УДК 517.956.35 DOI: 10.14529/mmph160202

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

О.Л. Бозиев
Институт информатики и проблем регионального управления
Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Российская Федерация
E-mail: boziev@yandex.ru

Получена формула приближенного решения начально-краевой задачи для нагруженного гиперболического уравнения, для нахождения которого используется априорная оценка решения поставленной задачи.

Ключевые слова: нагруженные уравнения в частных производных; априорные оценки; приближенные решения.

Введение

Большой класс физических, биологических, экологических и других процессов описывается дифференциальными уравнениями в частных производных со степенной нелинейностью (см., например, [1]). Для их интегрирования, как правило, применяются различные способы линеаризации, часто искажающие суть моделируемого процесса. В методе редукции к нагруженным уравнениям [2] в нелинейном члене исходного уравнения производится замена искомой функции ее следом, что приводит к «ослаблению» нелинейности без ее полного устранения. Найденное затем точное или приближенное решение начально-краевой задачи для нагруженного уравнения можно принять за приближенное решение исходной нелинейной задачи. Подобная процедура применяется, в частности, в [3, 4], где получены формулы общих членов последовательностей приближенных решений начально-краевых задач для некоторых нагруженных уравнений, к которым редуцируются исходные нелинейные уравнения. В настоящей работе предлагается несколько отличный от этого способ нахождения приближенного решения нагруженного уравнения с помощью априорной оценки решения поставленной задачи.

Постановка задачи

В области $Q = \{(x,t)\colon 0<x<l,\ 0<t<T\}$ рассмотрим нагруженное [2] уравнение

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b u_t \int_{\Omega} |u|^p dx = 0,\ a, b > 0, \tag{1}$$

где натуральное $p > 3$, $\Omega = [0, l]$.

Уравнение (1) является модификацией нелинейного уравнения,

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b|u|^p u_t = 0,$$

возникающего в релятивистской квантовой механике [1], а также моделирующего некоторые нестационарные гидродинамические процессы. Нагруженные уравнения вида (1) исследуются в задачах управления, а также могут быть моделями некоторых нелинейных физических процессов. Константы a и b являются параметрами моделируемого процесса.

Требуется найти интегрируемую функцию $u(x,t) \in C^{2,2}(\overline{Q})$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Q, а также условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x),\ u_t(x,0) = \varphi_2(x),\ \ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

в которых $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in L_p(\Omega)$.

Априорные оценки

Установим некоторые априорные оценки, которые впоследствии будут использованы для нахождения приближенного решения задачи (1)–(3).

Умножая (1) скалярно на u_t и применяя стандартные для подобных случаев несложные преобразования, легко получить неравенства, выполняющиеся для всех значений $t \in [0, T]$:

$$\int_\Omega (u_t^2 + a^2 u_x^2)dx \le C_1,\ \|u_t\|_{2,\Omega}^2 \le C_1,\ \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \le \frac{C_1}{a^2}, \tag{4}$$

где $\|v\|_{p,\Omega}^p = \int_\Omega |v|^p dx$ выражает норму функции $v(t)$ в пространстве $L_p(\Omega)$, а C_1 зависит лишь от t.

Теорема. Пусть решение задачи (1)–(3) $u\in L_{p-2}(\Omega)$ при любом $t \in [0, T]$. Тогда функция $\|u\|_{p,\Omega}^p$ ограничена константой, не зависящей от x и t.

Доказательство. Умножим уравнение (1) скалярно на функцию u^{p-1}

$$(u_{tt}, u^{p-1}) - a^2(u_{xx}, u^{p-1}) + b\int_\Omega |u|^p dx (u_t, u^{p-1}) = 0. \tag{5}$$

Преобразуем по отдельности каждое слагаемое:

$$(u_{tt}, u^{p-1}) = \frac{1}{p}\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u^p dx - (p-1)\int_\Omega u_t^2 u^{p-2} dx;$$

$$-(u_{xx}, u^{p-1}) = (p-1)\int_\Omega u_x^2 u^{p-2} dx; \quad \int_\Omega |u|^p dx (u_t, u^{p-1}) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx \cdot \frac{d}{dt}\int_\Omega u^p dx.$$

Возвращаясь к (5) и умножая его на $\operatorname{sgn}^p u$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{p}\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega |u|^p dx + \frac{b}{2p}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^2 = (p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}\left(u_t^2 - a^2 u_x^2\right)dx,$$

после интегрирования которого по t получаем

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^p dx + \frac{b}{2}\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^2 = p(p-1)\int_0^t\int_\Omega |u|^{p-2}\left(u_t^2 - a^2u_x^2\right)dxdt + \\ + \frac{d}{dt}\int_\Omega |u(x,0)|^p dx + \frac{b}{2}\left(\int_\Omega |u(x,0)|^p dx\right)^2.\end{gathered} \tag{6}$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое в правой части. Применяя неравенство Гёльдера, в котором $s = q/(q-1)$, получаем при $q = 1$ в силу первого из (4)

$$\begin{gathered}\int_0^t\int_\Omega |u|^{p-2}(u_t^2 - a^2u_x^2)dxdt \le \left(\int_0^t \left|\int_\Omega |u|^{p-2} dx\right|^s dt\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_0^t \left|\int_\Omega \left|u_t^2 - a^2 u_x^2\right| dx\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le \\ \le \sup_{x\in\Omega} ess \left|\int_\Omega |u|^{p-2} dx\right| \cdot \int_0^t \left|\int_\Omega \left|u_t^2 + a^2u_x^2\right| dx\right| dt \le \sup_{x\in\Omega} ess \|u\|_{p-2,\Omega}^{p-2} \cdot tC_1.\end{gathered}$$

К первому сомножителю применим последовательно неравенство Фридрихса [5] и третье из (6), в результате получаем

$$\sup_{x\in\Omega} ess \|u\|_{p-2,\Omega}^{p-2} \le C_2 \sup_{x\in\Omega} ess \|u_x\|_{2,\Omega}^{p-2} \le C_2\left(\frac{C_1}{a^2}\right)^{p-2}.$$

В итоге оказывается, что

$$\int_0^t\int_\Omega |u|^{p-2}(u_t^2 - a^2u_x^2)dxdt \le tC_1C_2\left(\frac{C_1}{a^2}\right)^{p-2} = \frac{C_1^{p-1}C_2}{a^{2(p-2)}}t.$$

Таким образом, от уравнения (6) можно перейти к неравенству

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^p dx + \frac{b}{2}\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^2 \le p(p-1)\frac{C_1^{p-1}C_2}{a^{2(p-2)}}t + \frac{b}{2}\left(\int_\Omega |\varphi_1|^p dx\right)^2,$$

после очередного интегрирования приводящего к соотношению

$$\|u\|_{2,\Omega}^p \le \frac{b}{2}\int_0^t \left(\|u\|_{2,\Omega}^p\right)^2 dt + K, \tag{7}$$

в котором при всех $t \in [0, T]$ в силу (2)

$$K \ge p(p-1)\frac{C_1^{p-1}C_2}{2a^{2(p-2)}}t^2 + \frac{b}{2}t\left(\int_\Omega |\varphi_1|^p\,dx\right)^2 + \int_\Omega |\varphi_1|^p\,dx\,.$$

Применяя к (7) нелинейный аналог неравенства Гронуолла [6, с. 22], видим, что

$$\|u\|_{p,\Omega}^p \le C_3 = \frac{2K}{2+bKT}. \tag{8}$$

Таким образом, теорема доказана.

Приближенное решение

Для нахождения приближенного решения задачи (1)–(3) проинтегрируем (1) по x в границах от 0 до x:

$$u_x(x,t) = \frac{1}{a^2}\int_0^x \left(u_{tt} + bu_t\|u\|_{p,\Omega}^p\right)dx + A(t).$$

Применяя к интегралу теорему о среднем значении, запишем последнее равенство в виде

$$u_x(x,t) = \frac{x}{la^2}\int_0^l \left(u_{tt} + bu_t\|u\|_{p,\Omega}^p\right)dx + A(t).$$

После повторного интегрирования по x получаем выражение

$$u(x,t) = \frac{x^2}{la^2}\left(\delta''(t) + b\delta'(t)\|u\|_{p,\Omega}^p\right) + xA(t) + B(t)\,,$$

в котором положено

$$\int_0^l udx = \int_\Omega udx = \delta(t). \tag{9}$$

Удовлетворение условий (3) приводит к соотношению

$$u(x,t) = \frac{x(x-l)}{2la^2}\left(\delta''(t) + b\delta'(t)\|u\|_{p,\Omega}^p\right). \tag{10}$$

Применяя к нему (9), переходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\delta'' + b\|u\|_{p,\Omega}^p\,\delta' + \frac{12a^2}{l^2}\delta = 0. \tag{11}$$

Потребуем выполнения равенства в (8) и аппроксимируем (11) линейным уравнением

$$\delta'' + bC_3\delta' + \frac{12a^2}{l^2}\delta = 0.$$

Необходимые для его интегрирования начальные условия получаются из (2):

$$\delta(0) = \int_\Omega u(x,0)dx = \int_\Omega \varphi_1(x)dx,\ \delta'(0) = \int_\Omega u_t(x,0)dx = \int_\Omega \varphi_2(x)dx.$$

Тогда, при $k_{1,2} = \left(-lbC_3 \pm \sqrt{(lbC_3)^2 - 48a^2}\right)/2l,\ C_3 \ge 4\sqrt{3}a/lb,$ находим

$$\delta(t) = \frac{1}{k_1-k_2}\left(\left(\int_\Omega \varphi_2(x)dx - k_2\int_\Omega \varphi_1(x)dx\right)e^{k_1t} + \left(k_1\int_\Omega \varphi_1(x)dx - \int_\Omega \varphi_2(x)dx\right)e^{k_2t}\right).$$

В силу (10) и (11) приходим к формуле приближенного решения исходной задачи:

$$u(x,t) \approx \frac{2x}{l^2(k_1-k_2)}\left(\left(\int_\Omega \varphi_2(x)dx - k_2\int_\Omega \varphi_1(x)dx\right)e^{k_1t} + \left(k_1\int_\Omega \varphi_1(x)dx - \int_\Omega \varphi_2(x)dx\right)e^{k_2t}\right). \tag{12}$$

Заключение

В работе предложен способ нахождения приближенного решения задачи (1)–(3), состоящий, во-первых, в переходе от исходного нагруженного уравнения (1) к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному уравнению (11), а во-вторых, в линеаризации (11) с помощью априорной оценки решения исходной задачи (8). В результате получена формула (12), которая будет, как ожидается, с достаточной точностью аппроксимировать искомое решение, что необходимо подтвердить оценкой его погрешности. Предполагается, что данный способ будет эффективным для нахождения приближенных решений уравнений в частных производных со степенной нелинейностью, аппроксимируемых ассоциированными с ними нагруженными уравнениями.

Литература

1. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М., Едиториал УРСС, 2010. – 586 с.

2. Нахушев, А.М. Нагруженные уравнения и их применение / А.М. Нахушев. – М.: Наука, 2012. – 232 с.

3. Бозиев, О.Л. Решение начально-краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с помощью двойной редукции к нагруженным уравнениям / О.Л. Бозиев // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2014. – № 4(60). – С. 7–13.

4. Бозиев, О.Л. Применение нагруженных уравнений к приближенному решению дифференциальных уравнений в частных производных со степенной нелинейностью / О.Л. Бозиев // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика». – 2015. – № 1. – с. 127–136.

5. Гаевский, Г. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Г. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. – 236 с.

6. Филатов, А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. – М.: Наука, 1976. – 151 с.

Поступила в редакцию 26 апреля 2015 г.

DOI: 10.14529/mmph160202

AN APPROXIMATE SOLUTION OF LOADED HYPERBOLIC EQUATION WITH HOMOGENIOS BOUNDARY CONDITIONS

O.L. Boziev
Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of KBSC of the Russian Academy of Sciences, Nal'chik, Russian Federation
E-mail: boziev@yandex.ru

The article proposes a method for solving hyperbolic equation with a spatial variable integral of the natural powers of the unknown function modulus, whereby it is loaded. The author considers an initial boundary value problem with homogeneous boundary conditions. Scalar products of the equation by various functionals and subsequent conversions make it possible to obtain a priori estimates of solutions of the problem in various spaces. By successive integration over the spatial variable the reduction to an ordinary differential equation associated with the initial one is produced. Its approximate solution is sought using a priori estimates that are obtained. Found function leads to the formula that expresses the approximate solution to the original problem through the right parts of the initial conditions.

Keywords: loaded partial differential equation; a priori estimate; approximate solutions.

References

1. Lions J.L. *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach*. [Some methods of nonlinear boundary value problems solving]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2010, 586 p. (in Russ.).

2. Nakhushev A.M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie*. [Loaded equations and their applications]. Moscow, Nauka Publ., 2012, 232 p. (in Russ.).

3. Boziev O.L. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN*, 2014, no. 4, p. 7–13. (in Russ.).

4. Boziev O.L. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Prikladnaya matematika"*, 2015, no. 1, p. 127–136. (in Russ.).

5. Gaevskii G., Grioger K., Zaharias K. *Nelineynye operatornye uravneniya i operatornye differentsial'nye uravneniya.* [Nonlinear operator equations and operator differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1978, 236 p. (in Russ.).

6. Filatov A.N., Sharova L.V. *Integral'nye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy*. [Integral inequality and theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 151 p. (in Russ.).

Received April 26, 2015