УДК 517.957

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАДИЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

М.О. Корпусов

В данной работе мы продолжим рассмотрение уравнений с градиентными нелинейностями. Мы рассмотрим начально-краевую задачу в ограниченной области с гладкой границей для нелокального по времени уравнения с градиентной нелинейностью и докажем локальную разрешимость в сильном обобщенном смысле, кроме того, мы получим достаточные условия разрушения за конечное время и достаточные условия глобальной во времени разрешимости.

Ключевые слова: нелокальное уравнение с градиентной нелинейностью, уравнения соболевского типа, разрушение решения.

1. Введение

Прежде всего отметим, что значительный вклад в изучение линейных и нелинейных уравнений соболевского типа и, в частности, псевдопараболических уравнений внес выдающийся российский математик Георгий Анатольевич Свиридюк, например, в своих классических работах [1 – 4]. В этих работах были заложены базовые принципы нового и мощного метода полугрупп, который привел в дальнейшем к образованию одной из самых больших и широко известных в России научных школ, изучающих неклассические уравнения современной математической физики.

В данной работе мы рассмотрим начально-краевую задачу для следующего модельного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + \triangle u + \int\limits_0^t ds\, h(t-s)\triangle u(s) + \mu|\nabla u|^p = 0, \quad \mu > 0, \quad p > 0, \tag{1}$$

а функция $h(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty))$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\max\left\{|h(t)|, \left|h^{'}(t)\right|\right\} \leqslant \chi^{'}(t), \quad \chi(t) \leqslant 0, \quad \chi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty)), \tag{2}$$

причем функции $\chi(t), \chi^{'}(t)$ являются ограниченными постоянной $h_0 > 0$.

В нашей предыдущей работе [5] мы рассмотрели соответствующее локальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + \triangle u + \mu|\nabla u|^p = 0, \tag{3}$$

для которого мы рассмотрели начально-краевую задачу в ограниченной области с гладкой границей и получили результаты о глобальной во времени разрешимости и о разрушении его решения за конечное время. При этом мы рассмотрели случай, когда

$$p \in \left(0, \frac{N}{N-2}\right) \quad \text{при} \quad N \geqslant 3 \quad \text{и} \quad p \in (0,+\infty) \quad \text{при} \quad N = 2.$$

2. Вывод уравнения

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 2$ с гладкой поверхностно–односвязной границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$ в случае $N \geqslant 3$. Предположим, что эту область занимает кристаллический полупроводник. Как известно, в теории полупроводников (см., например, [6, 7]) хорошо работает квазистационарное приближение для системы уравнений Максвелла [8], электрическая часть которой имеет следующий вид:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \tag{4}$$

где $\mathbf{D}$ — это вектор индукции электрического поля, $\mathbf{E}$ — это вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{P}$ — это вектор поляризации среды, n — плотность свободных зарядов, причем в силу поверхностной–односвязности границы $\partial\Omega$ определен потенциал электрического поля φ:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

Поскольку полупроводник, очевидно, является проводящей средой, то мы должны дополнить уравнения (4) уравнением для тока свободных зарядов, которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbf{J}_1 + \operatorname{div}\mathbf{J}_2, \tag{5}$$

где $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ — это вектор тока свободных зарядов. Естественно, нам нужно записать выражение для этого вектора. При этом учтем тепловой разогрев полупроводника [9], тогда для вектора $\mathbf{J}_1$ имеет место следующее выражение [8]:

$$\mathbf{J}_1 = \sigma\mathbf{E} - \gamma\nabla T, \quad \sigma > 0, \quad \gamma > 0, \tag{6}$$

где T — это температура в полупроводнике, а величина $\mathbf{J}_2$ учитывает временную дисперсию

$$\mathbf{J}_2(t) = \int\limits_0^t ds\, h(t-s)\mathbf{E}(s). \tag{7}$$

Причем для температуры T имеет место уравнение теплопроводности с тепловым нагревом за счет электрического поля $\mathbf{E}$ следующего вида [9]:

$$\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t} = \triangle T + Q(|\mathbf{E}|), \tag{8}$$

где параметр $\varepsilon > 0$ имеет следующий вид [9]:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\alpha} \tag{9}$$

и $\varepsilon_0 > 0$ — это фиксированное число, а параметр $\alpha > 0$ достаточно велик. Функция $Q(|\mathbf{E}|)$ описывает тепловую накачку в полупроводнике в самосогласованном электрическом поле $\mathbf{E}$ и хорошо аппроксимируется степенной функцией следующего вида [9]:

$$Q(|\mathbf{E}|) = q_0|\mathbf{E}|^p, \quad p > 0, \quad q_0 > 0. \tag{10}$$

В силу свойства «малости» параметра (9) вместо уравнения (8) мы рассматриваем следующее уравнение:

$$\triangle T + Q(|\mathbf{E}|) = 0. \tag{11}$$

Теперь мы рассмотрим выражение для вектора $\mathbf{P}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = \rho_0\varphi, \quad \rho_0 > 0, \tag{12}$$

что учитывает распределение связанных зарядов.

Дифференциальным следствием системы уравнений (4)–(12) является следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi - 4\pi\rho_0\varphi\right) + \int\limits_0^t ds\,\alpha(t,s)\triangle\varphi(s) + 4\pi\left[\sigma + \alpha(0)\right]\triangle\varphi - 4\pi\gamma q_0|\nabla\varphi|^p = 0, \tag{13}$$

которое элементарными заменами сводится к следующему уравнению типа С. Л. Соболева:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi - \varphi\right) + \triangle\varphi + \int\limits_0^t ds\,h(t-s)\triangle\varphi(s) + \mu|\nabla\varphi|^p = 0, \quad \mu > 0, \quad p > 0. \tag{14}$$

В следующих параграфах мы будем рассматривать либо задачу Дирихле, либо задачу Неймана, поэтому обсудим физический смысл этих граничных условий. Действительно, однородное условие Дирихле

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0$$

означает, что граница полупроводника «заземлена», а по договоренности электрический потенциал земли равен нулю. Однородное условие Неймана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_x}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

означает, что нормальная компонента электрического поля на границе полупроводника равна нулю.

3. Задача Дирихле в $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 2$

Прежде всего сформулируем классическую формулировку задачи, для которой мы дадим обобщенную постановку. Итак, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$ является ограниченной областью с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - u\right) + \triangle u + \int\limits_0^t ds\,h(t-s)\triangle u(s) + \mu|\nabla u|^p = 0 \quad \text{в} \quad Q_{\mathrm{T}}, \tag{15}$$

$$u = 0 \quad \text{в} \quad \Gamma_{\mathrm{T}}, \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{16}$$

где $Q_{\mathrm{T}} = (0,\mathrm{T}) \times \Omega$, $\Gamma_{\mathrm{T}} = (0,\mathrm{T}) \times \partial\Omega$. Мы будем рассматривать случай, когда $p > 0$.

Теперь сопоставим задаче (15)–(16) обобщенную постановку. Действительно, дадим определение.

Определение 1. *Функция $u(x)(t)$ класса*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)) \tag{17}$$

называется слабым обобщенным решением задачи (15)–(16), *если при некотором $T > 0$ имеет место следующее равенство*:

$$\langle D(u), w\rangle = 0 \quad \textit{для п. вс.} \quad t \in [0,\mathrm{T}] \quad \textit{и для всех} \quad w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{18}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, а

$$D(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - u\right) + \triangle u + \int\limits_0^t ds\,h(t-s)\triangle u(s) + \mu|\nabla u|^p$$

и $u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$.

Теперь мы рассмотрим различные случаи.

СЛУЧАЙ $p \in (0,1]$. Сначала мы получим априорную оценку, из которой сразу же вытекает, что в данном случае нет разрушения сильного обобщенного решения. Действительно, возьмем в определении 2 слабого обобщенного решения функцию $v(x)(t)$, равную решению $u(x)(t)$, тогда после интегрирования по частям мы получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2\right] + \|\nabla u\|_2^2 + \int\limits_0^t ds\, h(t-s)\int\limits_\Omega \left(\nabla u(s), \nabla u(t)\right)\, dx = \mu \int\limits_\Omega |\nabla u|^p u\, dx. \tag{19}$$

Поскольку при $p \in (0,1]$, очевидно, $p \leqslant 1 + 2/N$ при $N \geqslant 2$, то в силу неравенства Гельдера и вложения

$$\mathbb{H}^1_0(\Omega) \subset \mathbb{L}^q(\Omega) \quad \text{при} \quad q = \frac{2}{2-p} \tag{20}$$

справедлива следующая цепочка оценок:

$$\left|\mu \int\limits_\Omega |\nabla u|^p u\, dx\right| \leqslant |\mu| \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{p/2} \left(\int\limits_\Omega |u|^{2/(2-p)}\, dx\right)^{(2-p)/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_1(\Omega, p)|\mu| \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{(p+1)/2},$$

где $c_1 = c_1(\Omega, p)$ — это соответствующая постоянная вложения (20). Таким образом, мы из (19) и (20) приходим к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2\right] + \|\nabla u\|_2^2 + \int\limits_0^t ds\, h(t-s)\int\limits_\Omega \left(\nabla u(s), \nabla u(t)\right)\, dx \leqslant c_2 \|\nabla u\|_2^{p+1}. \tag{21}$$

Теперь мы воспользуемся неравенством Коши–Буняковского и получим, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2\right] \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t ds\, |h(t-s)| \|\nabla u\|_2^2(s) + \frac{th_0}{2}\|\nabla u\|_2^2 + c_2\|\nabla u\|_2^{p+1}. \tag{22}$$

В силу арифметического неравенства Юнга при $p \in (0,1)$ мы приходим к следующему выражению

$$c_2\|\nabla u\|_2^{p+1} \leqslant \frac{1-p}{2} c_2^{2/(1-p)} + \frac{2}{p+1}\|\nabla u\|_2^2.$$

Таким образом, отсюда и из (22) приходим при $p \in (0,1)$ к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2\right] \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t ds\, |h(t-s)| \|\nabla u\|_2^2(s) + \frac{th_0}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1-p}{2} c_2^{2/(1-p)} + \frac{2}{p+1}\|\nabla u\|_2^2, \tag{23}$$

а при $p = 1$ мы сразу же имеем следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2\right] \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t ds\, |h(t-s)| \|\nabla u\|_2^2(s) + \frac{th_0}{2}\|\nabla u\|_2^2 + c_2\|\nabla u\|_2^2. \tag{24}$$

Рассмотрим неравенство (23), т. е. случай $p \in (0,1)$, поскольку при $p = 1$ все проще. Итак, после интегрирования по времени мы получим следующее неравенство:

$$\|\nabla u\|_2^2 \leqslant \|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2 + \frac{h_0}{2}\int\limits_0^t (t-s)\|\nabla u\|_2^2(s)\,ds +$$
$$+\left(\frac{th_0}{2} + \frac{2}{p+1}\right)\int\limits_0^t \|\nabla u\|_2^2\,ds + \frac{1-p}{2}c_2^{2/(1-p)}t. \quad (25)$$

Пусть теперь $t \in [0,\mathrm{T}]$ при некотором $\mathrm{T} > 0$, тогда мы из (26) получим следующее неравенство

$$\|\nabla u\|_2^2 \leqslant \|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2 + \frac{1-p}{2}c_2^{2/(1-p)}\mathrm{T} + \left(h_0\mathrm{T} + \frac{2}{p+1}\right)\int\limits_0^t \|\nabla u\|_2^2(s)\,ds, \quad (26)$$

из которого в силу теоремы Гронуолла–Беллмана–Бихари мы получим следующее неравенство:

$$\|\nabla u\|_2^2(t) \leqslant \left[\|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2 + \frac{1-p}{2}c_2^{2/(1-p)}\mathrm{T}\right]\exp\left\{\left(h_0\mathrm{T} + \frac{2}{p+1}\right)t\right\} \quad \text{при} \quad t \in [0,\mathrm{T}]. \quad (27)$$

Следовательно, норма $\|\nabla u\|_2(t)$ ограничена на всяком компакте из $\mathbb{R}^1_+$. Таким образом, слабое обобщенное решение рассматриваемой задачи не разрушается за конечное время. Докажем, что при $u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ слабое обобщенное решение существует глобально во времени. С этой целью нам нужно воспользоваться классическим методом Галеркина в сочетании с методом компактности [10]. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $p \in (0,1]$ *и* $u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)$. *Тогда существует слабое обобщенное решение задачи* (15), (16) *класса*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^1_0(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^1_0(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega))$$

для произвольного $\mathrm{T} > 0$.

СЛУЧАЙ $1 \leqslant p \leqslant 1+2/N$. Докажем сначала теорему о локальной разрешимости задачи (15)–(16), понимаемой в слабом обобщенном смысле определения 1, в классе

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}^1_0(\Omega))$$

при некотором максимальном $\mathrm{T}_0 > 0$, зависящем от $u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$. С этой целью рассмотрим следующий оператор:

$$\mathbb{A}u \equiv -\triangle u + \mathrm{I} : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (28)$$

Используя теорему Браудера–Минти, и точно так же как и в работе [11], удается показать, что этот оператор обратим, причем обратный оператор является липшиц–непрерывным с постоянной Липшица равной 1. Тогда начально–краевую задачу (15)–(16), понимаемую в слабом смысле определения 1, можно представить в классе

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^1_0(\Omega))$$

в следующем абстрактном виде:

$$\frac{dv}{dt} + \mathbb{B}_1\mathbb{A}^{-1}v + \int\limits_0^t ds\,\mathbb{B}_1\mathbb{A}^{-1}v(s) = \mu\left|\mathbb{B}_2\mathbb{A}^{-1}v\right|^p, \quad v(0) = v_0 = \mathbb{A}^{-1}u_0, \quad v = \mathbb{A}^{-1}u, \quad (29)$$

где

$$\mathbb{B}_1 \equiv -\triangle : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{B}_2 \equiv \nabla : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \cdots \otimes \mathbb{L}^2(\Omega). \tag{30}$$

Заметим, что оператор

$$\mathbb{B}_1\mathbb{A}^{-1}v : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \tag{31}$$

является липшиц–непрерывным. Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\|\mathbb{B}_1\mathbb{A}^{-1}v_1 - \mathbb{B}_1\mathbb{A}^{-1}v_2\right\|_* \leqslant \left\|\mathbb{A}^{-1}v_1 - \mathbb{A}^{-1}v_2\right\| \leqslant \|v_1 - v_2\|_* \quad \text{для всех} \quad v_1, v_2 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \tag{32}$$

Докажем теперь ограниченную липшиц–непрерывность оператора $\left|\mathbb{B}_2\mathbb{A}^{-1}v\right|^p$. Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств при $q = 2/p$ и $p \in [1, 2)$:

$$\begin{gathered}
\left\|\left|\mathbb{B}_2\mathbb{A}^{-1}v_1\right|^p - \left|\mathbb{B}_2\mathbb{A}^{-1}v_2\right|^p\right\|_* \leqslant \\
\leqslant p\left\|\left|\nabla\mathbb{A}^{-1}(v_1) - \nabla\mathbb{A}^{-1}(v_2)\right| \max\left\{\left|\nabla\mathbb{A}^{-1}(v_1)\right|^{p-1}, \left|\nabla\mathbb{A}^{-1}(v_2)\right|^{p-1}\right\}\right\|_* \leqslant \\
\leqslant c_1(p)\biggl(\int\limits_\Omega \left|\nabla\mathbb{A}^{-1}(v_1) - \nabla\mathbb{A}^{-1}(v_2)\right|^q \times \max\left\{\left|\nabla\mathbb{A}^{-1}(v_1)\right|^{q(p-1)}, \left|\nabla\mathbb{A}^{-1}(v_2)\right|^{q(p-1)}\right\} dx\biggr)^{1/q} \leqslant \\
\leqslant c_1(p)\left(\int\limits_\Omega \left|\nabla\mathbb{A}^{-1}(v_1) - \nabla\mathbb{A}^{-1}(v_2)\right|^2 dx\right)^{1/2} \times \\
\times \left(\int\limits_\Omega \max\left\{\left|\nabla\mathbb{A}^{-1}(v_1)\right|^{2(p-1)/(2-q)}, \left|\nabla\mathbb{A}^{-1}(v_2)\right|^{2(p-1)/(2-q)}\right\} dx\right)^{(2-q)/(2q)} = \\
= \mu(\mathrm{R})\left\|\nabla\mathbb{A}^{-1}(v_1) - \nabla\mathbb{A}^{-1}(v_2)\right\|_2,
\end{gathered} \tag{33}$$

где

$$\mu(\mathrm{R}) = c_1\mathrm{R}^{p-1}, \quad \mathrm{R} = \max\left\{\|\nabla\mathbb{A}^{-1}(v_1)\|_2, \|\nabla\mathbb{A}^{-1}(v_2)\|_2\right\}.$$

Заметим теперь, что в классе $v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ мы можем свести нашу задачу (29) к интегральному уравнению

$$v(t) = v_0 + \int\limits_0^t ds\, G(v)(s), \quad G(v)(s) = -\mathbb{B}_1\mathbb{A}^{-1}v(s) - \int\limits_0^s d\sigma\, h(s-\sigma)\mathbb{B}_1\mathbb{A}^{-1}v(\sigma) + \mu\left|\mathbb{B}_2\mathbb{A}^{-1}v(s)\right|^p. \tag{34}$$

И при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$ в силу оценок (32) и (33) можно применить метод сжимающих отображений в банаховом пространстве

$$\mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$$

и доказать существование единственного решения интегрального уравнения (34) в этом банаховом пространстве. Далее можно воспользоваться «бутстэп» методом (см., например, [11]) и доказать, что это решение на самом деле из класса

$$\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Затем нужно применить стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений во времени и получить следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $p \in [1,2)$ *и* $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, *тогда найдется такое* $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0(u_0) > 0$, *что существует единственное решение* $u(x)(t)$ *задачи* (15), (16), *понимаемое в слабом смысле определения 1, в классе*

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *либо* $\mathrm{T}_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место следующее предельное равенство*:

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \|\nabla u\|_2(t) = +\infty. \tag{35}$$

Очевидно, что это решение, вообще говоря, не единственное.

СЛУЧАЙ $p \in (1+2/N, N/(N-2))$ при $N \geqslant 3$ или $p > 2$ при $N = 2$.

Дадим определение.

Определение 2. *Функция* $u(x)(t)$ *класса*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)), \quad u^{'}(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)) \tag{36}$$

называется слабым обобщенным решением задачи (15)–(16), *если при некотором* $T > 0$ *имеет место следующее равенство*:

$$\langle D(u), w\rangle = 0 \quad \text{для п. вс.} \quad t\in[0,\mathrm{T}], \quad \text{и для всех} \quad w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{37}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — *это скобки двойственности между гильбертовыми пространствами* $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ *и* $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, *а*

$$D(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + \triangle u + \int\limits_0^t ds\, h(t-s)\triangle u(s) + \mu|\nabla u|^p,$$

$u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)$.

Докажем, что при $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)$ слабое обобщенное решение существует локально во времени. С этой целью нам нужно воспользоваться классическим методом Галеркина в сочетании с методом компактности [10].

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $p \in \left(1+\frac{2}{N}, \frac{N}{N-2}\right)$ *при* $N \geqslant 3$ *или* $p > 2$ *при* $N = 2$ *и* $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)$. *Тогда существует единственное слабое обобщенное решение задачи* (15), (16) *класса* $u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega))$, $u^{'}(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega))$ *для некоторого малого* $\mathrm{T} > 0$.

4. Разрушение решения

Прежде чем переходить к получению достаточных условий разрушения, нам нужно изучить сходимость следующего интеграла — нелинейную «емкость»:

$$a(p;\Omega;N) \equiv \frac{1}{\lambda_1}\left(\int\limits_\Omega \frac{|\nabla\psi_1|^{p/(p-1)}}{\psi_1^{1/(p-1)}(x)}\,dx\right)^{(p-1)/p}, \tag{38}$$

где функция $\psi_1(x)$ — есть первая собственная функция, соответствующая первому собственному значению $\lambda_1 > 0$ оператора Лапласа в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$:

$$\triangle\psi_1(x) + \lambda_1\psi_1(x) = 0, \quad \psi_1(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{39}$$

Обозначим через $p_0 = p_0(\Omega; N) > 1$ такое число, что при $p > p_0$ интеграл в правой части равенства (38) сходится. Докажем, что существуют области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, для которых такое p_0 существует. Действительно, пусть $\Omega = B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\right\}$ — шар радиуса $R > 0$. Тогда можно вычислить первую собственную функцию и первое собственное значение задачи (39) (см., например, [12]). Действительно,

$$\psi_1(x) = \psi_1(|x|) = c_0 r^{(2-N)/2} J_{(N-2)/2}(\lambda_1^{1/2} r), \quad \lambda_1 = \frac{(z_{N1})^2}{R^2}, \quad r = |x|,$$

где z_{N1} — первый корень функции Бесселя $J_{(N-2)/2}(x)$. Заметим теперь, что для функции Бесселя $J_\nu(z)$ справедлива следующая формула Эйлера [13]:

$$J_\nu(z) = \frac{(\frac{1}{2}z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left\{1 - \frac{z^2}{z_{\nu,n}^2}\right\}, \tag{40}$$

где $z_{\nu,1} < z_{\nu,2} < \cdots < z_{\nu,n} < \cdots$ — это корни функции Бесселя $J_\nu(z)$. Из явного вида (40) следует, что подынтегральная функция в (38) имеет интегрируемую особенность при $p > 2$, т. е. число $p_0 = 2$ в случае шара. Теперь мы предположим, что рассматриваем область Ω, для которой число p_0 существует, и пусть

$$p > p_0. \tag{41}$$

Получим достаточные условия разрушения слабого обобщенного решения задачи (15)–(16) при таких p. С этой целью возьмем в качестве $w = \psi_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ в равенстве (37), тогда после «интегрирования по частям» получим следующее равенство:

$$(\lambda_1 + 1)\frac{d\mathrm{J}}{dt} + \lambda_1 \mathrm{J}(t) + \lambda_1 \int_0^t ds\, h(t-s)\mathrm{J}(s) = \\ = \mu \int_\Omega |\nabla u|^p \psi_1(x)\, dx, \quad \mathrm{J}(t) \equiv \int_\Omega u(x)(t)\psi_1(x). \tag{42}$$

Справедлива следующая цепочка выражений:

$$|\mathrm{J}| = \left|\int_\Omega u\psi_1(x)\, dx\right| = \frac{1}{\lambda_1}\left|\int_\Omega u \triangle \psi_1\, dx\right| = \frac{1}{\lambda_1}\left|\int_\Omega (\nabla u, \nabla \psi_1)\, dx\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u||\nabla \psi_1|\, dx = \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega \psi^{1/p}|\nabla u_m| \frac{|\nabla \psi_1|}{\psi_1^{1/p}}\, dx \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla \psi_1|^{p/(p-1)}}{\psi_1^{1/(p-1)}(x)}\, dx\right)^{(p-1)/p} \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \psi_1\, dx\right)^{1/p} = a\left(\int_\Omega |\nabla u_m|^p \psi_1\, dx\right)^{1/p}. \tag{43}$$

Таким образом, из неравенств (42) и (43) приходим к следующему обыкновенному интегро–дифференциальному неравенству:

$$(\lambda_1 + 1)\frac{d\mathrm{J}}{dt} + \lambda_1 \mathrm{J}(t) + \lambda_1 \int_0^t ds\, h(t-s)\mathrm{J}(s) \geqslant \frac{\mu}{a^p}|\mathrm{J}(t)|^p, \quad \mathrm{J}(t) \equiv \int_\Omega u(x)(t)\psi_1(x), \tag{44}$$

из которого с учетом условий (2) сразу же получаем неравенство

$$(\lambda_1+1)\frac{d\mathrm{J}}{dt}+\lambda_1\mathrm{J}(t)+\lambda_1\int\limits_0^t ds\,\chi^{'}(t-s)\mathrm{J}(s)\geqslant\frac{\mu}{a^p}|\mathrm{J}(t)|^p. \tag{45}$$

Заметим, что $\mathrm{J}(t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}])$, поэтому справедлива формула интегрирования по частям

$$\int\limits_0^t ds\,\chi^{'}(t-s)\mathrm{J}(s)=-\int\limits_0^t d\chi(t-s)\,\mathrm{J}(s)=-\chi(t-s)\mathrm{J}(s)\Big|_{s=0}^{s=t}+\int\limits_0^t ds\chi(t-s)\mathrm{J}^{'}(s)=$$

$$=-\chi(0)\mathrm{J}(t)+\chi(t)\mathrm{J}(0)+\int\limits_0^t ds\chi(t-s)\mathrm{J}^{'}(s). \tag{46}$$

С учетом условий (2) мы имеем $\chi(t)<0$, поэтому с учетом неравенств (46) мы приходим из (45) к следующему неравенству

$$(\lambda_1+1)\frac{d\mathrm{J}}{dt}+\lambda_1\left(1+h_0\right)\mathrm{J}(t)\geqslant\frac{\mu}{a^p}|\mathrm{J}(t)|^p-\int\limits_0^t ds\chi(t-s)\mathrm{J}^{'}(s),\quad \mathrm{J}(t)\equiv\int\limits_\Omega u(x)(t)\psi_1(x). \tag{47}$$

Предположим теперь, что имеет место начальное условие

$$\mathrm{J}_0=\int\limits_\Omega u_0(x)\psi_1(x)\,dx>\left(\frac{\lambda_1(1+h_0)a^p}{\mu}\right)^{1/(p-1)}, \tag{48}$$

но тогда из неравенства (45) вытекает, что имеет место неравенство

$$\frac{d\mathrm{J}}{dt}(0)>0. \tag{49}$$

Таким образом, найдется такое $t_1\in(0,\mathrm{T}]$, что

$$\frac{d\mathrm{J}}{dt}(t)>0\quad\text{при}\quad t\in[0,t_1]. \tag{50}$$

Следовательно, из (45), (46) и (50) мы приходим к следующему неравенству:

$$(\lambda_1+1)\frac{d\mathrm{J}}{dt}+\lambda_1(1+h_0)\mathrm{J}(t)\geqslant\frac{\mu}{a^p}|\mathrm{J}(t)|^p\quad\text{при}\quad t\in[0,t_1]. \tag{51}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $p>p_0$. Тогда при выполнении условия*

$$\mathrm{J}_0>\left(\frac{\lambda_1(1+h_0)a^p}{\mu}\right)^{1/(p-1)},\quad \mathrm{J}_0\equiv\int\limits_\Omega u_0(x)\psi_1(x)\,dx$$

имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t\uparrow\mathrm{T}_\infty}\mathrm{J}(t)=+\infty,\quad \mathrm{T}_\infty\leqslant-\frac{1}{p-1}\ln\left(1-\frac{\lambda_1(1+h_0)a^p}{\mu}\mathrm{J}_0^{1-p}\right),$$

где

$$\mathrm{J}(t)\equiv\int\limits_\Omega u(x)(t)\psi_1(x)\,dx.$$

и значит решение задачи (15), (16), *понимаемое в слабом обобщенном смысле определения* 1, *разрушается за конечное время.*

Литература

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // УМН. – 1994. – Т. 49, вып. 4(298). – С. 47 – 74.
2. Свиридюк, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Матем. – 1989. – №2. – С. 55 – 61.
3. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Свиридюк Г.А. // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57, вып. 3. – С. 192 – 207.
4. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, вып. 5. – С. 252 – 272.
5. Корпусов, М.О. О разрушении решения уравнения с градиентной нелинейностью / / М.О. Корпусов // Дифференциальные уравнения, в печати.
6. Бонч-Бруевич, В.Л. Физика полупроводников / В.Л. Бонч-Бруевич, С.Г. Калашников. – М.: Наука, 1990. – 672 с.
7. Бонч-Бруевич, В.Л. Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках / В.Л. Бонч-Бруевич, И.П. Звягин, А.Г. Миронов. — М.: Наука, 1972. – 417 с.
8. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8 / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1992. – 664 с.
9. Басс, Ф.Г. Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках / Ф.Г. Басс, В.С. Бочков, Ю.С. Гуревич. – М.: Наука, 1984.— 288 с.
10. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
11. Демидович, В.П. Лекции по математической теории устойчивости / В.П. Демидович. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
12. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов. — М.: Наука, 1987. – 480 с.
13. Ватсон, Г.Н. Теория Бесселевых функций. Часть I / Г.Н. Ватсон. – М.: Изд-во, иностр. лит., 1949. – 800 с.

Максим Олегович Корпусов, доктор физико-математических наук, кафедра математики физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), korpusov@gmail.com.

The Destruction of the Solution of the Nonlocal Equation with Gradient Nonlinearity

M.O. Korpusov, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation)

In this paper we continue our consideration of equations with gradient nonlinearities. In this paper, we consider initial-boundary value problem in a bounded domain with smooth boundary for non-local in time equation with gradient nonlinearity and prove the local solvability of the strong generalized sense, in addition, we obtain sufficient conditions for the destruction of a finite time and sufficient conditions for global in time solubility.

Ключевые слова: nonlocal equation with gradient nonlinearity, Sobolev type equations, the destruction of the solutions.

References

1. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Operator Semigroups. *Russ. Math. Surv.*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 45 – 74.
2. Sviridyuk G.A. One Problem for the Generalized Boussinesq Filtration Equation [Odna zadacha dlya obobshchennogo fil'tratsionnogo uravneniya Bussineska]. *Russian Mathematics,* 1989, no. 2, pp. 55 – 61.
3. Sviridyuk G.A. Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev type. *Russian Acad. Sci. Izv. Math.,* 1994, vol. 42, no. 3, pp. 601 – 614.
4. Sviridyuk G.A. Phase Spaces of Semilinear Equations of Sobolev Type with Relatively Strongly Sectorial Operator [Fazovye prostranstva polulineynykh uravneniy tipa Soboleva s otnositel'no sil'no sektorial'nym operatorom]. *Algebra i analiz,* 1994, vol. 6, issue 5, pp. 252 – 272.
5. Korpusov M.O. Blow-up Solutions of the Equation with Gradient Nonlinearity [O razrushenii resheniya uravneniya s gradientnoy nelineynost'yu]. *Differential Equations*, in print.
6. Bonch-Bruevich V.L., Kalashnikov S.G. *Fizika poluprovodnikov* [Physics of Semiconductors]. Moscow, Nauka, 1990. 672 p.
7. Bonch-Bruevich V.L., Zvyagin I.P., Mironov A.G. *Domennaya elektricheskaya neustoychivost' v poluprovodnikakh* [Blast Electric Instability in Semiconductors]. Moscow, Nauka, 1972. 417 p.
8. Landau L.D., Lifshits E.M. *Elektrodinamika sploshnykh sred. Teoreticheskaya fizika. T. 8* [Electrodynamics of Continuous Media. Theoretical Physics. Vol. 8]. Moscow, Nauka, 1992. 664 p.
9. Bass F.G., Bochkov V.S., Gurevich Yu.S. *Elektrony i fonony v ogranichennykh poluprovodnikakh* [Electrons and Phonons in a Limited Semiconductors]. Moscow, Nauka, 1984. 288 p.
10. Lions Zh.-L. *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Value Problems]. Moscow, Mir, 1972. 588 p.
11. Demidovich V.P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on the Mathematical Theory of Stability]. Moscow, Nauka, 1967. 472 p.
12. Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy* [Regimes with Peaking in Problems for Quasilinear Parabolic Equations]. Moscow, Nauka, 1987. 480 p.
13. Vatson G.N. *Teoriya Besselevykh funktsiy. Chast' I* [The theory of Bessel functions. Part I] Moscow, Izd-vo Inostr. lit., 1949. 800 p.

Поступила в редакцию 11 ноября 2011 г.