

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«Южно-Уральский государственный университет  
(Национальный исследовательский университет)»  
ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ТОЧНЫХ НАУК  
КАФЕДРА УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**РАБОТА ПРОВЕРЕНА**

Рецензент, профессор кафедры МиКМ,

д.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_ /А.В. Келлер/

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

**ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ**

Заведующий кафедрой УМФ,

д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_ /Свиридюк Г.А./

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

**Численное исследование одной математической модели  
соболевского типа на графе**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
01.04.01.2016.177.00 ВКР

**Руководитель, д.ф.-м.н., доцент**

\_\_\_\_\_ /А.А. Замышляева/

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

**Автор, студент группы ЕТ-221**

\_\_\_\_\_ /М.Ф. Шияпова/

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

**Нормоконтролер, к.ф.-м.н., доцент**

\_\_\_\_\_ /Д.Е. Шафранов/

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

УДК 517.9

Шияпова, М. Ф. Численное исследование одной математической модели соболевского типа на графе/ М.Ф. Шияпова. – Челябинск, 2018. – 38с.

Работа посвящена численному исследованию математической модели Буссинеска - Лява на геометрическом графе. Написана программа для трехреберного графа, произведены численные эксперименты при разных начальных условиях

Список литературы: 14 названий, рисунков – 13.

# Содержание

Введение	4
1. Абстрактная задача Штурма – Лиувилля на геометрическом графе	7
2. Задача Штурма – Лиувилля для некоторых геометрических графов	9
3. Математическая модель Буссинеска – Лява на геометрическом графе	17
3.1 Метод Фурье . . . . .	17
3.2 Описание алгоритма численного метода и программы . . . . .	29
3.3 Вычислительные эксперименты . . . . .	32
Заключение	36
Список литературы	37

## Введение

Пусть  $G = G(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$  – конечный связный ориентированный граф, где  $\mathfrak{V} = \{V_i\}$  – множество вершин, а  $\mathfrak{E} = \{E_j\}$  – множество ребер. Каждому ребру поставим в соответствие два числа  $l_j, d_j \in \mathbb{R}_+$ , обозначающие длину и площадь поперечного сечения ребра  $E_j$  соответственно. На ребрах графа  $G$  рассмотрим уравнения

$$(\lambda - \Delta)u_{jtt} = \alpha(\Delta - \lambda')u_{jt} + \beta(\Delta - \lambda'')u_j \quad (0.1)$$

$$\Delta u_j = u_{jxx}$$

с условиям

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_m \in E^\omega(V_i)} d_m u_{mx}(l_m, t) = 0, \quad (0.2)$$

$$u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t) \quad (0.3)$$

и начальными условиями

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (0.4)$$

Здесь через  $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$  обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине  $V_i$ . Условие (0.2) обозначает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а условие (0.3) – что решение  $u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$  в каждой вершине должно быть непрерывным. В частном случае, когда граф  $G$  состоит из одного ребра и двух вершин, условие (0.3) исчезает, а условие (0.2) превращается в условие Неймана. Дифференциальные уравнения на графах – сравнительно новая часть математического знания. Первые публикации в этой области появились в последнее десятилетие прошлого века, первая монография вышла в 2004 г. [5] и была посвящена изучению качественных свойств дифференциальных уравнений на многообразиях типа сети. В [12] на графе  $\mathbf{G}$  рассмотрены уравнения реакции-диффузии

$$u_{jt} = u_{jxx} + f(u_j), x \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}_{++}, \quad (0.5)$$

где  $f$  – гладкая функция, с условиями типа Кирхгоффа. Между тем было замечено, что в ряде случаев уравнения соболевского типа описывают процессы реакции-диффузии лучше, чем полулинейные уравнения вида (0.5).

Уравнения соболевского типа на графах впервые были рассмотрены в 2002 г. [6]; первое диссертационное исследование в этом направлении было выполнено в 2002 – 2005 гг. [11] и содержало результаты [7] – [9]. В работах [2, 3, 5-9, 11] возникла задача Штурма – Лиувилля для задачи (0.1) – (0.3), правда, в частном случае  $(c_j)x \equiv 1, a_j(x) \equiv a = const$ , причем предложенный подход имел мало общего с результатами [4]. Дальнейшее исследование [10] привело к новой задаче Штурма – Лиувилля для задачи (0.1) – (0.3), теперь уже в случае  $c_j(x) \equiv 1, a_j(x) \equiv a_j$ .

Цель данной работы – найти численное и аналитическое решение уравнения Буссинеска – Лява для трехреберного, ориентированного графа. Для осуществления данной цели нужно решить задачи:

- 1) Решить задачу Штурма – Лиувилля;
- 2) Исследовать методом Фурье математическую модель Буссинеска – Лява (0.1) – (0.3) на геометрическом графе.
- 3) Разработать алгоритм для численного решения математической модели.
- 4) Написать программу для трехреберного графа на основе разработанного алгоритма для нахождения численных решений при разных начальных условиях задачи (0.1) – (0.4).
- 5) Провести вычислительные эксперименты.

Работа, кроме вводной части, заключения и списка литературы содержит четыре параграфа.

В первом параграфе приведены свойства собственных значений и собственных функций задачи, взятые в [1]. Второй параграф посвящен конкретным примерам решений задач Штурма – Лиувилля. В третьем параграфе, применяя метод Фурье, находятся решения задачи Буссинеска – Лява и сделано обоснование применения метода Фурье для задачи Буссинеска – Лява для некоторых конечных связных ориентированных графов [13]. В последнем параграфе проведено численное исследование с применением метода Галеркина и приведены вычислительные эксперименты при различных начальных условиях, построены графики в разные моменты времени.

Ранее подобная математическая модель была рассмотрена в [14] на основе

неполного уравнения

$$\lambda u_{tt} - u_{xx} u_{tt} = \alpha u_{xxt} - \alpha \lambda' u_t.$$

Здесь не учитывалась поперечная инерция. В данной выпускной квалификационной работе рассмотрен более общий случай. Кроме того, написана программа для трехреберного графа и проведены вычислительные эксперименты при разных начальных данных.

# 1. Абстрактная задача Штурма – Лиувилля на геометрическом графе

Следуя [11], введем в рассмотрение гильбертово пространство

$$L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots), g_j \in L_2(0, l_j)\}$$

со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_j d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx.$$

и банахово пространство

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено (0.2)}\}$$

с нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_j d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

**Определение 1.** Не равная тождественно нулю функция

$u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$  называется собственной функцией задачи (0.1) – (0.3) для оператора

$$A = \left( \frac{\partial}{\partial x}(-c_1(x) \frac{\partial}{\partial x}) + a_1(x), \frac{\partial}{\partial x}(-c_2(x) \frac{\partial}{\partial x}) + a_2(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x}(-c_j(x) \frac{\partial}{\partial x}) + a_j(x), \dots \right),$$

если существует такое число  $\lambda$ , что функция  $u$  является классическим решением следующей задачи:

$$a_j(x)u_j - (c_j(x)u_{jx})_x = \lambda u_j, \quad (1.1)$$

$$u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \quad (1.2)$$

$$\sum_{E_j \in E^a(V_i)} d_j c_j(0) u_{jx}(0, t) - \sum_{E_m \in E^\omega(V_i)} d_m c_m(l_m) u_{mx}(l_m, t) = 0. \quad (1.3)$$

Число  $\lambda$  называется собственным значением (соответствующим собственной функции  $u$ )

В дальнейшем мы будем рассматривать только собственные функции, нормированные условием  $\|u\|_{L_2(\mathbf{G})} = 1$  и соответствующие им собственные значения.

**Теорема 1.** [1] Собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  задачи (0.1) – (0.3) для оператора

$$A = \left( \frac{\partial}{\partial x} (-c_1(x) \frac{\partial}{\partial x}) + a_1(x), \frac{\partial}{\partial x} (-c_2(x) \frac{\partial}{\partial x}) + a_2(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x} (-c_j(x) \frac{\partial}{\partial x}) + a_j(x), \dots \right),$$

вещественны и  $\lambda_s \rightarrow +\infty$  при  $s \rightarrow \infty$ . собственные значения удовлетворяют неравенству  $\lambda_s > \min_j \left( \min_{x \in (0, l_j)} a_j(x) \right)$  во всех случаях, кроме  $a_j(x) = a_i(x) = \text{const}$  для всех  $i, j$ .

Если же  $a_j(x) = a_i(x) = \text{const}$  для всех  $i, j$ , то собственные значения удовлетворяют неравенству  $\lambda_s \geq m$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , причем существует однократное собственное значение, равное  $m$ , с собственной функцией

$$\left( \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} l_j d_j \right)^{-1} (1, 1, \dots, 1, \dots)$$

В данной работе мы рассматриваем частный случай, когда  $a_j \equiv 0$ ,  $c_j \equiv 1$ ,  $d_j \equiv 1$ .

**Теорема 2.** [1] Собственные функции  $u_1(x), u_2(x), \dots$  задачи (0.1) – (0.3) образуют ортонормированный базис в  $L_2(\mathbf{G})$ , т.е. любая функция  $f \in L_2(\mathbf{G})$  разлагается в ряд Фурье

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k, \quad f_k = \langle f, u_k \rangle, \quad (1.4)$$

сходящийся в  $L_2(\mathbf{G})$ . Для функции  $f \in \mathfrak{U}$  ряд (1.4) по собственным функциям задачи (0.1) – (0.3) сходится в  $\mathfrak{U}$  и имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| |f_k|^2 \leq C \|f\|_{\mathfrak{U}}^2, \quad (1.5)$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $f$ .

## 2. Задача Штурма – Лиувилля для некоторых геометрических графов.

Задача Штурма – Лиувилля возникает при решении уравнений в частных производных методом Фурье. Мы применим этот метод для решения уравнения Буссинеска – Лява. Для удобства собственные функции на  $n$ -реберном графе будем обозначать через  $X_k(x) = (X_k^1(x), X_k^2(x), \dots, X_k^n(x))$ .

### Пример 1.

Пусть на рис. 1 граф  $G_1$  состоит из одного ребра длины  $l$ , соединяющего две вершины.

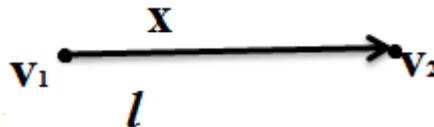


Рис. 1: Граф  $G_1$

Тогда задача Штурма – Лиувилля примет вид:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Найдем ненулевые решения  $X(x)$  задачи (2.1). Следовательно,

$$\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2},$$

$$X_k = C_1 \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для того, чтобы найти  $C_1$  найдем норму  $X_k$  и воспользуемся условием нормировки:

$$\|X_k\| = 1, \text{ где } \|X_k\|^2 = \int_0^l X_k^2(x) dx = 1.$$

Следовательно,

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}, \text{ а собственные функции:}$$

$$X_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, \dots$$

### Пример 2.

Рассмотрим граф на рис. 2, состоящий из трех ребер, соединяющих четыре вершины.

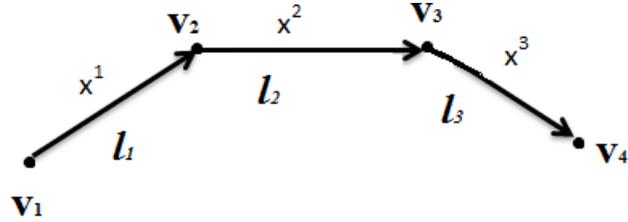


Рис. 2: Граф  $G_2$

Задача Штурма – Лиувилля примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (X^1)'' + \lambda X = 0, \\ (X^2)'' + \lambda X = 0, \\ (X^3)'' + \lambda X = 0, \\ (X^1)'(0) = 0, \\ (X^2)'(0) - (X^1)'(l_1) = 0, \\ (X^3)(0) - (X^2)'(l_2) = 0, \\ (X^3)'(l_3) = 0, \\ X^1(l_1) = X^2(0), \\ X^2(l_2) = X^3(0). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Следовательно,

$$\lambda_k = \left( \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + l_3} \right)^2. \quad (2.3)$$

Для того, чтобы найти  $C_1$  найдем норму  $X_k$ .

$$\|X_k\|^2 = \int_0^{l_1} (X^1)^2 dx + \int_0^{l_2} (X^2)^2 dx + \int_0^{l_3} (X^3)^2 dx = 1. \quad (2.4)$$

Следовательно,  $C_1^2 = \frac{2}{l_1 + l_2 + l_3}$ .

Откуда  $C_1 = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + l_3}}$ .

Подставим значение  $C_1$  в общее решение уравнений:

$$\begin{aligned}
X_k^1(x) &= \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+l_3}} \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+l_3} x, \\
X_k^2(x) &= \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+l_3}} \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+l_3} (l_1 + x), \\
X_k^3(x) &= \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+l_3}} \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+l_3} (l_1 + l_2 + x), \quad k = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

### Пример 3.

Рассмотрим граф на рис. 3, состоящий из трех ребер длины  $l$ , соединяющих четыре вершины.

Задача Штурма – Лиувилля примет вид:

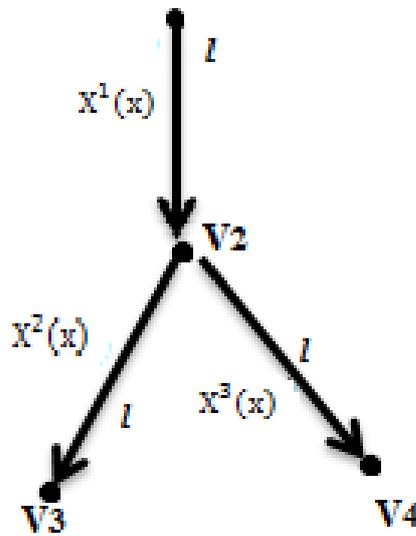


Рис. 3: Граф  $G_3$

$$\left\{ \begin{array}{l}
(X^1)'' + \lambda X = 0, \\
(X^2)'' + \lambda X = 0, \\
(X^3)'' + \lambda X = 0, \\
(X^1)'(0) = 0, \\
(X^2)'(0) + (X^3)'(0) - (X^1)'(l) = 0, \\
(X^2)'(l) = 0, \\
(X^3)'(l) = 0, \\
X^1(l) = X^2(0) = X^3(0).
\end{array} \right. \quad (2.5)$$

Для случая  $\lambda > 0$  общее решение уравнений из системы (2.5) имеет вид:

$$\begin{cases} X_k^1(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_k^2(x) = C_3 \cos \sqrt{\lambda}x + C_4 \sin \sqrt{\lambda}x, \\ X_k^3(x) = C_5 \cos \sqrt{\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{\lambda}x. \end{cases}$$

Подставим его в граничные условия системы (2.5):

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_4 + C_6 + C_1 \sin \sqrt{\lambda}l = 0, \\ -C_3 \sin \sqrt{\lambda}l + C_4 \cos \sqrt{\lambda}l = 0, \\ -C_5 \sin \sqrt{\lambda}l + C_6 \cos \sqrt{\lambda}l = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda}l = C_3 = C_5. \end{cases} \quad (2.6)$$

Так как  $C_2 = 0$  и  $C_1 \cos \sqrt{\lambda}l = C_3 = C_5$ , система (2.6) принимает вид:

$$\begin{cases} C_4 + C_6 + C_1 \sin \sqrt{\lambda}l = 0, \\ -C_1 \cos \sqrt{\lambda}l \sin \sqrt{\lambda}l + C_4 \cos \sqrt{\lambda}l = 0, \\ -C_1 \cos \sqrt{\lambda}l \sin \sqrt{\lambda}l + C_6 \cos \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

Из первой строчки системы видно, что  $C_4 + C_6 = -C_1 \sin \sqrt{\lambda}l$ , тогда:

$$\begin{cases} \cos \sqrt{\lambda}l(C_4 + C_6 + C_4) = 0, \\ \cos \sqrt{\lambda}l(C_4 + C_6 + C_4) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1 случай.

$\cos \sqrt{\lambda}l = 0$ , тогда  $\lambda_k = \left(\frac{\pi + \pi k}{l}\right)^2$ . Система примет вид:

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_3 = 0, \\ C_5 = 0, \\ C_1 + C_4 + C_5 = 0. \end{cases}$$

Пусть  $C_4 = -C_1, C_6 = 0$ , тогда все функции выразим через константу  $C_1$ :

$$\begin{aligned} X_k^1(x) &= C_1 \cos \frac{\pi + \pi k}{l}x, \\ X_k^2(x) &= -C_1 \sin \frac{\pi + \pi k}{l}, \end{aligned}$$

$$X_k^3(x) = 0.$$

Найдем норму собственной функции:

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l (X_k^1(x))^2 dx + \int_0^l (X_k^2(x))^2 dx = 1$$

$$\begin{aligned} \|X_k\|^2 &= \int_0^l (C_1 \cos \frac{\pi}{2} + \pi k x)^2 dx + \int_0^l (-C_1 \sin \frac{\pi}{2} + \pi k x)^2 dx = \frac{C_1^2}{2} (\int_0^l (1 + \cos \frac{2\pi}{2} + \pi k x) dx + \\ &+ \int_0^l (1 - \cos \frac{2\pi}{2} + \pi k x) dx) = \frac{C_1^2}{2} (l + \sin \frac{2\pi}{2} + \pi k x \frac{l}{2\pi + \pi k} \Big|_0^l + l + \sin \frac{2\pi}{2} + \pi k x \frac{l}{2\pi + \pi k} \Big|_0^l) = \\ &= \frac{(C_1)^2}{2} 2l = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } C_1 = \sqrt{\frac{1}{l}}.$$

Тогда общее решение системы (2.5) имеет вид:

$$X_k^1(x) = \sqrt{\frac{1}{l}} \cos \frac{\pi}{2} + \pi k x,$$

$$X_k^2(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi}{2} + \pi k x,$$

$$X_k^3(x) = 0.$$

2 случай.

$$\cos \lambda l \neq 0$$

$$\begin{cases} 2C_4 + C_6 = 0, \\ 2C_6 + C_4 = 0. \end{cases}$$

Из системы следует, что  $C_4 = C_6 = 0$

Так как  $C_1 \cos \sqrt{\lambda} l = C_3 = C_5$ , подставим константы  $C_3, C_5$  в систему (2.6).

$$\begin{cases} C_1 \sin \sqrt{\lambda} l = 0, \\ -C_1 \cos \sqrt{\lambda} l \sin \sqrt{\lambda} l = 0, \\ -C_1 \cos \sqrt{\lambda} l \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \end{cases}$$

Т.к.  $C_1 \neq 0$ , находим  $\lambda_k$ :

$$\lambda_k = \left( \frac{\pi k}{l} \right)^2.$$

Пусть  $C_1 = C_3 = C_5$ , а  $C_4 = C_6 = 0$ , тогда:

$$X_k^1(x) = C_1 \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad X_k^2(x) = C_1 \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad X_k^3(x) = C_1 \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Найдем норму  $X_k$ :

$$\|X_k\|^2 = 3 \int_0^l (C_1 \cos \frac{\pi k}{l} x)^2 dx = 1$$

$$\|X_k\|^2 = \frac{3C_1^2}{2} \int_0^l (1 + \cos \frac{2\pi k}{l} x) dx = \frac{3C_1^2}{2} (l + \sin \frac{2\pi k}{l} x \frac{l}{2\pi k} \Big|_0^l) = 1, \text{ следовательно}$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{3l}}.$$

Общее решение системы (2.6) имеет вид:

$$X_k^1(x) = \sqrt{\frac{2}{3l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad X_k^2(x) = \sqrt{\frac{2}{3l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad X_k^3(x) = \sqrt{\frac{2}{3l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

#### Пример 4.

Рассмотрим граф на рис. 4, имеющий одно циклическое ребро длины  $l$ .

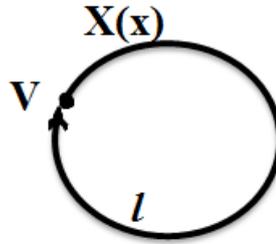


Рис. 4: Граф  $G_4$

Задача Штурма – Лиувилля для данного графа.

$$\begin{cases} (X)'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l), \\ X'(0) - X'(l) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Следовательно,  $\lambda_k = \left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2$ ,

$$X_k(x) = C_1 \cos \frac{2\pi k}{l} x + C_2 \sin \frac{2\pi k}{l} x, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Допустим, что  $C_2 = \alpha$ , тогда  $X_k = C_1 \cos \frac{2\pi k}{l} x + \alpha \sin \frac{2\pi k}{l} x$ .

Для того, чтобы найти  $C_1$ , посчитаем норму.

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l \left(C_1 \cos \frac{2\pi k}{l} x + \alpha \sin \frac{2\pi k}{l} x\right)^2 dx = 1$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{l} - \alpha^2}.$$

Подставим значение  $C_1$  в общее решение системы (2.7):

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l} - \alpha^2} \cos \frac{2\pi k}{l} x + \sqrt{\frac{2}{l} - \alpha^2} \sin \frac{2\pi k}{l} x.$$

#### Пример 5.

Рассмотрим граф на рис. 5, состоящий из  $n$  ребер, соединяющих  $n + 1$  вершину.

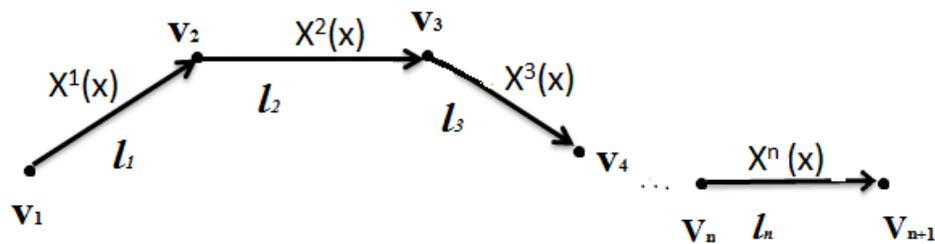


Рис. 5: Граф  $G_5$

Задача Штурма – Лиувилля для данного графа:

$$\left\{ \begin{array}{l} (X^1)'' + \lambda X = 0, \\ (X^2)'' + \lambda X = 0, \\ \dots \\ (X^n)'' + \lambda X = 0, \\ (X^1)'(0) = 0, \\ (X^2)'(0) - (X^1)'(l_1) = 0, \\ (X^3)'(0) - (X^2)'(l_2) = 0, \\ \dots \\ (X^n)'(0) - (X^{n-1})'(l_{n-1}) = 0, \\ (X^n)'(l_n) = 0, \\ X^1(l_1) = X^2(0), \\ X^2(l_2) = X^3(0), \\ \dots \\ X^{n-1}(l_{n-1}) = X^n(0). \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Можно сделать вывод, что:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{4n} = -C_1 \sin \sqrt{\lambda}(l_1 + \dots + l_{n-1}), \\ C_{4n+1} = C_1 \cos \sqrt{\lambda}(l_1 + \dots + l_{n-1}), \\ C_{4n+2} = -C_1 \sin \sqrt{\lambda}(l_1 + \dots + l_{n-2}), \\ C_{4n+3} = C_1 \cos \sqrt{\lambda}(l_1 + \dots + l_{n-1}). \end{array} \right.$$

Собственные значения  $\lambda_k$ :

$$\lambda_k = \left( \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} \right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для того, чтобы найти константу  $C_1$ , воспользуемся условием нормировки  $\|X^k\|^2 = \|(X_k^1, X_k^2, \dots, X_k^n)\| = 1$

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}}$$

Подставим  $C_1$  в общее решение уравнений:

$$X_k^1(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x,$$

$$X_k^2(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + x),$$

$$X_k^3(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + x),$$

...

$$X_k^{n-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-2} + x),$$

$$X_k^n(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-2} + x),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

### 3. Математическая модель

#### Буссинеска – Лява на геометрическом графе

##### 3.1 Метод Фурье

Следуя [13], найдем решение уравнения (0.1) на геометрическом графе  $G$ , не равное тождественно нулю, удовлетворяющее условиям (0.2), (0.3) и начальными условиями (0.4). Будем искать решение (0.1) – (0.4) в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \quad (3.1)$$

где  $X_k(x)$  – ортонормированные собственные функции оператора  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , то есть удовлетворяют уравнению  $(X_k)'' + \lambda_k X_k = 0$  и условиям (0.2), (0.3), а  $T_k(t)$  – функции только переменной  $t$ . Уравнение (0.1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения.

Подставляя предполагаемую форму решения (3.1) в уравнение (0.1), получим

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_k + \\ & + \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + \\ & + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_k + \\ & + \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)}) \times \\ & \times e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} X_k + \sum_{k:\lambda_k = -\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t} X_k \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (0.4) найдем константы  $A_k, B_k$  из чего следует, что решение задачи (0.1) – (0.4) существует, если  $\langle \varphi, X_k \rangle_{L_2(G)} = \langle \psi, X_k \rangle_{L_2(G)} = 0$ , если  $\lambda = \lambda_k$

Так как первая, вторая и четвертая суммы представляют собой конечное число слагаемых, то для исследования непрерывности  $u(x, t)$  достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$v(x, t) = \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} ((A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t +$$

$$+B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} X_k, \quad (3.3)$$

из чего будет следовать, что  $u(x, t)$  непрерывно примыкает к своим начальным и граничным условиям. Так как члены ряда (3.2) – непрерывные функции, то из равномерной сходимости ряда следует его непрерывность. Пользуясь неравенством

$$|u_k(x, t)| \leq |A_k| + |B_k|,$$

закключаем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( |\varphi_k| + \frac{2|\psi_k|(\lambda + \lambda_k) + \alpha|\varphi_k|(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \right) \quad (3.4)$$

является мажорантным для ряда (3.3). Если мажорантный ряд (3.4) сходится, то ряд (3.3) сходится равномерно, т.е. функция  $u(x, t)$  непрерывна. Чтобы убедиться в том, что  $u_t(x, t)$  непрерывно примыкает к своим начальным значениям, надо доказать непрерывность этой функции, для чего достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$\begin{aligned} u_t(x, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\varphi_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t + \right. \\ \left. + \left( \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \right) \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t \right) \times \\ \times \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} X^k \end{aligned} \quad (3.5)$$

или сходимость мажорантного ряда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left( |\varphi_k| + \frac{2|\psi_k|(\lambda + \lambda_k) + \alpha|\varphi_k|(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \right) \times \\ \times \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Наконец, чтобы убедиться в том, что функция  $v(x, t)$  удовлетворяет уравнению, т.е. применим обобщенный принцип суперпозиции, достаточно доказать возможность двукратного почленного дифференцирования ряда для  $v(x, t)$ , для чего, в свою очередь достаточно показать равномерную сходимость рядов

$$v_{tt}(x, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}, \quad (3.7)$$

$$v_{xx}(x, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}, \quad (3.8)$$

$$v_{xxtt}(x, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^4 v_k}{\partial x^2 \partial t^2}. \quad (3.9)$$

Исследуем равномерную сходимость рядов (3.6) – (3.9) для трехреберного графа из примера 1 параграфа 2. В этом случае

$$\begin{aligned} v^1(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{3l}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) + \\ &+ \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x, \\ v^2(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{3l}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) + \\ &+ \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x, \\ v^3(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{3l}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) + \\ &+ \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x. \end{aligned}$$

Продифференцируем дважды по  $t$ :

$$\begin{aligned} v_{tt}^1(x, t) &= - \left( \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} \right)^2 \sqrt{\frac{2}{3l}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) + \\ &+ \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x, \\ v_{tt}^2(x, t) &= - \left( \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} \right)^2 \sqrt{\frac{2}{3l}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) + \\ &+ \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x, \\ v_{tt}^3(x, t) &= - \left( \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} \right)^2 \sqrt{\frac{2}{3l}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) + \\ &+ \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x, \end{aligned}$$

продифференцируем дважды по  $x$ :

$$\begin{aligned} v_{xx}^1(x, t) &= - \sqrt{\frac{2}{3l}} \left( \frac{\pi k}{l} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) + \\ &+ \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x, \\ v_{xx}^2(x, t) &= - \sqrt{\frac{2}{3l}} \left( \frac{\pi k}{l} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k (\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) + \\ &+ \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l} x, \end{aligned}$$

$$v_{xx}^3(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{3l}}\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k(\cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)}t) + \\ + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)}t) \cos \frac{\pi k}{l}x.$$

Найдем смешанную производную. Обозначим  $P = \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)}$

$$v_{xxtt}^1(x, t) = (P)^2 \sqrt{\frac{2}{3l}}\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k(\cos Pt) + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \sin Pt) \cos \frac{\pi k}{l}x,$$

$$v_{xxtt}^2(x, t) = (P)^2 \sqrt{\frac{2}{3l}}\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k(\cos Pt) + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \sin Pt) \cos \frac{\pi k}{l}x,$$

$$v_{xxtt}^3(x, t) = (P)^2 \sqrt{\frac{2}{3l}}\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k(\cos Pt) + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \sin Pt) \cos \frac{\pi k}{l}x.$$

Полученные ряды мажорируются, с точностью до константы, рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Для сходимости этого ряда  $|\varphi_k|$  и  $|\psi_k|$  должны вести себя, по меньшей мере, как  $k^{-(3+\gamma)}$ , где  $\gamma > 0$ . Следовательно, выполнения соотношений  $|\varphi_k| \sim k^{-(3+\gamma)}$  и  $|\psi_k| \sim k^{-(3+\gamma)}$  надо добиться за счет условий на эти функции.

Рассмотрим

$$\varphi_k = \langle \varphi, X^k \rangle = \sqrt{\frac{2}{3l}} \left( \int_0^l \varphi_1(x) X_1^k(x) dx + \int_0^l \varphi_2(x) X_2^k(x) dx + \int_0^l \varphi_3(x) X_3^k(x) dx \right) = \\ = \sqrt{\frac{2}{3l}} \left( \int_0^l \varphi_1(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \varphi_2(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \varphi_3(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx \right) = \\ = \sqrt{\frac{2}{3l}} (\varphi_1(x) \sin \frac{\pi k}{l} x \frac{l}{\pi k} \Big|_0^l - \frac{l}{\pi k} \int_0^l \varphi_1'(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \varphi_2(x) \sin \frac{\pi k}{l} x \frac{l}{\pi k} \Big|_0^l - \\ - \frac{l}{\pi k} \int_0^l \varphi_2'(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \varphi_3(x) \sin \frac{\pi k}{l} x \frac{l}{\pi k} \Big|_0^l - \frac{l}{\pi k} \int_0^l \varphi_3'(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx).$$

Производя интегрирование еще раз по частям, получим

$$\varphi_k = -\sqrt{\frac{2}{3l}} \frac{l}{\pi k} \left( \int_0^l \varphi_1'(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \varphi_2'(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \varphi_3'(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx \right) = \\ = -\sqrt{\frac{2}{3l}} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 (\varphi_1'(x) (-\cos \frac{\pi k}{l} x) \Big|_0^l + \int_0^l \varphi_1''(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx + \varphi_2'(x) (-\cos \frac{\pi k}{l} x) \Big|_0^l +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^l \varphi_2''(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx + \varphi_3'(x) (-\cos \frac{\pi k}{l} x)|_0^l + \int_0^l \varphi_3''(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx = \\
& = -\frac{2}{3l} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 (\varphi_1''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x|_0^l - \int_0^l \varphi_1'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \varphi_2''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x|_0^l - \\
& - \int_0^l \varphi_2'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \varphi_3''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x|_0^l - \int_0^l \varphi_3'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx) = \sqrt{\frac{2}{3l}} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \varphi_k^{(3)},
\end{aligned}$$

где

$$\varphi_k^{(3)} = \int_0^l \varphi_1'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \varphi_2'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \varphi_3'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx.$$

Получаем что

$$\varphi_1'(0) = \varphi_1'(l) = \varphi_2'(0) = \varphi_2'(l) = \varphi_3'(0) = \varphi_3'(l) = 0 \quad (3.10)$$

Аналогично получается и для  $\psi_k$ .

$$\psi_k^{(3)} = \int_0^l \psi_1'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \psi_2'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + \int_0^l \psi_3'''(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx.$$

Таким образом, при выполнении условий (3.10) на начальные функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  мы достигаем поставленной цели. Так как для любых чисел  $a > 0$ ,  $k > 0$  справедливо равенство

$$\frac{a}{k} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k^2} + a^2 \right), \quad (3.11)$$

то требуя кусочной непрерывности от третьей производной функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , а также, используя равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(x) = \sqrt{\frac{2}{3l}} \left( \int_0^l \varphi_1^2(x) dx + \int_0^l \varphi_2^2(x) dx + \int_0^l \varphi_3^2(x) dx \right)$$

для этих функций, можно убедиться в сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(3)}(x)|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(3)}(x)|^2.$$

Отсюда, следует сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(3)}(x)|^2}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_k^{(3)}(x)|^2}{k},$$

а следовательно, сходимость и ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Таким образом, мы выяснили условия на начальные функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , при которых произведенные нами операции при решении задачи методом Фурье являются законными и функция  $u(x, t)$ , определяемая равенством (3.1), будет решением задачи (0.1) – (0.4)

**Теорема 3.** Пусть производные функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  до 2-го порядка включительно непрерывны, а третьи производные функций  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  кусочно-непрерывны и, кроме того,

$$\varphi'_1(0) = \varphi'_1(l) = \varphi'_2(0) = \varphi'_2(l) = \varphi'_3(0) = \varphi'_3(l) = 0,$$

$$\psi'_1(0) = \psi'_1(l) = \psi'_2(0) = \psi'_2(l) = \psi'_3(0) = \psi'_3(l) = 0$$

Тогда существует единственное решение задачи (0.1) – (0.4) для трехреберного графа  $G_5$ , представимое в виде:

$$\begin{aligned} u^1(x, t) = & \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_k^1 + \\ & + \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + \\ & + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_k^1 + \\ & + \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} ((A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + \\ & + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)}) e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_k^1 + \\ & \sum_{k:\lambda_k = -\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} (A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t}) X_k^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^2(x, t) = & \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_k^2 + \\
& + \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + \\
& + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_k^2 + \\
& + \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} ((A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + \\
& + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)}) e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_k^2 + \\
& + \sum_{k:\lambda_k = -\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} (A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t}) X_k^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^3(x, t) = & \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_k^3 + \\
& + \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + \\
& + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_k^3 + \\
& + \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} ((A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} + \\
& + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)}) e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_k^3 + \\
& + \sum_{k:\lambda_k = -\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} (A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k + \lambda'')}{\alpha(\lambda_k + \lambda')} t}) X_k^3
\end{aligned}$$

где

$$X_k^1(x) = \sqrt{\frac{2}{3l}} \cos \frac{\pi k}{l} x,$$

$$X_k^2(x) = \sqrt{\frac{2}{3l}} \cos \frac{\pi k}{l} x,$$

$$X_k^3(x) = \sqrt{\frac{2}{3l}} \cos \frac{\pi k}{l} x,$$

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

А теперь, аналогично исследуем равномерную сходимость рядов (3.6) – (3.9) для  $n$  – реберного графа  $G_7$  из примера 7 параграфа 2. В этом случае

$$v^1(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t +$$

$$+ \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x,$$

...

$$v^n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t +$$

$$+ \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + \dots +$$

$$+ l_{n-1} + x).$$

Продифференцируем дважды по  $t$ :

$$v_{tt}^1(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \left( \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \times$$

$$\times \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t + \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \times$$

$$\times \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x,$$

...

$$v_{tt}^n(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \left( \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \times$$

$$\times \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t + \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \times$$

$$\times \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + x),$$

продифференцируем дважды по  $x$ :

$$v_{xx}^1(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \left( \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \times$$

$$\times \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t + \frac{2\psi_k(\lambda + \lambda_k) + \alpha\varphi_k(\lambda + \lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'') - \alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2}} \times$$

$$\times \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} x,$$

...

$$v_{xx}^n(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left(\frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \times \\ \times \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \times \\ \times \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + x),$$

найдем смешанные производные

$$v_{xxt}^1(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left(\frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x\right)^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \times \\ \times \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \times \\ \times \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x,$$

...

$$v_{xxt}^n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left(\frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x\right)^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \times \\ \times \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t + \frac{2\psi_k(\lambda+\lambda_k)+\alpha\varphi_k(\lambda+\lambda')}{\sqrt{4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')-\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2}} \times \\ \times \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2-4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} t) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + x).$$

Полученные ряды мажорируются, с точностью до константы, рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Для сходимости этого ряда  $|\varphi_k|$  и  $|\psi_k|$  должны вести себя, по меньшей мере, как  $k^{-(3+\gamma)}$ , где  $\gamma > 0$ . Следовательно, выполнения соотношений  $|\varphi_k| \sim k^{-(3+\gamma)}$  и  $|\psi_k| \sim k^{-(3+\gamma)}$  надо добиться за счет условий на эти функции.

Рассмотрим

$$\varphi_k = \langle \varphi, X^k \rangle = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left[ \int_0^{l_1} \varphi_1(x) X_k^1(x) dx + \dots + \int_0^{l_n} \varphi_n(x) X_k^n(x) dx \right] = \\ = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left[ \int_0^{l_1} \varphi_1(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x dx + \dots + \int_0^{l_n} \varphi_n(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + x) dx \right] = \\ = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left[ \frac{l_1+l_2+\dots+l_n}{\pi k} \varphi_1(x) \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x \Big|_0^{l_1} - \frac{l_1+l_2+\dots+l_n}{\pi k} \int_0^{l_1} \varphi_1'(x) \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x dx + \dots + \frac{l_1+l_2+\dots+l_n}{\pi k} \varphi_n(x) \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + x) \Big|_0^{l_n} - \frac{l_1+l_2+\dots+l_n}{\pi k} \int_0^{l_n} \varphi_n'(x) \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + x) dx \right].$$

Так как внеинтегральный член мешает получению упомянутых соотношения,

то, потребовав от  $\varphi(x)$  выполнение условий

$$\varphi_1(l_1) = \dots = \varphi_n(0) = 0 \quad (3.12)$$

и производя еще раз интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left(\frac{l_1+l_2+\dots+l_n}{\pi k}\right)^2 \left[ \varphi_1'(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x \Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1} \varphi_1''(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x dx + \right. \\ &\dots + \varphi_n'(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + x) \Big|_0^{l_n} - \int_0^{l_n} \varphi_n''(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + \\ &\dots + l_{n-1} + x) dx \Big] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left(\frac{l_1+l_2+\dots+l_n}{\pi k}\right)^3 \left[ -\varphi_1''(x) \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x \Big|_0^{l_1} + \int_0^{l_1} \varphi_1'''(x) \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x dx - \right. \\ &\dots - \varphi_n''(x) \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + x) \Big|_0^{l_n} + \int_0^{l_n} \varphi_n'''(x) \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + \\ &\dots + l_{n-1} + x) dx \Big] = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \left(\frac{l_1+l_2+\dots+l_n}{\pi k}\right)^3 \varphi_k^{(3)}, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_k^{(3)} = \int_0^{l_1} \varphi_1'''(x) \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x dx + \dots + \int_0^{l_n} \varphi_n'''(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + x) dx.$$

Получаем что

$$\begin{aligned} \varphi_1'(l_1) = \varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_n'(l_n) = \varphi_n'(0) = 0 \\ \varphi_1''(l_1) = \varphi_n''(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Аналогично получается и для  $\psi_k$ .

$$\psi_k^{(3)} = \int_0^{l_1} \psi_1'''(x) \sin \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x dx + \dots + \int_0^{l_n} \psi_n'''(x) \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1+l_2+\dots+l_{n-1}+x) dx.$$

Таким образом, при выполнении условий (3.12) и (3.13) на начальные функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  мы достигаем поставленной цели. Так как для любых чисел  $a > 0$ ,  $k > 0$  справедливо равенство

$$\frac{a}{k} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k^2} + a^2 \right), \quad (3.14)$$

то требуя кусочной непрерывности от третьей производной функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , а также, используя равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}} \left( \int_0^{l_1} \varphi_1^2(x) dx + \dots + \int_0^{l_n} \varphi_n^2(x) dx \right)$$

для этих функций, можно убедиться в сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(3)}(x)|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(3)}(x)|^2.$$

Отсюда, и из (4.10) следует сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(3)}(x)|^2}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_k^{(3)}(x)|^2}{k},$$

а следовательно, сходимость и ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Таким образом, мы выяснили условия на начальные функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , при которых произведенные нами операции при решении задачи методом Фурье являются законными и функция  $u(x, t)$ , определяемая равенством (3.1), будет решением задачи (0.1) – (0.4).

**Теорема 6.** Пусть производные функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  до 2-го порядка включительно непрерывны, а третьи производные функций  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  кусочно-непрерывны и, кроме того,

$$\begin{aligned} \varphi_1(l_1) &= \dots = \varphi_n(0) = 0, \\ \varphi'_1(l_1) &= \varphi'_1(0) = 0, \quad \varphi'_n(l_n) = \varphi'_n(0) = 0, \\ \varphi''_1(l_1) &= \varphi''_n(0) = 0, \\ \psi_1(l_1) &= \dots = \psi_n(0) = 0, \\ \psi'_1(l_1) &= \psi'_1(0) = 0, \quad \psi'_n(l_n) = \psi'_n(0) = 0, \\ \psi''_1(l_1) &= \psi''_n(0) = 0. \end{aligned}$$

Тогда существует единственное решение задачи (0.1) – (0.4) для  $n$ -реберного графа  $G_7$ , представимое в виде:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda')}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_k^1 + \\ &+ \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t} + \\ &+ B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k + \lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k + \lambda')^2 - 4\beta(\lambda + \lambda_k)(\lambda_k + \lambda'')}}{2(\lambda + \lambda_k)} t}) X_k^1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} \left( (A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} + \right. \\
& + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} \left. \right) e^{\frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')}{2(\lambda+\lambda_k)}t} X_1^k + \sum_{k:\lambda_k=-\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k+\lambda'')}{\alpha(\lambda_k+\lambda')}t} X_k^1 \\
& \dots \\
u_n(x, t) = & \sum_{k:D=0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')}{2(\lambda+\lambda_k)}t} + B_k t e^{\frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')}{2(\lambda+\lambda_k)}t}) X_n^k + \\
& + \sum_{k:D>0, \lambda_k \neq -\lambda} (A_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda') + \sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)}t} + \\
& + B_k e^{\frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda') - \sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)}t}) X_k^n + \\
& + \sum_{k:D<0, \lambda_k \neq -\lambda} \left( (A_k \cos \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} + B_k \sin \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda_k+\lambda')^2 - 4\beta(\lambda+\lambda_k)(\lambda_k+\lambda'')}}{2(\lambda+\lambda_k)} \right) \times \\
& \times e^{\frac{-\alpha(\lambda_k+\lambda')}{2(\lambda+\lambda_k)}t} X_k^n + \sum_{k:\lambda_k=-\lambda, \lambda_k \neq -\lambda'} A_k e^{\frac{-\beta(\lambda_k+\lambda'')}{\alpha(\lambda_k+\lambda')}t} X_k^n,
\end{aligned}$$

где

$$X_k^1(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \cos \frac{\pi k}{l_1+l_2+\dots+l_n} x,$$

...

$$X_k^n(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n}} \cos \frac{2}{l_1+l_2+\dots+l_n} (l_1 + l_2 + \dots + l_n + x), \quad k = 0, 1, \dots$$

### 3.2 Описание алгоритма численного метода и программы

Рассмотрим математическую модель Буссинеска – Лява на графе.

Приближенное решение задачи (0.1) – (0.4) будем искать в виде галеркинской суммы

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^N T_k(t) X_k(x)$$

где  $X_k$  – ортонормированные в смысле  $L_2(G)$  собственные функции оператора Штурма – Лиувилля на графе  $G$ . На первом этапе алгоритма задаются параметры уравнения Буссинеска – Лява  $\alpha, \beta, \lambda, \lambda', \lambda''$ , количество членов галеркинского приближения  $N$ . По этим данным генерируется дифференциальное уравнение относительно неизвестной  $u(x, t)$ .

На втором этапе алгоритма полученное дифференциальное уравнение умножается скалярно на собственные функции задачи Штурма – Лиувилля  $X_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , получается система алгебро-дифференциальных уравнений. Начальные функции для уравнения Буссинеска – Лява умножаются на собственные функции, чтобы получить начальные условия для системы алгебро-дифференциальных уравнений. В случае выраженного уравнения, при выполнении условий  $\lambda_k = -\lambda$  и  $\lambda_k = -\lambda'$ , проверяется условие  $\langle \varphi, X_k \rangle = \langle \psi, X_k \rangle = 0$ . Если оно выполнено, то находится решение алгебраического уравнения иначе – решений нет. При выполнении условия  $\lambda_k = -\lambda$ , но невыполнении условия  $\lambda_k = -\lambda'$ , проверяется условие  $\langle \varphi, X_k \rangle = \frac{-\alpha \langle \psi, X_k \rangle (\lambda_k + \lambda')}{\beta (\lambda_k + \lambda'')}$ . Если оно выполнено, то решается дифференциальное уравнение 1-го порядка иначе – решений нет. При невыполнении условия  $\lambda_k \neq -\lambda$ , решается дифференциальное уравнение 2-го порядка. После проверки всех условий, находится решение исходной задачи. Полученные результаты выводятся в виде графика.

# Блок-схема алгоритма

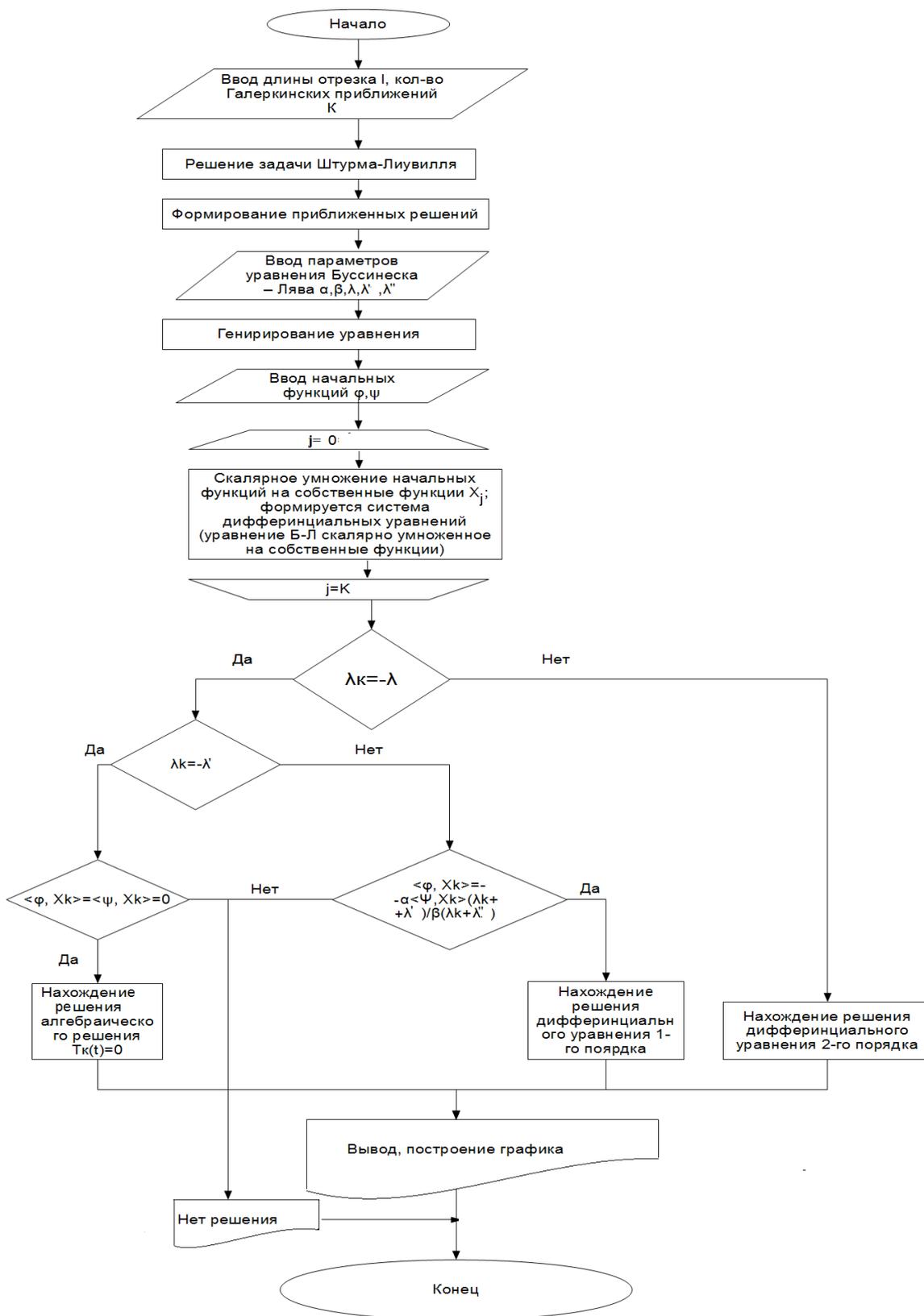


Рис. 6: Блок-схема алгоритма

## Описание программы

На основе полученных теоретических результатов в пакете Maple 18.0 разработана программа нахождения численного решения уравнения Буссинеска – Лява, заданного на трехреберном ориентированном графе.

На первом этапе реализация алгоритма осуществляется на основе генерации задачи Штурма – Лиувилля с помощью команды `diff()`. Далее с помощью команды `dsolve()` находятся решения полученной задачи. С помощью функции `simplify()` упрощается уравнение и вид решения. На втором этапе с помощью цикла `for()` реализуется выполнение условия нормировки: функция `combine()` позволяет объединять несколько функций. Условия нормировки: интегрируя с помощью функции `int()`, полученные на первом этапе собственные функции, вычисляем их нормы. Далее нормируем собственные функции, разделив каждую компоненту на норму. На третьем этапе определяется галеркинское приближение с помощью команды `sum()`. Далее вводятся коэффициенты уравнения Буссинеска – Лява и генерируется сумма. На следующем шаге вводятся начальные функции. С помощью цикла `for()` начальные функции скалярно умножаются на собственные функции.

Задаются массивы `array()` для дифференциальных уравнений 1-го порядка, дифференциальных уравнений 2-го порядка и для алгебраических уравнений. Далее проверяются все условия согласно алгоритму для нахождения всех решений задачи с использованием команд `if...else...then`. При решении системы алгебраических уравнений используется команда `solve()`. При решении системы дифференциальных уравнений используется команда `dsolve()`. При построении графика используется команда `plot3d()`. С помощью команды `animate()` строится анимация, которая показывает продольное смещение элементов конструкции с течением времени.

### 3.3 Вычислительные эксперименты.

**Пример 6.** Пусть граф  $G$  состоит из трех ребер длины  $l = \pi$  соответственно, соединяющих четыре вершины,  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = -3$ ,  $\lambda' = 0$ ,  $\lambda'' = -1$ ,  $\beta = 1$ . Составим

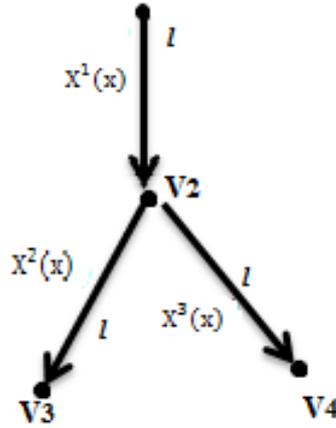


Рис. 7: Граф  $G_3$

уравнение Буссинеска – Лява (0.1) для данного графа.

$$-3u_1tt + 3u_1xxtt - u_1xxt + u_1xx - u_1 = 0,$$

$$-3u_2tt + 3u_2xxtt - u_2xxt + u_2xx - u_2 = 0,$$

$$-3u_3tt + 3u_3xxtt - u_3xxt + u_3xx - u_3 = 0.$$

Условия (0.2) – (0.3) примут вид

$$u_1(l, t) = u_2(0, t) = u_3(0, t) = 0,$$

$$u_{2x}(0, t) + u_{3x}(0, t) - u_{1x}(l, t) = 0,$$

$$u_{1x}(0, t) = u_{2x}(l, t) = u_{3x}(l, t) = 0.$$

Зададим начальные условия (0.4)

$$\varphi_1 = \cos x, \varphi_2 = 1 - \cos x, \varphi_3 = 3 \cos x$$

$$\psi_1 = \cos x, \psi_2 = 1 - \cos x, \psi_3 = 3 \cos x$$

Будем искать решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^3 T_k(t) X_k(x),$$

где  $X_k(x)$  – ортонормированные собственные функции оператора  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , то есть удовлетворяют уравнению  $(X_k)'' + \lambda_k X_k = 0$  и условиям (0.2), (0.3), а  $T_k(t)$  – функции только переменной  $t$ .

Решение задачи (0.1)-(0.4) для данного графа  $G$  примет вид:

$$u_1 = \sum_{k=0}^3 T_k(t) X_k^1(x) = 0.456e^{0.576t} - 0.122e^{-0.576t} + 0.460 \cos x(-2.17 + 1.45e^{-0.5t})$$

$$u_2 = \sum_{k=0}^3 T_k(t) X_k^2(x) = 0.456e^{0.576t} - 0.122e^{-0.576t} - 0.460 \cos x(-2.17 + 1.45e^{-0.5t})$$

$$u_3 = \sum_{k=0}^3 T_k(t) X_k^3(x) = 0.456e^{0.576t} - 0.122e^{-0.576t} - 0.460 \cos x(-2.17 + 1.45e^{-0.5t})$$

Графики: в трехмерном пространстве, в момент времени  $t_1 = 0.583$  и  $t_2 = 2.0$ :

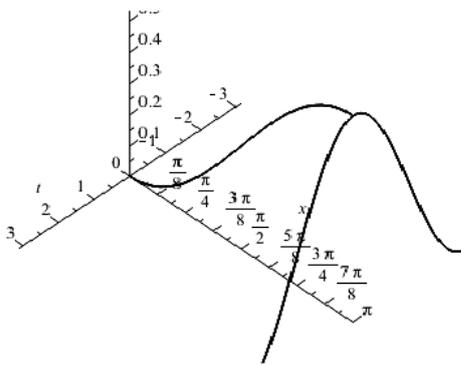


Рис. 8: Граф  $G_3$  в момент времени  $t=0$

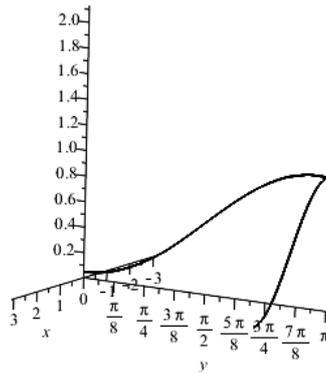


Рис. 9: Граф  $G_3$  в момент времени  $t_1$

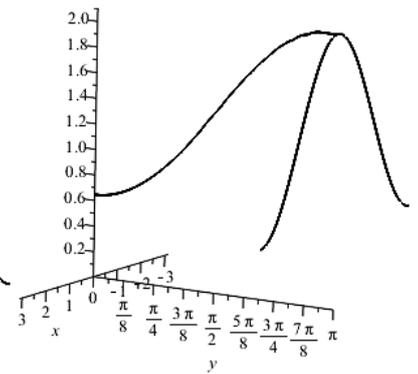


Рис. 10: Граф  $G_3$  в момент времени  $t_2$

**Пример 7.** Зададим новые начальные данные и начальные функции:

$$\alpha = 1, \lambda = -2, \lambda' = 0, \quad \lambda'' = -1, \quad \beta = 1$$

$$\varphi_1 = \cos(x + 1), \varphi_2 = \cos(x + 3), \varphi_3 = \cos(x + 9)$$

$$\psi_1 = \cos(x + 1), \psi_2 = \cos(x + 3), \psi_3 = \cos(x + 9)$$

Составим уравнение Буссинеска – Лява (0.1) для данного графа при данных условиях.

$$-2u_{1tt} + 3u_{1xxtt} - u_{1xxt} + u_{1xx} - u_1 = 0,$$

$$-2u_{2tt} + 3u_{2xxtt} - u_{2xxt} + u_{2xx} - u_2 = 0,$$

$$-2u_{3tt} + 3u_{3xxtt} - u_{3xxt} + u_{3xx} - u_3 = 0.$$

Решение задачи (0.1)-(0.4) для данного графа  $G$  примет вид:

$$u_1 = \sum_{k=0}^3 T_k(t) X_k^1(x) = -0.403e^{0.576t} + 0.109e^{-0.576t} + 0.460 \cos x(5.30 - 3.53e^{-0.5t}) + 0.460 \cos 2.x(0.134e^{4.65t} + 0.297e^{-0.65t})$$

$$u_2 = \sum_{k=0}^3 T_k(t) X_k^2(x) = -0.403e^{0.576t} + 0.109e^{-0.576t} - 0.460 \cos x(5.30 - 3.53e^{-0.5t}) + 0.460 \cos 2.x(0.134e^{4.65t} + 0.297e^{-0.65t})$$

$$u_3 = \sum_{k=0}^3 T_k(t) X_k^3(x) = -0.403e^{0.576t} + 0.109e^{-0.576t} - 0.460 \cos x(5.30 - 3.53e^{-0.5t}) + 0.460 \cos 2.x(0.134e^{4.65t} + 0.297e^{-0.65t})$$

Графики в разный момент времени

$t_2 = 1.42$  и  $t_3 = 1.83$ .

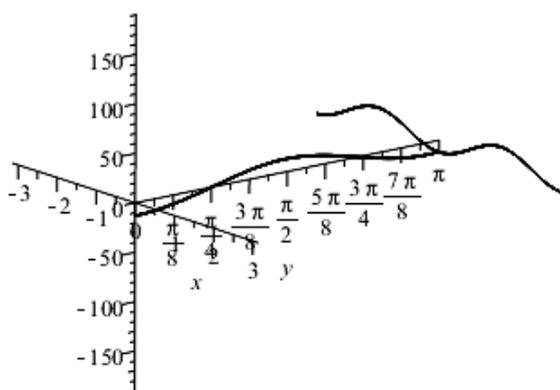


Рис 9.: Граф  $G_3$  в момент времени  $t_2$

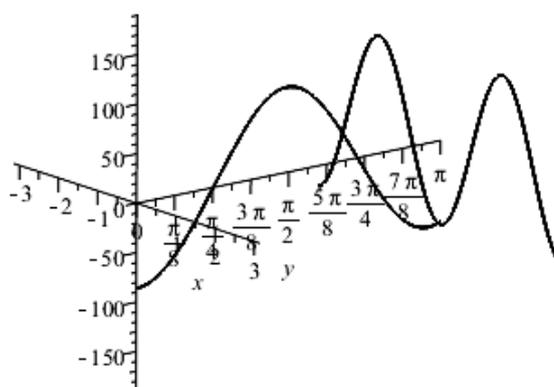


Рис 10.: Граф  $G_3$  в момент времени  $t_3$

**Пример 8.** Зададим новые начальные данные и начальные функции:

$$\alpha = 1, \lambda = 4, \lambda' = -4, \quad \lambda'' = -1, \quad \beta = 1$$

$$\varphi_1 = \cos(x + 1), \varphi_2 = \cos(x + 3), \varphi_3 = \cos(x + 9)$$

$$\psi_1 = \cos(x + 1), \psi_2 = \cos(x + 3), \psi_3 = \cos(x + 9)$$

Составим уравнение Буссинеска – Лява (0.1) для данного графа при данных условиях.

$$4u_{1tt} + 3u_{1xxtt} - 4u_t - u_{1xxt} + u_{1xx} - u_1 = 0,$$

$$4u_{2tt} + 3u_{2xxtt} - 4u_t - u_{2xxt} + u_{2xx} - u_2 = 0,$$

$$4u_{3tt} + 3u_{3xxtt} - 4u_t - u_{3xxt} + u_{3xx} - u_3 = 0.$$

Решение задачи (0.1)-(0.4) для данного графа  $G$  примет вид:

$$u_1 = \sum_{k=0}^3 T_k(t) X_k^1(x) = -0.29e^{0.500t} - 0.443e^{-0.500t} + 0.460 \cos x(4.70 - 2.95e^{-0.6t}) + 0.460 \cos 2x(0.563e^{0.612t} - 0.135e^{-0.612t})$$

$$u_2 = \sum_{k=0}^3 T_k(t) X_k^2(x) = -0.29e^{0.500t} - 0.443e^{-0.500t} - 0.460 \cos x(4.70 - 2.95e^{-0.6t}) + 0.460 \cos 2x(0.563e^{0.612t} - 0.135e^{-0.612t})$$

$$u_3 = \sum_{k=0}^3 T_k(t) X_k^3(x) = -0.29e^{0.500t} - 0.443e^{-0.500t} - 0.460 \cos x(4.70 - 2.95e^{-0.6t}) + 0.460 \cos 2x(0.563e^{0.612t} - 0.135e^{-0.612t})$$

Графики в разный момент времени

$t_4 = 0.33$  и  $t_5 = 2.0$ .

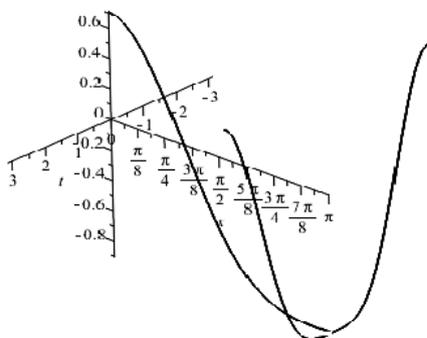


Рис. 11: Граф  $G_3$  в момент времени  $t=0$

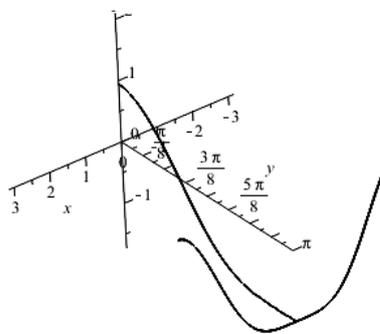


Рис. 12: Граф  $G_3$  в момент времени  $t_4$

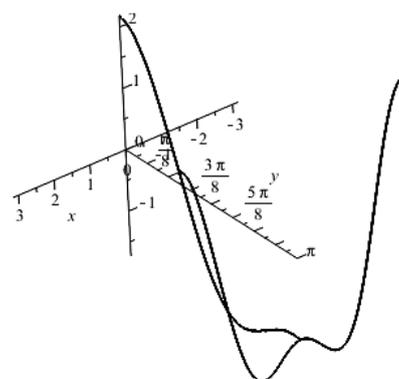


Рис. 13: Граф  $G_3$  в момент времени  $t_5$

## Заключение

В работе проведено аналитическое решение и численное исследование уравнения Буссинеска – Лява на некоторых геометрических графах.

В ходе выполнения поставленной задачи в первом параграфе были рассмотрены свойства собственных функций и собственных значений вспомогательной задачи. Во втором параграфе решена вспомогательная задача Штурма – Ливилля для некоторых графов. В третьем параграфе были найдены формулы решения уравнения Буссинеска – Лява на конкретных графах с помощью метода Фурье. В четвертом параграфе, дано обоснование применения метода Фурье для решения задачи на конкретных связных ориентированных графах, то есть даны условия на начальные функции, при которых можно применять данный метод. Разработан алгоритм для нахождения численного решения математической модели Буссинеска – Лява на трехреберном графе. Представлена схема алгоритма и ее описание. Для трехреберного графа написана программа в пакете Maple 18.0, с помощью которой реализуется описанный алгоритм. С помощью программы проведены вычислительные эксперименты с построением графика полученного решения. Все цели выпускной квалификационной работы достигнуты. Работа может быть полезной для студентов, изучающих различные математические дисциплины, при подготовке к экзамену, к самостоятельной работе и практическим исследованиям. Так же работа может быть полезна в архитектуре при проектировании конструкций (башни, трубопроводы и т.д.)

## Список литературы

[1] Баязитова, А.А. Задача Штурма – Лиувилля на геометрическом графе / А.А. Баязитова // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование» – 2010. – №16(192), вып. 5. – С. 7 – 9.

[2] Загребина, С.А. Начально-конечная задача на линейных эволюционных уравнениях соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 329 – 330.

[3] Замышляева, А.А. Решение однородного уравнения соболевского типа на графе / А.А. Замышляева // Обозрение приклад. и промыш. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 332 – 333.

[4] Пивоварова, П.О. О неустойчивости решений эволюционных уравнений соболевского типа на графе / П.О. Пивоварова // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование» – 2008. – №15(115), вып. 1. – С. 64 – 68.

[5] Дифференциальные уравнения на геометрических графах/ Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М.: Физматлит, 2004. – 272с.

[6] Свиридюк, Г.Ф. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. – Новосибирск, 2002 – С. 221 – 225.

[7] Свиридюк, Г.А. Уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе / Г.А.Свиридюк, В.В.Шеметова // Вестник МаГУ. Математика. – Магнитогорск. – 2003. – Вып. 4. – С. 129 – 139.

[8]. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство одной неклассической модели / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Изв. вузов. Математика. – 2005. – №10. – С. 47 – 52.

[9] Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №1. – С. 126 – 131.

[10] Свиридюк, Г.А. О прямой и обратной задачах на уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, А.А. Баязитова // Вестн. СамГТУ Сер. «Физико-математические науки» – 2009. – №1 (18). – С. 6 – 17.

[11] Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах: дис. ... канд. физ. – мат. наук – 01.01.02/ В.В. Шеметова – Магнитогорск, 2005. – С. 93 – 109.

[12] Kosugi, S. A semilinear elliptic equation in a thin network – shaped domain / S. Kosugi // J. Math. Soc. Jap. – 2000. – Vol. 52, №3. – P. 672 – 697.

[13] Замышляева, А.А., Шияпова М.Ф., Об уравнении Буссинеска – Лява на геометрическом графе / А.А. Замышляева, Шияпова М.Ф. // Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию. Сборник трудов III всероссийской научно-практической конференции – М., 2016. – Т. 16, вып. 2. – С. 77 – 82.

[14] A. A. Zamyshlyeva, A. V. Lut, Numerical investigation of the Boussinesq–Love mathematical models on geometrical graphs/ A. A. Zamyshlyeva, A. V. Lut// Вестн. ЮУрГУ Сер. «Математическое моделирование и программирование» – 2017. – Т.10, № 2. – С. 137–143.