УДК 517.583, 519.213.7, 621.391.82 DOI: 10.14529/cmse180102

ТЭТА-ФУНКЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШУМА КВАНТОВАНИЯ

© 2018 Ю.С. Васильев, В.В. Заволокин

Южно-Уральский государственный университет

(454080 Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, д. 76)

E-mail: vasilyevys@susu.ru, zavolokinvv@susu.ru

Поступила в редакцию: 09.10.2017

В статье выведена новая формула для двухмерной плотности распределения вероятности шума квантования, которая позволила записать ее с помощью математического выражения, которое состоит только из тэта-функций Якоби. Приведен способ получения данной формулы. Вывод формулы основан на том, что при подходящей замене переменных часть членов двойного ряда уничтожается. Показан принцип получения всех формул данного семейства. Этот принцип основан на свойствах симметрии тэта-функций. Симметрия тэта-функций позволяет выражать одну тэта-функцию через другую тэта-функцию и получать формулы, состоящие только из тэта-функций Якоби. Это семейство формул позволяет получать выражения для организации модельных экспериментов, поддерживаемые основными математическими пакетами. Они позволяют получать и числовые характеристики случайных процессов, как функции параметров, порождающих их случайных процессов гауссовского типа в аналитическом виде. Их применение увеличивает скорость сходимости результатов моделирования. Полученные формулы позволят выполнять синтез нужных выражений в аналитическом виде при функциональных преобразованиях случайных векторов и процессов, при обработке сигналов.

Ключевые слова: плотность вероятности, шум квантования, тэта-функции Якоби.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Васильев Ю.С., Заволокин В.В. Тэта-функции в математической модели шума квантования // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2018. Т. 7, № 1. С. 16–24. DOI: 10.14529/cmse180102.

Введение

Получение требуемого математического выражения для двух и n-мерных плотностей распределения вероятностей при функциональных преобразованиях случайных векторов наталкивается на математические трудности, связанные с необходимостью выполнения большого объема математических преобразований.

Авторы предлагают решение, позволяющее в некоторых случаях избавляться от выражений, содержащих кратные ряды. Новую формулу и способ, которым она была получена, вместе со способом, с помощью которого была получена исходная формула (1), можно применять для функциональных преобразований случайных векторов. И, в частности, для таких преобразований, в которых участвуют одновременно несколько двухмерных случайных векторов.

В работе [1] была получена математическая модель двухмерной плотности распределения вероятности для шума квантования с использованием двухмерного преобразования Фурье и метода характеристической функции способом, рассмотренным в [2]. Шум квантования возникает при квантовании суммы вектора теплового шума $\vec{ш}(ш_1, ш_2)$ и вектора, вызванного отражением электромагнитных волн от капель дождя $\bar{\xi}(\xi_1, \xi_2)$ или водосодержащих объектов в моменты времени соответственно t_1 и t_2.

В разделе 1 приведено выражение для плотности распределения в виде двойной бесконечной суммы. В разделе 2 приводятся выкладки, приводящие это выражение к виду, содержащему только тэта-функции. В заключении описаны достоинства полученной формулы.

1. Постановка задачи

Известно, что шум квантования возникает в любой системе обработки данных. Как только аналоговый сигнал любого происхождения преобразуется в цифровой код, пригодный для обработки компьютерной программой самого разного назначения или в аппаратуре реального времени, так сразу же на него аддитивно накладывается шум квантования. Значение шума квантования в каждый момент времени равно разности между значением отсчета, подвергаемого квантованию, и результата квантования. Шум квантования ухудшает характеристики работы и аппаратуры и программ, обрабатывающих данные. Ухудшаются не только указанные характеристики, но и математически существенно усложняются преобразования при вычислении нужных характеристик.

Плотность распределения вероятности шума квантования в статье [1] описывается следующим выражением:

$$W_{\bar{\zeta}} = W_{\bar{\zeta}}(u_1, u_2) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2\pi^2}{\beta}\left(n_1^2 + 2\rho n_1 n_2 + n_2^2\right)} \cos\frac{2\pi}{\Delta}(n_1 u_1 + n_2 u_2),$$
$$|u_1| \le \frac{\Delta}{2}, \quad |u_2| \le \frac{\Delta}{2}; \tag{1}$$

где $\bar{\zeta}(\zeta_1, \zeta_2)$ — вектор шума квантования согласно определению, данному в [2];

Δ — шаг квантования;

β — глубина квантования координат вектора, порождающего шум квантования, численно равная отношению квадрата шага квантования к значению дисперсии координат вектора;

ρ — коэффициент корреляции координат вектора, порождающего шум квантования, разнесенных на некоторый интервал времени.

2. Математические преобразования

В выражении (1) для краткости записи введем следующие обозначения:

$$W_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t\left(m^2 + 2\rho mn + n^2\right)} \cos(mz_1 + nz_2) =$$
$$= \frac{1}{\Delta^2} \sum_{m,n} e^{-t\left(m^2 + 2\rho mn + n^2\right)} \cos(mz_1 + nz_2), \qquad |z_1| \le \pi, \quad |z_1| \le \pi. \tag{2}$$

Здесь
$$t = \frac{2\pi^2}{\beta}, \quad m = n_1, \quad n = n_2; \tag{3}$$

$$z_1 = u_1 \frac{2\pi}{\Delta}, \quad z_2 = u_2 \frac{2\pi}{\Delta}. \tag{4}$$

Выразим плотность распределения вероятности через тета-функции Якоби, которые, согласно их определению, приведенному в [3] и [4], имеют следующий вид:

$$\vartheta_1(z,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)}\sin(2n+1)z\,, \tag{5}$$

$$\theta_2(z,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)}\cos(2n+1)z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)z\,, \tag{6}$$

$$\theta_3(z,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz\,, \tag{7}$$

$$\theta_4(z,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2n\,z = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz\,, \tag{8}$$

где z — аргумент тэта-функций, q — параметр Якоби, определенный в [3].

Для удобства последующих преобразований введем следующее обозначение:

$$t = \frac{2\pi}{\beta},\ e^{\frac{-2\pi^2}{\beta}} = e^{-t}. \tag{9}$$

Показательную функцию под знаком суммы в выражении (2) преобразуем в произведение двух сомножителей, каждый из которых зависит только от одного индекса суммирования. Для этого используем прием, описанный в [5] и заключающийся в следующей замене индексов суммирования:

$$m = (i+j)/2,\quad n = (i-j)/2. \tag{10}$$

Тогда выражение (2) примет следующий вид:

$$W_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{\Delta^2}\sum_{i,j} e^{\frac{-t\left(i^2(1+\rho)+j^2(1-\rho)\right)}{2}}\cos\left(\frac{(i+j)}{2}z_1 + \frac{(i-j)}{2}z_2\right),\quad |z_1| \le \pi,\quad |z_1| \le \pi. \tag{11}$$

Выражение (11) можно представить в виде двух бесконечных сумм, индексы суммирования которых i и j также изменяются от $-\infty$ до $+\infty$:

$$W_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{\Delta^2}\left(\sum_{i,j\ \text{четные}} e^{\frac{-t\left(i^2(1+\rho)+j^2(1-\rho)\right)}{2}}\times\cos\left(\frac{(i+j)}{2}z_1 + \frac{(i-j)}{2}z_2\right) + \right.$$
$$\left.\sum_{i,j\ \text{нечетные}} e^{\frac{-t\left(i^2(1+\rho)+j^2(1-\rho)\right)}{2}}\times\cos\left(\frac{(i+j)}{2}z_1 + \frac{(i-j)}{2}z_2\right)\right),\qquad |z_1| \le \pi,\quad |z_2| \le \pi. \tag{12}$$

Применяя формулу сложения для функций косинус в суммах, входящих в формулу (12), вместе с подстановкой вида:

$$x_1 = (z_1+z_2)/2,\qquad x_2 = (z_1-z_2)/2, \tag{13}$$

разобьем формулу (12) на четыре суммы. В результате этих преобразований формула (12) примет следующий вид:

$$W_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{\Delta^2}\left(S_1(x_1,x_2)+S_2(x_1,x_2)+S_3(x_1,x_2)+S_4(x_1,x_2)\right),\quad |x_1+x_2| \le \pi, |x_1-x_2| \le \pi, \tag{14}$$

где:

$$S_1(x_1,x_2)=\left(\sum_{i\ \text{четное}} e^{\frac{-t(1+\rho)i^2}{2}}\cos ix_1\right)\left(\sum_{j\ \text{четное}} e^{\frac{-t(1+\rho)j^2}{2}}\cos jx_2\right), \tag{15}$$

$$S_2(x_1,x_2)=\left(\sum_{i\ \text{нечетное}} e^{\frac{-t(1+\rho)i^2}{2}}\cos ix_1\right)\left(\sum_{j\ \text{нечетное}} e^{\frac{-t(1-\rho)j^2}{2}}\cos jx_2\right), \tag{16}$$

$$S_3(x_1,x_2)=-\left(\sum_{i\ \text{четное}} e^{\frac{-t(1+\rho)i^2}{2}}\sin ix_1\right)\left(\sum_{j\ \text{четное}} e^{\frac{-t(1-\rho)j^2}{2}}\sin jx_2\right), \tag{17}$$

$$S_4(x_1,x_2)=-\left(\sum_{i\ \text{нечетное}} e^{\frac{-t(1+\rho)i^2}{2}}\sin ix_1\right)\left(\sum_{j\ \text{нечетное}} e^{\frac{-t(1-\rho)j^2}{2}}\sin jx_2\right). \tag{18}$$

Функции $\sin ix_1$ и $\sin jx_2$, входящие в выражения (17) и (18), являются нечетными. Поэтому в суммах-сомножителях выражений $S_3(x_1,x_2)$ и $S_4(x_1,x_2)$ индексам суммирования, отличающимся знаком, соответствуют члены с противоположным знаком, которые уничтожаются. По этой причине значения выражений $S_3(x_1,x_2)$ и $S_4(x_1,x_2)$ окажутся равными нулю. Тогда в выражении (14) слагаемые $S_3(x_1,x_2)$ и $S_4(x_1,x_2)$ можно опустить и переписать его в следующем виде:

$$W_{\bar{\zeta}}=\frac{1}{\Delta^2}\big(S_1(x_1,x_2)+S_2(x_1,x_2)\big), \qquad |x_1+x_2|\le\pi. \tag{19}$$

В суммах выражения (15) выполним замену индексов суммирования вида $i=2k$ и $j=2k$, а в суммах выражения (16) выполним замену $i=2k+1$ и $j=2k+1$. В результате выражения (15) и (16) примут следующий вид:

$$S_1=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2t(1+\rho)k^2}\cos 2kx_1\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2t(1-\rho)k^2}\cos 2kx_2\right), \tag{20}$$

$$S_2=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t(1+\rho)(2k+1)^2}{2}}\cos(2k+1)x_1\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t(1-\rho)(2k+1)^2}{2}}\cos(2k+1)x_2\right)=$$

$$=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2t(1+\rho)\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2k+1)x_1\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2t(1-\rho)\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2k+1)x_2\right). \tag{21}$$

В выражениях (20) и (21) введем следующие обозначения:

$$q_1=e^{-2t(1+\rho)},\ q_2=e^{-2t(1-\rho)}. \tag{22}$$

После введения обозначений (22) в выражения (15) и (16) формула (19) может быть записана в следующем виде:

$$W_{\bar{\zeta}}=\frac{1}{\Delta^2}\Bigg(\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_1^{k^2}\cos 2kx_1\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_2^{k^2}\cos 2kx_2\right)+$$
$$+\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_1^{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2k+1)x_1\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_2^{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2k+1)x_2\right)\Bigg),\ |x_1+x_2|\le\pi,\quad |x_1-x_2|\le\pi. \tag{23}$$

Тогда формула (23) преобразуется к следующему виду:

$$W_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{\Delta^2}\left(\theta_3\left(x_1, q_1\right)\theta_3\left(x_2, q_2\right) + \theta_2\left(x_1, q_1,\right)\theta_2\left(x_2, q_2\right)\right)\ ,\ \left|x_1 + x_2\right| \le \pi,\ \left|x_1 - x_2\right| \le \pi. \quad (24)$$

Если в выражении (24) перейти к обозначениям формулы (1) и последовательно выполнить обратные подстановки для перехода к переменным u_1 и u_2, то в результате формулу (24) можно переписать в следующем виде:

$$W_{\bar{\zeta}}\left(u_1, u_2\right) = \frac{1}{\Delta^2}\left(\theta_3\left(\frac{\pi}{\Delta}\left(u_1 + u_2\right), e^{\frac{-4\pi^2}{\beta}(1+\rho)}\right)\theta_3\left(\frac{\pi}{\Delta}\left(u_1 - u_2\right), e^{\frac{-4\pi^2}{\beta}(1-\rho)}\right) + \right.$$
$$\left. + \theta_1\left(\frac{\pi}{\Delta}\left(u_1 + u_2\right), e^{\frac{-4\pi^2}{\beta}(1+\rho)}\right)\theta_1\left(\frac{\pi}{\Delta}\left(u_1 - u_2\right), e^{\frac{-4\pi^2}{\beta}(1-\rho)}\right)\right), \quad \left|u_1\right| \le \frac{\Delta}{2}, \quad \left|u_2\right| \le \frac{\Delta}{2}. \quad (25)$$

В заключение опишем принцип получения иных аналитических выражений для формулы (1), используя свойства симметрии тэта-функций Якоби [6].

Все свойства симметрии тэта-функций можно условно разбить на три группы, касающиеся характера изменения вида аналитического выражения для плотности распределения вероятности шума квантования, выраженного через тэта-функции.

Первая группа свойств симметрии связана с изменением аргумента тэта-функции на четверть периода у функций $\theta_1(x,q), \theta_2(x,q)$ и на половину периода у функций $\theta_3(x,q)$, $\theta_4(x,q)$. Эти свойства симметрии тэта-функций позволяют получить новые аналитические выражения для (1) с помощью подстановок в (24), которые имеют следующий вид:

$$\theta_1\left(x + \frac{\pi}{2}, q\right) = \theta_2(x,q), \quad (26)$$

$$\theta_2\left(x + \frac{\pi}{2}, q\right) = -\theta_1(x,q), \quad (27)$$

$$\theta_3\left(x + \frac{\pi}{2}, q\right) = \theta_4(x,q), \quad (28)$$

$$\theta_4\left(x + \frac{\pi}{2}, q\right) = \theta_3(x,q). \quad (29)$$

Эта первая группа свойств симметрии тэта-функций (26) – (29) проявляется в преобразовании одного вида тэта-функций в другой и позволяет получить полное семейство формул, эквивалентных формулам (24) и (25). Используя свойства (26) – (29) можно составлять выражения полностью тождественные выражениям (24) и (25). Например, выражение вида:

$$W_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{\Delta^2}\left(\theta_4\left(\left(x_1 + \frac{\pi}{2}\right), q_1\right)\theta_4\left(\left(x_2 + \frac{\pi}{2}\right), q_2\right) + \theta_1\left(\left(x_1 + \frac{\pi}{2}\right), q_1\right)\theta_1\left(\left(x_2 + \frac{\pi}{2}\right), q_2\right)\right), \quad (30)$$
$$\left|x_1 + x_2\right| \le \pi, \quad \left|x_1 - x_2\right| \le \pi$$

и равносильное ему выражение:

$$W_{\bar{\zeta}}(u_1,u_2)=\frac{1}{\Delta^2}\left(\theta_4\left(\frac{\pi}{\Delta}(u_1+u_2)+\frac{\pi}{2},e^{\frac{-4\pi^2}{\beta}(1+\rho)}\right)\theta_4\left(\frac{\pi}{\Delta}(u_1-u_2)+\frac{\pi}{2},e^{\frac{-4\pi^2}{\beta}(1-\rho)}\right)+\right.$$
$$\left.+\theta_1\left(\frac{\pi}{\Delta}(u_1+u_2)+\frac{\pi}{2},e^{\frac{-4\pi^2}{\beta}(1+\rho)}\right)\theta_1\left(\frac{\pi}{\Delta}(u_1-u_2)+\frac{\pi}{2},e^{\frac{-4\pi^2}{\beta}(1-\rho)}\right)\right),\quad |u_1|\le\frac{\Delta}{2},\quad |u_2|\le\frac{\Delta}{2} \tag{31}$$

являются выражениями, эквивалентными выражениям (24) и (25) соответственно. Рассмотрев выражения (26)–(29) и (24), нетрудно увидеть, что можно получить четыре формулы, эквивалентные формуле (24). Во всех полученных выражениях тэта-функция подсчитывается очень быстро (см., например, [6]). Используя формулу (25), построим график двухмерной плотности распределения шума квантования, который изображен на рисунке.

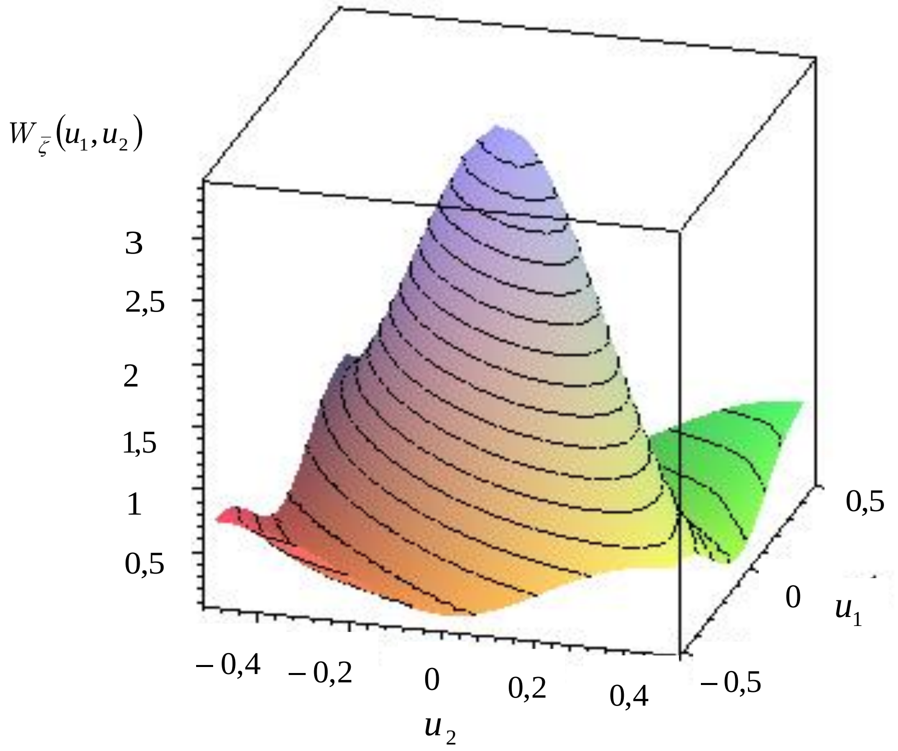

Рис. Плотность вероятности по формуле (25)
(параметр $t=1{,}3$, шаг квантования $\Delta = 1$, коэффициент корреляции $\rho = 0{,}7$)

Заключение

В работе получена новая формула, выражающая двухмерную плотность распределения вероятности шума квантования (1) в виде выражений (24), (25), (30), (31), состоящих только из тэта-функций Якоби. Первая задача, которую позволяет решить данная формула, это возможность избавиться от кратных функциональных рядов и тем самым упростить преобразования при некоторых статистических и вероятностных расчетах. Вторая задача, которую позволяет решить данная формула и которая может возникать при разработке программ и проведении модельных экспериментов, это уменьшение вычислительной работы при одновременном уменьшении погрешностей вычисления. Для плотности распределения вероятности (1) актуальна задача увеличения скорости сходимости функциональных рядов при допустимой погрешности вычислений. Эта задача решается для некоторых значений параметра Якоби с использованием тэта-функций Якоби из библиотек известных математических пакетов. Применяя формулы (24), (25), (30), (31) можно повысить скорость вычисления функции $W_{\bar{\zeta}}(u_1, u_2)$ при той же точности вычислений, что и для выражения (1). И, наконец, используя способ получения исходной формулы, изложенный в [1], полученные результаты можно обобщить по аналогичной схеме на плотности распределения вероятности вида (1), но имеющие большую размерность.

Статья подготовлена при поддержке правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011

Литература

1. Балясников Б.М., Ворона М.С., Заволокин В.В., Коршунов А.Ю., Максименко М.Д., Одиноченко Н.М. Математическая модель шума квантования сигналов, отраженных от протяженных пространственных помех // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. СПб., 2011, Вып. 633, ч. 2. С. 131–138.
2. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. 2–е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
3. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 832 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967. 832 с.
5. Lawden D.F. Elliptic Function and Application. Springer Verlag New York, 1989. 336 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-3980-0.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967. 300 с.

Васильев Юрий Сергеевич, к.ф.-м.н., доцент, кафедра прикладной математики и программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (Челябинск, Российская Федерация)

Заволокин Владимир Валентинович, ведущий инженер, кафедра прикладной математики и программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (Челябинск, Российская Федерация)

DOI: 10.14529/cmse180102

THETA-FUNCTIONS IN MATHEMATICAL MODEL OF NOISE QUANTIZATION

© 2018 Y.S. Vasilyev, V.V. Zavolokin

South Ural State University (pr. Lenina 76, Chelyabinsk, 454080 Russias)

E-mail: vasilyevys@susu.ru, zavolokinvv@susu.ru

Received 09.10.2017

This article presents a new formula for two-dimensional density function probability of noise quantization, which allows us to write it with the help of mathematical expression, which consists of only theta-functions Jacobi. The method of obtaining this formula is given. The derivation is based on the fact that at a suitable change of variables some members of the double row are destroyed. It shows the principle of producing all of the formulas of this family. This principle is based on properties of symmetry theta-function. The symmetry of theta-functions allows us to express one theta-function by another theta-function and obtain other formulas consisting only of theta-functions Jacobi. This family of formulas allows us to obtain expressions for the organization of model experiments, supported by basic mathematical packages. They enable us to receive numerical characteristics of random processes such as the functions of parameters that give rise to their Gaussian random processes in an analytical form. Their use increases the rate of convergence of simulation results. These formulas enable us carry out synthesis of the desired expression in an analytic form for functional transformations of random vectors and processes in signal process.

Keywords: distribution density, noise quantization, theta-functions Jacobi.

FOR CITATION

Vasilyev Y.S., Zavolokin V.V. Theta–functions in Mathematical Model of the Noise Quantization. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering.* 2018. vol. 7, no. 1. pp. 16–24. (in Russian) DOI: 1014529/cmse180102.

References

1. Balyasnikov B.M., Vorona M.C., Zavolokin V.V., Korshunov A.Y., Maksimenko M.D., Odinochenko N.M. A Mathematical Model of the Quantization of the Signals Reflected from Expended Spatial Interference. *Proceedings of the Mozhaisky Military Space Academy St.Petersburg*, 2011. vol. 633, no. 2. pp. 131–138. (in Russian)
2. Tihonov V.I. *Statistichcheskaya radioteknika* [Statistical Radio Engineering]. Moscow: Sovetskoe Radio, 1982. 624 p. (in Russian)
3. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series–55, 1964. 832 p.
4. Korn G., Korn T. Mathematical Handbook. For Scientists and Engineers. Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Revive. Second, Enlargend and Revised Edition. McGraw–Hill Book Co., New York, San Francisco, Toronto, London, Sydney, 1968. 832 p.

5. Lawden D.F. Elliptic Function and Application. Springer Verlag New York, 1989. 336 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-3980-0.
6. Bateman H., Erdelyi A., Higher Transcendental Functions: Elliptic and Automorphic Functions. Lame and Mathieu Functions. Vol. 3, McGraw–Hill Book Co., New York, 1955. 300 p.