

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ

Г.А. Сокол, А.В. Кутышкин, А.А. Петров

Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск, Россия

Представлены результаты построения неоклассических производственных функций типа CES-функция и VES-функция, описывающих функционирование региональной экономической системы Ханты-Мансийского автономного округа – ЮГРА. Производственные функции являются важным элементом достаточно большого количества моделей регионального развития и позволяют не только в явном функциональном виде описывать поведение экономики региона, но и проводить количественный анализ ее эффективности, используя сопутствующий расчетно-аналитический аппарат. Неоклассические производственные функции типа CES-функция чаще всего используются для описания функционирования различных экономических систем, в том числе и экономической системы региона. Применение же неоклассических производственных функций типа VES-функция для решения указанной задачи встречается крайне редко. Производственные функции обоих типов были представлены в классической двухфакторной форме, однако с учетом современных тенденций в данной области в качестве факторов затрат рассматриваемой экономической системы использовались экономические показатели, отличные от канонических. Для построения производственных функций использовались статистические данные, характеризующие социально-экономическое состояние Ханты-Мансийского автономного округа – ЮГРА, опубликованные в открытой печати.

*Ключевые слова:* региональная экономическая система, региональное развитие, валовой региональный продукт, производственная функция, переменная эластичность замещения труда капиталом.

### Введение

В настоящее время для управления региональным развитием разработано достаточно много типов моделей [1] для описания, оценки и прогнозирования функционирования региональной экономической системы. Важным элементом большого количества этих моделей являются производственные функции. Построение производственных функций (ПФ) для региональной экономической системы сопряжено с рядом сложностей, среди которых можно отметить [2]:

1. Сложность обоснования выбора непосредственно вида производственной функции для описания региональной экономической системы, поскольку, например, не всегда на основании ретроспективных статистических данных выполняются требования о постоянстве значений эластичности замещения фактора труда фактором капитала.

2. Достаточно ограниченные по «длине» временные ряды экономических показателей, характеризующих функционирование рассматриваемой региональной экономической системы.

3. Не всегда имеется достоверная информация относительно реально используемых в выпуске валового регионального продукта части основных производственных фондов региональной экономической системы, что может привести к ошибкам в оценках затрат фактора капитала при построении производственной функции, описывающей функционирование данной системы.

4. Зачастую в региональной экономической системе поддерживается избыточная занятость экономически активного населения региона, что обусловлено необходимостью снижения социальной напряженности. Это также может стать источником ошибочных оценок затрат фактора труда при анализе функционирования данной системы.

5. Наметившаяся вариативность в выборе экономических показателей в качестве факторов производственных функций может привести к возникновению проблем, связанных с мультиколлинеарностью включаемых в структуру производственных функций факторов.

Следует также отметить, что и сами производственные функции имеют ряд недостатков, среди которых можно отметить следующие:

- При прогнозировании величины валового регионального продукта (ВРП) на заданный временной интервал необходимо обосновывать то, что условия функционирования рассматриваемой экономической системы в этот интервал времени будут идентичны или мало отличаться от тех условий, для которых были собраны статистические данные, использованные при построении производственной функции.

- Ограничены вид и структура производственных функций, для которых накоплен положительный опыт их применения для моделирования функционирования экономических систем, в том числе и регионального уровня.

- Производственные функции, структура которых модифицирована за счет введения дополнительных факторов, не всегда обладают свойствами неоклассических производственных функций. Это требует дополнительного теоретического обоснования возможности их использования для моделирования экономических систем.

Однако, несмотря на указанные сложности, связанные с построением производственных функций, и их слабые стороны, данный инструмент позволяет получать не только количественные оценки принимаемых управленческих решений, например, связанных с инвестициями в региональную производственную систему в целом, так и оценивать их эффективность, опираясь на такие известные показатели, как те же показатели эластичности факторов затрат производства и т. п.

Вследствие этого решение задачи построения производственных функций для региональной экономики, по мнению авторов, по-прежнему является достаточно актуальным как с практической, так и научной с точки зрения. Это подтверждают периодически публикуемые по данной проблематике работы таких отечественных авторов, как А.А. Афанасьева и О.С. Пономаревой [3], В.К. Горбунова и А.Г. Львова [4], И.Л. Кирилюка [5], С.А. Москальцова и А.Г. Львова [6], П.А. Канапухина и О.В. Масленникова [7], М.И. Гребнева [8], А.Н. Петрова [9] и ряда других.

В данной статье представлены результаты построения неоклассических производственных функций типа CES-функция и VES-функция для экономики Ханты-Мансийского автономного округа – Югра (ХМАО – Югра).

### 1. Основные типы неоклассических двухфакторных производственных функций

В общем случае неоклассическая двухфакторная производственная функция имеет следующий вид [10–12]:

$$Y = f(K, L),$$

где  $Y$  – агрегированный показатель объема выпуска конечной продукции рассматриваемой экономической системой;  $K$  – агрегированный фактор затрат капитала;  $L$  – агрегированный фактор затрат труда.

Данные функции делятся на два типа/класса в зависимости от характера изменения величины эластичность замещения фактора затрат труда фактором затрат капитала  $\sigma$ . Если указанная величина постоянна, то рассматриваемая неоклассическая производственная функция относится к типу функций с постоянной эластичностью замещения фактора затрат труда фактором затрат капитала – CES-функция (Constant Elasticity Substitution Production Function) [10–12]. В противном случае, т. е. когда величина  $\sigma$  является переменной, такие производственные функции относятся к типу функций с переменной эластичностью замещения фактора затрат труда фактором затрат капитала – VES – функция (Variable Elasticity Substitution Production Function) [10, 13, 14].

Для описания функционирования региональной экономики чаще всего используются ПФ типа CES-функция [10–12]:

$$Y = f(K, L) = A \left( bK^{-\rho} + (1-b)L^{-\rho} \right)^{-\frac{\delta}{\rho}}, \quad A > 0, \rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}, \sigma < 1, \delta > 0, 0 \leq b \leq 1, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – эластичность замещения фактора затрат труда фактором затрат капитала;  $\sigma = \text{const}$ ;  $\delta$  – показатель однородности производственной функции;  $A$ ,  $b$  – постоянные, значения которых определяются методами математической статистики на основе ретроспективных данных о функционировании рассматриваемой экономической системы.

Частным случаем CES-функции при  $\sigma = 1$  и  $\delta = 1$  является ПФ Кобба – Дугласа [10–12]:

$$Y = f(K, L) = AK^\alpha L^\beta, \quad A > 0, \alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (2)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – эластичности конечного продукта  $Y$  по факторам затрат производства  $K$  и  $L$  соответственно;  $A$  – постоянная, значения которой определяется методами математической статистики.

Следует отметить, что значения  $\alpha$  и  $\beta$  также определяются методами математической статистики при построении ПФ Кобба – Дугласа (2), так как непосредственное вычисление этих переменных по статистическим данным, характеризующим функционирование рассматриваемой экономической системы, не всегда обеспечивает выполнение условий (2).

Для учета влияния научно-технического прогресса на величину  $Y$  в зависимости (1) и (2) достаточно часто вводят дополнительный множитель  $\exp(\lambda t)$  [10–12], в котором постоянная  $\lambda$  учитывает вклад научно-технического прогресса в изменения значений  $Y$ . Постоянную  $\lambda$  часто называют также темпом автономного технического прогресса. Оценка значений  $\lambda$  также осуществляется методами математической статистики при построении ПФ. В данной работе влияние научно-технического прогресса на функционирование региональной экономической системы не рассматривалось.

Крайне редко для региональной экономики строятся ПФ типа VES – функция. На сегодняшний день чаще всего для моделирования функционирования экономических систем используется производственная функция Реванкара [13, 14]:

$$Y = f(K, L) = AK^{\alpha(1-\delta p)} [L + (p-1)K]^{\alpha \delta p}, \quad 1 - \delta p \neq 1, 0 < 1 - \delta p < \alpha^{-1}. \quad (3)$$

Дополнительным ограничением для данной производственной функции является выражение [13, 14]

$$\frac{L}{K} > \frac{1-p}{1-\delta p}. \quad (4)$$

Для этой функции эластичность замещения фактора затрат труда фактором затрат капитала  $\sigma$  определяется зависимостью

$$\sigma = 1 + \left( \frac{p-1}{1-\delta p} \right) \frac{K}{L}, \quad K > 0, L > 0. \quad (5)$$

В работе [14] представлена модификация функции Реванкара, которая получила название обобщенной производственной функции Реванкара:

$$Y = f(K, L) = \begin{cases} K^{\alpha v} [L^p + (v-1)K]^{\frac{1-\alpha v}{p}}, & -\infty < p < 1, p \neq 0, 0 < v < \alpha^{-1}; \\ K^\alpha L^{(1-\alpha)}, & p = 0, (1+\alpha)^{-1} < v < \alpha^{-1}. \end{cases} \quad (6a)$$

$$Y = f(K, L) = \begin{cases} K^{\alpha v} [L^p + (v-1)K]^{\frac{1-\alpha v}{p}}, & -\infty < p < 1, p \neq 0, 0 < v < \alpha^{-1}; \\ K^\alpha L^{(1-\alpha)}, & p = 0, (1+\alpha)^{-1} < v < \alpha^{-1}. \end{cases} \quad (6b)$$

Для зависимостей (3) и (6)  $0 < \alpha < 1$ .

Для данной производственной функции эластичность замещения фактора затрат труда фактором затрат капитала  $\sigma$  определяется зависимостью

$$\sigma = \frac{\alpha v L^p + (v-1)K^p}{\alpha v L^p + (1-p)(v-1)K^p}. \quad (7)$$

Ограничения в (6б) таковы, что они переводят выражение (6а) в функцию Кобба – Дугласа. Следует отметить, что отличия между зависимостями (3) и (6) несущественны. Основные отличия заключаются в смягчении ограничений, присутствующих в (3), что в целом в некоторой степени упрощает построение производственной функции. Построение производственных функций (3), (6) и определение значений величин  $\alpha$ ,  $v$ ,  $p$  также осуществляется методами регрессионного анализа с учетом ограничений, соответствующих указанным функциям.

При построении производственной функции после выбора ее типа и соответствующей структуры зависимости следует этап идентификации значений постоянных, присутствующих в этой зависимости. Поскольку приведенные выше зависимости являются результатом решения базовых дифференциальных уравнений теории производственных функций [10, 11], то на этапе идентификации значений постоянных в зависимостях (1)–(4) мониторинг выполнения ключевых свойств неоклассических производственных функций можно не осуществлять.

## 2. Подготовка и обработка исходных статистических данных

В качестве исходных данных для построения производственных функций (1)–(4), описывающих функционирование экономической системы ХМАО – Югра, использовались статистические данные, характеризующие его социально-экономическое состояние за период с 2001 по 2014 гг., опубликованные в статистических справочниках «Регионы России. Социально-экономические показатели» и «Статистический ежегодник». На момент подготовки данной статьи статистические данные о социально-экономическом состоянии ХМАО – Югра за 2015 и 2016 г. в указанных выше справочниках не опубликованы.

В качестве агрегированного показателя объема выпуска конечной продукции  $Y$  рассматриваемой экономической системы был принят индекс физического объема регионального валового продукта (ВРП)  $I_Y$ .

Для оценки фактора затрат капитала  $K$  в настоящее время различными авторами предлагается использовать следующие величины:

- стоимость основных производственных фондов [2, 3, 12, 15, 16];
- стоимость основных производственных фондов с учетом загрузки производственных мощностей [2, 5, 12, 16];
- инвестиции в основной капитал [2, 4–9, 12].

Затраты фактора труда  $L$  в настоящее время также предлагается оценивать несколькими величинами, такими как:

- среднегодовая численность занятых в экономике региона [2, 3, 5, 7, 9, 12, 15, 16];
- затраты на оплату труда работников, занятых в экономике региона [2, 4, 8, 11];
- фактически отработанное время в секторах экономики региона [6].

Авторы данной статьи в качестве оценок указанных факторов затрат рассматриваемой региональной экономической системы использовали следующие пары параметров:

1. Индекс физического объема стоимости основных производственных фондов  $I_K$  ( $K \rightarrow I_K$ ) и индекс затрат на оплату труда работников, занятых в экономике региона  $I_L$  ( $L \rightarrow I_L$ ).

2. Индекс физического объема инвестиций в основной капитал  $I_{In}$  ( $K \rightarrow I_{In}$ ) и индекс затрат на оплату труда работников занятых в экономике региона  $I_L$  ( $L \rightarrow I_L$ ).

Все перечисленные индексы определялись в базисной форме относительно 2001 г.

В табл. 1 представлены исходные статистические данные, характеризующие функционирование экономики ХМАО – Югра в период с 2001 по 2014 гг. [17–19].

Таблица 1

Статистические данные, характеризующие функционирование региональной экономики ХМАО – Югра с 2000 по 2014 г.

Год	Индекс физического объема валового регионального продукта*	Стоимости ОПФ в ценах текущего года, млн руб.	Объём поступивших основных фондов, в ценах текущего года, млн руб.	Объём выбывших основных фондов, в ценах текущего года, млн руб.	Индекс физического объема инвестиций в основной капитал по отношению к предыдущему году	Среднегодовая численность занятых в экономике, тыс. чел.	Среднемесячная номинальная начисленная зарплата, руб.
1	2	3	4	5	6	7	8
2001	1,0000	1 300 411	108 291	6434	1,261	868,7	12 589,8
2002	1,0250	1 765 170	119 769	16 281	0,877	878,0	14 634,3
2003	1,1193	1 969 088	124 735	19 964	0,982	879,8	17 209,3
2004	1,2077	2 203 663	139 841	19 209	1,021	873,5	19 660
2005	1,3575	2 903 606	190 079	17 720	0,965	877,1	22 828,5
2006	1,4484	3 346 899	212 011	18 869	1,248	879,4	26 826,3
2007	1,4948	4 007 371	328 902	27 389	1,075	880,6	32 227,9
2008	1,5381	4 852 290	432 688	36 465	1,071	890,4	37 412
2009	1,4643	5 423 503	438 788	35 933	0,957	897,4	38 386,6

Окончание табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8
2010	1,5082	6 382 571	495 727	45 007	1,088	897,6	41 315
2011	1,5218	6 888 515	629 365	54 261	1,172	903,6	45 498
2012	1,4929	7 953 296	609 972	49 196	1,054	912,2	50 841
2013	1,4929	8 618 035	860 359	52 584	1,013	916,1	54 508
2014	1,4735	9 546 182	696 634	58 668	0,956	917,2	57 976

\* Индексы  $I_Y$  представлены в виде базисного индекса относительно 2001 г.

В табл. 2 представлены значения базисных индексов  $I_Y, I_K, I_{In}, I_L$ , рассчитанных по данным табл. 1.

Таблица 2

**Значения факторных переменных производственных функций  
в индексном представлении**

Год	$I_Y$	$I_K$	$I_{In}$	$I_L$
2001	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2002	1,0250	1,0682	0,8770	1,0024
2003	1,1193	1,1336	0,8612	1,0343
2004	1,2077	1,1988	0,8793	1,0694
2005	1,3575	1,2762	0,8485	1,1356
2006	1,4484	1,3551	1,0590	1,1989
2007	1,4948	1,4614	1,1384	1,3355
2008	1,5381	1,5798	1,2192	1,4122
2009	1,4643	1,6974	1,1668	1,3276
2010	1,5082	1,8308	1,2695	1,3258
2011	1,5218	1,9896	1,4878	1,3958
2012	1,4929	2,1444	1,5681	1,5025
2013	1,4929	2,3554	1,5885	1,5233
2014	1,4735	2,5115	1,5186	1,4992

**3. Идентификация производственных функций для экономической системы ХМАО – Югра**

Поскольку на все постоянные, приведенные в зависимостях (1)–(3), (6) накладываются определенные ограничения, то для построения всех перечисленных производственных функций целесообразно использовать метод наименьших квадратов с ограничениями [20]. Идентификация значений постоянных выражений (1)–(3), (6) осуществлялась в среде MATLAB™.

Так как выполнение «жестких» ограничений вида « $\Rightarrow$ » при решении оптимизационных задач затруднено, то данные ограничения были заменены на «мягкие» ограничения следующего вида:

• для (1):

$$A > 0 \rightarrow A > \Delta;$$

$$\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma} \rightarrow \frac{1-\sigma}{\sigma} - \rho \leq \Delta;$$

$$\delta = 1 \rightarrow 1 - \delta \leq \Delta;$$

$$b \geq 0 \rightarrow b \geq \Delta;$$

$$b \leq 1 \rightarrow 1 - b \geq \Delta;$$

• для (2):

$$A > 0 \rightarrow A > \Delta;$$

$$\alpha > 0 \rightarrow \alpha > \Delta;$$

$$\beta > 0 \rightarrow \beta > \Delta;$$

$$\alpha + \beta = 1 \rightarrow 1 - \alpha - \beta \leq \Delta;$$

- для (3):
  - $A > 0 \rightarrow A > \Delta$ ;
  - $\alpha > 0 \rightarrow \alpha > \Delta$ ;
  - $\alpha < 1 \rightarrow 1 - \alpha > \Delta$ ;
  - $\delta = 1 \rightarrow 1 - \delta \leq \Delta$ ;
  - $1 - \delta\rho < \frac{1}{\alpha} \rightarrow \frac{1}{\alpha} - 1 + \delta\rho > \Delta$ ;
  - $1 - \delta\rho > 0 \rightarrow 1 - \delta\rho > \Delta$ ;
  - $1 - \delta\rho \neq 1 \rightarrow \delta\rho \geq \Delta$ ;
  - $\frac{L}{K} > \frac{1-\rho}{1-\delta\rho} \rightarrow \frac{L}{K} - \frac{1-\rho}{1-\delta\rho} > \Delta$ ;
- для (6а):
  - $\alpha > 0 \rightarrow \alpha > \Delta$ ;
  - $\alpha < 1 \rightarrow 1 - \alpha > \Delta$ ;
  - $p < 1 \rightarrow 1 - p > \Delta$ ;
  - $p \neq 0 \rightarrow p \geq \Delta$ ;
  - $v > 0 \rightarrow v > \Delta$ ;
  - $v < \frac{1}{\alpha} \rightarrow \frac{1}{\alpha} - v > \Delta$ .

Величина  $\Delta$  принималось равной значению параметра TolFun модуля пакета Optimization Toolbox 2.2 MATLAB™, который обеспечивает прекращение итераций поиска экстремума функции при достижении точности по ее значению:  $\Delta = \text{TolFun} = 0,005$ .

Полученные значения постоянных в выражениях производственных функций (1)–(4) представлены в табл. 3.

Таблица 3

Расчетные значения постоянных в выражениях производственных функций

Обозначение производственной функции	Общий вид идентифицируемой производственной функции	Параметры идентифицированной производственной функции
ПФ1	$A(I_K)^\alpha (I_L)^\beta$	$A = 1,094; \alpha = 0,218; \beta = 0,782$
ПФ2	$A(I_{In})^\alpha (I_L)^\beta$	$A = 1,105; \alpha = 0,499; \beta = 0,501$
ПФ3	$A(bI_K^{-\rho} + (1-b)I_L^{-\rho})^{-\frac{\delta}{\rho}}$	$A = 0,683; b = 0,278; \rho = 0,715; \delta = 1$
ПФ4	$A(bI_{In}^{-\rho} + (1-b)I_L^{-\rho})^{-\frac{\delta}{\rho}}$	$A = 1,095; b = 0,006; \rho = 0,431; \delta = 1$
ПФ5	$AI_K^{\alpha(1-\delta\rho)} [I_L + (p-1)I_K]^{\alpha\delta\rho}$	$A = 1,294; \alpha = 0,826; p = 0,993; \delta = 1$
ПФ6	$AI_{In}^{\alpha(1-\delta\rho)} [I_L + (p-1)I_{In}]^{\alpha\delta\rho}$	$A = 1,117; \alpha = 0,889; p = 0,994; \delta = 1$
ПФ7	$I_K^{\alpha v} [I_L^p + (v-1)I_K]^{\frac{1-\alpha v}{p}}$	$\alpha = 4,39 \cdot 10^{-6}; p = -1,017; v = 0,907$
ПФ8	$I_K^{\alpha v} [I_L^p + (v-1)I_{In}]^{\frac{1-\alpha v}{p}}$	$\alpha = 0,0231; p = -3,841; v = 0,831$

Значения критериев  $R^2$ , Фишера и Дарбина – Уотсона для идентифицированных производственных функций (см. табл. 3) приведены в табл. 4. Производственные функции в табл. 4 объединены в две группы в зависимости от использования индексов  $I_K$  и  $I_{In}$  в качестве оценки фактора затрат капитала при идентификации производственной функции.

Таблица 4

Значения статистических критериев, характеризующих точность и адекватность  
идентифицированных производственных функций

Обозначение производственной функции	Расчетные значения критерия $R^2$	Расчетное значение критерия Дарбина – Уотсона, $DW$	Расчетное значение критерия Фишера, $F_{расч}$
$I_Y = f(I_K, I_L)$			
ПФ1	0,2058	0,1485	1,4195
ПФ3	0,7458	0,4238	16,14
ПФ5	0,7874	0,412	20,3754
ПФ7	0,7846	0,524	20,0421
$I_Y = f(I_m, I_L)$			
ПФ2	0,3331	0,2801	2,7479
ПФ4	0,732	0,418	17,3483
ПФ6	0,7768	0,4232	19,1520
ПФ8	0,8540	1,02	32,1809

Значения коэффициента детерминации  $R^2$ , за исключением функций ПФ1 и ПФ2, позволяют сделать вывод о том, что идентифицированные производственные функции в целом достаточно точно описывают исходные данные, характеризующие функционирование рассматриваемой региональной экономической системы. Следует отметить возрастание значения коэффициента детерминации  $R^2$  в каждой из выделенных групп ПФ табл. 4, что говорит о «повышении» точности описания исходных статистических данных идентифицированными производственными функциями.

Расчетные значения критерия Фишера  $F_{расч}$ , также за исключением функций ПФ1 и ПФ2, превосходят его табличные (теоретические) значения для уровня значимости  $\alpha = 5\%$ ,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 11 - F(0,05; 2; 11) = 3,98$  [21]. Это говорит о том, что построенные модели значимы, кроме указанных исключений.

Таким образом, данные табл. 4 позволяют сделать вывод, что, за исключением функций ПФ1 и ПФ2, найденная оценка построенных моделей статистически надежна (коэффициент детерминации статистически значим).

Для оценки наличия автокорреляции остатков построенных регрессионных моделей использовался критерий Дарбина – Уотсона ( $DW$ ). Табличные (теоретические) значения критерия Дарбина – Уотсона при 5% уровне значимости для 14 наблюдений и 2 независимых переменных ( $K, L$ ) равны [21]: нижнее –  $Dl = du(0,05; 2; 14) = 0,91$ ; верхнее –  $Du = du(0,05; 2; 14) = 1,55$ . Данные табл. 4 показывают, что существует положительная автокорреляция остатков, так как верно следующее неравенство:  $0 < DW < Du$ . Обсуждение наличия автокорреляция остатков построенных регрессионных моделей приводится в заключительном разделе статьи.

Эластичности замещения фактора затрат труда фактором затрат капитала  $\sigma$  для построенных производственных CES-функций имеют следующие расчетные значения: ПФ3 –  $\sigma_{ПФ3} = 0,5828$ ; ПФ4 –  $\sigma_{ПФ4} = 0,6986$ .

Значения эластичности замещения фактора затрат труда фактором затрат капитала  $\sigma$  для построенных производственных VES-функций представлены в табл. 5.

Расчетные значения  $\sigma_{ПФ7}$  (табл. 5), приведенные с точностью до 5-го знака, показывают, что данная обобщенная производственная VES-функция (6а) фактически перешла в форму CES-функции. Такая возможность предопределяется самой ее структурой (6а). По сути, обобщенная производственная VES-функция и VES-функция Реванкара (3) представляют собой комбинацию модифицированной CES-функции и функции Кобба – Дугласа (2). Различия же между значениями  $\sigma_{ПФ3}$  и  $\sigma_{ПФ7}$ , по мнению авторов, обусловлены различиями в структуре функций ПФ3 и ПФ7. В функции ПФ3 присутствует сомножитель «А», который принято называть полнофакторной производительностью (TFP – Total Factory Productivity) [12]. Этот сомножитель характеризует влияние на выпуск рассматриваемой экономической системой конечного продукта факторов затрат производства данной системы. Следует отметить, что структура величины «А» являются са-

## Управление в социально-экономических системах

мостоятельным объектом исследований. В структуре же обобщенной производственной VES-функции (6а) присутствует отдельный множитель, включающий только фактор затрат капитала, что и снижает значение  $\sigma_{ПФ7}$ .

Таблица 5

Эластичность замещения фактора затрат труда фактором затрат капитала для производственных функций типа VES-функция

Год	$\sigma_{ПФ5}$	$\sigma_{ПФ6}$	$\sigma_{ПФ7}$	$\sigma_{ПФ8}$
2001	0,4705	0,5850	0,495820	0,1873
2002	0,4357	0,6369	0,495819	0,1951
2003	0,4197	0,6544	0,495819	0,1971
2004	0,4064	0,6588	0,495818	0,1976
2005	0,4049	0,6899	0,495818	0,2004
2006	0,4015	0,6334	0,495818	0,1947
2007	0,4205	0,6462	0,495819	0,1962
2008	0,4076	0,6417	0,495818	0,1957
2009	0,3229	0,6352	0,495817	0,1949
2010	0,2688	0,6026	0,495815	0,1904
2011	0,2452	0,5576	0,495815	0,1819
2012	0,2442	0,5669	0,495815	0,1838
2013	0,1812	0,5672	0,495814	0,1839
2014	0,1129	0,5796	0,495812	0,1863

Для оценки расхождения между величиной  $I_Y$  (см. табл. 2) и ее расчетными значениями, полученными с помощью идентифицированных производственных функций (см. табл. 3), предлагается использовать:

- относительную ошибку

$$\varepsilon_{ПФJ,i} = \frac{I_{Y,i} - ПФJ_i}{I_{Y,i}}, \quad (8)$$

где  $I_{Y,i}$  – значение индекса физического объема валового регионального продукта в  $i$ -м году рассматриваемого временного периода;  $ПФJ_i$  – расчетное значение величины  $I_{Y,i}$ , полученное с помощью производственной функции  $ПФJ_i$  ( $J = 1, \dots, 8$ ).

- среднеквадратическое отклонение  $S_{\varepsilon_{ПФJ}}$  относительной ошибки  $\varepsilon_{ПФJ,i}$ .

В табл. 6 совместно приведены значения  $I_{Y,i}$ ,  $ПФ1_i$ ,  $ПФ3_i$ ,  $ПФ5_i$ ,  $ПФ7_i$  и соответствующие значения  $\varepsilon_{ПФ1,i}$ ,  $\varepsilon_{ПФ3,i}$ ,  $\varepsilon_{ПФ5,i}$ ,  $\varepsilon_{ПФ7,i}$  и  $S_{\varepsilon_{ПФ1}}$ ,  $S_{\varepsilon_{ПФ3}}$ ,  $S_{\varepsilon_{ПФ5}}$ ,  $S_{\varepsilon_{ПФ7}}$ .

Таблица 6

Значения индекса физического объема ВРП ХМАО – Югра, рассчитанные с помощью производственных функций, включающих индекс физического объема основных производственных фондов (ПФ1, ПФ3, ПФ5, ПФ7)

Год	$I_{Y,i}$	$ПФ1_i$	$\varepsilon_{ПФ1,i}$	$ПФ3_i$	$\varepsilon_{ПФ3,i}$	$ПФ5_i$	$\varepsilon_{ПФ5,i}$	$ПФ7_i$	$\varepsilon_{ПФ7,i}$
2001	1,0000	1,0938	0,0939	1,0392	0,0392	1,1231	0,1231	1,1008	0,1008
2002	1,0250	1,1118	0,0847	1,0972	0,0704	1,1257	0,0982	1,0965	0,0698
2003	1,1193	1,1542	0,0313	1,1520	0,0292	1,1554	0,0323	1,1284	0,0082
2004	1,2077	1,1993	0,0069	1,2006	0,0059	1,1879	0,0165	1,1643	0,0359
2005	1,3575	1,2742	0,0613	1,2616	0,0706	1,2483	0,0804	1,2361	0,0894
2006	1,4484	1,3470	0,0700	1,3194	0,0891	1,3056	0,0986	1,3043	0,0995
2007	1,4948	1,4898	0,0033	1,4197	0,0502	1,4272	0,0452	1,4571	0,0252
2008	1,5381	1,5830	0,0292	1,5084	0,0193	1,4948	0,0281	1,5378	0,0002
2009	1,4643	1,5323	0,0465	1,4348	0,0202	1,4212	0,0295	1,4295	0,0238
2010	1,5082	1,5562	0,0318	1,4332	0,0498	1,4199	0,0586	1,4193	0,0589
2011	1,5218	1,6497	0,0841	1,4951	0,0176	1,4818	0,0263	1,4910	0,0203



Окончание табл. 6

Год	$I_{Y,i}$	$ПФ1_i$	$\varepsilon_{ПФ1,i}$	$ПФ3_i$	$\varepsilon_{ПФ3,i}$	$ПФ5_i$	$\varepsilon_{ПФ5,i}$	$ПФ7_i$	$\varepsilon_{ПФ7,i}$
2012	1,4929	1,7763	0,1899	1,5884	0,0640	1,5748	0,0549	1,6047	0,0749
2013	1,4929	1,8327	0,2276	1,6065	0,0761	1,5931	0,0671	1,6183	0,0840
2014	1,4735	1,8356	0,2458	1,5856	0,0761	1,5725	0,0672	1,5850	0,0757
Среднее значение относительной ошибки $\varepsilon_{ПФ}$			0,0862		0,0484		0,0590		0,0548
Среднеквадратическое отклонение $S_{\varepsilon_{ПФ}}$			0,0790		0,0267		0,0321		0,0348

Табл. 7 имеет структуру, аналогичную табл. 6.

Таблица 7

Значения индекса физического объема ВРП ХМАО – Югра, рассчитанные с помощью производственных функций, включающих индекс физического объема инвестиций (ПФ2, ПФ4, ПФ6, ПФ8)

Год	$I_{Y,i}$	$ПФ2_i$	$\varepsilon_{ПФ2,i}$	$ПФ4_i$	$\varepsilon_{ПФ4,i}$	$ПФ6_i$	$\varepsilon_{ПФ6,i}$	$ПФ8_i$	$\varepsilon_{ПФ8,i}$
2001	1,0000	1,1056	0,1056	1,0959	0,0959	1,1116	0,1116	1,0483	0,0483
2002	1,0250	1,0367	0,0114	1,0984	0,0716	1,1130	0,0858	1,0880	0,0615
2003	1,1193	1,0436	0,0677	1,1317	0,0111	1,1440	0,0221	1,1464	0,0242
2004	1,2077	1,0722	0,1122	1,1684	0,0326	1,1784	0,0243	1,1929	0,0123
2005	1,3575	1,0854	0,2004	1,2373	0,0885	1,2421	0,0850	1,3595	0,0015
2006	1,4484	1,2458	0,1399	1,3033	0,1002	1,3051	0,0990	1,2969	0,1046
2007	1,4948	1,3633	0,0880	1,4449	0,0334	1,4360	0,0393	1,4644	0,0203
2008	1,5381	1,4508	0,0568	1,5241	0,0091	1,5093	0,0188	1,5405	0,0015
2009	1,4643	1,3761	0,0602	1,4368	0,0188	1,4288	0,0242	1,4386	0,0176
2010	1,5082	1,4343	0,0490	1,4350	0,0486	1,4280	0,0532	1,4020	0,0704
2011	1,5218	1,5932	0,0469	1,5074	0,0094	1,4959	0,0170	1,4489	0,0479
2012	1,4929	1,6970	0,1367	1,6173	0,0833	1,5968	0,0696	1,5641	0,0477
2013	1,4929	1,7198	0,1520	1,6387	0,0977	1,6165	0,0828	1,5860	0,0624
2014	1,4735	1,6682	0,1322	1,6139	0,0953	1,5934	0,0814	1,5681	0,0642
Среднее значение относительной ошибки $\varepsilon_{ПФ}$			0,0971		0,0568		0,0582		0,0417
Среднеквадратическое отклонение $S_{\varepsilon_{ПФ}}$			0,0517		0,0369		0,0334		0,0300

**Выводы и заключение**

Представленные в табл. 6 и 7 результаты оценки ВРП региональной экономической системы ХМАО – Югра, полученные с использованием построенных производственных функций типа CES- и VES-функция позволяют сделать ряд выводов.

Более точное приближение расчетных значений ВРП к его фактическим значениям было получено при использовании в производственных функциях в качестве фактора затрат капитала для рассматриваемой экономической системы значений индекса физического объема инвестиций в основные производственные фонды/основной капитал. Это не противоречит выдвинутому в работе [12] и использованному в ряде работ, в том числе [2, 8], предложению о целесообразности замены стоимости основных производственных фондов, как правило используемой при построении производственных функций в качестве фактора затрат капитала, на значения величины инвестиций в основной капитал.

Значения  $\varepsilon_{ПФ}$  и  $S_{\varepsilon_{ПФ}}$  (табл. 7) показывают, что обобщенная VES-функция дает наиболее точную аппроксимацию исходных статистических данных ВРП рассматриваемой экономической системы, что позволяет сделать вывод о целесообразности использования данной функции при

построении моделей функционирования экономической системы ХМАО – Югра, основанных на аппарате теории экономического роста.

Наибольшие расхождения между исходными статистическими данными и расчетными значениями ВРП ХМАО – Югра были получены при использовании построенных авторами производственных функций Кобба – Дугласа (табл. 6, 7). Это обусловлено тем, что при построении указанного типа функций авторы учитывали необходимость выполнения условий  $\alpha + \beta = 1$ , что является отличительной особенностью данного типа ПФ. Вместе с тем, в ряде работ, посвященных проблематике построения производственных функций для региональных экономических систем, например [2, 8, 9], данное ограничение не учитывается. Это позволяет повысить «точность» построенных производственных функций, однако, такие ПФ следует уже относить к более широкой группе мультипликационно-степенных производственных функций. Задача исследования и построения подобного типа ПФ авторами в данной работе не ставилась.

Как отмечалось выше, сравнение расчетных и соответствующих табличных значений критерия Дарбина – Уотсона показывает наличие автокорреляции остатков, характеризующих расхождение между расчетными и исходными статистическими данными о ВРП, т. е. в ряде остатков присутствует тренд. Подобная ситуация в рамках анализа и построения моделей временных рядов указывает на то, что необходимо было выделить и «удалить» тренд, присутствующий в исходных данных. «Удаление» тренда базируется на выборе наиболее подходящего вида тренда (структуры функции, характеризующей тренд – устойчивую тенденцию изменения рассматриваемых данных). Однако выбор «наилучшего» вида тренда с точки зрения максимально возможного «точного описания» присутствующей в исходных данных тенденции при решении поставленных в статье задач практически невозможен, так как структура выбранных производственных функций строго регламентирована. Это и объясняет наличие автокорреляции остатков для всех построенных моделей.

Результаты проведенных исследований по построению производственных функций, описывающих функционирование региональной экономической системы Ханты-Мансийского автономного округа – ЮГРА, по мнению авторов, показывают, что использование рассмотренных ПФ типа VES-функция представляет интерес и достаточно актуально, так как последние позволяют учесть изменения такого значимого показателя, как эластичность замещения факторов затрат производства, в частности фактора затрат труда фактором затрат капитала. Учет изменения данного показателя дает возможность в большей степени адаптировать теоретические модели аппарата производственных функций для описания функционирования региональных экономических систем.

### Литература

1. Сравнительный анализ моделей регионального развития / А.Г. Атаева, Д.В. Исламова, Э.Р. Мустафин, В.В. Орешников // *Управление экономическими системами: электронный научный журнал*. – 2011. – № 34. – С. 55.

2. Гафарова, Е.А. Моделирование регионального развития на основе производственных функций / Е.А. Гафарова // *Интернет-журнал «Наукоедение»*. – 2014. – № 3. – <http://naukovedenie.ru/PDF/39evn313.pdf>.

3. Афанасьев, А.А. Производственные функции народного хозяйства России в 1990–2012 гг. / А.А. Афанасьев, О.С. Пономарева // *Экономика и математические методы*. – 2014. – Т. 50, № 4. – С. 21–33.

4. Горбунов, В.К. Построение производственных функций по данным об инвестициях / В.К. Горбунов, А.Г. Львов // *Экономика и математические методы*. – 2012. – Т. 48, № 2. – С. 95–107.

5. Кирилюк, И.Л. Модели производственных функций для российской экономики / И.Л. Кирилюк // *Компьютерные исследования и моделирование*. – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 293–312.

6. Москальонов, С.А. Анализ инновационного потенциала Российской экономики: метод производственных функций / С.А. Москальонов, А.Г. Львов // *XII Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества: в 4 кн. / отв. ред. Е. Г. Ясин; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики»*. – М.: Издат. дом Высшей школы экономики, 2012. – Кн. 4. – С. 417–428. – <http://regconf.hse.ru/uploads/1f6fbb694ee62b0c1f14d4e0452049061d81b7b4.pdf>.

7. Канапухин, П.А. Моделирование результатов функционирования производственного потенциала региона на основе агрегированных производственных функций / П.А. Канапухин, О.В. Масленников // Вестник ВГУ. Экономика и управление. – 2013. – № 3. – С. 143–146.
8. Гребнев, М.И. Построение производственных функций регионов России / М.И. Гребнев // ВУЗ. XXI век. – 2015. – № 2. – С. 50–56.
9. Петров, А.И. Производственная функция экономики региона / А.И. Петров // Экономический анализ: теория и практика. – 2011. – Т. 19, № 226. – С. 53–60.
10. Экономико-математическое моделирование: учеб. для студентов вузов / под общ. ред. И.Н. Дрогобыцкого. – М.: Изд-во «Экзамен», 2004. – 800 с.
11. Arrow, K.J. Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency / K.J. Arrow, H.B. Chenery, B.S. Minhas, R.M. Solow // The Review of Economics and Statistics. – 1961. – Vol. 43, no. 3. – P. 225–250.
12. Бессонов, В.А. Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике / В.А. Бессонов. – М.: Институт переходной экономики, 2002. – 89 с.
13. Revankar, N.S. A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions / N.S. Revankar // Econometrica. – 1971, Vol. 39, no. 1. – P. 61–71. DOI: 10.2307/1909140
14. Alcalá, L.A. A Generalized Variable Elasticity of Substitution Production Function with an Application to the Neoclassical Growth Model / L.A. Alcalá // Conference: XLVIII Reunion Anual Asociacion Argentina de Economia Politica, At Rosario, Santa Fe, Argentina, Noviembre de 2013. – P. 1–14.
15. Клейнер, Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение: моногр. / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
16. Воскобойников, И.В. Оценка совокупной факторной производительности российской экономики в период 1961–2001 гг. с учетом корректировки динамики основных фондов / И.В. Воскобойников. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2003. – 40 с.
17. Регионы России Социально-экономические показатели 2010 // Статистический сборник. – М.: Федеральная служба государственной статистики (Росстат), 2010. – 996 с.
18. Регионы России Социально-экономические показатели 2015 // Статистический сборник. – М.: Федеральная служба государственной статистики (Росстат), 2015. – 1266 с.
19. Статистический ежегодник (1990–2013): статистический сборник 25014.2. В 4 ч. Ч. 2(2): Ханты-Мансийский автономный округ – Югра / Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Тюменской области. – Тюмень, 2014. – 452 с.
20. Кетков, Ю.Л. МАТЛАВ 6.x.: программирование численных методов. / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 672 с.
21. Тихомиров, Н.П. Эконометрика: учеб. / Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. – М.: Изд-во Рос. экон. акад., 2002. – 640 с.

**Сокол Глеб Андреевич**, аспирант, Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск; sokolgleb@gmail.com.

**Кутышкин Андрей Валентинович**, д-р техн. наук, профессор, Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск; avk\_200761@mail.ru.

**Петров Алексей Аверьянович**, канд. физ.-мат. наук, доцент, Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск; averpetrov@mail.ru.

Поступила в редакцию 4 июля 2017 г.

ON THE USE OF PRODUCTION FUNCTION  
FOR SIMULATION FUNCTIONING OF REGIONAL ECONOMY

G.A. Sokol, sokogleb@gmail.com,

A.V. Kutyshkin, avk\_200761@mail.ru,

A.A. Petrov, averpetrov@mail.ru

Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russian Federation

The article presents the results of the construction of the neoclassical CES and the VES production function, describing the functions-conditioning system of regional economic Khanty-Mansiysk Autonomous Area – Yugra. Production functions are an important element of a sufficiently large number of regional development models and make it possible not only in the explicit functional form to describe the behavior of economic region, but also to carry out a quantitative analysis of its effectiveness, is-using collateral settlement and analytical apparatus. Neoclassical production functions such as CES-function is most often used to describe the functioning of various economic systems, including the regional economic system. The use of the neoclassical production functions such as VES - function to solve this problem meets is extremely rare. The production of both types of functions have been presented in the form of a classic two-factor, but given the current trends in this area as the cost factors considered economic system used by the economic indicators that are different from the canonical-ray. To construct production functions used statistical-parameter data describing the socio-economic condition of the Khanty-Mansiysk Autonomous Area – Yugra, published in the public press-minute.

*Keywords: regional economic system, regional development, the gross regional product, production function, variable elasticity of substitution of capital for labor.*

## References

1. Ataeva A.G., Islamova D.V., Mustafin E.R., Oreshnikov V.V. [Comparative Analysis of Regional Development Models]. *Management of Economic System. Scientific Electronic Journal*, 2011, no. 34, p. 55. (in Russ.)
2. Gafarova E.A. [Simulation of Regional Development on the Basis of Production Functions]. *Scientific Open Access Journal "Naukovedenie"*, 2014, no 3. Available at: <http://naukovedenie.ru/PDF/39evn313.pdf>. (in Russ.)
3. Afanas'ev A.A., Ponomareva O.S. [The Aggregate Production Function of the Russian Economy in 1990–2012]. *Economics and the Mathematical Methods*, 2014, vol. 50, no 4, pp. 21–33. (in Russ.)
4. Gorbunov V.K., Lvov A.G. [The Construction of Production Functions using Investment Data]. *Economics and the Mathematical Methods*, 2012, vol. 48, no 2, pp. 95–107. (in Russ.)
5. Kirilyuk I.L. [Models of Production Functions for the Russian Economy]. *Computer Research and Modeling*, 2013, no 2, pp. 293–312. (in Russ.)
6. Moskalonov S.A., Lvov A.G. [Analysis of the Innovation Potential of the Russian Economy: The Method of Production Functions]. *XII Mezhdunarodnaya nauchnaya konferenciya po problemam razvitiya ekonomiki i obshchestva* [XII International Scientific Conference on Problems of Development of Economy and Society]. Moscow, 2012, vol. 4, pp. 417–428.
7. Kanapukhin P.A., Maslennikov O.V. [Estimation of Gross Regional Product Dynamics on Basis of Aggregate Production Functions]. *Bulletin of Voronezh State University. Series: Economics and Management*, 2013, no. 3, pp.143–146. (in Russ.)
8. Grebnev M.I. [Construction Production Function of Russian Regions]. *VUZ. XXI Century*, 2015, no. 2, pp. 50–56. (in Russ.)
9. Petrov A.I. [The Production Function of the Regional Economy]. *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2011, vol.19, no. 226, pp. 53–60. (in Russ.)
10. *Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie: uchebnik dlya studentov vuzov* [Economic-Mathematical Modeling: A Textbook for University Students]. Moscow, Ekzamen Publ., 2004. 800 p.

11. Arrow K.J., Chenery H.B., Minhas B.S., Solow R.M. [Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency]. *The Review of Economics and Statistics*, 1961, vol. 43, no 3, pp. 225–250. (in Russ.)
12. Bessonov V.A. *Problemy postroeniya proizvodstvennykh funktsiy v rossiyskoy perekhodnoy ekonomike* [Problems of Building Production Functions in the Russian Economy in Transition]. Moscow, Publ. of Institute of Transition Economics, 2002. 89 p.
13. Revankar N.S. A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions. *Econometrica*, 1971, vol. 39, no 1, pp. 61–71. DOI: 10.2307/1909140
14. Alcalá L.A. A Generalized Variable Elasticity of Substitution Production Function with an Application to the Neoclassical Growth Model. *Conference: XLVIII Reunion Anual Asociacion Argentina de Economia Politica*, At Rosario, Santa Fe, Argentina, Noviembre de 2013, pp. 1–14.
15. Kleyner G.B. *Proizvodstvennye funktsii: teoriya, metody, primeneniye* [Production Functions: Theory, Methods, Applications]. Moscow, Publ. Finance and Statistics, 1986. 239 p.
16. Voskoboynikov I.V. *Otsenka sovokupnoy faktornoy proizvoditel'nosti rossiyskoy ekonomiki v period 1961–2001 gg. s uchetom korrektyrovki dinamiki osnovnykh fondov* [Estimation of Total Factor Productivity of the Russian Economy in the Period 1961–2001 Taking into Account the Dynamics of Adjustment of Fixed Assets]. Moscow, HSE Publishing House, 2003. 40 p.
17. *Regiony Rossii Sotsialno-ekonomicheskie pokazateli 2010. Statisticheskiy sbornik* [Regions of Russian Socio-Economic Indicators 2010. Statistical Yearbook]. Moscow, Publ. of Federalnaya sluzhba gosudarstvennoy statistiki (Rosstat), 2010. 996 p.
18. *Regiony Rossii Sotsialno-ekonomicheskie pokazateli 2010. Statisticheskiy sbornik* [Regions of Russian Socio-Economic Indicators 2010. Statistical Yearbook]. Moscow, Publ. of Federalnaya sluzhba gosudarstvennoy statistiki (Rosstat), 2015. 1266 p.
19. *Statisticheskiy ezhegodnik (1990-2013): statisticheskiy sbornik 25014.2: v 4 chastyakh. Ch. 2(2): Khanty-Mansiyskiy avtonomnyy okrug – Yugra. Territorialnyy organ Federalnoy sluzhby gosudarstvennoy statistiki po Tyumenskoy oblasti.* [Statistical Yearbook (1990–2013): Statistical Yearbook 25014.2: in 4 parts. Part 2(2) Khanty-Mansi Autonomous Okrug. Territorial Organ of Federal State Statistics Service in the Tyumen Region]. Tyumen, 2014. 452 p.
20. Ketkov Yu.L., Ketkov A.Yu., Shulcz M.M. *MATLAB 6.kh.: programmirovaniye chislennykh metodov* [MATLAB 6.x.: Programming of Numerical Methods]. St. Petersburg, BHV-Petersburg Publ., 2004. 672 p.
21. Tixomirov N.P., Doroxina E.Yu. *Ekonometrika: uchebnik* [Econometrics: Textbook]. Moscow, Ros. ekon. akad. Publ., 2002. 640 p.

Received 4 July 2017

---

#### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Сокол, Г.А. Об использовании производственных функций для моделирования функционирования региональной экономики / Г.А. Сокол, А.В. Кутышкин, А.А. Петров // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2017. – Т. 17, № 4. – С. 85–97. DOI: 10.14529/ctcr170410

#### FOR CITATION

Sokol G.A., Kutyskin A.V., Petrov A.A. On the Use of Production Function for Simulation Functioning of Regional Economy. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 85–97. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr170410

---