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

где $\upsilon = \mu - \lambda$.

Общее решение уравнения $X_2'' + \upsilon X_2 = 0$, имеет вид

$$X_2(s_2) = C_1 s_2 + C_2, \quad \upsilon = 0; \tag{3.12}$$

$$X_2(s_2) = C_1 e^{\sqrt{\upsilon} s_2} + C_2 e^{-\sqrt{\upsilon} s_2}, \quad \upsilon > 0; \tag{3.13}$$

$$X_2(s_2) = C_1 \cos(\sqrt{-\upsilon} s_1) + C_2 \sin(\sqrt{-\upsilon} s_2), \quad \upsilon < 0. \tag{3.14}$$

Проанализируем три случая:

1) При $\upsilon = 0$ имеем из краевого условия $X_2(0) = 0$, что

$$C_2 = 0 \Rightarrow X_2(s_2) = C_2 s_2.$$

Поэтому из второго краевого условия условия $X_2(l_2) = 0$ получаем,что $C_2 = 0$, т.е. задача Штурма – Лиувилля (3.11) имеет только тривиальное решение.

2) При $\upsilon > 0$ имеем из краевого условия $X_2(0) = 0$, что

$$C_1 = -C_2 \Rightarrow X_2(s_2) = C_2 e^{\sqrt{\upsilon} s_2} - C_2 e^{-\sqrt{\upsilon} s_2}.$$

Поэтому из второго краевого условия $X_2(l_2) = 0$ получаем, что $C_2 = 0$, т.е. задача Штурма – Лиувилля (3.11) имеет только тривиальное решение.

3) При $\upsilon < 0$ имеем из краевого условия $X_2(0) = 0$, что

$$C_1 = -C_2 \Rightarrow X_2(s_2) = C_2 \sin(\sqrt{-\upsilon} s_2).$$

Поэтому из второго краевого условия $X_2(l_2) = 0$ получаем, что $\sqrt{-\upsilon} l_2 = \pi m$, откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

$$\upsilon_m = -\left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_{2m}(s_2) = C_m^2 \sin\left(\frac{\pi m}{l_2} s_2\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Итак, выпишем собственные значение и собственные функции задачи (3.11):

$$X_{2m}(s_2) = C_m^2 \sin\left(\frac{\pi m}{l_2} s_2\right), \quad m = 1, 2..., \tag{3.15}$$

$$\upsilon_m = -\left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2, \quad m = 1, 2... \tag{3.16}$$

Тогда собственные значения задачи Штурма – Лиувилля (3.1), (3.2) для прямоугольника:

$$X_{nm}(s_1, s_2) = C_{nm} \sin\left(\frac{\pi n}{l_1} s_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{l_2} s_2\right). \tag{3.17}$$

$$\lambda_{nm} = -\left[\left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2\right], \quad \lambda_{nm} = \mu_n - \upsilon_m. \tag{3.18}$$

Из условия ортонормированности системы

$$\| u_{nm} \|^2_{L_{2(\Omega)}} = C_{mn}^2 \int_0^{l^1} ds_1 \int_0^{l^2} X_{n_2,m_2}(s_1, s_2) ds_2 = \begin{cases} 1, \ n_1 \neq n_2, m_1 \neq m_2, \\ 0, \ n_1 = n_2, m_1 = m_2, \end{cases} \tag{3.19}$$

найдем значения коэффициентов

$$C_{mn}^2 \frac{l_1 l_2}{4} = 1, \quad C_{mn} = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sqrt{\frac{2}{l_2}}. \tag{3.20}$$

3.2. Требуется найти собственные функции и собственные значения задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа на прямоугольнике

$$X''_{s_1 s_1} + X''_{s_2 s_2} = \lambda X, \quad s_1 \in (0, l_1), \quad s_2 \in (0, l_2), \tag{3.21}$$

$$X'(0, s_2) = X'(l_1, s_2) = X'(s_1, 0) = X'(s_1, l_2) = 0. \tag{3.22}$$

Задача решается методом разделения переменных. Представим

$$X(s_1, s_2) = X_1(s_1) X_2(s_2). \tag{3.23}$$

Подставим данное выражение в ДУ (3.21). Отсюда получим

$$\frac{X_1''}{X_1} = -\frac{X_2''}{X_2} + \lambda = \mu. \tag{3.24}$$

Для функции $X_1(s_1)$ получим задачу:

$$\begin{cases} X_1'' - \mu X_1 = 0, \ s_1 \in (0, l_1), \\ X_1'(s_1) \mid_{s_1=0} = 0, \\ X_1'(s_1) \mid_{s_1=l_1} = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Общее решение уравнения $X_1'' - \mu X_1 = 0$, имеет вид

$$X_1(s_1) = C_1 s_1 + C_2, \quad \mu = 0; \tag{3.26}$$

$$X_1(s_1) = C_1 e^{\sqrt{\mu} s_1} + C_2 e^{-\sqrt{\mu} s_1}, \quad \mu > 0; \tag{3.27}$$

$$X_1(s_1) = C_1 \cos(\sqrt{-\mu} s_1) + C_2 \sin(\sqrt{-\mu} s_1), \quad \mu < 0. \tag{3.28}$$

Проанализируем три случая:

1) При $\mu = 0$, $X_1'(s_1) = C_1$, из первого краевого условия $X_1'(0) = 0$, получаем что

$$C_1 = 0 \Rightarrow X_1'(s_1) = C_2.$$

Второе краевое условие $X_1'(l_1) = 0$ выполнено, поэтому задача Штурма – Лиувилля (3.25) имеет собственное число, равное нулю: $\mu_0 = 0$, ему соответствует собственная функция $X_1(s_1) \equiv \frac{1}{l_1}$.

2) При $\mu > 0$,

$$X_1'(s_1) = \sqrt{\mu} C_1 e^{\sqrt{\mu} s_1} - \sqrt{\mu} C_2 e^{-\sqrt{\mu} s_1},$$

из первого краевого условия $X_1'(0) = 0$ получаем, что $C_1 = C_2$, а из второго краевого условия $X_1'(l_1) = 0$ получаем, что

$$C_1 = 0, \ C_2 = 0, \quad X \equiv 0,$$

т.е. задача Штурма – Лиувилля (3.25) имеет только тривиальное решение.

3) При $\mu < 0$,

$$X_1'(s_1) = \sqrt{-\mu}C_1 \sin(\sqrt{-\mu}s_1) - \sqrt{\mu}C_2 \cos(\sqrt{-\mu}s_1),$$

из первого краевого условия $X_1'(0) = 0$, получаем $C_2 = 0$. Поэтому из второго краевого условия $X_1'(l_1) = 0$ получаем, что

$$\sqrt{-\mu}l_1 = \pi n,$$

откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

$$\mu_n = -\left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_{1n}(s_1) = C_n^1 \cos\left(\frac{\pi n}{l_1}s_1\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Итак, выпишем собственные значение и собственные функции задачи (3.25):

$$X_{1n}(s_1) = C_n^1 \cos\left(\frac{\pi n}{l_1}s_1\right), \quad n = 0, 1, 2..., \tag{3.29}$$

$$\mu_n = -\left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2... \tag{3.30}$$

Для функции $X_2(s_2)$ получим задачу:

$$\begin{cases} X_2'' + \upsilon X_2 = 0, \ s_2 \in (0, l_2), \\ X_2'(s_2) \mid_{s_2=0} = 0, \\ X_2'(s_2) \mid_{s_2=l_2} = 0, \end{cases} \tag{3.31}$$

где $\upsilon = \mu - \lambda$.

Общее решение уравнения $X_2'' + \upsilon X_2 = 0$, имеет вид

$$X_2(s_2) = C_1 s_2 + C_2, \quad \upsilon = 0; \tag{3.32}$$

$$X_2(s_2) = C_1 e^{\sqrt{\upsilon}s_2} + C_2 e^{-\sqrt{\upsilon}s_2}, \quad \upsilon > 0; \tag{3.33}$$

$$X_2(s_2) = C_1 \cos(\sqrt{-\upsilon}s_1) + C_2 \sin(\sqrt{-\upsilon}s_2), \quad \upsilon < 0. \tag{3.34}$$

Проанализируем три случая:

1) При $\upsilon = 0$,

$$X_2'(s_2) = C_1,$$

из первого краевого условия $X_2'(0) = 0$, получаем $C_1 = 0 \Rightarrow X_2'(s_2) = C_2$. Второе краевое условие $X_2'(l_2) = 0$ выполнено, поэтому задача Штурма – Лиувилля (3.31) имеет собственное число,равное нулю: $\upsilon_0 = 0$, ему соответствует собственная функция $X_2(s_2) \equiv \frac{1}{l_2}$.

2) При $\upsilon > 0$,

$$X_2'(s_2) = \sqrt{\upsilon}C_1 e^{\sqrt{\upsilon}s_2} - \sqrt{\upsilon}C_2 e^{-\sqrt{\upsilon}s_2},$$

из первого краевого условия $X_2'(0) = 0$ получаем, что $C_1 = C_2$, а из второго краевого условия $X_2'(l_2) = 0$ получаем, что задача Штурма – Лиувилля (3.31) имеет только тривиальное решение.

3) При $\upsilon < 0$ имеем из краевого условия

$$X_2'(0) = 0,\ C_1 = 0 \Rightarrow C_2 \cos(\sqrt{-\upsilon} s_2),$$

$$X_2'(s_2) = -C_2\sqrt{-\upsilon}\sin(\sqrt{-\upsilon} s_2).$$

Поэтому из второго краевого условия $X_2(l_2) = 0$ получаем, что $\sqrt{-\upsilon} l_2 = \pi m$, откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

$$\upsilon_m = -\left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2, \quad m \in 0, 1, 2...$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_{2m}(s_2) = C_m^2 \cos\left(\frac{\pi m}{l_2} s_2\right), \ \ m \in 0, 1, 2...$$

Итак, выпишем собственные значение и собственные функции задачи (3.31):

$$X_{2m}(s_2) = C_m^2 \cos\left(\frac{\pi m}{l_2} s_2\right), \ \ m = 0, 1, 2..., \tag{3.35}$$

$$\upsilon_m = -\left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2, \ \ m = 0, 1, 2... \tag{3.36}$$

Тогда собственные значения задачи Штурма – Лиувилля (3.21), (3.22) для прямоугольника:

$$X_{nm}(s_1, s_2) = C_{nm} \cos\left(\frac{\pi n}{l_1} s_1\right) \cos\left(\frac{\pi m}{l_2} s_2\right). \tag{3.37}$$

$$\lambda_{nm} = -\left[\left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2\right], \quad \lambda_{nm} = \mu_n - \upsilon_m. \tag{3.38}$$

Из условия ортонормированности системы

$$\| u_{nm} \|^2_{L_2(\Omega)} = C_{mn}^2 \int\limits_0^{l^1} ds_1 \int\limits_0^{l^2} X_{n_2, m_2}(s_1, s_2) ds_2 = \begin{cases} 1,\ n_1 \neq n_2, m_1 \neq m_2, \\ 0,\ n_1 = n_2, m_1 = m_2, \end{cases} \tag{3.39}$$

найдем значения коэффициентов

$$C_{mn}^2 \frac{l_1 l_2}{4} = 1, \quad C_{mn} = \sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}. \tag{3.40}$$

3.3. Требуется найти собственные функции и собственные значения задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа на прямоугольнике

$$X''_{s_1 s_1} + X''_{s_2 s_2} = \lambda X, \quad s_1 \in (0, l_1), \quad s_2 \in (0, l_2), \tag{3.41}$$

$$X'(0, s_2) = X(l_1, s_2) = X'(s_1, 0) = X(s_1, l_2) = 0. \tag{3.42}$$

Задача решается методом разделения переменных. Найдем

$$X(s_1, s_2) = X_1(s_1) X_2(s_2). \tag{3.43}$$

Подставим данное выражение в ДУ (3.41). Отсюда получим

$$\frac{X_1''}{X_1} = -\frac{X_2''}{X_2} + \lambda = \mu. \tag{3.44}$$

Для функции $X_1(s_1)$ получим задачу:

$$\begin{cases} X_1'' - \mu X_1 = 0, \ s_1 \in (0, l_1), \\ X_1'(s_1) \mid_{s_1=0} = 0, \\ X_1(s_1) \mid_{s_1=l_1} = 0. \end{cases} \tag{3.45}$$

Общее решение уравнения $X_1'' - \mu X_1 = 0$, имеет вид

$$X_1(s_1) = C_1 s_1 + C_2, \quad \mu = 0; \tag{3.46}$$

$$X_1(s_1) = C_1 e^{\sqrt{\mu} s_1} + C_2 e^{-\sqrt{\mu} s_1}, \quad \mu > 0; \tag{3.47}$$

$$X_1(s_1) = C_1 \cos(\sqrt{-\mu} s_1) + C_2 \sin(\sqrt{-\mu} s_1), \quad \mu < 0. \tag{3.48}$$

Проанализируем три случая:

1) При $\mu = 0$, $X_1'(s_1) = C_1$ из первого краевого условия $X_1'(0) = 0$, получаем

$$C_1 = 0 \Rightarrow X_1'(s_1) = C_2.$$

Второе краевое условие $X_1(l_1) = C_2$ выполнено, поэтому из второго краевого условия получаем, что $C_2 = 0$.

2) При $\mu > 0$,

$$X_1'(s_1) = \sqrt{\mu} C_1 e^{\sqrt{\mu} s_1} - \sqrt{\mu} C_2 e^{-\sqrt{\mu} s_1},$$

из первого краевого условия $X_1'(0) = 0$ получаем, что $C_1 = C_2$, а из второго краевого условия $X_1(l_1) = 0$ получаем, что $C_1 = 0, \ C_2 = 0, \ X \equiv 0$ т.е. задача Штурма – Лиувилля (3.45) не имеет нетривиальных решений при $\mu > 0$.

3) При $\mu < 0$,

$$X_1'(s_1) = \sqrt{-\mu} C_1 \sin(\sqrt{-\mu} s_1) - \sqrt{\mu} C_2 \cos(\sqrt{-\mu} s_1),$$

из первого краевого условия $X_1'(0) = 0$, получаем $C_2 = 0$. Поэтому из второго краевого условия $X_1(l_1) = 0$ получаем, что

$$\sqrt{-\mu} l_1 = \pi \left(-\frac{1}{2} + n \right),$$

откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

$$\mu_n = -\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1}\right)^2, \ n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_{1n}(s_1) = C_n^1 \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1}s_1\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Итак, выпишем собственные значение и собственные функции задачи (3.45):

$$X_{1n}(s_1) = C_n^1 \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1}s_1\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.49}$$

$$\mu_n = -\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1}\right)^2, \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.50}$$

Для функции $X_2(s_2)$ получим задачу:

$$\begin{cases} X_2'' + \upsilon X_2 = 0, \ s_2 \in (0, l_2), \\ X_2'(s_2) \mid_{s_2=0} = 0, \\ X_2(s_2) \mid_{s_2=l_2} = 0, \end{cases} \tag{3.51}$$

где $\upsilon = \mu - \lambda$.

Общее решение уравнения $X_2'' + \upsilon X_2 = 0$, имеет вид

$$X_2(s_2) = C_1 s_2 + C_2, \quad \upsilon = 0; \tag{3.52}$$

$$X_2(s_2) = C_1 e^{\sqrt{\upsilon}s_2} + C_2 e^{-\sqrt{\upsilon}s_2}, \quad \upsilon > 0; \tag{3.53}$$

$$X_2(s_2) = C_1 \cos(\sqrt{-\upsilon}s_2) + C_2 \sin(\sqrt{-\upsilon}s_2), \quad \upsilon < 0. \tag{3.54}$$

Проанализируем три случая:

1) При $\upsilon = 0$,

$$X_2'(s_2) = C_1,$$

из первого краевого условия $X_2'(0) = 0$, получаем $C_2 = 0$. Второе краевое условие $X_2(l_2) = 0$ выполнено, поэтому задача Штурма – Лиувилля (3.51) не имеет нетривиальных решений при $\upsilon = 0$.

2) При $\upsilon > 0$,

$$X_2'(s_2) = \sqrt{\mu} C_1 e^{\sqrt{\upsilon}s_2} - \sqrt{\upsilon} C_2 e^{-\sqrt{\upsilon}s_2},$$

из первого краевого условия $X_2'(0) = 0$ получаем, что $C_1 = C_2$, а из второго краевого условия $X_2(l_2) = 0$ получаем, что $C_1 = 0, \ C_2 = 0, \ X \equiv 0$ т.е. задача Штурма – Лиувилля (3.51) не имеет нетривиальных решений при $\upsilon > 0$.

3) При $\upsilon < 0$,

$$X_2'(s_2) = C_1\sqrt{-\upsilon}\sin(\sqrt{-\upsilon}s_2) - C_2\sqrt{\upsilon}\cos(\sqrt{-\upsilon}s_2),$$

из первого краевого условия $X_2'(0) = 0$, $C_2 = 0$. Поэтому из второго краевого условия $X_2(l_2) = 0$ получаем, что

$$\sqrt{\upsilon}l_2 = \pi\left(-\frac{1}{2} + m\right),$$

откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

$$\upsilon_m = -\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_2}\right)^2, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_{2m}(s_2) = C_m^2\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_2}s_2\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Итак, выпишем собственные значение и собственные функции задачи (3.51):

$$X_{2m}(s_2) = C_m^2\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_2}s_2\right), \quad m = 1, 2..., \tag{3.55}$$

$$\upsilon_m = -\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_2}\right)^2, \qquad m = 1, 2... \tag{3.56}$$

Тогда собственные значения задачи Штурма – Лиувилля (3.41), (3.42) для прямоугольника:

$$X_{nm}(s_1, s_2) = C_{n,m}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1}s_1\right)\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_2}s_2\right). \tag{3.57}$$

$$\lambda_{nm} = -\left[\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_2}\right)^2\right], \quad \lambda_{nm} = \mu_n - \upsilon_m. \tag{3.58}$$

$$\| u_{nm} \|^2_{L_{2(\Omega)}} = C_{mn}^2\int\limits_0^{l^1} ds_1\int\limits_0^{l^2} X_{n_2,m_2}(s_1, s_2)ds_2 = \begin{cases} 1, \ n_1 \neq n_2, m_1 \neq m_2, \\ 0, \ n_1 = n_2, m_1 = m_2. \end{cases} \tag{3.59}$$

$$C_{mn}^2\frac{l_1l_2}{4} = 1, \quad C_{mn} = \sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}. \tag{3.60}$$

3.4. Требуется найти собственные функции и собственные значения задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа на прямоугольнике

$$X''_{s_1s_1} + X''_{s_2s_2} = \lambda X, \quad s_1 \in (0, l_1), \quad s_2 \in (0, l_2), \tag{3.61}$$

$$X(0, s_2) = X'(l_1, s_2) = X(s_1, 0) = X'(s_1, l_2) = 0. \tag{3.62}$$

Задача решается методом разделения переменных. Найдем

$$X(s_1, s_2) = X_1(s_1)X_2(s_2). \tag{3.63}$$

Подставим данное выражение в ДУ (3.61). Отсюда получим

$$\frac{X_1''}{X_1} = -\frac{X_2''}{X_2} + \lambda = \mu. \tag{3.64}$$

Для функции $X_1(s_1)$ преобразуем задачу:

$$\begin{cases} X_1'' - \mu X_1 = 0, \ s_1 \in (0, l_1), \\ X_1(s_1) \mid_{s_1=0} = 0, \\ X_1'(s_1) \mid_{s_1=l_1} = 0. \end{cases} \tag{3.65}$$

Общее решение уравнения $X_1'' - \mu X_1 = 0$, имеет вид

$$X_1(s_1) = C_1 s_1 + C_2, \quad \mu = 0; \tag{3.66}$$

$$X_1(s_1) = C_1 e^{\sqrt{\mu} s_1} + C_2 e^{-\sqrt{\mu} s_1}, \quad \mu > 0; \tag{3.67}$$

$$X_1(s_1) = C_1 \cos(\sqrt{-\mu} s_1) + C_2 \sin(\sqrt{-\mu} s_1), \quad \mu < 0. \tag{3.68}$$

Проанализируем три случая:

1) При $\mu = 0$, $X_1'(s_1) = C_1$ из первого краевого условия $X_1(0) = 0$, получаем $C_2 = 0$. Второе краевое условие $X_1'(l_1) = 0, C_1 = 0$ выполнено, поэтому из первого краевого условия получаем, что $C_2 = 0$, т.е. задача Штурма – Лиувилля (3.65) не имеет нетривиальных решений при $\mu = 0$.

2) При $\mu > 0$,

$$X_1'(s_1) = \sqrt{\mu} C_1 e^{\sqrt{\mu} s_1} - \sqrt{\mu} C_2 e^{\sqrt{-\mu} s_1},$$

из первого краевого условия $X_1(0) = 0$ получаем, что $C_1 = -C_2$, а из второго краевого условия $X_1'(l_1) = 0$ получаем, что $C_1 = 0, \ C_2 = 0, X \equiv 0$ т.е. задача Штурма – Лиувилля (3.65) не имеет нетривиальных решений при $\mu > 0$.

3) При $\mu < 0$,

$$X_1'(s_1) = \sqrt{-\mu} C_1 \sin(\sqrt{-\mu} s_1) - \sqrt{\mu} C_2 \cos(\sqrt{-\mu} s_1),$$

из первого краевого условия $X_1(0) = 0$, получаем $C_2 = 0$. Поэтому из второго краевого условия $X_1'(l_1) = 0$ получаем, что

$$\sqrt{\mu} l_1 = \pi \left(-\frac{1}{2} + n \right),$$

откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

$$\mu_n = -\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1} \right)^2, \ n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_{1n}(s_1) = C_n^1 \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1} s_1 \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Итак, выпишем собственные значение и собственные функции задачи (3.65):

$$X_{1n}(s_1) = C_n^1 \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1} s_1 \right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.69}$$

$$\mu_n = -\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.70}$$

Для функции $X_2(s_2)$ преобразуем задачу:

$$\begin{cases} X_2'' + \upsilon X_2 = 0, \ s_2 \in (0, l_2), \\ X_2(s_2) \mid_{s_2=0} = 0, \\ X_2'(s_2) \mid_{s_2=l_2} = 0, \end{cases} \tag{3.71}$$

где $\upsilon = \mu - \lambda$.

Общее решение уравнения $X_2'' + \upsilon X_2 = 0$, имеет вид

$$X_2(s_2) = C_1 s_2 + C_2, \quad \upsilon = 0; \tag{3.72}$$

$$X_2(s_2) = C_1 e^{\sqrt{\upsilon}s_2} + C_2 e^{-\sqrt{\upsilon}s_2}, \quad \upsilon > 0; \tag{3.73}$$

$$X_2(s_2) = C_1 \cos(\sqrt{-\upsilon}s_1) + C_2 \sin(\sqrt{-\upsilon}s_2), \quad \upsilon < 0. \tag{3.54}$$

Проанализируем три случая:

1) При $\upsilon = 0$, $X_2'(s_2) = C_1$ из первого краевого условия $X_2(0) = 0$, получаем $C_2 = 0$. Второе краевое условие $X_2'(l_2) = 0$ выполнено, поэтому задача Штурма – Лиувилля (3.71) не имеет нетривиальных решений при $\upsilon = 0$.

2) При $\upsilon > 0$,

$$X_2'(s_2) = \sqrt{\upsilon}C_1 e^{\sqrt{\upsilon}s_2} - \sqrt{\upsilon}C_2 e^{-\sqrt{\upsilon}s_2}.$$

Из первого краевого условия $X_2(0) = 0$ получаем, что $C_1 = C_2$, а из второго краевого условия $X_2'(l_2) = 0$ получаем, что $C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ X \equiv 0$ т.е. задача Штурма – Лиувилля (3.71) не имеет нетривиальных решений при $\upsilon > 0$.

3) При $\upsilon < 0$,

$$X_2'(s_2) = C_1\sqrt{-\upsilon}\sin(\sqrt{-\upsilon}s_2) - C_2\sqrt{\upsilon}\cos(\sqrt{-\upsilon}s_2),$$

из первого краевого условия $X_2(0) = 0,\ C_2 = 0$.

Поэтому из второго краевого условия $X_2'(l_2) = 0$ получаем, что

$$\sqrt{\upsilon}l_2 = \pi\left(-\frac{1}{2} + m\right),$$

откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля:

$$\upsilon_m = -\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_2}\right)^2, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_{2m}(s_2) = C_m^2 \sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_2}s_2\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Итак, выпишем собственные значение и собственные функции задачи (3.71):

$$X_{2m}(s_2) = C_m^2 \sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_2}s_2\right), \quad m = 1, 2..., \tag{3.75}$$

$$\upsilon_m = -\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_2}\right)^2, \quad m = 1, 2... \tag{3.76}$$

Тогда собственные значения задачи Штурма – Лиувилля (3.61), (3.62) для прямоугольника:

$$X_{nm}(s_1, s_2) = C_{nm} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1} s_1\right) \sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_2} s_2\right). \tag{3.77}$$

$$\lambda_{nm} = -\left[\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_2}\right)^2\right], \quad \lambda_{nm} = \mu_n - \upsilon_m. \tag{3.78}$$

Из условия ортонормированности системы

$$\| u_{nm} \|^2_{L_{2(\Omega)}} = C^2_{mn} \int\limits_0^{l^1} ds_1 \int\limits_0^{l^2} X_{n_2,m_2}(s_1, s_2) ds_2 = \begin{cases} 1, \ n_1 \neq n_2, m_1 \neq m_2, \\ 0, \ n_1 = n_2, m_1 = m_2, \end{cases} \tag{3.79}$$

найдем значения коэффициентов

$$C^2_{mn} \frac{l_1 l_2}{4} = 1, \quad C_{mn} = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sqrt{\frac{2}{l_2}}. \tag{3.80}$$

Оставшиеся примеры, решаются аналогично.

3.5. Требуется найти собственные функции и собственные значения задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа на прямоугольнике

$$X''_{s_1 s_1} + X''_{s_2 s_2} = \lambda X, \quad s_1 \in (0, l_1), \quad s_2 \in (0, l_2), \tag{3.81}$$

$$X'(0, s_2) = X'(l_1, s_2) = X(s_1, 0) = X(s_1, l_2) = 0. \tag{3.82}$$

Итак, выпишем собственные значения задачи Штурма – Лиувилля (3.81), (3.82) для прямоугольника:

$$X_{nm}(s_1, s_2) = C_{nm} \cos\left(\frac{\pi n}{l_1} s_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{l_2} s_2\right). \tag{3.83}$$

$$\lambda_{nm} = -\left[\left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2\right], \quad \lambda_{nm} = \mu_n - \upsilon_m, \quad m = 1, 2..., n = 0, 1, 2, ... \tag{3.84}$$

3.6. Требуется найти собственные функции и собственные значения задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа на прямоугольнике

$$X''_{s_1 s_1} + X''_{s_2 s_2} = \lambda X, \quad s_1 \in (0, l_1), \quad s_2 \in (0, l_2), \tag{3.85}$$

$$X(0, s_2) = X(l_1, s_2) = X'(s_1, 0) = X'(s_1, l_2) = 0. \tag{3.86}$$

Итак, выпишем собственные значения задачи Штурма – Лиувилля (3.85), (3.86) для прямоугольника:

$$X_{nm}(s_1, s_2) = C_{nm} \cos\left(\frac{\pi n}{l_1} s_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{l_2} s_2\right). \tag{3.87}$$

$$\lambda_{nm} = -\left[\left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2\right], \quad \lambda_{nm} = \mu_n - \upsilon_m, \quad m = 1, 2..., \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.88}$$

3.7. Требуется найти собственные функции и собственные значения задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа на прямоугольнике

$$X''_{s_1 s_1} + X''_{s_2 s_2} = \lambda X, \quad s_1 \in (0, l_1), \quad s_2 \in (0, l_2), \tag{3.89}$$

$$X(0, s_2) = X'(l_1, s_2) = X'(s_1, 0) = X(s_1, l_2) = 0. \tag{3.90}$$

Итак, выпишем собственные значения задачи Штурма – Лиувилля (3.89), (3.90) для прямоугольника:

$$X_{nm}(s_1, s_2) = C_{nm} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1} s_1\right) \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_1} s_2\right). \tag{3.91}$$

$$\lambda_{nm} = -\left[\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi(2m-1)}{2l_2}\right)^2\right], \quad \lambda_{nm} = \mu_n - \upsilon_m, \ m = 1, 2..., \quad n = 1, 2, 3... \tag{3.92}$$

4. Трехточечная начально-конечная задача

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$.

Определение 4.1. [9] *L-резольвентным множеством* оператора M называется множество $p^L(M) = \{\mu \in \ \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \ \mathfrak{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})\}$. Множество $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \backslash p^L(M)$ называется *L-спектром оператора M.*

Определение 4.2. [9] Оператор M называется ограниченным относительно оператора L ((L, σ)-ограниченным), если $\exists a \in \mathbb{R}_+,\ \forall \mu \in \mathbb{C}\ (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M))$.

Построим операторы:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R^L_\mu(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} L^L_\mu(M) d\mu, \tag{4.1}$$

где $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} :\ |\mu| = r > a\}$,

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}\ L - \textit{правая},$$

$$L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1} - \textit{левая},$$

L-резольвенты оператора M.

Лемма 4.1. [9] Пусть оператор $M(L, \sigma)$-ограничен, тогда операторы $P \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ – проекторы.

Условие 4.1. *Пусть* $\sigma^L(M) = \bigcup\limits_{m=1}^{3} \sigma^L_m(M)$, *причем* $\sigma^L_m(M) \neq 0, \ \ m = 1, 2, 3,$ *и существуют замкнутые контуры* $\gamma_m \subset \mathbb{C}$, *ограничивающие области* $D_m \supset \sigma^L_m(M)$, $m = 2, 3$ *такие, что* $\overline{D}_m \cap \sigma^L_1(M) = \emptyset$ и $\overline{D_2} \cap \overline{D}_5 = \emptyset$ (см. рис. 5).

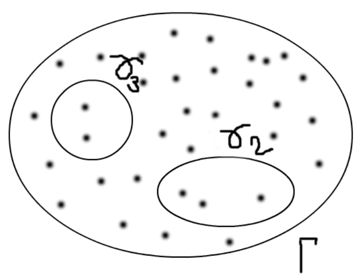

Рис. 5. Относительный спектр (L, σ)-ограниченного оператора М

Аналогично (4.1) построим операторы:

$$P_m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_m} R^L_\mu(M) d\mu, \quad Q_m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_m} L^L_\mu(M) d\mu, \ m = 2, 3, \tag{4.2}$$

и операторы $P_1 = P - P_2 - P_3, \quad Q_1 = Q - Q_2 - Q_3$.

Лемма 4.2. [9] Пусть операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ и оператор $M(L,\sigma)$-ограничен, причем выполнено условие 4.1. Тогда P_m и Q_m, $m = 1, ..., 3$ – проекторы.

Рассмотрим пространства

$$\mathfrak{U} = \{u \in W_2^{k+2}(\Omega) : \ u(s) = 0, \ s \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = W_2^k(\Omega) \tag{4.3}$$

и построим операторы

$$L = \lambda + \Delta, \quad M = \alpha\Delta. \tag{4.4}$$

Операторы $L, \ M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}_+, \ \lambda \in \mathbb{R}$ [11]. Тогда L-спектр оператора M примет вид [9]:

$$\sigma^L(M) = \{\mu_n \in \mathbb{C} : \ \mu_n = \frac{\alpha\lambda_n}{\lambda + \lambda_n}, \ \lambda \neq \lambda_n\}, \tag{4.5}$$

где $\{\lambda_n\}$ — собственные значения однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ, занумерованные по неубыванию с учетом кратности, а $\{\varphi_n\}$ — соответствующие им собственные функции.

В силу условия 4.1 проекторы

$$P_m u = \sum_{n:\mu_n \in \sigma_m^L} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n, \ m = \overline{1,3}. \tag{4.6}$$

Тогда в силу (4.6) трехточечное начально-конечное условие (0.3) примет вид:

$$\begin{gathered}
\sum_{n:\mu_n \in \sigma_1^L} \langle u(s_1, s_2, t_1) - u^1(s_1, s_2), \varphi_n(s_1, s_2) \rangle \varphi_n(s_1, s_2) = 0, \\
\sum_{n:\mu_n \in \sigma_2^L} \langle u(s_1, s_2, t_2) - u^2(s_1, s_2), \varphi_n(s_1, s_2) \rangle \varphi_n(s_1, s_2) = 0, \\
\sum_{n:\mu_n \in \sigma_3^L} \langle u(s_1, s_2, t_3) - u^3(s_1, s_2), \varphi_n(s_1, s_2) \rangle \varphi_n(s_1, s_2) = 0.
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Теорема 4.3. [11] При любых $\lambda \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \ u_m \in \mathfrak{U}, \ m = \overline{1,3}, \ f \in C^\infty((0,T); \mathfrak{F})$ трехточечная начально-конечная задача (4.7) для уравнения (0.1) с краевым условием (0.2) имеет единственное решение $u \in C^\infty((0,T); u)$.

5. Метод Галеркина решения трехточечной начально-конечной задачи для модели Баренблатта – Желтова – Кочиной на прямоугольнике

5.1. Рассмотрим начально-краевую задачу для однородного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в случае когда $\exists i, j : \lambda = \lambda_{ij}$.

Рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u, \quad 0 < s_1 < l_1,\ 0 < s_2 < l_2,\ t_1 < t \leq t_3. \tag{5.1}$$

Добавим к уравнению (5.1) граничные и начальные условия:

$$u(0, s_2, t) = u(l_1, s_2, t) = u(s_1, 0, t) = u(s_1, l_2, t) = 0,\ t_2 \in [t_1, t_3], \tag{5.2}$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_1^L} (u(s_1, s_2, t_1) - u^1(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \leq s_1 \leq l_1,\ 0 \leq s_2 \leq l_2,$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_2^L} (u(s_1, s_2, t_2) - u^2(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \leq s_1 \leq l_1,\ 0 \leq s_2 \leq l_2, \tag{5.3}$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_3^L} (u(s_1, s_2, t_3) - u^3(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \leq s_1 \leq l_1,\ 0 \leq s_2 \leq l_2,$$

где $u^1(s_1, s_2), u^2(s_1, s_2), u^3(s_1, s_2)$ – заданные функции.

Построим множества

$$Q = \{(s_1, s_2, t) :\ 0 < s_1 < l_1,\ 0 < s_2 < l_2,\ t_1 < t \leq t_3\},$$

$$\overline{Q} = \{(s_1, s_2, t) :\ 0 \leq s_1 \leq l_1,\ 0 \leq s_2 \leq l_2,\ t_1 \leq t \leq t_3\}.$$

Пусть функции $u^k(s_1, s_2),\ k = 1, 2, 3,$ удовлетворяют условиям: $u^k \in C^6(\Omega) : u^k|_{\partial\Omega} = \Delta u^k|_{\partial\Omega} = 0.$

Будем искать решение задачи (5.1) – (5.3) в виде

$$u(s_1, s_2, t) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_{nm}(t)\ \varphi_{nm}(s_1, s_2), \tag{5.4}$$

где функции $\varphi_{nm}(s_1, s_2)$ являются решением задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа на прямоугольнике. Собственные функции $\varphi_{nm}(s_1, s_2)$ соответствующей задачи Штурма – Лиувилля имеют вид

$$\varphi_{nm}(s_1, s_2) = \sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin\frac{\pi n s_1}{l_1} \sin\frac{\pi m s_2}{l_2},\ n = 1, 2, 3, ...,\ m = 1, 2, 3, ... \tag{5.5}$$

Далее будем находить решение задачи в виде суммы

$$u(s_1,s_2,t)=\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}u_{nm}(t)\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_1}{l_2}, \tag{5.6}$$

где функции $u_{nm}(t)$ неизвестны (их нужно определить подстановкой ряда (5.6) в исходное уравнение (5.1) и начальное условие (5.3)).

Представим функции $u^k(s_1,s_2)$, $k=1,2,3$ в виде их ряда Фурье:

$$u^k(s_1,s_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u^k_{nm}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}, \tag{5.7}$$

где

$$u^k_{nm}=\frac{2}{\sqrt{l_1}\sqrt{l_2}}\int\limits_0^{l_1}ds_1\int\limits_0^{l_2}u^k(s_1,s_2)\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}ds_2. \tag{5.8}$$

Подставляем ряд (5.6) в уравнение (5.1) и получим

$$\begin{gathered}\lambda\sum_{n=1}^{m}\sum_{m=1}^{m}u'_{nm}(t)\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}-\\ -\sum_{n=1}^{m}\sum_{m=1}^{m}u'_{nm}(t)[\left(-\frac{\pi^2n^2}{l_1^2}\right)\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}+\\ +\left(-\frac{\pi^2m^2}{l_2^2}\right)\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}]=\\ =\alpha\sum_{n=1}^{m}\sum_{m=1}^{m}u_{nm}(t)[\left(-\frac{\pi^2n^2}{l_1^2}\right)\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}+\\ +\left(-\frac{\pi^2m^2}{l_2^2}\right)\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}],\end{gathered} \tag{5.9}$$

тогда

$$\lambda u'_{nm}(t)-u'_{nm}(t)\left(\left(-\frac{\pi^2n^2}{l_1^2}\right)+\left(-\frac{\pi^2m^2}{l_2^2}\right)\right)=\alpha u_{nm}(t)\left(\left(-\frac{\pi^2n^2}{l_1^2}\right)+\left(-\frac{\pi^2m^2}{l_2^2}\right)\right), \tag{5.10}$$

$$u'_{nm}(t)\left(\lambda+\frac{\pi^2n^2}{l_1^2}+\frac{\pi^2m^2}{l_2^2}\right)=-\alpha u_{nm}(t)\left(\frac{\pi^2n^2}{l_1^2}+\frac{\pi^2m^2}{l_2^2}\right),\ n=1,2,3,...,\ m=1,2,3,...$$

Найдем общее решение уравнений (5.10):

$$\ln|u_{nm}(t)|=\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t+\ln|C|,$$

$$u_{nm}(t)=C_{nm}e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t}. \tag{5.11}$$

Тогда решение уравнения (5.1), удовлетворяющее условию (5.2), имеет вид

$$u(s_1,s_2,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}C_{nm}e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t}\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}. \tag{5.12}$$

В силу начальных условий (5.3), получим

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_k^L} (u_{nm}(t_k)-u_{nm}^k)\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}=0,\quad k=1,2,3,$$

$$(u_{nm}(t_k)-u_{nm}^k)\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}=0,$$

$$u_{nm}(t_k)=u_{nm}^k, \tag{5.13}$$

где $nm:\mu_{nm}\in\sigma_k^L$.

Из начального условия (5.3) и выражения (5.11) получим:

$$u_{nm}(t_k)=e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t_k}C_{nm}, \tag{5.14}$$

тогда

$$C_{nm}=u_{nm}^k e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t_k},\quad k=1,2,3,\quad \mu_{nm}\in\sigma_k^L. \tag{5.15}$$

Тогда решение задачи (5.1) – (5.3) примет вид:

$$\begin{aligned}u(s_1,s_2,t)=&\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_1^L} u_{nm}^1 e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t_1} e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t}\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}+\\ &+\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_2^L} u_{nm}^2 e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t_2} e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t}\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}+\\ &+\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_3^L} u_{nm}^3 e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t_3} e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t}\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}.\end{aligned} \tag{5.16}$$

Теорема 5.1. Пусть $f(s_1,s_2,t)$ – непрерывна в $\overline{Q}$, $u^k(s_1,s_2)$, $k=1,2,3$, удовлетворяют условиям: $u^k\in C^6(\Omega)$ и $u^k|_{\partial\Omega}=\Delta u^k|_{\partial\Omega}=0$, тогда существует единственное решение задачи (5.1) – (5.3) имеющие вид (5.16).

Обоснование метода Фурье

Покажем, что сумма ряда (5.16) функция $u(s_1, s_2, t)$ удовлетворяет условию

$$u \in C^2(Q),\ u \in C(\overline{Q}).$$

Для этого исследуем ряд (5.16) на равномерную сходимость. Рассмотрим

$$|u_{nm}(s_1, s_2, t)| = \left| C_{nm} e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \sin \frac{\pi n s_1}{l_1} \sin \frac{\pi m s_2}{l_2} \right| \leq$$

$$\leq |C_{nm}| \left| e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \right| \left| \sin \frac{\pi n s_1}{l_1} \sin \frac{\pi m s_2}{l_2} \right| \leq |C_{nm}| \left| e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \right| \leq |C_{nm}|, \tag{5.17}$$

где

$$|C_{nm}| = \left| u_{nm}^k e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t_k} \right| \leq |u_{nm}^k| M,$$

где $M = \max\limits_{1 \leq k \leq 3} \left\{ e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t_k} \right\}$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |u_{nm}^k|. \tag{5.18}$$

По теореме 2.6 ряд коэффициентов Фурье (5.18) функций $u^k(s_1, s_2)$ сходится. Тогда функциональный ряд (5.16) сходится равномерно на множестве $\overline{Q}$.

Исследуем равномерную сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial u_{nm}}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2} \right) \times$$

$$\times e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \sin \frac{\pi n s_1}{l_1} \sin \frac{\pi m s_2}{l_2}. \tag{5.19}$$

Рассмотрим

$$\left| \frac{\partial u_{nm}(s_1, s_2, t)}{\partial t} \right| = \left| C_{nm} \left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2} \right) e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \sin \frac{\pi n s_1}{l_1} \sin \frac{\pi m s_2}{l_2} \right| \leq$$

$$\leq |C_{nm}| \left| \left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2} \right) \right| \left| e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \right| \left| \sin \frac{\pi n s_1}{l_1} \right| \left| \sin \frac{\pi m s_2}{l_2} \right| \leq$$

$$\leq |C_{nm}| \left| \left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2} \right) \right| \left| e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \right| \leq$$

$$\leq |C_{nm}| \left| \left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2} \right) \right| \leq |C_{nm}|(|\alpha| + 1), \tag{5.20}$$

где

$$|C_{nm}| = \left| u_{nm}^k e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t_k} \right| \le \left| u_{nm}^k \right|,$$

$$\left| e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2},\right) t} \right| \le \left| u_{nm}^k \right| \cdot M.$$

Тогда по теореме 2.6 ряд (5.19) сходится равномерно на Q.

Исследуем функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial s_1^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}^k e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \left(-\frac{\pi^2 n^2}{l_1^2}\right) \sin \frac{\pi n s_1}{l_1} \sin \frac{\pi m s_2}{l_2}, \tag{5.21}$$

на равномерную сходимость на Q. Рассмотрим

$$\left| \frac{\partial^2 u_{nm}(s_1, s_1, t)}{\partial s_2^2} \right| =$$

$$= \left| C_{nm}^k e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \left(-\frac{\pi^2 n^2}{l_1^2}\right) \sin \frac{\pi n s_1}{l_1} \sin \frac{\pi m s_2}{l_2} \right| \le$$

$$\le |C_{nm}^k| \left| e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \right| \left| \frac{\pi^2 n^2}{l_1^2} \right| \left| \sin \frac{\pi n s_1}{l_1} \right| \left| \sin \frac{\pi m s_2}{l_2} \right| \le$$

$$\le |C_{nm}^k| \left| e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \right| \left| \frac{\pi^2 n^2}{l_1^2} \right| \le |C_{nm}^k| \left| \frac{\pi^2 n^2}{l_1^2} \right| \cdot M.$$

По теореме 2.6 ряд (5.21) функций $u^k(s_1, s_2)$ сходится равномерно на $\overline{Q}$.

Исследуем функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_m}{\partial s_2^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}^k e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 m^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \left(-\frac{\pi^2 m^2}{l_1^2}\right) \sin \frac{\pi n s_1}{l_1} \sin \frac{\pi m s_2}{l_2}, \tag{5.22}$$

на равномерную сходимость на Q. Рассмотрим

$$\left| \frac{\partial^2 u_{nm}(s_1, s_2, t)}{\partial s_2^2} \right| = \left| C_{nm}^k e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \left(-\frac{\pi^2 m^2}{l_1^2}\right) \sin \frac{\pi n s_1}{l_1} \sin \frac{\pi m s_2}{l_2} \right| \le$$

$$\le |C_{nm}^k| \left| e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \right| \left| \frac{\pi^2 m^2}{l_1^2} \right| \left| \sin \frac{\pi n s_1}{l_1} \right| \left| \sin \frac{\pi m s_2}{l_2} \right| \le$$

$$\le |C_{nm}^k| \left| e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right) t} \right| \left| \frac{\pi^2 m^2}{l_1^2} \right| \le |C_{nm}^k| \left| \frac{\pi^2 m^2}{l_1^2} \right| \cdot M.$$

По теореме 2.6 ряд (5.22) функций $u^k(s_1, s_2)$ сходится равномерно на $\overline{Q}$.

5.2. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в случае, когда $\exists i, \exists j : \lambda = \lambda_{ij}$.

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u, \qquad 0 < s_1 < l_1,\ 0 < s_2 < l_2,\ t_1 < t \le t_3, \tag{5.23}$$

$$u(0, s_2, t) = u(l_1, s_2, t) = u(s_1, 0, t) = u(s_1, l_2, t) = 0, \quad t \in [t_1, t_3],\ t_2 \in [t_1, t_3] \tag{5.24}$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_1^L,\ n\ne i, m\ne j} \langle u(s_1, s_2, t_1) - u^1(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2)\rangle\varphi_n(s_1, s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2,$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_2^L,\ n\ne i, m\ne j} \langle u(s_1, s_2, t_2) - u^2(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2)\rangle\varphi_n(s_1, s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2, \tag{5.25}$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_3^L,\ n\ne i, m\ne j} \langle u(s_1, s_2, t_3) - u^3(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2)\rangle\varphi_n(s_1, s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2.$$

Будем искать решение задачи (5.23) – (5.25) в виде (5.4). Аналогично случаю 5.1 получим

1) если $n \ne i$, $m \ne j$, тогда

$$u_{nm}(t) = C_{nm} e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2\lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)t}, \tag{5.26}$$

2) если $n = i$, $m = j$, где

$$0 = \frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2\lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2} u_k(t),$$

отсюда

$$u_k(t) = 0. \tag{5.27}$$

В силу начального условия (5.25) получим

1) если $n \ne i$, $m \ne j$,

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_k^L} (u_{nm}(t_k) - u_{nm}^k)\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2} = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$C_{nm}^k = u_{nm}^k e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2\lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)t_k}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{5.28}$$

2) если $n = i$, $m = j$, то начальное условие отсутствует.

Тогда решение задачи (5.23) – (5.25) примет вид:

$$u(s_1, s_2, t) = \underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_1^L, n\ne i, m\ne j} u_{nm}^1 e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2\lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)t_1} e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 + \pi^2 m^2)}{l_1^2 l_2^2\lambda - \pi^2 n^2 - \pi^2 m^2}\right)t}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2} +$$

$$+ \underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_2^L, n\ne i, m\ne j} u_{nm}^2 e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2\lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)t_2} e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2\lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)t}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2} +$$

$$+\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_3^L,n\neq i,m\neq j} u_{nm}^3 e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t_3} e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t} \sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}. \qquad (5.29)$$

Теорема 5.2. Пусть $f(s_1,s_2,t)$ – непрерывна в $\overline{Q}$, $u^k(s_1,s_2),\ k=1,2,3$, удовлетворяют условиям: $u^k\in C^6(\Omega)$ и $u^k|_{\partial\Omega}=\Delta u^k|_{\partial\Omega}=0$, тогда существует единственное решение задачи (5.23) – (5.25) имеющие вид (5.29).

5.3. Рассмотрим начально-краевую задачу для неоднородного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в случае когда $\exists i,\exists j:\lambda=\lambda_{ij}$.

$$(\lambda-\Delta)u_t=\alpha\Delta u+f,\quad 0<s_1<l_1, 0<s_2<l_2,\ t_1<t\le t_3, \qquad (5.30)$$

$$u(0,s_2,t)=u(l_1,s_2,t)=u(s_1,0,t)=u(s_1,l_2,t)=0,\quad t\in[t_1,\ t_3],\ t_2\in[t_1,t_3], \qquad (5.31)$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_1^L,n\neq i,m\neq j}\langle u(s_1,s_2,t_1)-u^1(s_1,s_2),\varphi_{nm}(s_1,s_2)\rangle\varphi_{nm}(s_1,s_2)=0,\ 0\le s_1\le l_1,\ 0\le s_2\le l_2,$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_1^L,n\neq i,m\neq j}\langle u(s_1,s_2,t_2)-u^2(s_1,s_2),\varphi_{nm}(s_1,s_2)\rangle\varphi_{nm}(s_1,s_2)=0,\ 0\le s_1\le l_1,\ 0\le s_2\le l_2, \qquad (5.32)$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_1^L,n\neq i,m\neq jk}\langle u(s_1,s_2,t_3)-u^3(s_1,s_2),\varphi_{nm}(s_1,s_2)\rangle\varphi_{nm}(s_1,s_2)=0,\ 0\le s_1\le l_1,\ 0\le s_2\le l_2.$$

Будем искать решение задачи (5.30) – (5.32) в виде (5.4). Представим функции $f(s,t)$ в виде ее ряда Фурье:

$$f(s_1,s_2,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f_{nm}(t)\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi n s_2}{l_2}, \qquad (5.33)$$

где

$$f_{nm}(t)=\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\int_0^{l_1}ds_1\int_0^{l_2}f(s_1,s_2,t)\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}ds_2. \qquad (5.34)$$

Подставляем ряд (5.6) в уравнение (5.30) и получим

$$\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u'_{nm}(t)\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u'_{nm}(t)[\left(-\frac{\pi^2n^2}{l_1^2}\right)\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_1}{l_1}+$$

$$+\left(-\frac{\pi^2m^2}{l_2^2}\right)\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_2}{l_2}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}]=$$

$$=-\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[u_{nm}(t)\left(-\frac{\pi^2n^2}{l_1^2}\right)\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_1}{l_1}+$$

$$+\left(-\frac{\pi^2m^2}{l_2^2}\right)\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}]\sin\frac{\pi n s_2}{l_2}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f_{nm}(t)\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2},$$

тогда

$$\lambda u'_{nm}(t) - u'_{nm}(t)\left(-\frac{\pi^2 n^2}{l_1^2}\right) + \left(-\frac{\pi^2 m^2}{l_2^2}\right) = -\alpha u_{nm}(t)\left(-\frac{\pi^2 n^2}{l_1^2}\right) + \left(-\frac{\pi^2 m^2}{l_2^2}\right) + f_{nm}(t),$$

$$u'_{nm}(t)\left(\lambda + \frac{\pi^2 n^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l_2^2}\right) = -\alpha u_{nm}(t)\left(\frac{\pi^2 n^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l_2^2}\right) + f_{nm}(t), \quad n = 1,2,3..., \; m = 1,2,3... \tag{5.35}$$

Найдем общее решение уравнения (5.35):

$$\frac{du_{nm}}{dt}\left(\lambda + \frac{\pi^2 n^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l_2^2}\right) + \alpha\left(\frac{\pi^2 n^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l_2^2}\right)u_{nm}(t) = f_{nm}(t). \tag{5.36}$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{du_{nm}}{dt}\left(\lambda + \frac{\pi^2 n^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l_2^2}\right) + \alpha\left(\frac{\pi^2 n^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l_2^2}\right)u_{nm}(t) = 0,$$

$$u'_{nm}(t) = -\left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)u_{nm}(t), \tag{5.37}$$

интегрируем (5.37), отсюда

$$\ln|u_{nm}(t)| = -\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)t + \ln|C|.$$

Будем искать решения уравнения (5.30) в виде

$$u_{nm}(t) = C_{nm}(t)e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)t}. \tag{5.38}$$

Тогда

$$u'_{nm}(t) = C'_{nm}(t)e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)t} + \left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)C_{nm}(t)e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)t}. \tag{5.39}$$

Подставим полученные выражения в уравнение (5.35) получим

$$C'_{nm}(t)e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)t}\frac{\lambda l_1^2 l_2^2 + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}{l_1^2 l_2^2} = f_{nm}(t). \tag{5.40}$$

Тогда

$$C'_{nm}(t) = \frac{f_{nm}(t) l_1^2 l_2^2}{\lambda l_1^2 l_2^2 + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)t}. \tag{5.41}$$

Интегрируем (5.41), отсюда получим

$$C_{nm}(t) = \frac{l_1^2 l_2^2}{\lambda l_1^2 l_2^2 + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\int_0^t f_{nm}(\tau)e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)\tau}d\tau + \widetilde{C}_{nm}. \tag{5.42}$$

Тогда из (5.38), следует

$$u_{nm}(t)=\left(\frac{l_1^2l_2^2}{\lambda l_1^2l_2^2+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\int\limits_0^t f_{nm}(\tau)e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)\tau}d\tau+\widetilde{C}_{nm}\right)e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t}. \tag{5.43}$$

Тогда решение уравнения (5.1), удовлетворяющее условию (5.2), имеет вид

$$u(s_1,s_2,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l_1^2l_2^2}{\lambda l_1^2l_2^2+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\int\limits_0^t f_{nm}(\tau)e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2+\pi^2m^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2+\pi^2m^2}\right)\tau}d\tau+\widetilde{C}_{nm}\right)\times$$

$$\times e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2+\pi^2m^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2+\pi^2m^2}\right)t}\sin\frac{\pi ns_1}{l_1}\sin\frac{\pi ns_2}{l_2}. \tag{5.44}$$

Определим неизвестную постоянную $\tilde{C}_n$

$$u(s_1,s_2,t_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l_1^2l_2^2}{\lambda l_1^2l_2^2+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\int\limits_0^{t_k} f_{nm}(\tau)e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)\tau}d\tau+\widetilde{C}_{nm}^k\right)\times$$

$$\times e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t_k}\sin\frac{\pi ns_1}{l_1}\sin\frac{\pi ms_2}{l_2}$$

и получим

$$\tilde{C}_{nm}^k=u_{nm}^k e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t_k}-\frac{l_1^2l_2^2}{\lambda l_1^2l_2^2+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\int\limits_0^{t_k} f_{nm}(\tau)e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)\tau}d\tau. \tag{5.45}$$

Тогда решение задачи (5.30) – (5.32) примет вид

$$u(s_1,s_2,t)=\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_k^L}\left(\frac{l_1^2l_2^2}{\lambda l_1^2l_2^2+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\int\limits_0^t f_{nm}(\tau)e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)\tau}d\tau+\widetilde{C}_{nm}^1\right)\times$$

$$\times e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t}\sin\frac{\pi ns_1}{l_1}\sin\frac{\pi ms_2}{l_2}+$$

$$+\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_k^L}\left(\frac{l_1^2l_2^2}{\lambda l_1^2l_2^2+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\int\limits_0^t f_{nm}(\tau)e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)\tau}d\tau+\widetilde{C}_{nm}^2\right)\times$$

$$\times e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t}\sin\frac{\pi ns_1}{l_1}\sin\frac{\pi ms_2}{l_2}+$$

$$+\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_k^L}\left(\frac{l_1^2l_2^2}{\lambda l_1^2l_2^2+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\int\limits_0^t f_{nm}(\tau)e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)\tau}d\tau+\widetilde{C}_{nm}^3\right)\times$$

$$\times e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t}\sin\frac{\pi ns_1}{l_1}\sin\frac{\pi ms_2}{l_2}, \tag{5.46}$$

где $\tilde{C}^k_{nm}$ имеет вид (5.45).

Теорема 5.3. Пусть $f(s_1,s_2,t)$ – непрерывна в $\overline{Q}$, $u^k(s_1,s_2)$, $k=1,2,3$, удовлетворяют условиям: $u^k \in C^6(\Omega)$ и $u^k|_{\partial\Omega} = \Delta u^k|_{\partial\Omega} = 0$, тогда существует единственное решение задачи (5.30) – (5.32) имеющие вид (5.46).

5.4. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения
Баренблатта – Желтова – Кочиной в случае, когда $\exists i, \exists j : \lambda = \lambda_{ij}$.

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + f, \qquad 0 < s_1 < l_1,\ 0 < s_2 < l_2,\ t_1 < t \le t_3, \tag{5.47}$$

$$u(0,s_2,t) = u(l_1,s_2,t) = u(s_1,0,t) = u(s_1,l_2,t) = 0,\ t \in [t_1,t_3],\ t_2 \in [t_1,t_3], \tag{5.48}$$

$$\begin{gathered}\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_1^L, n\ne i, m\ne j} \langle u(s_1,s_2,t_1) - u^1(s_1,s_2), \varphi_{nm}(s_1,s_2)\rangle \varphi_{nm}(s_1,s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2,\\ \underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_2^L, n\ne i, m\ne j} \langle u(s_1,s_2,t_2) - u^2(s_1,s_2), \varphi_{nm}(s_1,s_2)\rangle \varphi_{nm}(s_1,s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2,\\ \underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_3^L, n\ne i, m\ne j} \langle u(s_1,s_2,t_3) - u^3(s_1,s_2), \varphi_{nm}(s_1,s_2\rangle \varphi_{nm}(s_1,s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2.\end{gathered} \tag{5.49}$$

Будем искать решение задачи (5.47) – (5.49) в виде (5.4) и (5.33). Аналогично случаю 5.3 получим

1) если $n \ne i$, $m \ne j$

$$u_{nm}(t) = \left(\frac{l_1^2 l_2^2}{\lambda l_1^2 l_2^2 + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2} \int\limits_0^t f_{nm}(\tau) e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)\tau} d\tau + \widetilde{C}_{nm} \right) e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)t}, \tag{5.50}$$

2) если $n = i$, $m = j$, тогда

$$0 = \frac{l_1^2 l_2^2}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2} u_{nm}(t) + f_{nm}(t), \tag{5.51}$$

отсюда

$$u_{nm}(t) = f_{nm}(t) \frac{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}{l_1^2 l_2^2}. \tag{5.52}$$

В силу начального условия (5.49), получим решение в виде (5.13) – (5.15):

1) если $n \ne i$, $m \ne j$,

$$C^k_{nm} = u^k_{nm} e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)t_k} + \frac{l_1^2 l_2^2}{\lambda l_1^2 l_2^2 + \pi^2 n^2 + \pi^2 m^2} \int\limits_0^{t_k} f_{nm}(\tau) e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2)}{l_1^2 l_2^2 \lambda + \pi^2 n^2 l_2^2 + \pi^2 m^2 l_1^2}\right)\tau} d\tau. \tag{5.53}$$

2) если $n = i$, $m = j$, то начальное условие отсутствует. Тогда решение задачи (5.47) – (5.49) примет вид

$$u(s_1,s_2,t)=\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_1^L,n\neq i,m\neq j}\left(\frac{l_1^2l_2^2}{\lambda l_1^2l_2^2+\pi^2n^2+\pi^2m^2}\int\limits_0^{t_1}f_{nm}(\tau)e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)\tau}d\tau+\widetilde{C}^1_{nm}\right)\times$$

$$\times e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}+$$

$$+\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_2^L,n\neq i,m\neq j}\left(\frac{l_1^2l_2^2}{\lambda l_1^2l_2^2+\pi^2n^2+\pi^2m^2}\int\limits_0^{t_2}f_{nm}(\tau)e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)\tau}d\tau+\widetilde{C}^2_{nm}\right)\times$$

$$\times e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}+$$

$$+\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_3^L,n\neq i,m\neq j}\left(\frac{l_1^2l_2^2}{\lambda l_1^2l_2^2+\pi^2n^2+\pi^2m^2}\int\limits_0^{t_3}f_{nm}(\tau)e^{\left(\frac{\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)\tau}d\tau+\widetilde{C}^3_{nm}\right)\times$$

$$\times e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}+$$

$$+\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_3^L,\ n=i,m=j}f_{nm}(t)\frac{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}{l_1^2l_2^2}e^{\left(\frac{-\alpha(\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2)}{l_1^2l_2^2\lambda+\pi^2n^2l_2^2+\pi^2m^2l_1^2}\right)t}\sin\frac{\pi n s_1}{l_1}\sin\frac{\pi m s_2}{l_2}, \tag{5.54}$$

где $\tilde{C}^k_{nm}$ имеет вид (5.53).

Теорема 5.4. Пусть $f(s_1,s_2,t)$ – непрерывна в $\overline{Q}$, $u^k(s_1,s_2)$, $k=1,2,3$, удовлетворяют условиям: $u^k\in C^6(\Omega)$ и $u^k|_{\partial\Omega}=\Delta u^k|_{\partial\Omega}=0$, тогда существует единственное решение задачи (5.47) – (5.49) имеющие вид (5.54).

6. Агоритм численного метода решения и описание программы

На основе модифицированного метода Галеркина был разработан численный метод решения трехточечной начально-конечной задачи (0.1) – (0.3) для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной на прямоугольнике. Приведем алгоритм численного метода:

1) Вводим α, λ – параметры уравнения (0.1); функции начальных и краевых условий; число слагаемых галеркинских приближений N.

2) Составим искомое приближенное решение уравнения (0.1) в виде галеркинской суммы

$$u^N(s_1,s_2,t) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_{n,m}(t)\ \varphi_{nm}(s_1,s_2), \tag{6.1}$$

где собственные функции $\varphi_{nm}(s_1,s_2)$ являются решением однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ, а $\{\lambda_{nm}\}$ соответствующие им собственные числа занумерованные по неубыванию с учетом кратности, $u_{nm}(t)$ неизвестные функции.

3) Представим правую часть уравнения и начальные функции в виде

$$f_N(s_1,s_2,t) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\langle f(s_1,s_2,t),\varphi_n(s_1,s_2)\rangle\varphi_{nm}(s_1,s_2) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} f_{nm}(t)\varphi_{nm}(s_1,s_2), \tag{6.2}$$

$$u_N^k(s_1,s_2) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\langle u^k(s_1,s_2)\varphi_{nm}(s_1,s_2)\rangle\varphi_{nm}(s_1,s_2) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_{nm}^k\varphi_{nm}(s_1,s_2),\ k=1,2,3. \tag{6.3}$$

4) Подставим (6.1) – (6.3) в уравнение (0.1)

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\dot u_{nm}(t)\varphi_{nm}(s_1,s_2) - \dot u_{nm}(t)\lambda_{nm}\varphi_{nm}(s_1,s_2) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\alpha u_{nm}(t)\lambda_{nm}\varphi_{nm}(s_1,s_2) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} f_{nm}(t)\varphi_{nm}(s_1,s_2). \tag{6.4}$$

5) Скалярно умножив уравнение (6.4) на собственные функции $\varphi_{nm}(s_1,s_2), n = 1...N$, $m = 1...N$, генерируем систему алгебро-дифференциальных уравнений.

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\langle\dot u_{nm}(t)\varphi_{nm}(s_1,s_2) - \dot u_{nm}(t)\lambda_{nm}\varphi_{nm}(s_1,s_2),\varphi_{nm}(s_1,s_2)\rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\langle\alpha u_{nm}(t)\lambda_{nm}\varphi_{nm}(s_1,s_2),\varphi_{nm}(s_1,s_2)\rangle + \sum_{n=1}^{N}\langle f_{nm}(t)\varphi_{nm}(s_1,s_2),\varphi_{nm}(s_1,s_2)\rangle, \tag{6.5}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

6) Генерируем начальные условия:

$$nm : \mu_{nm} \in \sigma_k^{nm},$$

$$u_{nm}(t_k) = u_{nm}^k. \tag{6.6}$$

7) Проверим условие на невырожденный (вырожденный) случай. В зависимости от параметра λ, получаем дифференциальные ($\lambda \neq \lambda_{ij}$) или алгебраические ($\lambda = \lambda_{ij}$) уравнения.

8) Если уравнение (0.1) невырожденное ($\overline{\exists} i, \overline{\exists} j : \lambda = \lambda_{ij}$), то получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (6.4) с начальными условиями (6.6) и находим неизвестные функции $u_{nm}(t),\ n = 1, ..., N,\ m = 1, ..., N$ в приближенном решении (6.1).

9) Если уравнение (0.1) вырожденное ($\exists i, j : \lambda = \lambda_{ij}$), то ij-ые уравнения системы будут алгебраическими, а оставшиеся уравнения ($\exists i, j : \lambda \neq \lambda_{ij}$) – дифференциальными. Отдельно решим алгебраические уравнения относительно $u_{ij}(t)$ и найдем ij-ое слагаемое галеркинской суммы. Исключаем ij-ое условие и формируем систему $4N$ дифференциальных уравнений с $4N$ начальным условием.

10) Находим решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальным условием. В случае ($\lambda = \lambda_{ij}$) объединяем решение системы дифференциальных уравнений с решением алгебраического уравнения.

11) Выводим приближенное решение и строим его график.

Приведем описание программы для нахождения численного исследования одной математической модели фильтрации с трехточечным начально-конечным условием. Программа позволяет находить решение задачи на прямоугольнике при произвольных начальных данных, а также выводит на экран график решения, также можно управлять точностью нахождения коэффициентов галеркинской суммы.

Описание программы

Шаг 1. Вводим количество слагаемых галеркинской суммы N, коэффициенты уравнения λ, α, начальные функции $u^1(s_1, s_2),\ u^2(s_1, s_2),\ u^3(s_1, s_2)$, длину и ширину прямоугольника на котором ищется решение и промежуток времени (t_1, t_3) и t_2.

Шаг 2. Находим решение задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа Δ в соответствующей области. Вычисляются собственные значения $\{\lambda_{nm}\}$ и собственные функции $\{\varphi_{nm}(s_1, s_2)\}$ соответствующей задачи.

Шаг 3. Составим искомое приближенное решение в виде галеркинской суммы при помощи двойного цикла **for()** от 1 до N :

$$u(s_1, s_2, t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} u_{nm}(t) \varphi_{nm}(s_1, s_2).$$

Шаг 4. Подстановка приближенного решения в уравнение осуществляется с помощью процедуры **subs** с помощью скалярного умножения получившегося уравнения на собственные функции $\varphi_{nm}(s_1, s_2)$ и интегрируется на заданном отрезке $[0, l]$. Генерируется система уравнений.

Шаг 5. Генерируем трехточечное начально-конечное условие. Осуществляется при помощи цикла **for()** и при помощи процедуры интегрирования **int**.

Шаг 6. Делаем проверку на вырожденность (невырожденность) уравнения. Рассматриваем является ли λ собственным значение оператора Лапласа или нет.

Шаг 7. В случае вырожденности системы уравнений мы извлекаем недифференциальные уравнения и решаем его с помощью процедуры **solve**. Далее формируется система алгебро-дифференциальных уравнений. Находится решение системы дифференциальных уравнений с начальными условиями для осуществления при помощьи встроенной процедуры **dsolve**.

Шаг 9. Полученное решение выводится на экран в виде функции и в виде графика $u(s_1, s_2, t)$ с помощью Plot3D.

Используемые программные средства

Для реализации разработанных алгоритмов использовались встроенные функции и стандартные операторы программного пакета Maple 17. С помощью пакета **System** составляется система дифференциальных уравнений. При вычислении интегралов используется пакет **Integration Tools.** А графические изображения получены при помощи пакета **plots.** Программа работает под управление операционной системы Microsoft Windows.

Выходные данные

- собственные значения задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа на прямоугольнике;

- собственные функции задачи Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа на прямоугольнике;

- приближенное решение $u^N(s_1, s_2, t)$;

- график решения $u^N(s_1, s_2, t)$.

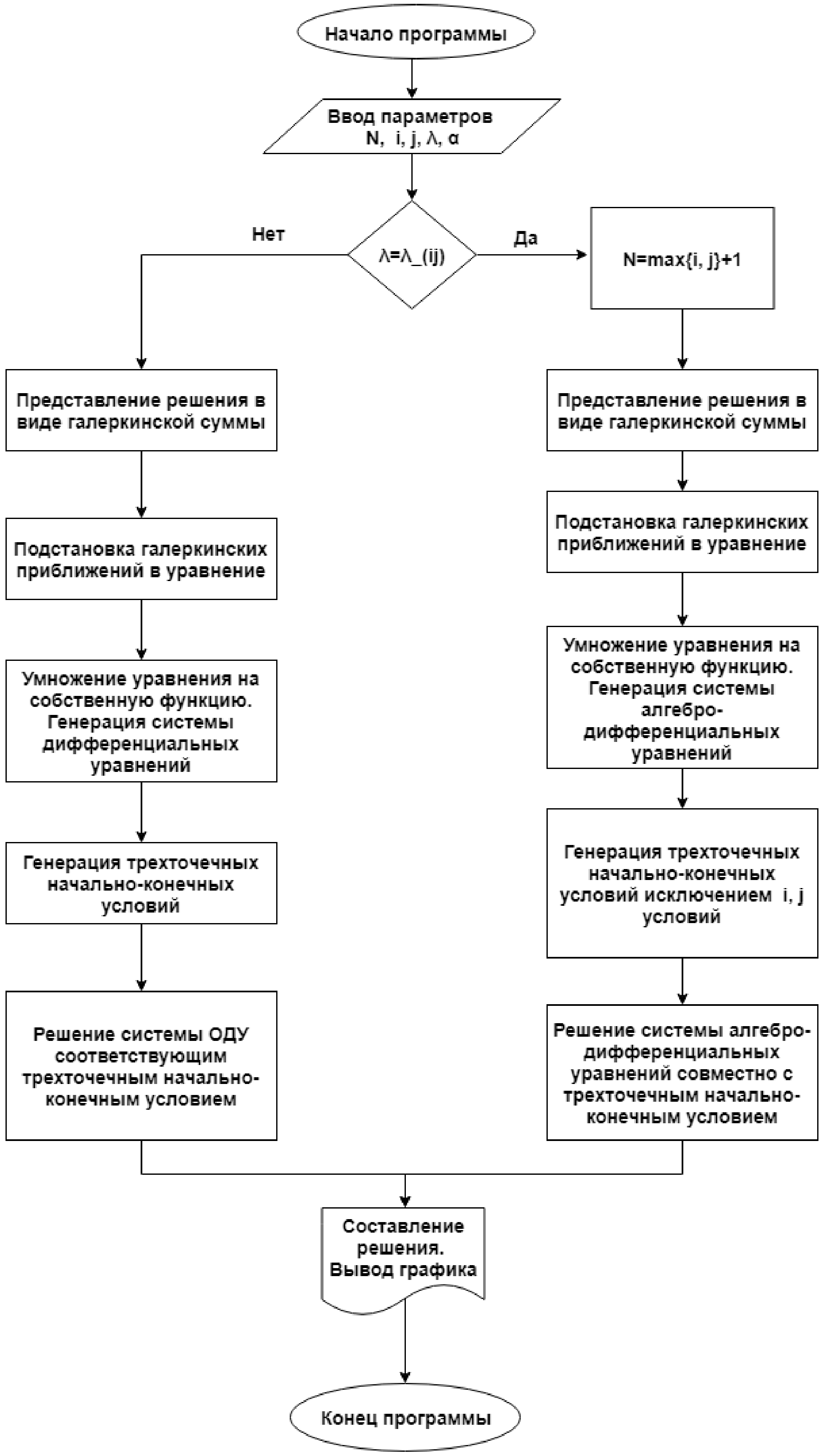

Рис. 6. Блок-схема алгоритма метода решения задачи (0.1) – (0.3)

7. Вычислительные эксперименты

На основе разработанного численного метода пункта 6 были проведены вычислительные эксперименты с помощью программы Maple 17.

Пример 7.1. Требуется найти численное решение задачи

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u, \qquad 0 < s_1 < l_1,\ 0 < s_2 < l_2,\ t_1 < t \leq t_3. \tag{7.1}$$

Добавим к уравнению (7.1) граничные и начальные условия:

$$u(0, s_2, t) = u(l_1, s_2, t) = u(s_1, 0, t) = u(s_1, l_2, t) = 0,\ t_2 \in [t_1, t_3], \tag{7.2}$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_1^L} (u(s_1, s_2, t_1) - u^1(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \leq s_1 \leq l_1,\ 0 \leq s_2 \leq l_2,$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_2^L} (u(s_1, s_2, t_2) - u^2(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \leq s_1 \leq l_1,\ 0 \leq s_2 \leq l_2, \tag{7.3}$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_3^L} (u(s_1, s_2, t_3) - u^3(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \leq s_1 \leq l_1,\ 0 \leq s_2 \leq l_2,$$

при заданных условиях: $\lambda = 2$, $\alpha = 4$, $l_1 = \pi$, $l_2 = \pi$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = 1$,

$$u_1 = \frac{2}{\pi}(\sin(s_1)\sin(s_2) + \sin(2s_1)\sin(s_2) + \sin(s_1)\sin(2s_2) + \sin(2s_1)\sin(2s_2)),$$

$$u_2 = \frac{2}{\pi}(\sin(3s_1)\sin(3s_2) + \sin(4s_1)\sin(4s_2) + \sin(4s_1)\sin(3s_2) + \sin(3s_1)\sin(4s_2)),$$

$$u_3 = \frac{2}{\pi}(\sin(5s_1)\sin(6s_2) + \sin(5s_1)\sin(5s_2) + \sin(6s_1)\sin(6s_2) + \sin(6s_1)\sin(5s_2)),$$

$$\sigma_1^{nm}(M) = \{\mu_{nm} : n = 1, 2,\ m = \overline{1, 6}\},$$

$$\sigma_2^{nm}(M) = \{\mu_{nm} : n = 3, 4,\ m = \overline{1, 6}\},$$

$$\sigma_3^{nm}(M) = \{\mu_{nm} : n = 5, 6...,\ m = \overline{1, 6}\}.$$

В цикле от 1 до 6 составляется искомое приближенное решение

$$u(s_1, s_2, t) = \sum_{n=1}^{6}\sum_{m=1}^{6} u_{nm}(t)\ \varphi_{nm}(s_1, s_2). \tag{7.4}$$

Так как $\lambda \neq \lambda_{ij}\ \forall i, j \in \mathbb{N}$ получим систему дифференциальных уравнений. Далее подставляем галеркинские приближения в уравнение (7.1), проинтегрировав полученное выражение в интервале от 1 до π, предварительно умножив на $\varphi_{nm}(s_1, s_2)$ получим:

$$8u_{1,1}(t) + 4\dot{u}_{1,1}(t) = 0,\ 7\dot{u}_{1,2}(t) + 20u_{1,2}(t) = 0,\ 12\dot{u}_{1,3}(t) + 40u_{1,3}(t) = 0,$$

$$68u_{1,4}(t) + 19\dot{u}_{1,4}(t) = 0,\ 28\dot{u}_{1,5}(t) + 104u_{1,5}(t) = 0,\ 148u_{1,6}(t) + 39\dot{u}_{1,6}(t) = 0,$$

$$20u_{2,1}(t)+7\dot u_{2,1}(t)=0,\ \ 10\dot u_{2,2}(t)+32u_{2,2}(t)=0,\ \ 15\dot u_{2,3}(t)+52u_{2,3}(t)=0,$$

$$22\dot u_{2,4}(t)+80u_{2,4}(t)=0,\ \ 116u_{2,5}(t)+31\dot u_{2,5}(t)=0,\ \ 160u_{2,6}(t)+42\dot u_{2,6}(t)=0,$$

$$12\dot u_{3,1}(t)+40u_{3,1}(t)=0,\ \ 15\dot u_{3,2}(t)+52u_{3,2}(t)=0,\ \ 20\dot u_{3,3}(t)+72\dot u_{3,3}(t)=0,$$

$$27\dot u_{3,4}(t)+100u_{3,4}(t)=0,\ \ 136u_{3,5}(t)+36\dot u_{3,5}(t)=0,\ \ 47\dot u_{3,6}(t)+180u_{3,6}(t)=0,$$

$$68u_{4,1}(t)+19\dot u_{4,1}(t)=0,\ \ 80u_{4,2}(t)+22\dot u_{4,2}(t)=0,\ \ 27\dot u_{4,3}(t)+100u_{4,3}(t)=0,$$

$$34\dot u_{4,4}(t)+128u_{4,4}(t)=0,\ \ 43\dot u_{4,5}(t)+164u_{4,5}(t)=0,\ \ 208u_{4,6}(t)+54\dot u_{4,6}(t)=0,$$

$$28\dot u_{5,1}(t)+104u_{5,1}(t)=0,\ \ 116u_{5,2}(t)+31\dot u_{5,2}(t)=0,\ \ 136u_{5,3}(t)+36\dot u_{5,3}(t)=0,$$

$$164u_{5,4}(t)+43\dot u_{5,4}(t)=0,\ \ 52\dot u_{5,5}(t)+200u_{5,5}(t)=0,\ \ 244u_{5,6}(t)+63\dot u_{5,6}(t)=0,$$

$$148u_{6,1}(t)+39\dot u_{6,1}(t)=0,\ \ 160u_{6,2}(t)+42\dot u_{6,2}(t)=0,\ \ 180u_{6,3}(t)+47\dot u_{6,3}(t)=0,$$

$$208u_{6,4}(t)+54\dot u_{6,4}(t)=0,\ \ 244u_{6,5}(t)+63\dot u_{6,5}(t)=0,\ \ 288u_{6,6}(t)+74\dot u_{6,6}(t)=0.$$

Трехточечное начально-конечное условие принимает вид:

$$u_{1,1}(0)=1,\ u_{1,2}(0)=1,\ u_{1,3}(0)=0,\ u_{1,4}(0)=0,\ u_{1,5}(0)=0,\ u_{1,6}(0)=0,$$

$$u_{2,1}(0)=1,\ u_{2,2}(0)=1,\ u_{2,3}(0)=0,\ u_{2,4}(0)=0,\ u_{2,5}(0)=0, u_{2,6}(0)=0,$$

$$u_{3,1}\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ u_{3,2}\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ u_{3,3}\left(\frac{1}{2}\right)=1,\ u_{3,4}\left(\frac{1}{2}\right)=1,$$

$$u_{3,5}\left(\frac{1}{2}\right)=0, u_{3,6}\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ u_{4,1}\left(\frac{1}{2}\right)=0, u_{4,2}\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ u_{4,3}\left(\frac{1}{2}\right)=1, u_{4,4}\left(\frac{1}{2}\right)=1,$$

$$u_{4,5}\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ u_{4,6}\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ u_{5,1}(1)=0, u_{5,2}(1)=0, u_{5,3}(1)=0, u_{5,4}(1)=0,\ u_{5,5}(1)=1,$$

$$u_{5,6}(1)=1,\ u_{6,1}(1)=0, u_{6,2}(1)=0,\ u_{6,3}(1)=0, u_{6,4}(1)=0, u_{6,5}(1)=1, u_{6,6}(1)=1.$$

Решение задачи (7.1) – (7.3) примет вид:

$$u(s_1,s_2,t)=\frac{2\sin(s_1)\sin(2s_2)e^{-2t}}{\pi}+\frac{2\sin(s_1)\sin(2s_2)e^{-\frac{20}{7}t}}{\pi}+\frac{2\sin(2s_1)\sin(s_2)e^{-\frac{20}{7}t}}{\pi}+$$
$$+\frac{2\sin(2s_1)\sin(2s_2)e^{-\frac{16}{5}t}}{\pi}+\frac{2\sin(6s_1)\sin(6s_2)e^{-\frac{144}{37}t}}{\pi e^{-\frac{144}{37}}}+\frac{2\sin(3s_1)\sin(3s_2)e^{-\frac{18}{5}t}}{\pi e^{-\frac{9}{5}}}+$$
$$+\frac{2\sin(3s_1)\sin(4s_2)e^{-\frac{100}{27}t}}{\pi e^{-\frac{50}{27}}}+\frac{2\sin(4s_1)\sin(3s_2)e^{-\frac{100}{27}t}}{\pi e^{-\frac{50}{27}}}+\frac{2\sin(4s_1)\sin(4s_2)e^{-\frac{64}{17}t}}{\pi e^{-\frac{32}{17}}}+$$
$$+\frac{2\sin(5s_1)\sin(5s_2)e^{-\frac{50}{13}t}}{\pi e^{-\frac{50}{13}}}+\frac{2\sin(5s_1)\sin(6s_2)e^{-\frac{244}{63}t}}{\pi e^{-\frac{244}{63}}}+\frac{2\sin(6s_1)\sin(5s_2)e^{-\frac{244}{63}t}}{\pi e^{-\frac{244}{63}}}. \tag{7.5}$$

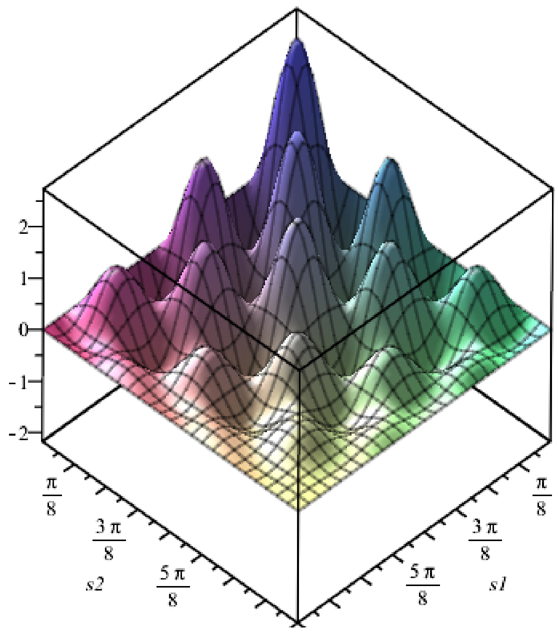

Рис. 7. График приближенного решения задачи (7.1) – (7.3)

Пример 7.2. Требуется найти численное решение задачи

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u, \quad 0 < s_1 < l_1,\ 0 < s_2 < l_2,\ t_1 < t \le t_3. \tag{7.6}$$

Добавим к уравнению (7.6) граничные и начальные условия:

$$u(0, s_2, t) = u(l_1, s_2, t) = u(s_1, 0, t) = u(s_1, l_2, t) = 0,\ t_2 \in [t_1, t_3], \tag{7.7}$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_1^L} (u(s_1, s_2, t_1) - u^1(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2,$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_2^L} (u(s_1, s_2, t_2) - u^2(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2, \tag{7.8}$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_3^L} (u(s_1, s_2, t_3) - u^3(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2,$$

при заданных условиях: $\lambda = -8$, $\alpha = 2$, $l_1 = \pi$, $l_2 = \pi$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = 1$,

$$u_1 = \frac{2}{\pi}(\sin(s_1)\sin(s_2) + \sin(2s_1)\sin(s_2) + \sin(s_1)\sin(2s_2) + \sin(2s_1)\sin(2s_2)),$$

$$u_2 = \frac{2}{\pi}(\sin(3s_1)\sin(3s_2) + \sin(4s_1)\sin(3s_2) + \sin(4s_1)\sin(4s_2) + \sin(3s_1)\sin(4s_2)),$$

$$u_3 = \frac{2}{\pi}(\sin(5s_1)\sin(5s_2) + \sin(6s_1)\sin(5s_2) + \sin(7s_1)\sin(6s_2) + \sin(7s_1)\sin(8s_2)),$$

$$\sigma_1^{nm}(M) = \{\mu_{nm} : n = 1, 2,\ m = \overline{1, 8}\},$$

$$\sigma_2^{nm}(M) = \{\mu_{nm} : n = 3, 4,\ m = \overline{1, 8}\},$$

$$\sigma_3^{nm}(M) = \{\mu_{nm} : n = 5, 6, 7, 8..., \ m = \overline{1, 8}\}.$$

В цикле от 1 до 8 составляется искомое приближенное решение

$$u(s_1, s_2, t) = \sum_{n=1}^{8} \sum_{m=1}^{8} u_{nm}(t) \ \varphi_{nm}(s_1, s_2). \tag{7.9}$$

Так как $\lambda = \lambda_{22}$ получим систему алгебро-дифференциальных уравнений. Далее подставляем галеркинские приближения в уравнение (7.6), проинтегрировав полученное выражение в интервале от 1 до π, предварительно умножив на $\varphi_{nm}(s_1, s_2)$ получим:

$$16u_{2,2}(t) = 0,$$

$$4u_{1,1}(t) + 6\dot{u}_{1,1}(t) = 0, \ -3\dot{u}_{1,2}(t) + 10u_{1,2}(t) = 0, \ 2\dot{u}_{1,3}(t) + 20u_{1,3}(t) = 0,$$

$$34u_{1,4}(t) + 9\dot{u}_{1,4}(t) = 0, \ 18\dot{u}_{1,5}(t) + 52u_{1,5}(t) = 0, \ 74u_{1,6}(t) + 29\dot{u}_{1,6}(t) = 0,$$

$$100u_{1,7}(t) + 42\dot{u}_{1,7}(t) = 0, \ 130u_{1,8}(t) + 57\dot{u}_{1,8}(t) = 0, \ 10u_{2,1}(t) - 3\dot{u}_{2,1}(t) = 0,$$

$$5\dot{u}_{2,3}(t) + 26u_{2,3}(t) = 0, \ 40u_{2,4}(t) + 12\dot{u}_{2,4}(t) = 0, \ 21\dot{u}_{2,5}(t) + 58u_{2,5}(t) = 0,$$

$$80u_{2,6}(t) + 32\dot{u}_{2,6}(t) = 0, \ 106u_{2,7}(t) + 45\dot{u}_{2,7}(t) = 0, \ 136u_{2,8}(t) + 60\dot{u}_{2,8}(t) = 0,$$

$$20u_{3,1}(t) + 2\dot{u}_{3,1}(t) = 0, \ 26u_{3,2}(t) + 5\dot{u}_{3,2}(t) = 0, \ 10\dot{u}_{3,3}(t) + 36u_{3,3}(t) = 0,$$

$$50u_{3,4}(t) + 17\dot{u}_{3,4}(t) = 0, \ 26\dot{u}_{3,5}(t) + 68u_{3,5}(t) = 0, \ 90u_{3,6}(t) + 37\dot{u}_{3,6}(t) = 0,$$

$$116u_{3,7}(t) + 50\dot{u}_{3,7}(t) = 0, \ 146u_{3,8}(t) + 65\dot{u}_{3,8}(t) = 0, \ 34u_{4,1}(t) + 9\dot{u}_{4,1}(t) = 0,$$

$$40u_{4,2}(t) + 12\dot{u}_{4,2}(t) = 0, \ 17\dot{u}_{4,3}(t) + 50u_{4,3}(t) = 0, \ 64u_{4,4}(t) + 24\dot{u}_{4,4}(t) = 0,$$

$$33\dot{u}_{4,5}(t) + 82u_{4,5}(t) = 0, \ 104u_{4,6}(t) + 44\dot{u}_{4,6}(t) = 0, \ 130u_{4,7}(t) + 57\dot{u}_{4,7}(t) = 0,$$

$$160u_{4,8}(t) + 72\dot{u}_{4,8}(t) = 0, \ 52u_{5,1}(t) + 18\dot{u}_{5,1}(t) = 0, \ 58u_{5,2}(t) + 21\dot{u}_{5,2} = 0,$$

$$26\dot{u}_{5,3}(t) + 68u_{5,3}(t) = 0, \ 82u_{5,4}(t) + 33\dot{u}_{5,4}(t) = 0, \ 42\dot{u}_{5,5}(t) + 100u_{5,5}(t) = 0,$$

$$122u_{5,6}(t) + 53\dot{u}_{5,6}(t) = 0, \ 148u_{5,7}(t) + 66\dot{u}_{5,7}(t) = 0, \ 178u_{5,8}(t) + 81\dot{u}_{5,8}(t) = 0,$$

$$74u_{6,1}(t) + 29\dot{u}_{6,1}(t) = 0, \ 80u_{6,2}(t) + 32\dot{u}_{6,2}(t) = 0, \ 90\dot{u}_{6,3}(t) + 37u_{6,3}(t) = 0,$$

$$104u_{6,4}(t) + 44\dot{u}_{6,4}(t) = 0, \ 53\dot{u}_{6,5}(t) + 122u_{6,5}(t) = 0, \ 144u_{6,6}(t) + 64\dot{u}_{6,6}(t),$$

$$170u_{6,7}(t) + 77\dot{u}_{6,7}(t) = 0, \ 200u_{6,8}(t) + 92\dot{u}_{6,8}(t) = 0, \ 100u_{7,1}(t) + 42\dot{u}_{7,1}(t) = 0,$$

$$106u_{7,2}(t) + 45\dot{u}_{7,2}(t) = 0, \ 50\dot{u}_{7,3}(t) + 116u_{7,3}(t) = 0, \ 130u_{7,4}(t) + 57\dot{u}_{7,4}(t) = 0,$$

$$66\dot{u}_{7,5}(t) + 148u_{7,5}(t) = 0, \ 170u_{7,6}(t) + 77\dot{u}_{7,6}(t) = 0, \ 196u_{7,7}(t) + 90\dot{u}_{7,7}(t) = 0,$$

$$226u_{7,8}(t) + 105\dot{u}_{7,8}(t) = 0, \ 130u_{8,1}(t) + 57\dot{u}_{8,1}(t) = 0, \ 136u_{8,2}(t) + 60\dot{u}_{8,2}(t) = 0,$$

$$65\dot{u}_{8,3}(t) + 146u_{8,3}(t) = 0, \ 160u_{8,4}(t) + 72\dot{u}_{8,4}(t) = 0, \ 81\dot{u}_{8,5}(t) + 178u_{8,5}(t) = 0,$$

$$200u_{8,6}(t) + 92\dot{u}_{8,6}(t) = 0, \ 226u_{8,7}(t) + 105\dot{u}_{8,7}(t) = 0, \ 256u_{8,8}(t) + 120\dot{u}_{8,8}(t) = 0.$$

Трехточечное начально-конечное условие принимает вид:

$$u_{1,1}(0) = \frac{1}{15}\frac{15\pi^2 + 128}{\pi^2},\; u_{1,2}(0) = 1,\; u_{1,3}(0) = \frac{128}{45\pi^2},\; u_{1,4}(0) = 0,$$

$$u_{1,5}(0) = \frac{128}{75\pi^2},\; u_{1,6}(0) = 0\; u_{1,7}(0) = \frac{128}{105\pi^2},\; u_{1,8}(0) = 0,$$

$$u_{2,1}(0) = 1,\; u_{2,3}(0) = 0,\; u_{2,4}(0) = 0,\; u_{2,5}(0) = 0,\; u_{2,6}(0) = 0,\; u_{2,7}(0) = 0,\; u_{2,8}(0) = 0,$$

$$u_{3,1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\; u_{3,2}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\; u_{3,3}\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\; u_{3,4}\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$u_{3,5}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\; u_{3,6}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\; u_{3,7}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\; u_{3,8}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$u_{4,1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\; u_{4,2}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\; u_{4,3}\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\; u_{4,4}\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$u_{4,5}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\; u_{4,6}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\; u_{4,7}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\; u_{4,8}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$u_{5,1}(1) = 0,\; u_{5,2}(1) = 0, u_{5,3}(1) = 0, u_{5,4}(1) = 0, u_{5,5}(1) = 1, u_{5,6}(1) = 0, u_{5,7}(1) = 0, u_{5,8}(1) = 0,$$

$$u_{6,1}(1) = 0,\; u_{6,2}(1) = 0,\; u_{6,3}(1) = 0,\; u_{6,4}(1) = 0,\; u_{6,5}(1) = 1,\; u_{6,6}(1) = 0,\; u_{6,7}(1) = 0,\; u_{6,8}(1) = 0,$$

$$u_{7,1}(1) = 0,\; u_{7,2}(1) = 0, u_{7,3}(1) = 0, u_{7,4}(1) = 0, u_{7,5}(1) = 0, u_{7,6}(1) = 1, u_{7,7}(1) = 0, u_{7,8}(1) = 1,$$

$$u_{8,1}(1) = 0,\; u_{8,2}(1) = 0,\; u_{8,3}(1) = 0,\; u_{8,4}(1) = 0,\; u_{8,5}(1) = 1,\; u_{8,6}(1) = 0,\; u_{8,7}(1) = 0,\; u_{8,8}(1) = 0.$$

В данном условии исключено $u_{22}(0) = 0$.

Исключаем алгебраическое уравнение и находим решение системы дифференциального уравнения с начальным условием. Объединяем решение алгебраического уравнения с решением ОДУ.

Решение задачи (7.5) – (7.8) примет вид:

$$u(s_1, s_2, t) = \frac{2\sin(s_1)\sin(2s_2)e^{\frac{10}{3}t}}{\pi} + \frac{2\sin(2s_1)\sin(s_2)e^{\frac{10}{3}t}}{\pi} + \frac{256}{45}\frac{\sin(s_1)\sin(3s_2)e^{-10t}}{\pi^3} +$$
$$+\frac{256}{75}\frac{\sin(s_1)\sin(5s_2)e^{-\frac{26}{9}t}}{\pi^3} + \frac{256}{105}\frac{\sin(s_1)\sin(7s_2)e^{-\frac{50}{21}t}}{\pi^3} +$$
$$+\frac{2}{15}\frac{\sin(s_1)\sin(s_2)(15\pi^2 + 128)e^{-\frac{2}{3}t}}{\pi^3} + \frac{2\sin(3s_1)\sin(3s_2)e^{-\frac{18}{5}t}}{\pi e^{-\frac{9}{5}}} + \frac{2\sin(3s_1)\sin(4s_2)e^{-\frac{50}{17}t}}{\pi e^{-\frac{25}{17}}} +$$
$$+\frac{2\sin(4s_1)\sin(3s_2)e^{-\frac{50}{17}t}}{\pi e^{-\frac{25}{17}}} + \frac{2\sin(4s_1)\sin(4s_2)e^{-\frac{8}{3}t}}{\pi e^{-\frac{4}{3}}} + \frac{2\sin(5s_1)\sin(5s_2)e^{-\frac{50}{21}t}}{\pi e^{-\frac{50}{21}}} +$$
$$+\frac{2\sin(6s_1)\sin(5s_2)e^{-\frac{122}{53}t}}{\pi e^{-\frac{122}{53}}} + \frac{2\sin(7s_1)\sin(6s_2)e^{-\frac{170}{77}t}}{\pi e^{-\frac{170}{77}}} + \frac{2\sin(7s_1)\sin(8s_2)e^{-\frac{226}{105}t}}{\pi e^{-\frac{226}{105}}}. \tag{7.10}$$

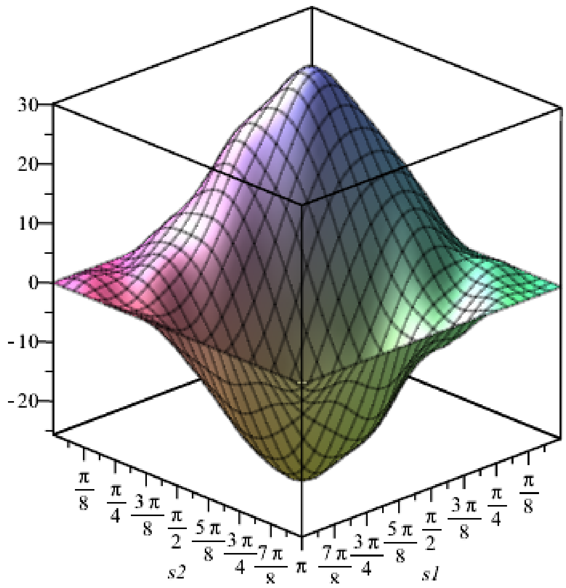

Рис. 8. График приближенного решения задачи (7.5) – (7.8)

Пример 7.3. Требуется найти численное решение задачи

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + f, \quad 0 < s_1 < l_1,\ 0 < s_2 < l_2,\ t_1 < t \le t_3. \tag{7.11}$$

Добавим к уравнению (7.11) граничные и начальные условия:

$$u'(0, s_2, t) = u'(l_1, s_2, t) = u'(s_1, 0, t) = u'(s_1, l_2, t) = 0,\ t_2 \in [t_1, t_3], \tag{7.12}$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_1^L} (u(s_1, s_2, t_1) - u^1(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2,$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_2^L} (u(s_1, s_2, t_2) - u^2(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2, \tag{7.13}$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_3^L} (u(s_1, s_2, t_3) - u^3(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2,$$

при заданных условиях: $\lambda = 5,\ \alpha = 5,\ l_1 = \pi,\ \ l_2 = \pi,\ \ t_1 = 0,\ \ t_2 = \frac{1}{2},\ \ t_3 = 1,$
$f = 6t(\cos(2s_1)\cos(5s_2)),$

$$u_1 = \frac{2}{\pi}(\cos(s_1)\cos(2s_2) + \cos(3s_1)\cos(2s_2) + \cos(3s_1)\cos(4s_2) + \cos(4s_1)\cos(4s_2)),$$

$$u_2 = \frac{2}{\pi}(\cos(5s_1)\cos(6s_2) + \cos(6s_1)\cos(5s_2) + \cos(6s_1)\cos(6s_2) + \cos(5s_1)\cos(5s_2)),$$

$$u_3 = \frac{2}{\pi}(\cos(7s_1)\cos(8s_2) + \cos(8s_1)\cos(7s_2) + \cos(7s_1)\cos(7s_2) + \cos(8s_1)\cos(8s_2)),$$

$$\sigma_1^{nm}(M) = \{\mu_{nm} : n = 1, 2, 3, 4,\ m = \overline{1, 8}\},$$

$$\sigma_2^{nm}(M) = \{\mu_{nm} : n = 5, 6,\ m = \overline{1, 8}\},$$

$$\sigma_3^{nm}(M) = \{\mu_{nm} : n = 7, 8...,\ m = \overline{1, 8}\}.$$

В цикле от 1 до 8 составляется искомое приближенное решение

$$u(s_1, s_2, t) = \sum_{n=1}^{8}\sum_{m=1}^{8} u_{nm}(t)\ \varphi_{nm}(s_1, s_2). \tag{7.14}$$

Так как $\lambda \neq \lambda_{ij}\ \forall i, j \in \mathbb{N}$ получим систему дифференциальных уравнений. Далее подставляем галеркинские приближения в уравнение (7.11), проинтегрировав полученное выражение в интервале от 1 до π, предварительно умножив на $\varphi_{nm}(s_1, s_2)$ получим:

$$7u_{1,1}(t) + 10\dot{u}_{1,1}(t) = 0,\ 10\dot{u}_{1,2}(t) + 25u_{1,2}(t) = 0,\ 15\dot{u}_{1,3}(t) + 50u_{1,3}(t) = 0,$$

$$85u_{1,4}(t) + 22\dot{u}_{1,4}(t) = 0,\ 31\dot{u}_{1,5}(t) + 130u_{1,5}(t) = 0,\ 185u_{1,6}(t) + 42\dot{u}_{1,6}(t) = 0,$$

$$250u_{1,7}(t) + 55\dot{u}_{1,7}(t) = 0,\ 325u_{1,8}(t) + 70\dot{u}_{1,8}(t) = 0,\ 25u_{2,1}(t) + 10\dot{u}_{2,1}(t) = 0,$$

$$40u_{2,2}(t) + 13\dot{u}_{2,2}(t) = 0,\ 18\dot{u}_{2,3}(t) + 65u_{2,3}(t) = 0,\ 100u_{2,4}(t) + 25\dot{u}_{2,4}(t) = 0,$$

$$34\dot{u}_{2,5}(t) + 145u_{2,5}(t) = 3t\pi,\ 200u_{2,6}(t) + 45\dot{u}_{2,6}(t) = 0,\ 256u_{2,7}(t) + 58\dot{u}_{2,7}(t) = 0,$$

$$340u_{2,8}(t) + 73\dot{u}_{2,8}(t) = 0,\ 50u_{3,1}(t) + 15\dot{u}_{3,1}(t) = 0,\ 65u_{3,2}(t) + 18\dot{u}_{3,2}(t) = 0,$$

$$23\dot{u}_{3,3}(t) + 90u_{3,3}(t) = 0,\ 125u_{3,4}(t) + 30\dot{u}_{3,4}(t) = 0, 39\dot{u}_{3,5}(t) + 170u_{3,5}(t) = 0,$$

$$225u_{3,6}(t) + 50\dot{u}_{3,6}(t) = 0,\ 290u_{3,7}(t) + 63\dot{u}_{3,7}(t) = 0,\ 365u_{3,8}(t) + 78\dot{u}_{3,8}(t) = 0,$$

$$85u_{4,1}(t) + 22\dot{u}_{4,1}(t) = 0,\ 100u_{4,2}(t) + 25\dot{u}_{4,2} = 0,\ 30\dot{u}_{4,3}(t) + 125u_{4,3}(t) = 0,$$

$$160u_{4,4}(t) + 37\dot{u}_{4,4}(t) = 0,\ 46\dot{u}_{4,5}(t) + 205u_{4,5}(t) = 0,\ 260u_{4,6}(t) + 57\dot{u}_{4,6}(t) = 0,$$

$$325u_{4,7}(t) + 70\dot{u}_{4,7}(t) = 0,\ 400u_{4,8}(t) + 85\dot{u}_{4,8}(t) = 0, 130u_{5,1}(t) + 31\dot{u}_{5,1}(t) = 0,$$

$$145u_{5,2}(t) + 34\dot{u}_{5,2} = 0,\ 39\dot{u}_{5,3}(t) + 170u_{5,3}(t) = 0,\ 205u_{5,4}(t) + 46\dot{u}_{5,4}(t) = 0,$$

$$55\dot{u}_{5,5}(t) + 250u_{5,5}(t) = 0,\ 305u_{5,6}(t) + 66\dot{u}_{5,6}(t) = 0,\ 370u_{5,7}(t) + 79\dot{u}_{5,7}(t) = 0,$$

$$445u_{5,8}(t) + 94\dot{u}_{5,8}(t) = 0,\ 185u_{6,1}(t) + 42\dot{u}_{6,1}(t) = 0,\ 200u_{6,2}(t) + 45\dot{u}_{6,2}(t) = 0,$$

$$50\dot{u}_{6,3}(t) + 225u_{6,3}(t) = 0,\ 260u_{6,4}(t) + 57\dot{u}_{6,4}(t) = 0, 66\dot{u}_{6,5}(t) + 305u_{6,5}(t) = 0,$$

$$360u_{6,6}(t) + 77\dot{u}_{6,6}(t) = 0,\ 425u_{6,7}(t) + 90\dot{u}_{6,7}(t) = 0,\ 500u_{6,8}(t) + 105\dot{u}_{6,8}(t) = 0,$$

$$250u_{7,1}(t) + 55\dot{u}_{7,1}(t) = 0,\ 265u_{7,2}(t) + 58\dot{u}_{7,2}(t) = 0,\ 63\dot{u}_{7,3}(t) + 290u_{7,3}(t) = 0,$$

$$325u_{7,4}(t) + 70\dot{u}_{7,4}(t) = 0,\ 79\dot{u}_{7,5}(t) + 370u_{7,5}(t) = 0,\ 425u_{7,6}(t) + 90\dot{u}_{7,6}(t) = 0,$$

$$490u_{7,7}(t) + 103\dot{u}_{7,7}(t) = 0,\ 565u_{7,8}(t) + 118\dot{u}_{7,8}(t) = 0,\ 325u_{8,1}(t) + 70\dot{u}_{8,1}(t) = 0,$$

$$340u_{8,2}(t)+73\dot{u}_{8,2}=0,\ 78\dot{u}_{8,3}(t)+365u_{8,3}(t)=0,\ 400u_{8,4}(t)+85\dot{u}_{8,4}(t)=0,$$

$$94\dot{u}_{8,5}(t)+445u_{8,5}(t)=0,\ 500u_{8,6}(t)+105\dot{u}_{8,6}(t)=0,\ 565u_{8,7}(t)+118\dot{u}_{8,7}(t)=0,$$

$$640u_{8,8}(t)+133\dot{u}_{8,8}(t)=0.$$

Трехточечное начально-конечное условие принимает вид:

$$u_{1,1}(0)=0,\ u_{1,2}(0)=1,\ u_{1,3}(0)=0,\ u_{1,4}(0)=0,\ u_{1,5}(0)=0,\ u_{1,6}(0)=0\ u_{1,7}(0)=0,\ u_{1,8}(0)=0,$$

$$u_{2,1}(0)=0,\ u_{2,2}(0)=0,\ u_{2,3}(0)=0,\ u_{2,4}(0)=0,\ u_{2,5}(0)=0,\ u_{2,6}(0)=0,\ u_{2,7}(0)=0,\ u_{2,8}(0)=0,$$

$$u_{3,1}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ u_{3,2}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ u_{3,3}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ u_{3,4}\left(\frac{1}{3}\right)=0,$$

$$u_{3,5}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ u_{3,6}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ u_{3,7}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ u_{3,8}\left(\frac{1}{3}\right)=0,$$

$$u_{4,1}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ u_{4,2}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ u_{4,3}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ u_{4,4}\left(\frac{1}{3}\right)=0,$$

$$u_{4,5}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ u_{4,6}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ u_{4,7}\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ u_{4,8}\left(\frac{1}{3}\right)=0,$$

$$u_{5,1}(1)=0,\ u_{5,2}(1)=0, u_{5,3}(1)=0, u_{5,4}(1)=0, u_{5,5}(1)=1, u_{5,6}(1)=0, u_{5,7}(1)=0, u_{5,8}(1)=0,$$

$$u_{6,1}(1)=0,\ u_{6,2}(1)=0,\ u_{6,3}(1)=0,\ u_{6,4}(1)=0,\ u_{6,5}(1)=0,\ u_{6,6}(1)=0,\ u_{6,7}(1)=0,\ u_{6,8}(1)=0,$$

$$u_{7,1}(1)=0,\ u_{7,2}(1)=0, u_{7,3}(1)=0, u_{7,4}(1)=0, u_{7,5}(1)=0, u_{7,6}(1)=0, u_{7,7}(1)=1, u_{7,8}(1)=1,$$

$$u_{8,1}(1)=0,\ u_{8,2}(1)=0,\ u_{8,3}(1)=0,\ u_{8,4}(1)=0,\ u_{8,5}(1)=0,\ u_{8,6}(1)=0,\ u_{8,7}(1)=1,\ u_{8,8}(1)=1.$$

Решение задачи (7.11) – (7.13) примет вид:

$$u(s_1,s_2,t)=\frac{2\cos(7s_1)\cos(7s_2)e^{-\frac{490}{103}t}}{\pi e^{-\frac{490}{103}}}+\frac{2\cos(7s_1)\cos(8s_2)e^{-\frac{565}{118}t}}{\pi e^{-\frac{565}{118}}}+$$
$$+\frac{2\cos(8s_1)\cos(8s_2)e^{-\frac{640}{133}t}}{\pi e^{-\frac{640}{133}}}+\frac{2\cos(s_1)\cos(2s_2)e^{-\frac{5}{2}}}{\pi}+$$
$$+\frac{2\cos(2s_1)\cos(5s_2)(\frac{3}{145}t\pi-\frac{102}{21025}\pi+\frac{102}{21025}e^{-\frac{145}{34}t})}{\pi}. \tag{7.15}$$

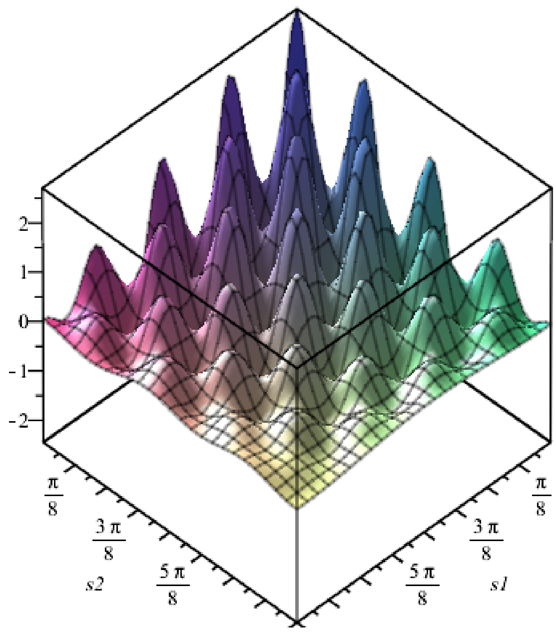

Рис. 9. График приближенного решения задачи (7.11) – (7.13)

Пример 7.4. Требуется найти численное решение задачи

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u + f, \quad 0 < s_1 < l_1,\ 0 < s_2 < l_2,\ t_1 < t \le t_3. \tag{7.16}$$

Добавим к уравнению (7.16) граничные и начальные условия:

$$u'(0, s_2, t) = u'(l_1, s_2, t) = u'(s_1, 0, t) = u'(s_1, l_2, t) = 0,\ t_2 \in [t_1, t_3], \tag{7.17}$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_1^L} (u(s_1, s_2, t_1) - u^1(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2,$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_2^L} (u(s_1, s_2, t_2) - u^2(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2, \tag{7.18}$$

$$\underbrace{\sum\sum}_{nm:\mu_{nm}\in\sigma_3^L} (u(s_1, s_2, t_3) - u^3(s_1, s_2), \varphi_{nm}(s_1, s_2))\varphi_{nm}(s_1, s_2) = 0,\ 0 \le s_1 \le l_1,\ 0 \le s_2 \le l_2,$$

при заданных условиях: $\lambda = -2,\ \alpha = 3,\ l_1 = \pi,\ l_2 = \pi,\ t_1 = 0,\ t_2 = \frac{1}{4},\ t_3 = 1,$
$f(s_1, s_2, t) = 3t^2(\cos(6s_1)\cos(s_2)),$

$$u_1 = \frac{2}{\pi}(2\cos(2s_1)\cos(s_2) + \cos(2s_1)\cos(2s_2) + 3\cos(s_1)\cos(2s_2) + 4\cos(s_1)\cos(s_2)),$$

$$u_2 = \frac{2}{\pi}(5\cos(4s_1)\cos(3s_2) + 2\cos(3s_1)\cos(3s_2) + \cos(4s_1)3\cos(4s_2) + \cos(3s_1)4\cos(4s_2)),$$

$$u_3 = \frac{2}{\pi}(5\cos(6s_1)6\cos(5s_2) + \cos(5s_1)7\cos(5s_2) + \cos(6s_1)8\cos(6s_2) + \cos(5s_1)6\cos(6s_2)),$$

$$\sigma_1^{nm}(M) = \{\mu_{nm} : n = 1, 2,\ m = \overline{1, 6}\},$$
$$\sigma_2^{nm}(M) = \{\mu_{nm} : n = 3, 4,\ m = \overline{1, 6}\},$$
$$\sigma_3^{nm}(M) = \{\mu_{nm} : n = 5, 6, ...,\ m = \overline{1, 6}\}.$$

В цикле от 1 до 6 составляется искомое приближенное решение

$$u(s_1, s_2, t) = \sum_{n=1}^{6}\sum_{m=1}^{6} u_{nm}(t)\ \varphi_{nm}(s_1, s_2). \tag{7.19}$$

Так как $\lambda = \lambda_{11}$ получим систему алгебро-дифференциальных уравнений. Далее подставляем галеркинские приближения в уравнение (7.16), проинтегрировав полученное выражение в интервале от 1 до π, предварительно умножив на $\varphi_{nm}(s_1, s_2)$ получим:

$$6u_{1,1}(t) = 0,$$

$$3\dot{u}_{1,2}(t) + 15u_{1,2}(t) = 0,\ 8\dot{u}_{1,3}(t) + 30u_{1,3}(t) = 0,$$

$$51u_{1,4}(t) + 15\dot{u}_{1,4}(t) = 0,\ 24\dot{u}_{1,5}(t) + 78u_{1,5}(t) = 0,\ 111u_{1,6}(t) + 35\dot{u}_{1,6}(t) = 0,$$

$$15u_{2,1}(t) + 3\dot{u}_{2,1}(t) = 0,\ 6\dot{u}_{2,2}(t) + 24u_{2,2}(t) = 0,\ 11\dot{u}_{2,3}(t) + 39u_{2,3}(t) = 0,$$

$$18\dot{u}_{2,4}(t) + 60u_{2,4}(t) = 0,\ 87u_{2,5}(t) + 27\dot{u}_{2,5}(t) = 0,\ 120u_{2,6}(t) + 38\dot{u}_{2,6}(t) = 0,$$

$$8\dot{u}_{3,1}(t) + 30u_{3,1}(t) = 0,\ 11\dot{u}_{3,2}(t) + 39u_{3,2}(t) = 0,\ 16\dot{u}_{3,3}(t) + 54\dot{u}_{3,3}(t) = 0,$$

$$23\dot{u}_{3,4}(t) + 75u_{3,4}(t) = 0,\ 102u_{3,5}(t) + 32\dot{u}_{3,5}(t) = 0,\ 43\dot{u}_{3,6}(t) + 135u_{3,6}(t) = 0,$$

$$51u_{4,1}(t) + 15\dot{u}_{4,1}(t) = 0,\ 60u_{4,2}(t) + 18\dot{u}_{4,2}(t) = 0,\ 23\dot{u}_{4,3}(t) + 75u_{4,3}(t) = 0,$$

$$30\dot{u}_{4,4}(t) + 96u_{4,4}(t) = 0,\ 39\dot{u}_{4,5}(t) + 123u_{4,5}(t) = 0,\ 156u_{4,6}(t) + 50\dot{u}_{4,6}(t) = 0,$$

$$24\dot{u}_{5,1}(t) + 78u_{5,1}(t) = 0,\ 87u_{5,2}(t) + 27\dot{u}_{5,2}(t) = 0,\ 102u_{5,3}(t) + 32\dot{u}_{5,3}(t) = 0,$$

$$123u_{5,4}(t) + 39\dot{u}_{5,4}(t) = 0,\ 48\dot{u}_{5,5}(t) + 150u_{5,5}(t) = 0,\ 183u_{5,6}(t) + 59\dot{u}_{5,6}(t) = 0,$$

$$111u_{6,1}(t) + 35\dot{u}_{6,1}(t) = \frac{3}{2}t^2\pi,\ 120u_{6,2}(t) + 38\dot{u}_{6,2}(t) = 0,\ 135u_{6,3}(t) + 43\dot{u}_{6,3}(t) = 0,$$

$$156u_{6,4}(t) + 50\dot{u}_{6,4}(t) = 0,\ 183u_{6,5}(t) + 59\dot{u}_{6,5}(t) = 0,\ 216u_{6,6}(t) + 70\dot{u}_{6,6}(t) = 0.$$

Трехточечное начально-конечное условие принимает вид:

$$u_{1,2}(0) = 3,\ u_{1,3}(0) = 0,\ u_{1,4}(0) = 0,\ u_{1,5}(0) = 0,\ u_{1,6}(0) = 0,$$

$$u_{2,1}(0) = 2,\ u_{2,2}(0) = 1,\ u_{2,3}(0) = 0,\ u_{2,4}(0) = 0,\ u_{2,5}(0) = 0, u_{2,6}(0) = 0,$$
$$u_{3,1}\left(\frac{1}{4}\right) = 0,\ u_{3,2}\left(\frac{1}{4}\right) = 0,\ u_{3,3}\left(\frac{1}{4}\right) = 2,\ u_{3,4}\left(\frac{1}{4}\right) = 4,$$
$$u_{3,5}\left(\frac{1}{4}\right) = 0, u_{3,6}\left(\frac{1}{4}\right) = 0,\ u_{4,1}\left(\frac{1}{4}\right) = 0, u_{4,2}\left(\frac{1}{4}\right) = 0,\ u_{4,3}\left(\frac{1}{4}\right) = 5, u_{4,4}\left(\frac{1}{4}\right) = 3,$$

$$u_{4,5}\left(\frac{1}{4}\right)=0,\ u_{4,6}\left(\frac{1}{4}\right)=0,\ u_{5,1}(1)=0, u_{5,2}(1)=0, u_{5,3}(1)=0, u_{5,4}(1)=0,$$

$$u_{5,5}(1)=7,\ u_{5,6}(1)=6,\ u_{6,1}(1)=0, u_{6,2}(1)=0,$$

$$u_{6,3}(1)=0, u_{6,4}(1)=0, u_{6,5}(1)=30, u_{6,6}(1)=8.$$

В данном условии исключено $u_{11}(0)=0$.

Исключаем алгебраическое уравнение и находим решение системы дифференциального уравнения с начальным условием. Объединяем решение алгебраического уравнения с решением ОДУ.

Решение задачи (7.16) – (7.18) примет вид:

$$u(s_1,s_2,t)=\frac{2\cos(6s_1)\cos(s_2)\left(\frac{1}{74}t^2\pi-\frac{35}{4107}t\pi+\frac{7001}{911754}\frac{e^{-\frac{111}{35}t}\pi}{e^{-\frac{111}{35}}}\right)}{\pi}+$$
$$\frac{6\cos(s_1)\cos(2s_2)e^{-5t}}{\pi}+\frac{4\cos(2s_1)\cos(s_2)e^{-5t}}{\pi}+\frac{2\cos(2s_1)\cos(2s_2)e^{-4t}}{\pi}+$$
$$+\frac{10\cos(4s_1)\cos(3s_2)e^{-\frac{75}{23}t}}{\pi e^{-\frac{75}{92}}}+\frac{6\cos(4s_1)\cos(4s_2)e^{-\frac{16}{5}t}}{\pi e^{-\frac{4}{5}}}+\frac{14\cos(5s_1)\cos(5s_2)e^{-\frac{25}{8}t}}{\pi e^{-\frac{25}{8}}}+$$
$$\frac{12\cos(5s_1)\cos(6s_2)e^{-\frac{183}{59}t}}{\pi e^{-\frac{183}{59}}}+\frac{60\cos(6s_1)\cos(5s_2)e^{-\frac{183}{59}t}}{\pi e^{-\frac{183}{59}}}+\frac{16\cos(6s_1)\cos(6s_2)e^{-\frac{108}{35}t}}{\pi e^{-\frac{108}{35}}}+$$
$$\frac{4\cos(3s_1)\cos(3s_2)e^{-\frac{27}{8}t}}{\pi e^{-\frac{27}{32}}}+\frac{8\cos(3s_1)\cos(4s_2)e^{-\frac{75}{23}t}}{\pi e^{-\frac{75}{92}}} \tag{7.20}$$

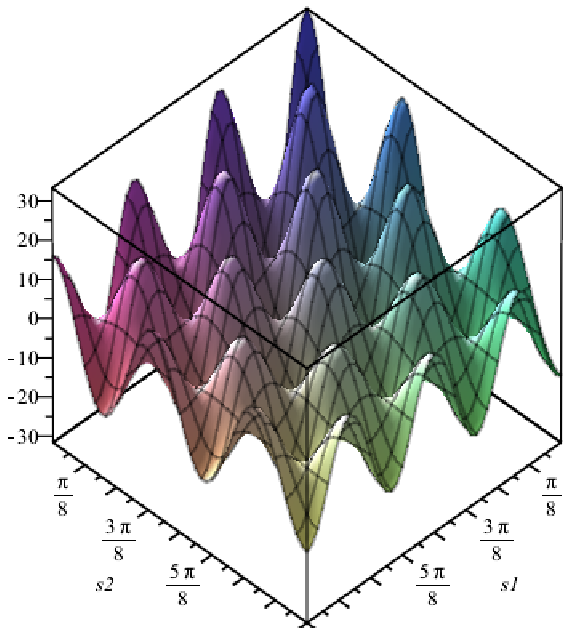

Рис. 10. График приближенного решения задачи (7.16) – (7.18)

Заключение

В квалификационной работе были решены поставленные задачи:

– исследована разрешимость трехточечной начально-конечной задачи на основе метода Галеркина;

– проведено численное исследование одной модели соболевского типа с трехточечным начально-конечным условием;

– построен алгоритм нахождения приближенного решения на основе модифицированного проекционного метода Галеркина;

– реализован алгоритм численного метода решения и описание программы;

– проведены вычислительные эксперименты.

Список литературы

[1] Бабич, В.М. Линейные уравнения математической физики / В.М. Бабич, М.Б. Капилевич, С.Г. Михлин. — М.: Наука, 1964. – 368 с.

[2] Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – 852 – 864 с.

[3] Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – 58 – 73 с.

[4] Баренблатт, Г.И. Теория нестандартной фильтрации жидкости и газа / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. – М.: Наука, 1972.

[5] Басниев, К.С. Подземная гидромеханика / К.С. Басниев, И.Н. Кочина, В.М. Максимов. – М.: Недра, 1993. – 416 с.

[6] Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С., Бугров, С.М. Никольский, // Высшая математика. – 1997. – Т. 3. – 335 с.

[7] Будак, Б.М., Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будак, С.В. Фомин // Серия "Курс высшей математики и математической физики". — М.: Наука, 1965. – 608 с.

[8] Бурятов, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные Интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бурятов, С.М. Никольский. — М.: Дрофа, – 2004. – 360 с.

[9] Загребина, С.А. Начально-конечная задачи для неклассических моделей математической физике / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2013. – Т. 6, № 2. – 5 – 24 с.

[10] Загребина, С.А. Некоторые обобщенные задачи Шоултера – Сидорова для моделей соболевского типа / С.А. Загребина, А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2015. – Т. 8, № 2. – 5 с.

[11] Загребина, С.А. Об одной новой задаче для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной / С.А. Загребина, А.С. Конкина // Вестнник МаГУ. Серия "Математика". — Магнитогорск, 2012. – Вып. 14. – 67 – 77 с.

[12] Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка: моногр. / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.

[13] Замышляева, А.А. О численном исследовании математической модели распространения волн на мелкой воде / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, № 1. – 27-34 с.

[14] Кочина., П.Я. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967) / отв. ред. П.Я. Кочина. – М.: Наука, 1969. – 546 с.

[15] Леонтьев, Н.Е. Основы теории фильтрации: учебное пособие / Н.Е. Леонтьев — 2-е изд. — М.: МАКС Пресс, 2017. – 88 с.

[16] Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, А.Н. Дыльков // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". — 2011. — № 17, вып. 8. — 113 — 114 с.

[17] Манакова, Н.А. Численое исследование процессов в модели Баренблата — Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Вестник МаГУ. Математика. Вып. 15. — Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос.ун-та, 2013. — 58 — 67 с.

[18] Мизохата, С. Теория уравнений с частными производными / С. Мизохата. — М.: Наука, 1977.

[19] Подземная гидромеханика / К.С. Басниев, Н.М. Дмитриев, Р.Д.Каневская, В.М. Максимов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 100-146 с.

[20] Свешников, А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: Физматлит, 2007.

[21] Свиридюк, Г.А. Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно ρ-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 12. – 1646 – 1652 с.

[22] Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутстк. гос. ун-та. Серия "Математика". – 2010. – Т. 3, № 1. – 104 – 125 с.

[23] Свиридюк, Г.А. О галеркинских приближениях сингулярных нелинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Изв. вузов. Математика. – 1989. № 2. – 55 – 61 с.

[24] Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физике / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР, Серия "Математика". – 1954. – Т. 18, вып. 1. – 3 – 50 с.

[25] Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галёркина / К. Флетчер. — М.: Мир, 1988.