Математика

УДК 519.216.73, 517.982.4 **DOI: 10.14529/mmph160201**

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ФОРМЕ ИТО В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬФАНДА–ШИЛОВА

В.А. Бовкун
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация
E-mail: 123456m@inbox.ru

Работа посвящена исследованию стохастической задачи Коши в форме Ито для систем дифференциальных уравнений с оператором $A(i\partial/\partial x)$, являющимся генератором R–полугруппы в гильбертовом пространстве $L_2^m(\mathbb{R})$. Для классов систем, корректных по Петровскому, условно–корректных и некорректных, определяемых поведением дифференциального оператора $A(i\partial/\partial x)$, построено обобщенное по пространственной переменной решение задачи в соответствующих пространствах Гельфанда–Шилова.

Ключевые слова: стохастическая задача Коши; винеровский процесс; обобщенное преобразование Фурье; обобщенное решение; пространства Гельфанда–Шилова.

Введение

Одним из современных направлений исследований в математике является изучение задач с учетом воздействия случайных факторов. Учет случайностей приводит к созданию математических моделей в форме стохастических задач. Среди них важное место занимают модели с дифференциальными уравнениями, содержащими неоднородности типа белого шума в бесконечномерных пространствах.

Отправной точкой в данной тематике стало изучение задачи Коши для абстрактного стохастического уравнения первого порядка в гильбертовых пространствах $H, \mathbb{H}$:

$$v'(t) = Av(t) + B\mathbb{W}(t), \quad t \in [0;\tau), \tau \le \infty, v(0) = \zeta, \tag{1}$$

где оператор A порождает полугруппу класса C_0 в H, $\mathbb{W}(t)$ – $\mathbb{H}$-значный стохастический процесс типа белого шума. Следуя теории стохастических дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах, от дифференциальной задачи (1) с нерегулярным белым шумом, применяя конструкцию интеграла Ито в бесконечномерном случае, осуществляют переход к интегральной задаче:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t Av(s)ds + BW(t), \quad t \in [0;\tau), \tau \le \infty, \tag{2}$$

с непрерывной «первообразной» по t от белого шума – винеровским процессом $W(t)$, который определяется аксиоматически. Результаты многочисленных авторов по исследованию интегральной задачи (2) упорядочены и приведены в монографии [1]. В теории стохастических задач уравнение (2) принято кратко записывать в форме дифференциалов:

$$dv(t) = Av(t)dt + BdW(t), \quad t \in [0;\tau), \tau \le \infty, v(0) = \zeta. \tag{3}$$

Как показано в [1], даже в случае оператора A – генератора полугруппы класса C_0 для интегральной задачи (3) удается построить только слабое решение:

$$\langle v(t), y\rangle = \langle \zeta, y\rangle + \int_0^t \langle v(s), A^* y\rangle ds + \langle BW(t), y\rangle, \quad t \in [0;\tau), y \in D\left(A^*\right). \tag{4}$$

Однако в современных приложениях возникают стохастические задачи, в которых оператор A не порождает семейство, обладающее свойствами, характерными для полугруппы класса C_0. Первые шаги в исследовании таких задач были сделаны И.В. Мельниковой, А.И. Филинковым, М.А. Альшанским и У.А. Алексеевой [2–7]. В работе [2] рассматривается слабое проинтегрированное решение задачи Коши с оператором A – генератором интегрированной полугруппы операторов. Кроме того, в данной работе рассматривается построение обобщенных по переменной t решений задачи Коши. В более поздней работе [6] развивается идея построения обобщенных по переменной t решений исходной дифференциальной задачи в пространствах ультрараспределений, когда оператор A является генератором конволюционной полугруппы, а также вводится принципиально новый подход к построению решения задачи Коши (1) – определение обобщенного по случайной переменной решения.

Настоящая работа посвящена исследованию стохастической задачи Коши для систем дифференциальных уравнений Гельфанда–Шилова порядка m в форме Ито, то есть в интегральной форме с интегралом Ито (2):

$$X(t,x)-\xi(x)=\int_0^t A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)X(s,x)ds+\int_0^t BdW(s,x), \quad t\in[0;T],\, x\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

где оператор $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – линейный дифференциальный оператор-матрица конечного порядка p в пространстве $L_2^m(\mathbb{R}):=L_2(\mathbb{R})\times\ldots\times L_2(\mathbb{R})$, $\xi\in L_2^m$, $W(t,x)$ – Q-винеровский процесс $W(t,x)=W(t,x,\omega),\,\omega\in\Omega$.

Результаты исследования задачи Коши для детерминированных систем с оператором $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ показывают, что в общем случае оператор $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ в пространстве $L_2^m(\mathbb{R})$ порождает некорректную задачу [8]. Решение задачи для различных классов систем определяется в обобщенном смысле в пространствах обобщенных функций Гельфанда–Шилова. В соответствии с результатами исследования для детерминированных задач в рассматриваемом случае стохастической задачи (5) определению подлежит обобщенный по переменной x случайный процесс $\{X(t),t\in[0;T]\}$, $X(t)=(X_1(t),\ldots,X_m(t))$, $X_i(t)=X_i(t,x,\omega)$, $x\in\mathbb{R},\omega\in\Omega$, принадлежащий пространству обобщенных функций Ψ', определяемому классом системы.

Постановка задачи

Основным объектом исследования в данной работе является стохастическая задача Коши в форме Ито для систем дифференциальных уравнений Гельфанда–Шилова порядка m:

$$X(t,x)-\xi(x)=\int_0^t A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)X(s,x)ds+\int_0^t BdW(s,x), \quad t\in[0;T],\, x\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

которую, как правило, будем записывать кратко в форме дифференциалов следующим образом

$$dX(t,x)=A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)X(t,x)dt+BdW(t,x), \quad X(0,x)=\xi(x), \quad t\in[0;T],\, x\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

В задачах (6) и (7) оператор $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – линейный дифференциальный оператор–матрица конечного порядка p в пространстве L_2^m, $\xi\in L_2^m$, $W(t,x)$ – Q–винеровский процесс, который определяется аксиоматически [1, 3].

Определению подлежит обобщенный по переменной x случайный процесс

$$\{X(t),t\in[0;T]\}, \quad X(t)=(X_1(t),\ldots,X_m(t)), \quad X_i(t)=X_i(t,x,\omega), \quad x\in\mathbb{R},\omega\in\Omega,$$

принадлежащий пространству обобщенных функций Ψ', определяемому классом системы.

Построение обобщенного решения $\{X(t),t\in[0;T]\}$ объясняется тем, что задача (7) является некорректной. Некорректность в данном случае возникает вследствие свойств оператора $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и свойств нерегулярности стохастической неоднородности $W(t,x)$. Оператор $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ в пространстве $L_2^m(\mathbb{R})$ порождает некорректную однородную (детерминированную) задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t), \quad t\in[0;T],\, x\in\mathbb{R}, \quad u(x,0)=f(x), \tag{8}$$

решение которой с помощью техники обобщенного преобразования Фурье [8] определяется семейством операторов $\{U(t), t\in[0;T]\}$:

$$u(x,t) = \big(U(t)f\big)(x) = \big(G(\cdot,t) * f(\cdot)\big)(x), \tag{9}$$

где равенство понимается в обобщенном смысле, то есть на основных функциях ψ. Функция $G(x,t) = (\mathcal{F}^{-1}\{e^{tA(\sigma)}\})(x)$ — является функцией Грина задачи (8), матричная экспонента $e^{tA(\sigma)}$ определяется как формальный ряд по степеням матрицы $A(\sigma)$ — образа Фурье матрицы $A\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$.

Из вида решения (9) однородной задачи (8) следует, что свойства операторов решения $\{U(t), t\in[0;T]\}$ определяются поведением оператора–матрицы $e^{tA(s)}$ на промежутке $t\in[0;T]$. В свою очередь, свойства этого оператора определяются функцией $\Lambda(s) = \max\limits_j \operatorname{Re}\lambda_j(s),\ s=\sigma+i\tau$, где $\lambda_j(s)$ — собственные значения матрицы $A(s)$; это следует из оценок [8]:

$$e^{t\Lambda(s)} \le \left\|e^{tA(s)}\right\|_m \le C(1+|s|)^{p(m-1)}e^{t\Lambda(s)}, \quad t\in[0;T].$$

На основании поведения функции $\Lambda(\cdot)$ выделяются следующие классы систем [8]:

- *Системы, корректные по Петровскому:* $\Lambda(\sigma)\le C_1,\ C_1>0$. Отсюда для матричного оператора следует оценка

$$\left\|e^{tA(\sigma)}\right\|_m \le C_2(1+|\sigma|)^h, \qquad t\in[0;T], \sigma\in\mathbb{R}, \tag{10}$$

где $C_2 = Ce^{TC_1}$, $h\le p(m-1)$ – наименьшее из натуральных чисел l, для которых справедливо неравенство $\left\|e^{tA(\sigma)}\right\|_m \le C_2(1+|\sigma|)^l$.

- *Условно–корректные системы:* $\Lambda(\sigma)\le C|\sigma|^h + C_1, h\in(0;1), C_1>0.$ Тогда для оператора $e^{tA(\sigma)}$ справедливо соотношение

$$\left\|e^{tA(\sigma)}\right\|_m \le C_2 e^{a_1|\sigma|^h}, \quad t\in[0;T], \sigma\in\mathbb{R}, \tag{11}$$

где $a_1 = CT$.

- *Некорректные системы:* $\Lambda(\sigma)\le C|\sigma|^{p_0} + C_1, C_1>0.$ В этом случае справедлива оценка

$$\left\|e^{tA(\sigma)}\right\|_m \le C_2 e^{b_1|\sigma|^{p_0}}, \quad t\in[0;T], \sigma\in\mathbb{R}, \tag{12}$$

где $b_1 = CT$.

Из классификации следует, что даже в случае систем, корректных по Петровскому, оператор $e^{tA(\sigma)}$, $t\in[0;T]$ имеет в общем случае степенной рост по σ, что приводит к некорректности однородной детерминированной задачи в пространстве L_2^m и, как следствие, рассматриваемой неоднородной стохастической задачи.

В теории абстрактных стохастических уравнений с оператором A – генератором полугруппы $\{U(t), t\ge 0\}$ класса C_0, решение задачи Коши представимо в виде суммы решения однородной задачи и стохастической свертки операторов решения однородной задачи $\{U(t), t\ge 0\}$ с неоднородностью [1], то есть в виде

$$X(t) = U(t)\xi + \int_0^t U(t-s)BdW(s), \quad t\in[0;T], T<\tau. \tag{13}$$

Если оператор A не порождает полугруппу класса C_0 в пространстве L_2^m, а является генератором некоторой регуляризованной полугруппы, то операторы решения однородной задачи $\{U(t), t\ge 0\}$ неограничены в L_2^m, но, как будет показано далее, могут быть определены в пространстве обобщенных функций Ψ', которое зависит от поведения оператора A.

Как доказано в [7], в рассматриваемой задаче (7) оператор $A = A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ в общем случае порождает R–полугруппу в пространстве L_2^m:

$$S(t)f = \left(\mathcal{F}^{-1}\{e^{tA(\sigma)}\tilde{K}(\sigma)\}\right) * f, \quad f \in L_2^m, t \in [0;T],$$

где функция $\tilde{K}(\cdot)$, определяющая R–полугруппу, выбирается бесконечно дифференцируемой и убывающей, с учетом роста матричной экспоненты $e^{tA(\sigma)}$. При этом оператор R определяется следующим образом

$$\left(Rf\right)(x) := \left(\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{K}(\sigma)\tilde{f}(\sigma)\}\right)(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{K}(\sigma)\} * f\right)(x), \quad f \in L_2^m. \tag{14}$$

В этом случае операторы $\{U(t), t \in [0;T]\}$ определяются в пространстве обобщенных функций Ψ', соответствующем классу системы, через R–полугруппу $\{S(t), t \in [0;T]\}$ следующим образом:

$$\langle \psi, U(t)\xi \rangle = \langle \psi, R^{-1}S(t)\xi \rangle = \langle \left(R^{-1}\right)^* \psi, S(t)\xi \rangle, \quad \psi \in \Psi,$$

где пространство Ψ основных функций определяется регуляризующим оператором R. Тогда и обобщенное решение задачи (7) будем искать в форме:

$$\langle \psi, X(t) \rangle := \langle \left(R^{-1}\right)^* \psi, S(t)\xi \rangle + \langle \left(R^{-1}\right)^* \psi, \int_0^t S(t-s)BdW(s) \rangle, \quad \psi \in \Psi, \tag{15}$$

обобщающей равенство (13). Далее покажем, что процесс $\{X(t), t \in [0;T]\}$, определяемый формулой (15), дает решение следующей обобщенной задачи

$$\langle \psi, X(t) \rangle - \langle \psi, \xi \rangle = \int_0^t \langle A^*\psi, X(s) \rangle ds + \langle \psi, \int_0^t BdW(s) \rangle, \quad t \in [0;T], \psi \in \Psi. \tag{16}$$

Докажем теорему о свертывателе в паре пространств и на основании этой теоремы определим основные пространства Ψ для каждого класса систем (10)–(12).

Основные результаты

Теорема 1. Пусть оператор $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ задает систему, корректную по Петровскому, условно–корректную или некорректную. Тогда обобщенное решение задачи Коши (16) существует и представимо в виде

$$\langle \psi, X(t) \rangle := \langle \left(R^{-1}\right)^* \psi, S(t)\xi \rangle + \langle \left(R^{-1}\right)^* \psi, \int_0^t S(t-s)BdW(s) \rangle, \quad \psi \in \Psi,$$

где R–полугруппа операторов $S(t)$ и пространство Ψ определяются классом системы.

Доказательство. В качестве пространства Ψ выберем пространство основных функций ψ, удовлетворяющих условиям: $\left(R^{-1}\right)^* \psi \in \Psi, \quad A^*\left(R^{-1}\right)^* \psi \in \Psi$. Сначала покажем, что первое слагаемое правой части (15) дает решение однородной задачи (16). В силу выбора основного пространтва Ψ и ограниченности операторов $\{S(t), t \in [0;T]\}$ справедливо следующее равенство:

$$\int_0^t \langle A^*\psi, R^{-1}S(s)\xi \rangle ds = \langle \left(R^{-1}\right)^* A^*\psi, \int_0^t S(s)\xi ds \rangle.$$

В силу свойств R–полугрупп операторы $\left(R^{-1}\right)^*$ и A^* коммутируют на пространстве Ψ, тогда

$$\langle \left(R^{-1}\right)^* A^*\psi, \int_0^t S(s)\xi ds \rangle = \langle \left(R^{-1}\right)^* \psi, A\int_0^t S(s)\xi ds \rangle =$$

$$= \langle \left(R^{-1}\right)^* \psi, (S(s)\xi - R\xi) \rangle = \langle \left(R^{-1}\right)^* \psi, S(s)\xi \rangle - \langle \psi, \xi \rangle.$$

Далее покажем, что второе слагаемое правой части (15) дает решение неоднородной задачи (16) при $\xi = 0$. В силу свойств операторов R–полугруппы имеем

$$\int_0^t \langle \left(R^{-1}\right)^* A^*\psi, \int_0^s S(s-r)BdW(r)\rangle ds = \langle \left(R^{-1}\right)^* A^*\psi, \int_0^t\int_0^s S(s-r)BdW(r)ds\rangle.$$

Учитывая ограниченность операторов $\{S(t), t\in[0;T]\}$, используя стохастический вариант теоремы Фубини [1], изменим порядок интегрирования в полученном интеграле

$$\langle \left(R^{-1}\right)^* A^*\psi, \int_0^t\int_0^s S(s-r)BdW(r)ds\rangle = \langle A^*\left(R^{-1}\right)^*\psi, \int_0^t\int_r^t S(s-r)BdsdW(r)\rangle =$$

$$= \langle \left(R^{-1}\right)^*\psi, \int_0^t A\int_0^{t-r} S(h)BdhdW(r)\rangle = \langle \left(R^{-1}\right)^*\psi, \int_0^t (S(t-r)B-RB)dW(r)\rangle =$$

$$= \langle \left(R^{-1}\right)^*\psi, \int_0^t S(t-r)BdW(r)\rangle + \langle \psi, \int_0^t BdW(r)\rangle.$$

Таким образом, обобщенный Ψ'–значный процесс $\{X(t), t\in[0;T]\}$, определенный соотношением (15), дает решение задачи (16) для соответствующего класса системы. □

Из доказательства данной теоремы следует, что основное пространство Ψ полностью определяется свойствами регуляризующего оператора R или, в силу конструкции (14), свойствами функции $\tilde{K}$; точнее, свойствами оператора R^{-1} или функции $\tilde{K}^{-1}$, которая, в свою очередь, определяется ростом оператора $e^{tA(\sigma)}$. Для того, чтобы определить пространства Ψ для каждого класса систем, докажем следующий результат.

Теорема 2 Пусть Φ,Ψ – пространства основных функций с непрерывным сдвигом, а $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Psi}$ – двойственные к ним пространства. Тогда, если функционал $g(\sigma)$ типа функции является мультипликатором из $\tilde{\Phi}'$ в $\tilde{\Psi}'$, то функционал $G=\mathcal{F}^{-1}\{g\}$ – свертыватель из Φ' в Ψ', и для любого $f\in\Phi'$ справедливо равенство

$$\mathcal{F}\{G*f\}=\mathcal{F}\{G\}\cdot\mathcal{F}\{f\}.$$

Доказательство. Для начала поясним, что G – свертыватель из Φ' в Ψ', если для любого $f\in\Phi'$ справедливо включение $G*f\in\Psi'$.

Далее, пусть $\psi\in\Psi$. Рассмотрим функцию $\mathcal{F}\{\psi(x-h)\}$:

$$\mathcal{F}\{\psi(x-h)\}=\int_{\mathbb{R}} e^{i(x,\sigma)}\psi(x-h)dx=\int_{\mathbb{R}} e^{i(y,\sigma)}e^{i(h,\sigma)}\psi(y)dy=e^{i(h,\sigma)}\mathcal{F}\{\psi(x)\}.$$

Из полученных равенств следует, что $e^{i(h,\sigma)}$ является мультипликатором в пространстве $\tilde{\Psi}$, поскольку оператор сдвига ограничен в Ψ.

Теперь для того, чтобы $G=\mathcal{F}^{-1}\{g\}$ определял свертыватель из Φ' в Ψ' в силу определения свертки двух обобщенных функций

$$\langle\psi, G*f\rangle=\langle G*\psi, f\rangle=\langle\langle\psi(x+\xi),G(\xi)\rangle, f(x)\rangle$$

необходимо доказать, что $G*\psi:=\langle\psi(x+\xi),G(\xi)\rangle\in\Phi$ для любого $\psi\in\Psi$.

Действительно, используя определения свертки и преобразования Фурье обобщенных функций, получаем

$$\langle\psi(x+\xi),G(\xi)\rangle=\frac{1}{(2\pi)^n}\langle e^{-i(x,\sigma)}\tilde{\psi}(\sigma),g(\sigma)\rangle=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}} e^{-i(x,\sigma)}\tilde{\psi}(\sigma)\overline{g(\sigma)}d(\sigma)=\mathcal{F}^{-1}\{\bar{g}\tilde{\psi}\}.$$

и поскольку $\bar{g}\tilde{\psi}\in\tilde{\Phi}'$, то результат $\mathcal{F}^{-1}\{\bar{g}\tilde{\psi}\}\in\Phi'$.

Далее, в силу непрерывности преобразования Фурье, если $\psi_n\to 0$ в Ψ, то $\mathcal{F}\{\psi_n\}\to 0$ в $\tilde{\Psi}$, а так как оператор умножения на $\bar{g}$ непрерывен в $\tilde{\Psi}$, то $\bar{g}\tilde{\psi}_n\to 0$ в $\tilde{\Phi}$, откуда, в силу непрерывности обратного преобразования Фурье, получаем, что $\mathcal{F}^{-1}\{\bar{g}\tilde{\psi}_n\}=G*\psi_n\to 0$ в Φ.

Таким образом, функционал G – свертыватель из пространства Ψ в пространство Φ и имеет место формула

$$\mathcal{F}\{G*\psi\}=\bar{g}\tilde{\psi}.$$

Следовательно, для любого $f\in\Phi'$ определена свертка $G*f$.

Теперь найдем выражение для $\mathcal{F}\{G*f\}$. Имеем

$$\langle\tilde{\psi},\mathcal{F}\{G*f\}\rangle=(2\pi)^n\langle\psi,G*f\rangle=(2\pi)^n\langle G*\psi,f\rangle=\langle\mathcal{F}\{G*\psi\},\mathcal{F}\{f\}\rangle=\langle\bar{g}\tilde{\psi},\mathcal{F}\{f\}\rangle=\langle\tilde{\psi},g\mathcal{F}\{f\}\rangle,$$

откуда следует, что

$$\mathcal{F}\{G*f\}=\mathcal{F}\{G\}\cdot\mathcal{F}\{f\}. \ \square$$

Далее, для каждого класса систем с помощью доказанной теоремы определим пространство Ψ. На основании теоремы можно утверждать, что пространство Ψ определяется свойствами матричной экспоненты однородной детерминированной задачи: пространство Ψ должно содержать такие основные функции ψ, что оператор $e^{tA(\sigma)}$ является мультипликатором из $\tilde{\Psi}$ в пространство $\tilde{\Phi}=L_2^m$.

Начнем с определения пространства Ψ для систем, корректных по Петровскому. Поскольку матричная экспонента $e^{tA(\sigma)}$ в этом случае удовлетворяет оценке (10), в качестве $\tilde{K}(\sigma)$, определяющей оператор R, можно взять функцию, удовлетворяющую соотношению

$$\tilde{K}(\sigma)=O\left(\frac{1}{(1+|\sigma|)^{h_1}}\right) \text{ при } |\sigma|\to\infty, \quad \text{где } h_1>h+1/2.$$

Покажем, что для систем данного класса операторы $\{U(t), t\in[0;T]\}$ могут быть определены в обобщенном смысле над пространством $\Psi=\mathcal{S}$.

Действительно, так как $\xi\in L_2^m$, то согласно определению мультипликатора в паре пространств

$$\langle\tilde{\psi}, e^{tA(\sigma)}\tilde{\xi}\rangle=\langle\left(e^{tA(\sigma)}\right)^*\tilde{\psi},\tilde{\xi}\rangle$$

и оценке (10), оператор $e^{tA(\sigma)}$ определяет мультипликатор из пространства $\tilde{\Psi}=\mathcal{S}$ в пространство $\tilde{\Phi}=L_2^m$ и, следовательно, из $\tilde{\Phi}'=L_2^m$ в $\tilde{\Psi}'=\mathcal{S}'$. Соответствующая этому случаю функция Грина $G(x,t)=(\mathcal{F}^{-1}\{e^{tA(\sigma)}\})(x)$ определяет свертыватель из $\Phi'=L_2^m$ в $\Psi'=\mathcal{S}'$. Таким образом, для систем, корректных по Петровскому, $\Psi=\mathcal{S}$ и решение $X(t)$ стохастической задачи (16) является $\mathcal{S}'$-значным процессом при п.в. ω.

Теперь рассмотрим условно–корректные системы. В данном случае матричная экспонента удовлетворяет оценке (11). Следовательно, в качестве $\tilde{K}(\sigma)$, определяющей оператор R, можно взять функцию, удовлетворяющую соотношению

$$\tilde{K}(\sigma)=O\left(e^{-a_2|\sigma|^h}\right) \text{ при } |\sigma|\to\infty, \quad \text{где } a_2>a_1.$$

В силу связи убывания функции $\tilde{K}(\sigma)$ и функций пространства $\tilde{\Psi}$ возьмем пространство $\tilde{\Psi}=\mathcal{S}_{\alpha,\mathcal{A}}$, бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций $\psi(\cdot)$, которые при любом $\varepsilon>0$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|\sigma^k\psi^{(q)}(\sigma)\right|\le C_{q,\varepsilon}(\mathcal{A}+\varepsilon)^k k^{k\alpha}, \quad \sigma\in\mathbb{R}, \quad q,k\in\mathbb{N}_0,$$

где $\alpha=1/h$ с соответствующим h из неравенства (11), $\mathcal{A}=\left(\frac{\alpha}{ea_2}\right)^{\alpha}$ и $C_{q,\varepsilon}=C_{q,\varepsilon}(\psi)$ – константа [9].

Действительно, в силу оценки (11) получим, что оператор $e^{tA(\sigma)}$ определяет мультипликатор из пространства $\tilde{\Psi}=\mathcal{S}_{\alpha,\mathcal{A}}$ в пространство $\tilde{\Phi}=L_2^m$ и, следовательно, из $\tilde{\Phi}'=L_2^m$ в $\tilde{\Psi}'=\left(\mathcal{S}_{\alpha,\mathcal{A}}\right)'$. Тогда по теоремам двойственности для пространств обобщенных функций получим, что функция Грина $G(x,t)$ определяет свертыватель из $\Phi'=L_2^m$ в $\Psi'=\left(\mathcal{S}^{\alpha,\mathcal{A}}\right)'$. Таким образом, для условно-корректных систем $\Psi=\mathcal{S}^{\alpha,\mathcal{A}}$ и решение $X(t)$ стохастической задачи (16) является $\left(\mathcal{S}^{\alpha,\mathcal{A}}\right)'$-значным процессом при п.в. ω.

Наконец, рассмотрим некорректные системы. В силу оценки (12) в качестве $\tilde{K}(\sigma)$ можно взять функцию, удовлетворяющую соотношению

$$\tilde{K}(\sigma)=O\left(e^{-b_2|\sigma|^{p_0}}\right) \text{ при } |\sigma|\to\infty, \quad \text{где } b_2>b_1.$$

Покажем, что в качестве пространства $\tilde{\Psi}$ можно взять пространство $\tilde{\Psi}=W_{M,\beta}$ бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций $\psi(\cdot)$, которые при любом $\delta>0$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|\psi^{(q)}(\sigma)\right|\le C_{q,\delta}e^{-M((\beta-\delta)\sigma)}, \quad \sigma\in\mathbb{R}, \quad q\in\mathbb{N}_0,$$

где $M(\sigma)=\dfrac{|\sigma|^{p_0}}{p_0}$, $\beta=(p_0b_2)^{1/p_0}$, $C_{q,\delta}=C_{q,\delta}(\psi)$ [9].

Действительно, в силу оценки (12) получим, что оператор $e^{tA(\sigma)}$ определяет мультипликатор из пространства $\tilde{\Psi}=W_{M,\beta}$ в пространство $\tilde{\Phi}=L_2^m$ и, следовательно, из $\tilde{\Phi}'=L_2^m$ в $\tilde{\Psi}'=\left(W_{M,\beta}\right)'$. Двойственным по Фурье к пространству $W_{M,\beta}$ является пространство $W^{\Omega,1/\beta}$, где функция $\Omega(x)$ —двойственная по Юнгу к $M(\sigma)$. Тогда соответствующая данному классу функция Грина $G(x,t)$ определяет свертыватель из $\Phi'=L_2^m$ в $\Psi'=\left(W^{\Omega,1/\beta}\right)'$, где

$$\Omega(x)=\frac{|x|^q}{q}, \quad \frac{1}{p_0}+\frac{1}{q}=1.$$

Таким образом, для некорректных систем $\Psi=W^{\Omega,1/\beta}$ и решение $X(t)$ стохастической задачи (16) является $\left(W^{\Omega,1/\beta}\right)'$-значным процессом при п.в. ω.

Подводя итог проведенным исследованиям о выборе пространства $\tilde{\Psi}$ для каждого класса систем, сформулируем полученные результаты.

Теорема 3. Пусть оператор $A(i\dfrac{\partial}{\partial x})$ определяет систему из классов (10)–(12). Тогда случайный процесс, определяемый равенством (15), является решением задачи Коши (16) для систем:

- корректных по Петровскому в пространстве $\mathcal{S}'$;
- условно–корректных в пространстве $\left(\mathcal{S}^{\alpha,\mathcal{A}}\right)'$, $\alpha=1/h$, $\mathcal{A}=\left(\dfrac{\alpha}{ea_2}\right)^{\alpha}$;
- некорректных в пространстве $\left(W^{\Omega,1/\beta}\right)'$, где $\Omega(x)=\dfrac{|x|^q}{q}$, $\dfrac{1}{p_0}+\dfrac{1}{q}=1$, $\beta=(p_0b_2)^{1/p_0}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 13-01-00090 и программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение 02.А03.21.0006 от 27.08.2013).

Литература

1. Da Prato, G. Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. – Cambridge University Press, 1992. – 482 p.

2. Мельникова, И.В. Слабые и обобщенные решения абстрактных стохастических уравнений / И.В. Мельникова, А.И. Филинков // Доклады академии наук. – 2000. – Т. 375, № 4. – С. 443–447.

3. Melnikova, I.V. Abstract stochastic equations I. Classical and Generalized Solutions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, U.A. Anufrieva // Journal of Mathematical Sciences. – 2002. – Т. 111, № 2. – С. 3430–3475.

4. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, M.A. Alshansky // Journal of Mathematical Sciences. – 2003. – Т. 116, № 5. – С. 3620–3656.

5. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Problems with Generators of Regularized Semigroups / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov // J. Communications in Applied Analysis. – 2009. – T. 13, № 2. – С. 195–212.

6. Альшанский, М.А. Регуляризованные и обобщенные решения бесконечномерных стохастических задач / М.А. Альшанский, И.В. Мельникова // Математический сборник. – 2011. – № 11. – С. 3–30.

7. Melnikova, I.V. Weak regularized solutions to stochastic Cauchy problems / I.V. Melnikova, U.A. Alekseeva // Chaotic modeling and simulations. – 2014. – № 1. – С. 49–56.

8. Гельфанд, И.М. Обощенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 276 с.

9. Гельфанд, И.М. Обощенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 309 с.

Поступила в редакцию 14 декабря 2014 г.

DOI: 10.14529/mmph160201

GENERALIZED SOLUTIONS FOR STOCHASTIC PROBLEMS IN THE ITO FORM IN GELFAND-SHILOV SPACES

V.A. Bovkun
Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation
E-mail: 123456m@inbox.ru

The paper is devoted to one of the modern trends of research in mathematics, which is the study of problems with regard to the impact of random factors. One of the integral parts among such problems is taken by the models with differential equations containing heterogeneity of white noise in the infinite-dimensional spaces.

The main subject of research in the article is a stochastic Cauchy problem for systems of differential equations of the Gelfand–Shilov of order m in the form of Ito:

$$X(t,x)-\xi(x)=\int_0^t A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)X(s,x)ds+\int_0^t BdW(s,x), \quad t\in[0;T],\, x\in\mathbb{R},$$

where the operator $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – a linear differential operator-matrix of finite order, which is a generator of R–semigroup in the space $L_2^m(\mathbb{R})$, $\xi\in L_2^m$, $W(t,x)$ – Q - a Wiener process.

Formulation of the problem in the space $L_2^m(\mathbb{R})$ is motivated by the fact that in modern applications that lead to models in the form of abstract stochastic problems, the process W takes values in a Hilbert space and in the space $L_2^m(\mathbb{R})$ in particular.

Results of the study of the Cauchy problem for deterministic systems with $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ operator show that, in general, the operator in the space $L_2^m(\mathbb{R})$ generates ill-posed problem [8]. Solution of the problem for various classes of systems is determined in the generalized sense in the corresponding Gelfand-Shilov spaces using generalized Fourier transform technique.

Taking into account the results of the study of deterministic problems, the solution in the considering case of stochastic problem will be a generalized random process on the variable x. More precisely, in this paper a generalized according to spatial variable solution for stochastic problem in Gelfand-Shilov spaces corresponding to the classes of systems of Petrovskii well-posedness, conditional well-posedness and ill-posedness defined by a differential operator behavior $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ is built.

Keywords: stochastic Cauchy problem; Wiener process; generalized Fourier transform; generalized solution; Gelfand-Shilov spaces.

References

1. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge University Press, 1992, 482 p. DOI: 10.1017/cbo9780511666223

2. Melnikova I.V., Filinkov A.I. Weak and generalized solutions of abstract stochastic equations. *Doklady Mathematics*, 2000, Vol. 62, no. 3, pp. 373–377.

3. Melnikova I.V., Filinkov A.I., Anufrieva U.A. Abstract stochastic equations I. Classical and Generalized Solutions. *Journal of Mathematical Sciences*, 2002, Vol. 111, no. 2, pp. 3430–3475. DOI: 10.1023/a:1016006127598

4. Melnikova I.V., Filinkov A.I., Alshansky M.A. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, Vol. 116, no. 5, pp. 3620–3656. DOI: 10.1023/a:1024159908410

5. Melnikova I.V., Filinkov A.I. Abstract Stochastic Problems with Generators of Regularized Semigroups. *J. Communications in Applied Analysis*, 2009, Vol. 13, no. 2, pp. 195–212.

6. Alshansky M.A., Melnikova I.V. Regularized and generalized solutions of infinite-dimensional stochastic problems. *Mat. Sbornik,* 2011, Vol. 202, no. 11, pp. 3–30. DOI: 10.1070/sm2011v202n11abeh004199

7. Melnikova I.V., Alekseeva U.A. Weak regularized solutions to stochastic Cauchy problems. *Chaotic modeling and simulations*, 2014, no. 1, pp. 49–56.

8. Gel'fand I.M., Shilov G.E. *Generalized function. Volume 3: Theory of differential equations*. Academic Press Inc., 1967, 222 p.

9. Gel'fand I.M., Shilov G.E. *Generalized Functions, Volume 2: Spaces of Fundamental and Generalized Functions*. Academic Press Inc., 1968, 261 p.

Received December 14, 2014