УДК 517.948

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ

А.И. Сидикова

ABOUT ONE INVERSE OVERSPECIFIED PROBLEM OF THERMAL DIAGNOSTICS

A.I. Sidikova

Обобщенным методом проекционной регуляризации решена переопределенная обратная смешанная граничная задача для уравнения теплопроводности и получены точные по порядку оценки погрешности этого решения.

Ключевые слова: обратная задача, регуляризация, оценка погрешности, некорректная задача, преобразование Фурье.

The over specified inverse bounded problem for the heat conduction equation was solved by the generalized method of regularizing projection and the error estimate of this solution was obtained.

Keywords: inverse problem, regularization, error estimate, ill-posed problem, Fourier transformation.

Введение

Во многих отраслях техники встречаются процессы, связанные с нагреванием твердых тел потоками жидкости или газа. Особую роль при этом играет информация о температуре на поверхности этих тел.

Как правило, единственным способом определения этой температуры является решение граничных обратных задач для уравнений теплообмена в твердых телах по результатам измерений внутри этих тел. Во многих случаях возникает необходимость использования результатов измерений температуры в большем числе точек, чем это требуется для однозначного определения искомых характеристик. Переход к переопределенным постановкам обратных задач обычно позволяет получить более достоверные данные [1].

1. Постановка обратной задачи

Пусть тепловой процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0<x<1, \quad t>0, \tag{1}$$

решение $u(x,t)$ которого определено и непрерывно в замкнутой полосе $[0,1]\times[0,\infty)$ и удовлетворяет следующим начальному и граничным условиям:

$$u(x,0)=0, \quad 0\le x\le 1; \tag{2}$$

$$u(1,t)=h(t), \quad t\ge 0 \tag{3}$$

и

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-ku(0,t)=0, \quad k>0, \quad t\ge 0, \tag{4}$$

где коэффициент k неизвестен,

$$h(t)\in C^2[0,\infty), \ \ h(0)=h'(0)=0 \tag{5}$$

и существует число $t_0>0$ такое, что для любого $t\ge t_0$

$$h(t)=0. \tag{6}$$

Рассмотрим множество $M_r\subset L_2[0,\infty)$, определяемое формулой

$$M_r=\left\{\begin{matrix} h(t)\ :\ h(t)\in L_2[0,\infty); \\ \int_0^\infty h^2(t)dt+\int_0^\infty [h'(t)]^2 dt\le r^2 \end{matrix}\right\}. \tag{7}$$

В дальнейшем будем предполагать, что искомая функция $h(t)$, используемая в (3), удовлетворяет условию

$$h(t)\in M_r. \tag{8}$$

* Работа поддержана грантом р_ урал_ а № 10–01–96000.

Сидикова Анна Ивановна – старший преподаватель кафедры вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет; 7413604@mail.ru

Sidikova Anna Ivanovna – senior lecturer of the Computational mathematics department of South Ural State University; 7413604@mail.ru

Предположим, что при $f_0(t)$ и $g_0(t)$ существует функция $h_0(t)$, удовлетворяющая условиям, сформулированным выше, такая, что при $h(t)=h_0(t)$ существует решение $u(x,t)$ задачи (1)–(4), удовлетворяющее условиям:

$$u(x_1,t)=f_0(t) \text{ и } u(x_2,t)=g_0(t), \quad 0<x_1<x_2<1,\ t\ge 0, \tag{9}$$

но эти функции нам не известны, а вместо них даны некоторые функции $f_\delta(t)$ и $g_\delta(t)\in L_2[0,\infty)\cap L_1[0,\infty)$ и число $\delta>0$ такие, что

$$\|f_\delta(t)-f_0(t)\|^2_{L_2[0,\infty)}+\|g_\delta(t)-g_0(t)\|^2_{L_2[0,\infty)}\le\delta^2. \tag{10}$$

Требуется, используя исходные данные задачи $x_1, x_2, \delta, r, f_\delta(t)$ и $g_\delta(t)$, определить приближенное значение $h_\delta(t)$ и оценить его уклонение $\|h_\delta-h_0\|_{L_2[0,\infty)}$ от точного значения $h_0(t)$.

2. Сведение задачи (1), (2), (4) и (8)–(10) к задаче вычисления значений неограниченного оператора

Продолжим решение $u(x,t)$ задачи (1)–(4) на отрицательную полуось, положив

$$u(x,t)=0 \quad \text{при } t<0.$$

Введем пространство $\overline{H}=L_2(-\infty,\infty)+iL_2(-\infty,\infty)$ над полем комплексных чисел и оператор F, отображающий пространство $\overline{H}$ в $\overline{H}$ и определяемый формулой

$$F[h(t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i\tau t}dt, \quad -\infty<\tau<\infty. \tag{11}$$

Из теоремы Планшереля [2] следует, что оператор F, определяемый формулой (11), унитарен. Таким образом, (1) сведем к уравнению

$$\frac{\partial^2\hat{u}(x,\tau)}{\partial x^2}=i\tau\hat{u}(x,\tau), \quad x\in(0,1), \quad -\infty<\tau<\infty, \tag{12}$$

где $\hat{u}(x,\tau)=F[u(x,t)]$.

$$\hat{u}(x_1,\tau)=\hat{f}(\tau) \tag{13}$$

и

$$\hat{u}(x_2,\tau)=\hat{g}(\tau), \tag{14}$$

где $\hat{f}(\tau)=F[f(t)]$, а $\hat{g}(\tau)=F[g(t)]$.

Решение уравнения (12) имеет вид

$$\hat{u}(x,\tau)=\begin{cases}A_1(\tau)e^{\mu_0 x\sqrt{\tau}}+B_1(\tau)e^{-\mu_0 x\sqrt{\tau}}, & \tau\ge 0;\\ A_2(\tau)e^{-\bar{\mu}_0 x\sqrt{|\tau|}}+B_2(\tau)e^{\bar{\mu}_0 x\sqrt{|\tau|}}, & \tau<0,\end{cases} \tag{15}$$

где $\mu_0=\dfrac{(1+i)}{\sqrt{2}}$, $\bar{\mu}_0=\dfrac{(1-i)}{\sqrt{2}}$, а $A_1(\tau), A_2(\tau), B_1(\tau)$ и $B_2(\tau)$ – произвольные функции.

Из (12)–(15) следует, что

$$\hat{h}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{\hat{g}(\tau)\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}-\hat{f}(\tau)\operatorname{sh}\mu_0(1-x_2)\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}\mu_0(x_2-x_1)\sqrt{\tau}},\\ \tau\ge 0;\\ \dfrac{\hat{g}(\tau)\operatorname{sh}\overline{\mu_0}(1-x_1)\sqrt{|\tau|}-\hat{f}(\tau)\operatorname{sh}\overline{\mu_0}(1-x_2)\sqrt{|\tau|}}{\operatorname{sh}\overline{\mu_0}(x_2-x_1)\sqrt{|\tau|}},\\ \tau<0,\end{cases} \tag{16}$$

где $\hat{h}(\tau)=F[h(t)]$ и $\hat{h}(\tau)=\hat{u}(1,\tau)=\lim\limits_{x\to 1}\hat{u}(x,\tau)$.

Таким образом, если оператор T, действующий из пространства $\overline{H}\times\overline{H}$ в $\overline{H}$, определим формулой (16), где

$$D(T)=\left\{(\hat{f},\hat{g}) : (\hat{f},\hat{g})\in\overline{H}\times\overline{H},\ T[\hat{f}(\tau),\hat{g}(\tau)]\in\overline{H}\right\} -$$

область определения оператора T, то задача (12)–(14) сведется к задаче вычисления значений неограниченного оператора T

$$\hat{h}(\tau)=T[\hat{f}(\tau),\hat{g}(\tau)], \quad -\infty<\tau<\infty. \tag{17}$$

Теперь покажем, что сужение оператора T на подпространство $L_2[-1,1]\times L_2[-1,1]$, которое обозначим через $\overline{T}^1$ является ограниченным оператором, здесь $L_2[-1,1]$ – комплексное. Так как

$$\left\|T[\hat{f}(\tau),\hat{g}(\tau)]\right\|^2_{L_2[-1,1]}=2\left\|T[\hat{f}(\tau),\hat{g}(\tau)]\right\|^2_{L_2[0,1]},$$

то оценим $\left\|T[\hat{f}(\tau),\hat{g}(\tau)]\right\|^2_{L_2[0,1]}$.

Пусть $\left\|\hat{f}(\tau)\right\|^2_{L_2[0,1]}+\left\|\hat{g}(\tau)\right\|^2_{L_2[0,1]}\le 1$. Тогда

$$\left\|T[\hat{f}(\tau),\hat{g}(\tau)]\right\|^2_{L_2[0,1]}\le$$

$$\le 2\sup_{0\le\tau\le 1}\frac{\left|\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}\right|^2+\left|\operatorname{sh}\mu_0(1-x_2)\sqrt{\tau}\right|^2}{\left|\operatorname{sh}\mu_0(x_2-x_1)\sqrt{\tau}\right|^2}. \tag{18}$$

Так как

$$\frac{\left|\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}\right|^2}{\left|\operatorname{sh}\mu_0(x_2-x_1)\sqrt{\tau}\right|^2}\le$$

$$\le\frac{\operatorname{ch}^2(1-x_1)\sqrt{\tau/2}-\cos^2(1-x_1)\sqrt{\tau/2}}{\operatorname{sh}^2(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}},$$

а

$$\frac{\left|\operatorname{sh}\mu_0(1-x_2)\sqrt{\tau}\right|^2}{\left|\operatorname{sh}\mu_0(x_2-x_1)\sqrt{\tau}\right|^2}\le$$

$$\le\frac{\operatorname{ch}^2(1-x_2)\sqrt{\tau/2}-\cos^2(1-x_2)\sqrt{\tau/2}}{\operatorname{sh}^2(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}},$$

то из (18) следует, что

$$\left\|T[\hat{f}(\tau),\hat{g}(\tau)]\right\|^2_{L_2[0,1]}\le$$

$$\le 2\sup_{0\le\tau\le1}\frac{\text{ch}^2(1-x_1)\sqrt{\tau/2}-\cos^2(1-x_1)\sqrt{\tau/2}}{\text{sh}^2(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}}+$$

$$+2\sup_{0\le\tau\le1}\frac{\text{ch}^2(1-x_2)\sqrt{\tau/2}-\cos^2(1-x_2)\sqrt{\tau/2}}{\text{sh}^2(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}}. \quad (19)$$

Ввиду того, что

$$\lim_{\tau\to0}\frac{\text{ch}^2(1-x_1)\sqrt{\tau/2}-\cos^2(1-x_1)\sqrt{\tau/2}}{\text{sh}^2(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}}=$$

$$=\lim_{\tau\to0}\frac{\text{sh}^2(1-x_1)\sqrt{\tau/2}}{\text{sh}^2(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}}+\lim_{\tau\to0}\frac{\sin^2(1-x_1)\sqrt{\tau/2}}{\text{sh}^2(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}}=$$

$$=2\left[\frac{1-x_1}{x_2-x_1}\right]^2, \quad (20)$$

то из (20) следует

$$2\lim_{\tau\to0}\frac{\text{ch}^2(1-x_1)\sqrt{\tau/2}-\cos^2(1-x_1)\sqrt{\tau/2}}{\text{sh}^2(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}}+$$

$$+2\lim_{\tau\to0}\frac{\text{ch}^2(1-x_2)\sqrt{\tau/2}-\cos^2(1-x_2)\sqrt{\tau/2}}{\text{sh}^2(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}}=$$

$$=4\left[\frac{1-x_1}{x_2-x_1}\right]^2+4\left[\frac{1-x_2}{x_2-x_1}\right]^2.$$

Таким образом, функция $\psi(\tau)$, определяемая формулой

$$\psi(\tau)=\begin{cases}2\dfrac{\text{ch}^2(1-x_1)\sqrt{\tau/2}-\cos^2(1-x_1)\sqrt{\tau/2}}{\text{sh}^2(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}}+\\ \quad+2\dfrac{\text{ch}^2(1-x_2)\sqrt{\tau/2}-\cos^2(1-x_2)\sqrt{\tau/2}}{\text{sh}^2(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}},\\ 0<\tau\le1;\\ 4\left[\dfrac{1-x_1}{x_2-x_1}\right]^2+4\left[\dfrac{1-x_2}{x_2-x_1}\right]^2, \quad \tau=0,\end{cases}$$

непрерывна на отрезке $[0,1]$ и потому существует число $c_1>0$ такое, что для любого $\tau\in[0,1]$

$$|\psi(\tau)|\le c_1. \quad (21)$$

Из (19)–(21) следует, что

$$\left\|\overline{T}^1\right\|\le c_1 \quad (22)$$

и потому сужение оператора T на пространство $L_2[-1,1]\times L_2[-1,1]$ является ограниченным оператором. Теперь разобьем задачу (17) на две. Первая из них имеет вид

$$\hat h^1(\tau)=T^1[\hat f^1(\tau),\hat g^1(\tau)]=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\hat g^1(\tau)\,\text{sh}\,\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}-\hat f^1(\tau)\,\text{sh}\,\mu_0(1-x_2)\sqrt{\tau}}{\text{sh}\,\mu_0(x_2-x_1)\sqrt{\tau}},\\ 0\le\tau\le1;\\ \dfrac{\hat g^1(\tau)\,\text{sh}\,\overline{\mu_0}(1-x_1)\sqrt{|\tau|}-\hat f^1(\tau)\,\text{sh}\,\overline{\mu_0}(1-x_2)\sqrt{|\tau|}}{\text{sh}\,\overline{\mu_0}(x_2-x_1)\sqrt{|\tau|}},\\ -1\le\tau<0,\end{cases} \quad (23)$$

где $\tau\in[-1,1]$, $\hat f^1(\tau)=\hat f(\tau)$ и $\hat g^1(\tau)=\hat g(\tau)$ при $\tau\in[-1,1]$.

Из соотношения (22) следует, что оператор T^1, определяемый формулой (23), ограничен и соответствующая задача

$$\hat h^1(\tau)=T^1[\hat f^1(\tau),\hat g^1(\tau)];\quad \tau\in[-1,1], \quad (24)$$

где $\hat h^1(\tau)=\hat h(\tau)$ при $\tau\in[-1,1]$, корректна.

Вторая задача является задачей вычисления значений неограниченного оператора T^2, определяемого формулой

$$\hat h^2(\tau)=T^2[\hat f^2(\tau),\hat g^2(\tau)]=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\hat g^2(\tau)\,\text{sh}\,\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}-\hat f^2(\tau)\,\text{sh}\,\mu_0(1-x_2)\sqrt{\tau}}{\text{sh}\,\mu_0(x_2-x_1)\sqrt{\tau}},\\ \tau>1;\\ \dfrac{\hat g^2(\tau)\,\text{sh}\,\overline{\mu_0}(1-x_1)\sqrt{|\tau|}-\hat f^2(\tau)\,\text{sh}\,\overline{\mu_0}(1-x_2)\sqrt{|\tau|}}{\text{sh}\,\overline{\mu_0}(x_2-x_1)\sqrt{|\tau|}},\\ \tau<-1.\end{cases} \quad (25)$$

$\hat f^2(\tau)=\hat f(\tau)$, $\hat g^2(\tau)=\hat g(\tau)$ и $\hat h(\tau)=\hat h^2(\tau)$ при $|\tau|>1$.

Обозначим через $\widehat{M}_r$ множество из $\overline{H}$ такое, что $\widehat{M}_r\supset F[M_r]$. Тогда с учетом (7),

$$\widehat{M}_r=\left\{\hat h(\tau):\hat h(\tau)\in\overline{H},\ \int_0^\infty(1+\tau^2)\left|\hat h(\tau)\right|^2d\tau\le r^2\right\}. \quad (26)$$

Из (8) следует, что $\hat h_0(\tau)\in\widehat{M}_r$.

Так как задача (23) корректна, то в ней нет необходимости требовать выполнения условия $\hat h_0^1(\tau)\in\widehat{M}_r$, а для задачи (25) через $\widehat{M}_r^2$ обозначим сужение множества $\widehat{M}_r$, определяемого формулой (26), на пространство

$$\overline{H}^2=H_1\cup H_2,$$

где $H_1=L_2[1,\infty)+iL_2[1,\infty)$;

$$H_2=L_2(-\infty,-1]+iL_2[-1,\infty),$$

то есть

$$\widehat{M}_r^2=\widehat{M}_r\cap\overline{H}^2. \quad (27)$$

Предположим, что точное значение $\hat h_0^2(\tau)$ в задаче (25) принадлежит классу $\widehat{M}_r^2$. Для решения задачи (25) используем семейство операторов [3], определяемое формулой

$$T_\alpha^2[\hat f^2(\tau),\hat g^2(\tau)]=$$

$$
=\begin{cases}\dfrac{\widehat{g}(\tau)\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}-\widehat{f}(\tau)\operatorname{sh}\mu_0(1-x_2)\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}\mu_0(x_2-x_1)\sqrt{\tau}}, \\ 1\le\tau\le\alpha; \\ \dfrac{\widehat{g}(\tau)\operatorname{sh}\overline{\mu_0}(1-x_1)\sqrt{|\tau|}-\widehat{f}(\tau)\operatorname{sh}\overline{\mu_0}(1-x_2)\sqrt{|\tau|}}{\operatorname{sh}\overline{\mu_0}(x_2-x_1)\sqrt{|\tau|}}, \\ -\alpha\le\tau\le-1; \\ 0,\quad |\tau|>\alpha. \end{cases} \qquad (28)
$$

Приближенное значение $\hat{h}_\delta^{2,\alpha}(\tau)$ задачи (25) определим формулой

$$
\hat{h}_\delta^{2,\alpha}(\tau)=T_\alpha^2[\widehat{f}_\delta^{\,2}(\tau);\hat{g}_\delta^{\,2}(\tau)]. \qquad (29)
$$

Для выбора параметра регуляризации $\overline{\alpha}=\overline{\alpha}(\delta)$ в формуле (29) рассмотрим оценку

$$
\left\|\hat{h}_\delta^{2,\alpha}-\hat{h}_0^{2}\right\|\le\left\|\hat{h}_\delta^{2,\alpha}-\hat{h}_0^{2,\alpha}\right\|+\left\|\hat{h}_0^{2,\alpha}-\hat{h}_0^{2}\right\|, \qquad (30)
$$

где $\hat{h}_0^{2,\alpha}(\tau)=T_\alpha^2[\widehat{f}_0^{\,2}(\tau);\hat{g}_0^{\,2}(\tau)]$.

$$
\left\|\widehat{f}_\delta^{\,2}-\widehat{f}_0^{\,2}\right\|^2+\left\|\hat{g}_\delta^{\,2}-\hat{g}_0^{\,2}\right\|^2\le\delta^2. \qquad (31)
$$

Так как из (29) и (31) следует, что

$$
\sup_{\left\|\widehat{f}_\delta^{\,2}-\widehat{f}_0^{\,2}\right\|^2+\left\|\hat{g}_\delta^{\,2}-\hat{g}_0^{\,2}\right\|^2\le\delta^2}\left\|\hat{h}_\delta^{2,\alpha}-\hat{h}_0^{2,\alpha}\right\|=\left\|T_\alpha^2\right\|\delta,
$$

то перейдем к оценке нормы оператора T_α^2, определяемого (28). Так как $\left\|T_\alpha^2\right\|$ при $\tau\in[1,\alpha]$ совпадает с $\left\|T_\alpha^2\right\|$ при $\tau\in[-\alpha,-1]$, то достаточно получить оценку нормы $\left\|T_\alpha^2\right\|$ при $\tau\in[1,\alpha]$.

Лемма 1

Если $\alpha\ge 1$, то справедлива оценка

$$
\left\|T_\alpha^2\right\|\le\frac{4}{e^{(x_2-x_1)}-e^{-(x_2-x_1)}}e^{(1-x_1)\sqrt{\alpha/2}}.
$$

Доказательство

Пусть $\left\|\widehat{f}^{\,2}(\tau)\right\|^2+\left\|\hat{g}^{\,2}(\tau)\right\|^2\le 1.$ Тогда, аналогично (19), получаем

$$
\left\|T_\alpha^2[\widehat{f}^{\,2}(\tau),\hat{g}^{\,2}(\tau)]\right\|\le 2\sup_{1\le\tau\le\alpha}\frac{\operatorname{ch}(1-x_1)\sqrt{\tau/2}}{\operatorname{sh}(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}}. \qquad (32)
$$

Так как при $\tau\in[1,\alpha]$

$$
\operatorname{ch}(1-x_1)\sqrt{\tau/2}\le e^{(1-x_1)\sqrt{\alpha/2}},
$$

а

$$
\operatorname{sh}(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}\ge\frac{e^{(x_2-x_1)}-e^{-(x_2-x_1)}}{2},
$$

то

$$
\sup_{1\le\tau\le\alpha}\frac{\operatorname{ch}(1-x_1)\sqrt{\alpha/2}}{\operatorname{sh}(x_2-x_1)\sqrt{\alpha/2}}\le\frac{2}{e^{(x_2-x_1)}-e^{-(x_2-x_1)}}e^{(1-x_1)\sqrt{\alpha/2}},
$$

следовательно, на основании (32)

$$
\left\|T_\alpha^2\right\|\le\frac{4}{e^{(x_2-x_1)}-e^{-(x_2-x_1)}}e^{(1-x_1)\sqrt{\alpha/2}}.
$$

Тем самым лемма доказана.

Лемма 2

Существует число $\alpha_0>1$ такое, что для любого $\alpha\ge\alpha_0$ справедлива оценка

$$
\left\|T_\alpha^2\right\|\ge\frac{1}{4}e^{(1-x_2)\sqrt{\alpha/2}}.
$$

Доказательство

Пусть $\tau_0\in[1,\alpha]$ и

$$
\frac{\left|\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau_0}\right|}{\left|\operatorname{sh}\mu_0(x_2-x_1)\sqrt{\tau_0}\right|}=\max_{1\le\tau\le\alpha}\frac{\left|\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}\right|}{\left|\operatorname{sh}\mu_0(x_2-x_1)\sqrt{\tau}\right|}. \qquad (33)
$$

Тогда для любого достаточно большого значения n определим функции $\widehat{f}_n(\tau)=0$ и

$$
\hat{g}_n^{\,2}(\tau)=\begin{cases}0, & 1\le\tau\le\tau_0-\dfrac{1}{n}; \\ \sqrt{n}, & \tau_0-\dfrac{1}{n}<\tau\le\tau_0; \\ 0, & \tau_0<\tau\le\alpha.\end{cases}
$$

Таким образом,

$$
\left\|T_\alpha^2[\widehat{f}_n^{\,2},\hat{g}_n^{\,2}]\right\|\ge\frac{\min\limits_{\tau\in[\tau_0-\frac{1}{n},\tau_0]}\left|\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}\right|}{\max\limits_{\tau\in[\tau_0-\frac{1}{n},\tau_0]}\left|\operatorname{sh}\mu_0(x_2-x_1)\sqrt{\tau}\right|}. \qquad (34)
$$

Так как из непрерывности функции $|\operatorname{sh}z|$ следует, что

$$
\frac{\min\limits_{\tau\in[\tau_0-\frac{1}{n},\tau_0]}\left|\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}\right|}{\max\limits_{\tau\in[\tau_0-\frac{1}{n},\tau_0]}\left|\operatorname{sh}\mu_0(x_2-x_1)\sqrt{\tau}\right|}\to\max_{1\le\tau\le\alpha}\frac{\left|\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}\right|}{\left|\operatorname{sh}\mu_0(x_2-x_1)\sqrt{\tau}\right|},
$$

при $n\to\infty$, то из (33) и (34) следует, что

$$
\left\|T_\alpha^2\right\|\ge\max_{1\le\tau\le\alpha}\frac{\operatorname{sh}(1-x_1)\sqrt{\tau/2}}{\operatorname{ch}(x_2-x_1)\sqrt{\tau/2}}\ge
$$

$$
\ge\frac{e^{(1-x_1)\sqrt{\alpha/2}}-e^{-(1-x_1)\sqrt{\alpha/2}}}{2e^{(x_2-x_1)\sqrt{\alpha/2}}}. \qquad (35)
$$

Учитывая, что $\dfrac{e^{-(1-x_1)\sqrt{\alpha/2}}}{2e^{(x_2-x_1)\sqrt{\alpha/2}}}\to 0$ при $\alpha\to\infty$, и на основании (35) получим существование числа $\alpha_0>1$ такого, что для любого $\alpha\ge\alpha_0$

$$
\left\|T_\alpha^2\right\|\ge\frac{1}{4}e^{(1-x_2)\sqrt{\alpha/2}}.
$$

Тем самым лемма доказана.

Пусть

$$
\omega^2(\alpha)=\sup\left\{\int_\alpha^\infty\left|\hat{h}_0^{2}(\tau)\right|^2 d\tau\ :\ \hat{h}_0^{2}(\tau)\in\widehat{M}_r^{\,2}\right\}, \qquad (36)
$$

тогда

$$\sup\left\{\left\|\hat{h}_0^{2,\alpha}-\hat{h}_0^2\right\| \;:\; \hat{h}_0^2\in\widehat{M}_r^2\right\}=\omega(\alpha). \qquad (37)$$

Из (26) и (27) следует, что при условии $\hat{h}_0^2(\tau)\in\widehat{M}_r^2$

$$\int_1^{\infty}(1+\tau^2)\left|\hat{h}_0^2(\tau)\right|^2 d\tau\le r^2. \qquad (38)$$

Из (36) и (38) следует, что

$$\omega^2(\alpha)=\frac{r^2}{1+\alpha^2}. \qquad (39)$$

Таким образом, из (30), (37), (39) и леммы 1 следует, что

$$\left\|\hat{h}_\delta^{2,\alpha}-\hat{h}_0^2\right\|\le\frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}}+c_2e^{(1-x_2)\sqrt{\alpha/2}}, \qquad (40)$$

где $c_2=\dfrac{4}{e^{(x_2-x_1)}-e^{-(x_2-x_1)}}$.

Параметр регуляризации $\bar{\alpha}=\bar{\alpha}(\delta)$ в формуле (29) выберем из условия

$$\sqrt{1+\alpha^2}\,e^{(1-x_1)\sqrt{\alpha/2}}=\frac{r}{c_2\delta}. \qquad (41)$$

Тогда из (40) и (41) следует, что

$$\left\|\hat{h}_\delta^{2,\bar{\alpha}(\delta)}-\hat{h}_0^2\right\|\le\frac{2r}{\sqrt{1+\bar{\alpha}^2(\delta)}}. \qquad (42)$$

Из теоремы, сформулированной в [3], леммы 2 следует, что оценка (42) является точной по порядку.

Пусть $\dfrac{r}{c_2\delta}>\sqrt{2}e^{\frac{1-x_1}{\sqrt{2}}}$. Тогда, ввиду того, что функция $\sqrt{1+\alpha^2}e^{(1-x_1)\sqrt{\alpha/2}}$, строго возрастая по α, изменяется от $\sqrt{2}e^{\frac{(1-x_1)}{\sqrt{2}}}$ до ∞, существует единственное решение $\bar{\alpha}(\delta)$ уравнения (41).

Для упрощения оценки (42) рассмотрим два уравнения:

$$e^{(1-x_1)\sqrt{\alpha/2}}=\frac{r}{c_2\delta} \qquad (43)$$

и

$$e^{2(1-x_1)\sqrt{\alpha/2}}=\frac{r}{c_2\delta}. \qquad (44)$$

Решение уравнений (43) и (44) обозначим через $\bar{\alpha}_1(\delta)$ и $\bar{\alpha}_2(\delta)$. Тогда из (41), (43) и (44) следует, что при достаточно малых значениях δ справедливы соотношения

$$\bar{\alpha}_2(\delta)\le\bar{\alpha}(\delta)\le\bar{\alpha}_1(\delta). \qquad (45)$$

Из (43) и (44) следует, что

$$\bar{\alpha}_1(\delta)=\frac{2}{(1-x_1)^2}\ln^2\frac{r}{c_2\delta}$$

и

$$\bar{\alpha}_2(\delta)=\frac{1}{2(1-x_1)^2}\ln^2\frac{r}{c_2\delta},$$

а из (45), что

$$\bar{\alpha}(\delta)\sim\ln^2\delta \text{ при } \delta\to 0. \qquad (46)$$

Из (42) и (46) следует существование числа $c_3>0$ такого, что при достаточно малых значениях δ справедливо неравенство

$$\left\|\hat{h}_\delta^{2,\bar{\alpha}(\delta)}-\hat{h}_0^2\right\|\le c_3\ln^{-2}\delta. \qquad (47)$$

Из леммы 2 и (46) следует, что оценка (47) является точной по порядку, то есть существует число $c_4>0$ такое, что при достаточно малых значениях δ

$$\sup\left\{\left\|\hat{h}_\delta^{2,\bar{\alpha}(\delta)}-\hat{h}_0^2\right\| \;:\; \hat{h}_0^2\in\widehat{M}_r,\ \left\|\hat{f}_\delta^2-\hat{f}_0^2\right\|^2+\left\|\hat{g}_\delta^2-\hat{g}_0^2\right\|^2\le\delta^2\right\}\ge c_4\ln^{-2}\delta.$$

Далее решение задачи (23) обозначим через $\hat{h}_\delta^1(\tau)$:

$$\hat{h}_\delta^1(\tau)=T^1[\hat{f}_\delta^1(\tau),\hat{g}_\delta^1(\tau)]. \qquad (48)$$

Из (22) и (48) следует, что

$$\left\|\hat{h}_\delta^1(\tau)-\hat{h}_0^1(\tau)\right\|\le c_1\delta, \qquad (49)$$

где $\hat{h}_0^1(\tau)=T^1[\hat{f}_0^1(\tau),\hat{g}_0^1(\tau)]$. Решение задачи (17) определим формулой

$$\hat{h}_\delta(\tau)=\hat{h}_\delta^1(\tau)+\hat{h}_\delta^{2,\bar{\alpha}(\delta)}(\tau). \qquad (50)$$

Тогда из соотношений (47), (49) и (50) следует существование числа $c_5>0$ такого, что

$$\left\|\hat{h}_\delta(\tau)-\hat{h}_0(\tau)\right\|\le c_5\ln^{-2}\delta. \qquad (51)$$

Теперь рассмотрим

$$\bar{h}_\delta(t)=F^{-1}[\hat{h}_\delta(\tau)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_\delta(\tau)e^{i\tau t}d\tau. \qquad (52)$$

Окончательно решение $h_\delta(t)$ обратной задачи (1), (2), (4), (9) определим формулой

$$h_\delta(t)=\begin{cases}\operatorname{Re}[\bar{h}_\delta(\tau)], & 0\le t<\infty;\\ 0, & t<0.\end{cases} \qquad (53)$$

Из (52) и (53) следует, что

$$\left\|h_\delta(t)-h_0(t)\right\|\le c_5\ln^{-2}\delta.$$

Заключение

Предложенный обобщенный метод проекционной регуляризации не связан технически со спектральной функцией оператора задачи и потому допускает постановку и решение некорректно поставленных задач в различных пространствах. Этот факт оказывается очень важным при решении переопределенных обратных задач тепловой диагностики, так как такие задачи принципиально невозможно погрузить в одно пространство.

Литература

1. Алифанов, О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988.

2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972.

3. Танана, В.П. Об оптимальности по порядку одного метода вычисления значений неограниченного оператора и его приложения / В.П. Танана, А. И. Сидикова // Сиб. журн. индустр. матем. – 2009 – Т. 12, № 3(39). – С. 125–135.

Поступила в редакцию 10 августа 2010 г.