Информатика и вычислительная техника

УДК 519.7 DOI: 10.14529/ctcr160301

О СОКРАТИМОСТИ КОМИТЕТА СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Вл.Д. Мазуров, Д.В. Гилёв

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург

Задача дискриминантного анализа при необременительных условиях сводится к системе линейных неравенств. Однако эта система может оказаться несовместной, и это не такой уж редкий случай. Тогда применяется метод комитетов. Качество комитета улучшается при уменьшении числа его членов. Здесь рассматривается метод сокращения числа членов комитета, если в принципе это возможно.

Сначала рассматривается частный случай линейной системы неравенств и строится теория сократимости комитета. Приводится несколько примеров комитетов в пространстве $\mathbb{R}^2$, затем обобщается теория на пространство $\mathbb{R}^n$.

Делается замечание относительно связи между минимальным комитетом и несократимым. Приводится алгоритм нахождения минимального комитета, основанный на методе фундаментального свертывания системы линейных неравенств. Однако остаётся открытым вопрос оценки сложности представленного алгоритма.

В завершении статьи приводится важное достаточное условие несократимости комитета и некоторые леммы, позволяющие несколько сократить алгоритм нахождения минимального комитета.

Ключевые слова: метод комитетов, сократимость, качество, несовместность.

Введение

В настоящее время в связи с расширением области применения приложений математических моделей и в связи с усложнением тех объектов и ситуаций, для описания которых прибегают к математическому моделированию, требования к моделям ослабевают. Существует немало примеров конструктивного использования противоречивых моделей, имеющих вид противоречивых моделей, имеющих в том числе вид несовместных систем линейных неравенств. Например, задача дискриминантного анализа в некоторых условиях сводится к системе линейных неравенств, которая может оказаться несовместной. В этом случае применим метод комитетов.

В связи с этим были поставлены задачи существования комитета, исследования его свойств. Вл.Д. Мазуровым были рассмотрены такие вопросы, как минимальный комитет и его построение. Сейчас мы приведём несколько сведений относительно сократимости комитета.

1. Основные понятия и определения

Пусть во множестве X заданы подмножества $D_1, D_2, \ldots, D_m$. Рассмотрим систему включений $x \in D_j \ \ (j \in N_m)$ (1). Здесь и далее через N_m обозначается множество $\{1, 2, \ldots, m\}$. Систему $x \in D_j \ \ (j \in J)$ (2) для произвольного $\varnothing \neq J \subseteq N_m$ назовём подсистемой с индексом J системы (1). Подсистема (2) называется несовместной, если $\overset{j \in J}{\cap} D_j = \varnothing$. В соответствии с этим определением можно рассматривать *максимальные* (по включению) *совместные подсистемы* и *минимальные* (по включению) *несовместные подсистемы* системы (1).

Определение 1.1. *Комитетом системы* (1) называется конечная последовательность (набор) $Q = \{x^1, \ldots, x^q\}$, $x^i \in X$, такая, что $|\{i : x^i \in D_j\}| > q/2$ для каждого $j \in N_m$ [1].

Определение 1.2. *Комитет* $Q = \{x^1, \ldots, x^q\}$, $x^i \in X$ системы (1) называется *несократимым*, если для любого $Q' \subseteq Q$ такого, что $Q' \neq Q$, Q' не является комитетом системы (1). В противном случае комитет Q называется сократимым.

Определение 1.3. *Минимальным называется комитет с минимально возможным для данной системы числом членов* [1].

Понятно, что всякий минимальный комитет несократим. Обратное, как будет показано ниже, в общем случае не верно, за исключением некоторых частных ситуаций.

Пусть задана система (1) и набор $Q = \{x^1, \ldots, x^q\}$, $x^i \in X$. Рассмотрим матрицу $A = \{a_{ij}\}$ размера $m \times q$, элементы которой определим следующим образом: $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } x^j \in D_j, \\ -1, \text{если } x^j \notin D_j. \end{cases}$ Матрицу A будем называть *характеристической матрицей* данного набора Q. Обозначим через $b^1, \ldots, b^q \in \mathbb{R}^m$ столбцы A. Следующие два утверждения непосредственно следуют из определений комитета и несократимого комитета.

Утверждение 1.1. Набор Q является комитетом системы (1) $\Leftrightarrow$ $b^1 + b^2 + \ldots + b^q > \Theta$.

Утверждение 1.2. Набор Q – несократимый комитет системы (1) $\Leftrightarrow b^1 + b^2 + \ldots + b^q > \Theta$ и не существует другого подмножества $\{b^{i1}, b^{i2}, \ldots, b^{ik}\}$ множества столбцов матрицы A, для которого выполнялось бы соотношение $b^{i1} + b^{i2} + \ldots + b^{ik} > \Theta$.

Таким образом, i-му члену комитета соответствует i-й столбец характеристической матрицы, поэтому мы будем говорить, что матрица A сократима на $b^{i1}, b^{i2}, \ldots, b^{ik}$, если соответствующий комитет $\{x^1, \ldots, x^q\}$ сократим на $x^{i1}, x^{i2}, \ldots, x^{ik}$.

Почти всюду в дальнейшем мы будем рассматривать частный случай системы (1) – систему строгих линейных неравенств: $(c_j, x > 0)$ $(j \in N_m)$, где $x, c_j \in \mathbb{R}^n$. В соответствии с определением 1.1 комитетом системы (3) называется такое конечное множество (набор) $K \subset \mathbb{R}^n$, что каждому её неравенству удовлетворяет более половины элементов множества K. Справедлива следующая теорема существования:

Теорема 1.1. Система (3) обладает комитетом тогда и только тогда, когда среди векторов c_j нет нулевых и противоположно направленных, при этом число членов её минимального комитета не превосходит m [2].

2. Комитеты систем линейных неравенств над пространством $\mathbb{R}^2$

Пусть задана система $(c_j, x) > 0$ $(j \in N_m)$ (4), где $x, c_j \in \mathbb{R}^2$ и среди векторов c_j нет нулевых и противоположно направленных, то есть система (4) комитетно разрешима. Мы сейчас покажем, что всякий несократимый комитет системы (4) является одним из её минимальных комитетов. Итак, справедлива

Теорема 2.1. Любой комитет системы (4) содержит в качестве подкомитета некоторый минимальный комитет.

Доказательство. Рассмотрим задачу дискриминантного анализа DA (A, B, F), где A состоит из векторов c_j, $B = \varnothing$, а F – класс линейных функций. Покажем, что во всяком комитете, решающем эту задачу, присутствует в качестве подкомитета некоторый минимальный комитет. Для наглядности будем считать, что нормы всех комитетов c_j одинаковы и равны, например, единице (понятно, что такая задача эквивалентна предыдущей). Рассмотрим какую-нибудь гиперплоскость $H = \{x\colon (h, x) = 0\}$ такую, что на ней не лежит ни одна точка из множества A. Определим два множества A_1 и B_1 следующим образом: $A_1 = \{c \in \mathbb{R}^2 : c \in A \,\&\, (h, c) > 0\}$; $B_1 = \{c \in \mathbb{R}^2 : -c \in A \,\&\, (h, -c) < 0\}$. Получим новую эквивалентную задачу: DA (A_1, B_1, F). Зададим на H положительное направление. Тогда любая точка из A_1 и B_1 будет характеризоваться углом $\varphi \in (0; \pi)$ между радиус-вектором точки и выбранным направлением (рис. 1).

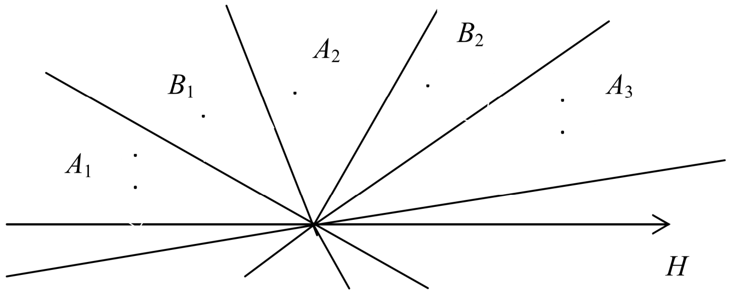


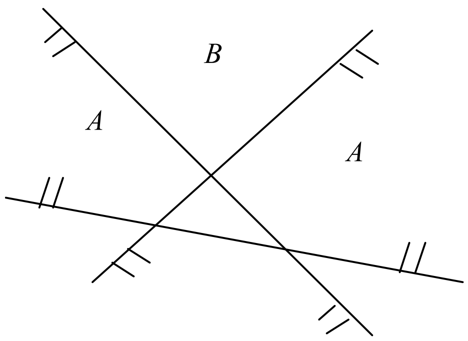
Рис. 1

Выстроим все точки в последовательность, упорядочив их по величине φ. Эту последовательность разобьём на группы, объединяя в отдельную группу подряд идущие точки из одного множества (A_1 и B_1). Обозначим все группы по порядку: A^1, A^2, B^1, B^2, … Всего не более m групп. Тогда, если у нас есть какой-то комитет, то для любой пары соседних точек, принадлежащих разным группам, в комитете должна существовать гиперплоскость, их разделяющая, иначе эти точки будут отнесены к одному классу, чего быть не должно. А в случае, когда первая и последняя точки относятся к одному классу, должна ещё существовать гиперплоскость, такая, чтобы обе эти точки лежали по одну сторону от неё. Осталось показать, что перечисленные гиперплоскости $H_1, H_2, …, H_k$ образуют комитет. Заметим, что $H_1, H_2, …, H_k$ разделяют сразу целые группы, таким образом, отдельную группу можно рассматривать как одну большую точку. Рассмотрим какие-нибудь три подряд идущие группы: G^i, G^{i+1}, G^{i+2}. Тогда два члена комитета, которые определяются гиперплоскостями, разделяющими G^i, G^{i+1} и G^{i+1}, G^{i+2}, голосуют одинаково по группе G^{i+1} и противоположно по любой другой группе. Отсюда легко видеть, что за каждую группу голосует более половины членов набора $\{H_1, H_2, …, H_k\}$, то есть гиперплоскости $H_1, H_2, …, H_k$ образуют комитет. Теорема доказана.

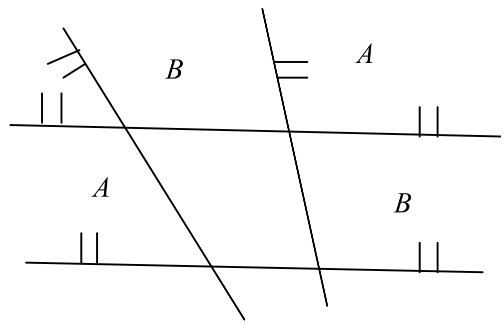
Таким образом, над пространством $\mathbb{R}^2$ комитет является несократимым тогда и только тогда, когда он совпадает с некоторым минимальным комитетом. Отсюда, в частности, следует, что в несократимом комитете системы (4) присутствует не более m членов.

Замечание 2.1. В пространствах, большей размерности, чем $\mathbb{R}^2$, теорема 2.1 может не выполняться. Для того, чтобы это показать, достаточно привести пример в пространстве $\mathbb{R}^3$, или по-прежнему в $\mathbb{R}^2$, но только если в качестве разделяющих брать не линейные, а аффинные функции. Приведём два примера (рис. 2).

В обоих случаях комитеты несократимы, в то же время, в первом примере множество A и B аффинно-разделимы, а во втором существует минимальный комитет, состоящий из трёх членов.



Пример 1



Пример 2

Рис. 2

Теорема 2.2. Пусть $Q = \{x^1, …, x^q\}$ – комитет системы (4), q – некоторое чётное число. Тогда если Q сократим, то существуют такие номера s и r, что $Q \backslash \{x^s, x^r\}$ – комитет системы (4).

Доказательство. Рассмотрим характеристическую матрицу $A=\{a_{ij}\}$ размера $m\times q$. Выбросим из неё те строки, сумма элементов которых строго больше единицы. Очевидно, что полученная матрица *B* сократима на 2 столбца, тогда и только тогда, когда *A* сократима на 2 столбца. Пусть $b^1, b^2, ..., b^q$ – столбцы матрицы *B*. Тогда $b^1+b^2+...+b^q=[1,1,...,1]^T$. По условию, существует $p\geq 1$ такое, что *A* (а значит и *B*) сократима на 2а+2 столбца. Не нарушая общности, можно считать, что *B* сократима на $b^1, b^2, ..., b^{2p+2}$, и что соответствующие данным столбцам точки комитета упорядочены по возрастанию полярного угла $\varphi\in[0;2\pi)$. Покажем, что *B* несократима на $2p$ столбцов. Предположим, что это не так.

Рассмотрим подмножество столбцов $B^1=\{b^1, b^2, ..., b^p, b^{p+2}, ..., b^{2p+1}\}$. Так как из *B* нельзя выбросить B^1, то существует $1\leq i\leq m$, такое, что $a_{i1}+...+a_{ip}+a_{ip+2}+...+a_{i2p+1}\geq 2$.

Но *B* сократима на $B^1=b^1, b^2, ..., b^{2p+2}$, следовательно $b^1+b^2+...+b^{2p+2}\leq\Theta$, значит $a_{i1}+...+a_{ip}+a_{ip+2}+...+a_{i2p+1}\leq -a_{ip+1}-a_{i2p+2}\leq 2$.

Таким образом, $a_{i1}+...+a_{ip}+a_{ip+2}+...+a_{i2p+1}=2\ \&\ a_{ip+1}=a_{i2p+2}=-1$, то есть среди чисел $a_{i1}, ..., a_{ip}, a_{ip+2}, ..., a_{i2p+1}$ ровно $p+1$ единица. Следовательно, существуют *j* и *k*, $1\leq i<p+1<k<2p+2$ такие, что $a_{ij}=a_{ik}=1$. Для наглядности будем считать, что все точки исходного комитета лежат на единичной окружности. Имеем: $(c_i, x^j)>0\ \&\ (c_i, x^{p+1})\leq 0\ \&\ (c_i, x^k)>0\ \&\ (c_i, x^{2p+2})\leq 0$, то есть гиперплоскость $H=\{x:(c_i, x^j)=0\}$ разделяет множества $\{x^j,\ x^k\}$ и $\{x^{p+1},\ x^{2p+2}\}$, но $\varphi(x^j)\leq\varphi(x^{p+1})\leq\varphi(x^k)\leq\varphi(x^{2p+2})$, где φ – полярный угол, а значит хорды $[x^j, x^k]$ и $[x^{p+1}, x^{2p+2}]$ пересекаются. Противоречие. Таким образом, мы показали, что из сократимости матрицы *B* на $2p+2$ столбца, следует её сократимость на $2p$ столбцов. Следовательно, проводя аналогичные рассуждения, мы в конечном итоге получим, что матрица *B*, а значит матрица *A* сократима на 2 столбца. Теорема доказана.

Замечание 2.2. Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает возможный алгоритм построения минимального комитета в двумерном случае, состоящий из двух этапов. На первом этапе мы с помощью какого-нибудь простого алгоритма (см. [1]) строим произвольный комитет системы (4). На втором этапе мы последовательно сокращаем полученный комитет на 2 члена до тех пор, пока не получим несократимый комитет, который по теореме 2.1, будет являться минимальным комитетом системы (4).

Замечание 2.3. В общем случае, если рассматривать комитеты системы (1), заключение теоремы 2.2 неверно. Приведём пример. Рассмотрим матрицу *A* из $2k$ столбцов, строки которой представляют собой всевозможные перестановки *k* единиц и *k* минус единиц:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Припишем к *A* дополнительный столбец, состоящий из одних единиц. Тогда полученная матрица *B* будет сократима на $2k$ столбцов, в то же время для любого $q<2k$ *B* нельзя будет сократить на *q* столбцов. Действительно, рассмотрим произвольное подмножество столбцов $\{b^{i1}, b^{i2}, ..., b^{iq}\}$. Тогда, очевидно, найдётся номер *j*, такой, что среди *j*-х координат векторов $b^{i1}, b^{i2}, ..., b^{iq}$ более половины единиц, а значит данное подмножество столбцов нельзя выбросить из *B* не нарушив при этом её комитетность.

3. Некоторые комитеты в пространстве $\mathbb{R}^n$

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о сократимости комитетов системы (3), получающихся в результате применения некоторых известных алгоритмов.

Рассмотрим алгоритм построения комитета, в котором применяется следующий метод проектирования на плоскость [1]. Системе (3) ставится в соответствие система $(c_jF, y > 0)$ $(j \in N_m)$, (5), где F – линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ такое, что система (5) не противоречива. Тогда, если $K = \{y^1, \ldots, y^q\}$ – комитет системы (5), то множество $Q = \{y^1F^T, \ldots, y^qF^T\}$ является комитетом системы (3), так как $(c_jF, y^i) = (c_j, y^iF^T)$.

Из последнего равенства следует, что у комитетов R и Q одинаковые характеристические матрицы. Таким образом, комитет Q будет несократимым тогда и только тогда, когда K – минимальный комитет системы (5) согласно теореме 2.1.

Рассмотрим теперь алгоритм построения комитета системы (3), основанный на доказательстве теоремы существования [1, 3]. Он заключается в следующем. Для каждого вектора c_j ищется точка x^j такая, что $(c_j, x^j) = 0$, $(c_i, x^j) \neq 0$ $(i \neq j)$. Тогда множество $Q = \{x^1 + \varepsilon c_1, -x^1 + \varepsilon c_1, \ldots, x^m + \varepsilon c_m, -x^m + \varepsilon c_m\}$ при достаточно малом ε, является комитетом системы (3). Справедливо следующее

Утверждение 3.1. Полученный комитет Q сократим не менее чем на m членов.

Доказательство. Рассмотрим соответствующую характеристическую матрицу $A = \{a_{ij}\}$ размера $m \times 2m$. Она будет иметь следующую структуру: $a_{i2i-1} = a_{i2i} = 1$, $a_{i2j-1} = a_{i2j}$ $(i \neq j)$. Пусть $b^1, b^2, \ldots, b^{2m}$ – столбцы матрицы A. Найдём среди них столбец $b^k = [a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}]^T$ с наименьшим числом минус единиц. Очевидно, $b^k \leq [1, 1, \ldots, 1]^T$. Пусть $a_{pk} = -1$ для некоторого p. Тогда рассмотрим вектор $d_1 = b^k + b^{2p-1} + b^{2p}$. Он отличается от b^k только по p-й координате: (у b^k на p-м месте стоит –1, а у d_1 на p-м месте стоит +1). Следовательно, $b^k \leq d_1 \leq [1, 1, \ldots, 1]^T$. Если существует такое q, то q-я координата вектора d_1 равна –1, то рассмотрим вектор $d_2 = b^k + b^{2p-1} + b^{2p} + b^{2q-1} + b^{2q}$, для которого будет справедливо: $d_1 \leq d_2 \leq [1, 1, \ldots, 1]^T$. И так далее. В конечном итоге, мы получим вектор $d = [1, 1, \ldots, 1]^T$, являющийся суммой некоторых столбцов матрицы A. Но тогда эти столбцы, а точнее составляющие их члены исходного комитета, сами образуют комитет. Осталось посчитать количество членов в новом комитете. Так как в качестве b^k мы брали столбец с наименьшим числом минус единиц, то этих минус единиц в нем не более $(m-1)/2$. Таким образом, в новом комитете содержится не более $1 + 2(m-1)/2 = m$ членов, то есть мы сократили исходный комитет как минимум наполовину. Утверждение доказано.

Замечание 3.1. Из доказанного утверждения вытекает простой алгоритм построения комитета системы (3) с числом членов, не превосходящим числа неравенств в системе. Это даёт ещё одно доказательство теоремы об оценке числа членов минимального комитета [1]. Более того, эту оценку можно несколько уточнить, а именно, справедливо:

Следствие 3.1. Если существует максимальная совместная подсистема системы (3), число неравенств в которой равно p, то число членов минимального комитета системы (3) не превосходит $1 + 2(m-p)$.

4. Общий алгоритм нахождения минимального подкомитета

Пусть задана система включений (1) и некоторый комитет $Q = \{y^1, \ldots, y^q\}$. Требуется найти минимальное по количеству элементов подмножество $Q' \subseteq Q$, такое, что Q' также является комитетом системы (1). Рассмотрим характеристическую матрицу A комитета Q.

Сделаем одно предположение, а именно: предположим, что $b^1 + b^2 + \ldots + b^q = [1, 1, \ldots, 1]^T$, где $b^1, b^2, \ldots, b^q$ – столбцы A, то есть по каждому пункту комитет голосует с минимальным преимуществом, отсюда, в частности, следует, что в таком комитете присутствует нечетное число членов. При этом предположении справедливо:

Утверждение 4.1. Матрица A сократима $\Leftrightarrow \{b^{i1}, b^{i2}, \ldots, b^{ik}\} \subset \{b^1, b^2, \ldots, b^q\}$: $b^{i1} + b^{i2} + \ldots + b^{ik} \leq \Theta$.

Действительно, матрица A сократима $\Leftrightarrow$ $b^{i1} + b^{i2} + \ldots + b^{ik} > \Theta$ $(k < q) \Leftrightarrow b^{i1} + b^{i2} + \ldots + b^{ik} \geq$ $\geq [1, 1, \ldots, 1]^T \Leftrightarrow$ $\{d^1, d^2, \ldots, d^{q-k}\} = \{b^1, b^2, \ldots, b^q\} \setminus \{b^{i1} + b^{i2} + \ldots + b^{ik}\}$.

Итак, в дальнейшем будем считать, что $b^1 + b^2 + \ldots + b^q = [1, 1, \ldots, 1]^T$.

Теорема 4.1. (*достаточное условие несократимости*). Если система линейных неравенств $A^T x > \Theta$ имеет решение $x \in \mathbb{R}^n$ такое, что $x \geq \Theta$, то A несократима.

Доказательство. Проведём его методом от противного. Пусть A сократима. Тогда существует $\{b^{i1}, b^{i2}, ..., b^{ik}\} \subset \{b^1, b^2, ..., b^q\}$: $b^{i1} + b^{i2} + ... + b^{ik} \leq \Theta$. Не нарушая общности, можем считать, что $b^1 + b^2 + ... + b^k \leq \Theta$.

Это означает, что:

$p_1 = a_{11} + a_{12} + ... + a_{1k} \leq 0,$

$p_2 = a_{21} + a_{22} + ... + a_{2k} \leq 0,$

………………………

$p_m = a_{m1} + a_{m2} + ... + a_{mk} \leq 0.$

Но по условию, существует $[x^1, x^2, ..., x^m]^T \geq \Theta$ такой, что $\forall\ 1 \leq i \leq q \quad a_{1i}x^1 + a_{2i}x^2 + ... a_{mi}x^m > 0.$ Следовательно, суммируя по i от 1 до k получаем: $p_1 x^1 + p_2 x^2 + ... + \mathrm{p}_m x^m > 0.$ Это противоречит тому, что $\forall\ j \quad x^j \geq 0\ \&\ p_j \leq 0.$ Теорема доказана.

Лемма 4.1. Система $\left(d_j, x\right) > 0,\ (j \in N_m)$ с целочисленными векторами d_j имеет решение $[x^1, x^2, ..., x^m]^T \geq \Theta \iff \forall\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ неотрицательных целых чисел, из условия $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + ... + \lambda_m d_m \leq \Theta$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0.$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что из непрерывности скалярного произведения следует, что система $(d_j, x > 0),\ (j \in N_m)$ (или в матричном виде $Dx > \Theta$) имеет неотрицательное решение тогда и только тогда, когда она имеет строго положительное решение, а последнее эквивалентно тому, что система $\begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} y > \Theta$ совместна, где E – единичная матрица. Тогда из теоремы Карвера [3] легко получаем утверждение леммы.

Замечание 4.1. Теорема 4.1 не дает необходимого условия несократимости матрицы. Пример:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить непосредственно, что данная матрица несократима, вместе с тем выполняется соотношение: $b^1 + b^2 + b^3 + b^4 + 2b^5 = \Theta,$ следовательно, по лемме 4.1, система $A^T x > \Theta$ не может иметь положительного решения.

Приступим теперь непосредственно к описанию алгоритма. Рассмотрим систему линейных неравенств $(E|A)^T x > \Theta.$

Будем решать её методом свертывания С.Н. Черникова [4]. В результате применения этого метода мы получим полную фундаментальную свертку системы (6). Она может оказаться пустой, тогда система (6) совместна, и по теореме 4.1 мы делаем вывод, что матрица A несократима. Но может оказаться так, что полная фундаментальная свертка системы (6) непуста. Тогда, как показывает предыдущий пример, это еще означает, что A сократима, и нужно проводить дальнейшее исследование.

Известно, что индексы несовместных неравенств, входящих в полную фундаментальную свертку исходной системы, суть индексы всех её ν-подсистем. Пусть неравенства исходной системы (6) перенумерованы: 1_A, 2_A, …, q_A, 1_E, 2_E, …, m_E. Будем считать, что индекс J любой её подсистемы состоит из двух частей: $J=J^A\cup J^E$. При этом, J^A назовём *собственным индексом* данной подсистемы. Если для какого-то подмножества $\{b^{i1}, b^{i2}, ..., b^{ik}\}$ столбцов матрицы A выполняется $b^{i1}+b^{i2}+...+b^{ik}\le\Theta,$ то подсистема с индексом $J=\{i1_A, i2_A, …, ik_A\}\cup\{1_E, 2_E, …, m_E\}$ по лемме 4.1 будет несовместной. Следовательно, $J\supseteq J_\nu,$ где J_ν – индекс некоторой ν-подсистемы, а значит $\{i1_A, i2_A, …, ik_A\}\supseteq J_\nu^A$. Таким образом, перебирая все подсистемы, собственные индексы которых содержат собственный индекс хотя бы одной ν-подсистемы, мы ответим на вопрос о сократимости матрицы A.

Посмотрим, как будет работать алгоритм на предыдущем примере. Приписываем сбоку к матрице A единичную матрицу 8×8 и решаем системы (6). В результате свертывания (можно проверить) мы получаем единственное неравенство: $0>0$, с индексом $J=\{1_A, 2_A, 3_A, 4_A, 5_A\}=J^A\cup\varnothing$. Теперь, проверяя подмножество столбцов с номерами: J, $J\cup\{6_A\}$ и $J\cup\{7_A\}$, мы приходим к выводу, что A – несократима.

Вообще говоря, перебор по всем несовместным подсистемам может оказаться довольно долгой процедурой (особенно, когда ν-подсистем много и они маленькие) [5]. Поэтому хотелось бы его как-то сократить.

Лемма 4.2. Пусть есть множество векторов $M_1=\{a_1, …, a_m\}$ и его собственное подмножество $M_2=\{a_1, …, a_k\}$. Предположим, что существуют такие $\mu_1,...,\mu_m,\lambda_1,...,\lambda_k$ – положительные целые числа, такие что

$$\mu_1 a_1+...+\mu_k a_k+\mu_{k+1}a_{k+1}+...+\mu_m a_m=\Theta, \quad (*)$$

$$\lambda_1 a_1+...+\lambda_k a_k=\Theta. \quad (**)$$

Тогда существует подмножество $M_3=\{a_{i,1},...,a_{i,q}\}\subseteq M_1,$ не содержащее M_2, и существует $\eta_1,...,\eta_q$ – положительные целые числа, такие, что $\eta_1 a_{i1}+...+\eta_q a_{iq}=\Theta.$

Доказательство. Рассмотрим $\min\{\mu_1/\lambda_1,...,\mu_k/\lambda_k\}$. Можно считать, что этот минимум достигается на $\mu_1/\lambda_1=\mu_2/\lambda_2=...=\mu_s/\lambda_s$. Тогда, умножая равенство (*) на λ_1, а равенство (**) на μ_1 и вычитая из первого второе, получим $t_{s+1}a_{s+1}+...+t_k a_k+\mu_{k+1}a_{k+1}+...\mu_m a_m=\Theta,$ где $t_j=\lambda_1\mu_j-\lambda_j\mu_1>0$. Положим $M_3=\{a_{s+1},...,a_m\}$ и лемма доказана.

При помощи этой леммы мы сейчас докажем утверждение, которое позволит существенно сократить перебор в алгоритме. Итак, справедливо

Утверждение 4.2. Пусть для какого-то подмножества $\{b^{i1}, b^{i2}, ..., b^{ik}\}$ столбцов матрицы A выполняется $b^{i1}+b^{i2}+...+b^{ik}\le\Theta.$ Тогда $\{i1_A, i2_A, …, ik_A\}=J_1^A\cup J_2^A\cup...\cup J_p^A$, где $J_1^A, J_2^A, ..., J_p^A$ – собственные индексы ν-подсистем системы (6).

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать, что для $\{b^1, b^2, ..., b^k\}$ выполняется: $b^1+b^2+...+b^k\le\Theta.$ Тогда существуют такие положительные числа $\mu_1,\mu_2,...,\mu_s$, что $b^1+b^2+...+b^k+\mu_1 e^{i1}+\mu_2 e^{i2}+...+\mu_s e^{is}=\Theta,$ где $e^{i1}, e^{i2}, ..., e^{is}$ – некоторые столбцы матрицы E.

Пусть $J_1^A, J_2^A, ..., J_p^A$ – собственные индексы тех и только тех ν-подсистем системы (6), индексы которых содержатся в $\{1_A, 2_A, …, k_A\}\cup\{i1_E, i2_E, …, iS_E\}$. Тогда, очевидно, выполняется включение: $\{1_A, 2_A, …, k_A\}\supseteq J_1^A\cup J_2^A\cup...\cup J_p^A$. Покажем, что $\{1_A, 2_A, …, k_A\}\subseteq J_1^A\cup J_2^A\cup...\cup J_p^A$.

Докажем методом от противного. Без ограничения общности предположим: $1_A\notin J_1^A\cup J_2^A\cup...\cup J_p^A$. Рассмотрим первую ν-подсистему, то есть ту, собственный индекс которой J_1^A. Пусть $\{d_1, d_2, …, d_r\}$ – то подмножество столбцов расширенной матрицы (E|A), которое соответствует индексу первой ν-подсистемы. Тогда $\{d_1, d_2, …, d_r\}\subseteq\{b^1, b^2, ..., b^k, e^{i1}, e^{i2}, ..., e^{iS}\}$, причём среди $d_1, d_2, …, d_r$ нет вектора b_1. Так как $d_1, d_2, …, d_r$ отвечают несовместной подсистеме, то $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + ... + \lambda_r d_r = \Theta$, где коэффициенты – целые положительные числа. Применив лемму 4.2, мы получим новое множество M_1, которое будет обладать следующими свойствами:

1) M_1 содержится в $\{b^1, b^2, ..., b^k, e^{i1}, e^{i2}, ..., e^{iS}\}$ и не содержит $\{d_1, d_2, \dots, d_r\}$;

2) $b^1 \in M_1$ (b^1 не мог сократиться);

3) M_1 по-прежнему определяет некоторую несовместную подсистему системы (6), так как положительная комбинация векторов из M_1 равна Θ.

Рассмотрим вторую ν-подсистему (собственный индекс которой J_2^A). Если она не содержится в M_1, то ничего делать не надо, а если содержится, то снова применим лемму 4.2 и получим непустое множество $M_3 \subseteq M_2$. И так далее. Не позже, чем через p шагов, у нас будет непустое (благодаря вектору b^1) множество $M_p \subseteq \{b^1, b^2, ..., b^k, e^{i1}, e^{i2}, ..., e^{iS}\}$, определяющее некоторую несовместную подсистему, которая не содержит ни одну из перечисленных выше ν-подсистем (индексы которых содержатся в $\{1_A, 2_A, \dots, k_A\} \cup \{i1_E, i2_E, \dots, iS_E\}$). Но, так как M_p все же содержит какую-то ν-подсистему, то последняя будет содержаться в $\{b^1, b^2, ..., b^k, e^{i1}, e^{i2}, ..., e^{iS}\}$. Противоречие. Утверждение 4.2 доказано.

Замечание 4.2. Вспомним, что все наши рассуждения основывались на предположении, что $b^1 + b^2 + ... + b^q = [1, 1, ..., 1]^T$. Откажемся теперь от этого предположения, то есть будем считать, что у нас есть произвольная матрица A, состоящая из 1 и –1, а мы хотим выделить из неё комитет, если такой существует. Эту общую задачу можно свести к предыдущей, например, следующем образом. Припишем к матрице A дополнительные столбцы так, чтобы вновь получившаяся матрица A_1 обладала свойством $b^1 + b^2 + ... + b^{q1} = [1, 1, ..., 1]^T$. Дальше применяем описанный выше алгоритм с одним изменением: получив все ν-подсистемы системы $(E \mid A_1)^T x > \Theta$, мы рассматриваем только те их объединения, индексы которых содержат номера всех дополнительных столбцов. Так что, если мы найдем подмножество столбцов матрицы A_1, которое можно выбросить из нее, чтобы оставшаяся часть была комитетом, то эта оставшаяся часть будет частью исходной матрицы A.

Замечание 4.3. С помощью описанного алгоритма можно решать задачу целочисленного линейного программирования, возникающую при поиске минимального комитета системы (3). Действительно, найдя индексы $I_1, I_2, \dots, I_q$ всех μ-подсистем системы (3), мы рассмотрим матрицу $A = \{a_{ij}\}$ размера $m \times q$, элементы которой определим следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i \in I_j, \\ -1, \text{ если } i \notin I_j. \end{cases}$$

Продублируем каждый столбец m раз (в соответствии с оценкой числа членов минимального комитета), получим новую матрицу A_1 размера $m \times mq$. Выделив из A_1 минимальный подкомитет, мы тем самым найдём минимальный комитет системы (3).

Заключение

Результаты работы показывают, что сложность задачи нахождения минимального подкомитета для комитетов систем линейных неравенств существенно зависит от размерности пространства. Так, в двумерном случае вопрос о сократимости какого-либо комитета решается довольно просто: всякий не минимальный комитет сократим, причем сократим на два члена. Отсюда вытекает возможность построения минимального комитета над $\mathbb{R}^2$ путем последовательного сокращения на 2 члена произвольного комитета, полученного каким-либо способом. Этот алгоритм можно использовать при нахождении комитета методом проектирования на плоскость [1].

В n-мерном случае иногда удается ответить на вопрос о сократимости комитета, исходя из того алгоритма, в результате работы которого данный комитет был получен [6]. Например, метод проектирования на плоскость дает несократимый комитет, а комитет, полученный при помощи алгоритма из теоремы существования [3], всегда сократим как минимум наполовину, из чего следует очень простой способ построения комитета с числом членов, не превосходящим числа неравенств в системе, что соответствует теореме об оценке количества членов минимального комитета.

В случае произвольной системы включений для нахождения минимального подкомитета можно применять алгоритм из раздела 4, основанный на методе фундаментального свертывания системы линейных неравенств.

Остается открытым вопрос оценки сложности последнего алгоритма [7]. По-видимому, судя по замечанию 4.3, в общем случае задача поиска минимального подкомитета является NP-полной.

Литература

1. Мазуров, Вл.Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации / Вл.Д. Мазуров. – М.: Наука, 1990. – 348 с.

2. Мазуров, Вл.Д Математические методы распознавания образов / Вл.Д. Мазуров. – Свердловск: УрГУ, 1982. – 83 с.

3. Фань Цзи. О системах линейных неравенств / Фань Цзи // Линейные неравенства и смежные вопросы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – С. 214–262.

4. Черников, С.Н. Линейные неравенства / С.Н. Черников. – М.: Наука, 1969. – 488 с.

5. Хачай, М.Ю. Об оценке числа членов минимального комитета системы линейных неравенств / М.Ю. Хачай // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1997. – 37:11. – С. 1399–1404.

6. Плотников, С.В. К задаче построения кусочно-линейной дискриминантной функции / С.В. Плотников // Вестник Уральского института экономики, управления и права. – 2015. – № 1 (30). – С. 66–69.

7. Мазуров, В.Д. Модель экономической динамики в противоречивых условиях / В.Д. Мазуров, Д.В. Гилёв // Научные труды SWorld. – 2012. – Т. 31, № 4. – С. 55–59.

Мазуров Владимир Данилович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математической экономики института математики и компьютерных наук, профессор кафедры эконометрики и статистики высшей школы экономики и менеджмента, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург; vldmazurov@gmail.com.

Гилёв Денис Викторович, аспирант института математики и компьютерных наук, ассистент кафедры эконометрики и статистики высшей школы экономики и менеджмента, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург; deni-gilev@narod.ru.

Поступила в редакцию 15 мая 2016 г.

DOI: 10.14529/ctcr160301

CANCELLABILITY OF COMMITTEE SOLUTION OF LINEAR INEQUALITIES SYSTEM

V.D. Mazurov, *vldmazurov@gmail.com*,
D.V. Gilev, *deni-gilev@narod.ru*
Ural Federal University named after the First President of Russia Boris Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation

The task of discriminating analysis in easy conditions is reduced to a system of linear inequalities. However, this system may be incompatible, and it is not so rare case. Then, a method of committees. The quality of Committee is improved by reducing the number of its members. Here is the method of reducing the number of members of the Committee, if in principle this is possible.

First the particular case of a linear system of inequalities. And the theory of contractility of the Committee. Some examples of committees in space $\mathbb{R}^2$, then the theory is generalized to the space $\mathbb{R}^n$.

The observation is done concerning the relationship between the minimum and irreducible Committee. The algorithm for finding the minimum of the Committee, based on the fundamental collapse of the system of linear inequalities. However, the question remains of assessing the complexity of the presented algorithm.

At the end of the article gives an important sufficient condition is not contractility of the Committee and some Lemma that allows to shorten the algorithm for finding the minimum of the Committee.

Keywords: Committees method contractility, quality, incompatibility.

References

1. Mazurov Vl. D. *Metod komitetov v zadachakh optimizatsii i klassifikatsii* [Committees Method in Problems of Optimization and Classification]. Moscow, Science Publ., 1990. 348 p.

2. Mazurov Vl.D. *Matematicheskie metody raspoznavaniya obrazov* [Mathematical Methods of Pattern Recognition]. Sverdlovsk, Ural State University, 1982. 83 p.

3. Ky Fan. [About Systems of Linear Inequalities]. *Linear Inequality and Related Issues* . Moscow, Publ. House of Foreign. Lit., 1959, pp 214–262. (in Russ.)

4. Chernikov S.N. *Lineynye neravenstva* [Linear Inequalities]. Moscow, Science Publ, 1969. 488 p.

5. Khachai M.Y. [An Estimate of the Number of Minimum Members of the Committee System of Linear Inequalities]. J. of Comp. Math. and Math. Phis., 1997, 37:11, pp. 1399–1404. (in Russ.)

6. Plotnikov S.V. [On the Problem of Constructing a Piecewise Linear Discriminant Function-Term]. *Bulletin of the Ural Institute of Economics, Management and Law*, 2015, no. 1 (30), pp. 66–69. (in Russ.)

7. Mazurov V.D., Giev D.V. [The Model of Economic Dynamics in Contradictory Terms]. *Proceedings SWorld*, 2012, vol. 31, no. 4, pp. 55–59. (in Russ.)

Received 15 May 2016

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Мазуров, Вл.Д. О сократимости комитета системы линейных неравенств / Вл.Д. Мазуров, Д.В. Гилёв // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2016. – Т. 16, № 3. – С. 5–14. DOI: 10.14529/ctcr160301

FOR CITATION

Mazurov V.D., Gilev D.V. Cancellability of Committee Solution of Linear Inequalities System. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2016, vol. 16, no. 3, pp. 5–14. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr160301