

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХСЛОЙНОГО УПРУГОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ ПОРИСТОЙ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА

**Д.В. Гоцев, Н.С. Перунов**

*Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация*

*E-mail: rbgotsev@mail.ru*

Построена математическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние двухслойного неоднородного сферического тела, находящегося под действием равномерно сжимающих нагрузок с учетом пористой структуры внутреннего слоя. Построение модели проводилось в рамках осесимметричной постановки. Определена зависимость внешних сжимающих нагрузок, при которых начальная пористость материала достигает во всем слое своего нулевого значения; выведены аналитические выражения для нахождения напряженно-деформированных состояний в каждом слое, а также получено уравнение для определения деформированной границы контакта слоев. В качестве условий совместности на деформированной границе выбирались условия непрерывности радиальной компоненты напряжений и перемещений. Дана оценка влияния на величину границы раздела слоев упругих констант материалов.

*Ключевые слова: пористые материалы; неоднородное сферическое тело при сжатии; напряженно-деформированное состояние.*

В настоящее время актуальными остаются вопросы строительства и охраны подземных сооружений различного назначения, в том числе подземных сферических полостей. При этом возникает необходимость решения ряда сопутствующих задач, таких, как борьба с горными ударами, взрывные подземные работы, охрана окружающей среды от загрязнения, проблемы сейсмобезопасности и др.

Цель расчета подземных конструкций заключается в определении полей напряжений и перемещений, возникающих в элементах этих сооружений и установлении условий их прочности и устойчивости. В соответствии с результатами расчета выбираются рациональные конструкции крепей и оптимальные размеры их сечений, обеспечивающих надежную работу сооружений при минимальных затратах.

Обеспечение устойчивости неглубоких выработок при достаточно прочных вмещающих породах, как правило, не составляет особых затруднений. Однако в настоящее время непрерывно увеличивается объем горных выработок, проходимых на больших глубинах и в сложных горно-геологических условиях (многолетняя мерзлота, высокая сейсмичность, неотектонические явления и т.п.), что отчасти связано с активным освоением арктического пространства. При нарушении условия благоприятного сочетания глубины и прочности материалов, обеспечение устойчивости выработок и их крепей приобретает черты сложной инженерной и научной проблемы.

Для решения всех этих вопросов необходимы представления о разрушении горных массивов, а также об устойчивости крепей подземных сооружений.

Разрушение крепи подземной конструкции может произойти в результате следующих двух ситуаций: 1) достижение напряженно-деформированным состоянием (далее НДС) пределов прочности; 2) достижение напряженно-деформированным состоянием критических значений, соответствующих потере устойчивости (отказу) крепи.

Решение первой задачи основано на сравнении найденного (в аналитическом или численном виде) НДС с пределами прочности материалов. Во втором случае начальным этапом решения задачи устойчивости является нахождение в аналитическом виде основного НДС конструкции. В связи с этим получение аналитических соотношений, описывающих докритическое НДС в аналитической форме, является актуальной задачей.

Помимо объектов исследования механики горных пород слоистые сферические конструкции находят широкое применение в различных областях строительной механики и машиностроения. Поэтому вопрос определения и анализа НДС с учетом различных физико-механических и геометрических параметров сферических конструкций является объектом внимания достаточно большого количества исследований. Так в монографии [1] в рамках теории малых деформаций в аналитическом виде получены поля напряжений и перемещений горного массива вблизи сферической полости при учете неупругой работы грунта. В работе [2] найдено НДС монолитной сферической крепи подземного нефтехранилища с учетом начальной пористости материала и сложной реологии сжатой матрицы. В статье [3] на основе метода малого параметра получены приближенные аналитические выражения НДС упругого пространства, ослабленного сферической полостью, с учетом температуры.

В настоящей работе решается задача определения НДС двухслойного сферического тела, находящегося под действием сжимающих нагрузок интенсивностями  $q_b$  и  $q_a$ , равномерно распределенных по внешнему и внутреннему контурам тела соответственно. Материал внешнего слоя будем моделировать упругим сжимаемым телом с параметрами Ламе  $\lambda_1, \mu_1$ . Деформирование материала внутреннего слоя, имеющего пористую структуру, разделим на два этапа [4, 5]. Первый этап – деформирование среды при наличии несжатых пор, второй – деформирование сжатого скелета. На первом этапе в качестве модели материала принимается модель упругого сжимаемого тела с параметрами Ламе  $\lambda_2, \mu_2$ , на втором – модель упругой несжимаемой среды с модулем сдвига  $\mu = \mu_2 + \mu_3$ .

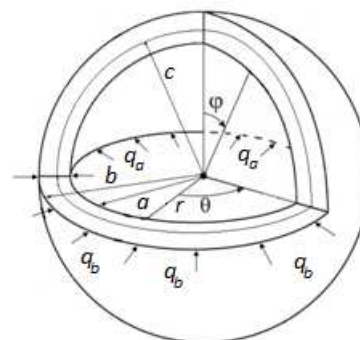


Рис. 1. Двухслойное сферическое тело при сжатии

Согласно работе [6], в качестве условия полного сжатия пор в некоторой точке среды выбирается условие равенства объемной деформации в этой точке величине  $\varepsilon_0$  – начального раствора пор.

Обозначим радиус внешней границы  $c$ , внутренней границы  $a$ , радиус недеформированной границы контакта слоев –  $b$  (рис. 1).

На первом этапе деформирования НДС в рамках осесимметричной постановки задачи в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  будем моделировать следующими соотношениями геометрически линейной теории.

Уравнение равновесия:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + 2(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \quad (1)$$

Соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}. \quad (2)$$

Закон Гука для внешнего слоя:

$$\sigma_r^{(1)} = (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_r^{(1)} + 2\lambda_1\varepsilon_\theta^{(1)}, \quad \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} = \lambda_1\varepsilon_r^{(1)} + 2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_\theta^{(1)}. \quad (3)$$

Связь между напряжениями и деформациями для внутреннего слоя:

$$\sigma_r^{(2)} = (\lambda_2 + 2\mu_2)\varepsilon_r^{(2)} + 2\lambda_2\varepsilon_\theta^{(2)}, \quad \sigma_\theta^{(2)} = \sigma_\varphi^{(2)} = \lambda_2\varepsilon_r^{(2)} + 2(\lambda_2 + \mu_2)\varepsilon_\theta^{(2)}. \quad (4)$$

Условие наличия несхлопнутых пор для внутреннего слоя:

$$-(\varepsilon_r^{(2)} + 2\varepsilon_\theta^{(2)}) < \varepsilon_0. \quad (5)$$

Граничные условия на внешнем и внутреннем контурах запишем соответственно в виде:

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=b} = -q_b, \quad \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=a} = -q_a. \quad (6)$$

Здесь в (1)–(6) и далее  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi$  – главные компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно,  $u$  – радиальная составляющая вектора перемещений, индекс (1) вверху компонент напряжений, деформаций и перемещений обозначает их принадлежность к

внешнему слою, индекс (2) – к внутреннему слою, отсутствие верхних индексов у указанных величин обозначает их принадлежность как к внутреннему, так и к внешнему слоям сферического тела.

Из решения системы (1)–(6) получим следующие НДС:  
для внутреннего слоя

$$u^{(2)} = C_3 r + \frac{C_4}{r^2}, \quad \varepsilon_r^{(2)} = C_3 - \frac{2C_4}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta^{(2)} = \varepsilon_\varphi^{(2)} = C_3 + \frac{C_4}{r^3},$$

$$\sigma_r^{(2)} = C_3(3\lambda_2 + 2\mu_2) - 4\mu_2 \frac{C_4}{r^3}, \quad \sigma_\theta^{(2)} = \sigma_\varphi^{(2)} = C_3(3\lambda_1 + 2\mu_1) + 2\mu_1 \frac{C_4}{r^3}; \quad (7)$$

для внешнего слоя

$$u^{(1)} = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}, \quad \varepsilon_r^{(1)} = C_1 - \frac{2C_2}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta^{(1)} = \varepsilon_\varphi^{(1)} = C_1 + \frac{C_2}{r^3},$$

$$\sigma_r^{(1)} = C_1(3\lambda_1 + 2\mu_1) - 4\mu_1 \frac{C_2}{r^3}, \quad \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} = C_1(3\lambda_1 + 2\mu_1) + 2\mu_1 \frac{C_2}{r^3}, \quad (8)$$

где константы интегрирования  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , а так же  $\gamma$  – деформированный радиус контакта слоев, которые находятся из следующей системы граничных условий и условий совместности

$$\begin{cases} \sigma_r^{(2)}|_{r=a} = -q_a \\ \sigma_r^{(1)}|_{r=b} = -q_b \\ \sigma_r^{(1)}|_{r=\gamma} = \sigma_r^{(2)}|_{r=\gamma} \\ u^{(1)}|_{r=\gamma} = u^{(2)}|_{r=\gamma} \\ \gamma = c + u^{(2)}(c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(3\lambda_1 + 2\mu_1) - 4\mu_1 \frac{C_2}{\gamma^3} = C_3(3\lambda_2 + 2\mu_2) - 4\mu_2 \frac{C_4}{\gamma^3} \\ C_3(3\lambda_2 + 2\mu_2) - 4\mu_2 \frac{C_4}{a^3} = -q_a \\ C_1(3\lambda_1 + 2\mu_1) - 4\mu_1 \frac{C_2}{b^3} = -q_b \\ C_3\gamma + \frac{C_4}{\gamma^2} = C_1\gamma + \frac{C_2}{\gamma^2} \\ \gamma = c(1 + C_3) + \frac{C_4}{c^2} \end{cases}. \quad (9)$$

Решая систему (9) получим:

$$C_1 = \frac{4\mu_2 c^2 (\gamma - c) B (\gamma^3 - a^3) - q_a a^3 (B\gamma^3 + 4\mu_2 c^3) + q_b P b^3}{AP(\gamma^3 - b^3)},$$

$$C_2 = \frac{(4\mu_2 B c^2 (\gamma - c) (\gamma^3 - a^3) - q_a a^3 (B\gamma^3 + 4\mu_2 c^3) + q_b \gamma^3 P) b^3}{4\mu_1 P (\gamma^3 - b^3)},$$

$$C_3 = \frac{4\mu_2 c^2 (\gamma - c) - q_a a^3}{P}, \quad C_4 = \frac{a^3 c^2 (B(\gamma - c) + q_a c)}{P}, \quad (10)$$

$$A = 3\lambda_1 + 2\mu_1, \quad B = 3\lambda_2 + 2\mu_2, \quad P = Ba^3 + 4\mu_2 c^3.$$

При этом деформированный радиус  $\gamma$  контакта слоев определим из уравнения

$$\alpha_1 \gamma^7 + \alpha_2 \gamma^6 + \alpha_3 \gamma^4 + \alpha_4 \gamma^3 + \alpha_5 \gamma + \alpha_6 = 0, \quad (11)$$

где

$$\alpha_1 = 4\mu_1 \mu_2 c^2 (A - B), \quad \alpha_2 = -\mu_1 (4\mu_2 c^3 (A - B) + q_a a^3 (A + B)),$$

$$\alpha_3 = c^2 (AB(\mu_1 a^3 - \mu_2 b^3) + 4\mu_1 \mu_2 (Ba^3 - Ab^3)),$$

$$\alpha_4 = q_a a^3 \left( \mu_1 A c^3 + \mu_1 A b^3 + 4\mu_1 \mu_2 c^3 + \frac{AB}{4} b^3 \right) - q_b b^3 \left( \mu_1 B a^3 + 4\mu_1 \mu_2 c^3 + \frac{AB}{4} a^3 + \mu_2 A c^3 \right) +$$

$$+ AB c^3 (\mu_2 b^3 - \mu_1 a^3) + 4\mu_1 \mu_2 c^3 (Ab^3 - Ba^3)$$

$$\alpha_5 = AB(\mu_2 - \mu_1)a^3b^3c^2, \quad \alpha_6 = A(\mu_1 - \mu_2)(B - q_a)a^3b^3c^3.$$

Объемная деформация на этом этапе для внутреннего слоя согласно (7) определится в форме

$$\varepsilon_r^{(2)} + 2\varepsilon_\theta^{(2)} = 3C_3.$$

Тогда условие наличия в теле не полностью сжатых пор запишется в виде

$$q_a a^3 < P \cdot \frac{\varepsilon_0}{3} + 4\mu_2 c^2 (\gamma - c). \quad (12)$$

Следовательно, схлопывание пор произойдет одновременно во всем внутреннем слое, когда внешняя и внутренняя нагрузки будут удовлетворять условию

$$q_a a^3 \geq \frac{P\varepsilon_0}{3} + 4\mu_2 c^2 (\gamma - c). \quad (13)$$

На втором этапе деформирования, то есть при выполнении условия (13), НДС будем моделировать соотношениями (1)–(2), присоединяя к ним граничные условия (6), реологические соотношения (3) для внешнего слоя, и соотношения

$$S_r^{(2)} = 2\mu\varepsilon_r^{(2)} - 2\mu_3\varepsilon_r^{(0)} + \frac{2}{3}\mu_2\varepsilon_0, \quad S_\theta^{(2)} = S_\varphi^{(2)} = 2\mu\varepsilon_\theta^{(2)} - 2\mu_3\varepsilon_\theta^{(0)} + \frac{2}{3}\mu_2\varepsilon_0, \quad (14)$$

для внутреннего.

Здесь в (14) и далее  $\mu = \mu_2 + \mu_3$ ,  $S_r^{(2)}$ ,  $S_\theta^{(2)}$ ,  $S_\varphi^{(2)}$  – компоненты тензора дивергента напряжений,  $\varepsilon_r^{(0)}$ ,  $\varepsilon_\theta^{(0)}$  – деформации внутреннего слоя на момент полного сжатия пор, которые определяются из соотношений (7), (10)–(12) при переходе в (12) к равенству.

Из решения системы (1)–(3), (6), (14) при условии (13) получим следующие НДС: для внешнего слоя

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= D_3 r + \frac{D_4}{r^2}, \quad \varepsilon_r^{(1)} = D_3 - \frac{2D_4}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta^{(1)} = \varepsilon_\varphi^{(1)} = D_3 + \frac{D_4}{r^3}, \\ \sigma_r^{(1)} &= A \cdot D_3 - 4\mu_1 \cdot \frac{D_4}{r^3}, \quad \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} = A \cdot D_3 + 2\mu_1 \cdot \frac{D_4}{r^3}. \end{aligned} \quad (15)$$

для внутреннего слоя

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= D_1 r + \frac{1}{r^2} \left( D_2 - \frac{4\mu_3 C_4^{(0)}}{\mu} \left( \frac{1}{3} + \ln r \right) \right), \\ \varepsilon_r^{(2)} &= D_1 - \frac{2}{r^3} \left( D_2 - \frac{2\mu_3 C_4^{(0)}}{\mu} \left( 2 \ln r - \frac{1}{3} \right) \right), \quad \varepsilon_\theta^{(2)} = \varepsilon_\varphi^{(2)} = D_1 + \frac{1}{r^3} \left( D_2 - \frac{4\mu_3 C_4^{(0)}}{\mu} \left( \frac{1}{3} + \ln r \right) \right), \\ \sigma_r^{(2)} &= \lambda_2 \varepsilon_0 + 2 \left( \mu D_1 - \frac{2}{r^3} \left( \mu D_2 - \mu_3 C_4^{(0)} \left( 4 \ln r + \frac{1}{3} \right) \right) - \mu_3 C_3^{(0)} \right), \\ \sigma_\theta^{(2)} = \sigma_\varphi^{(2)} &= \lambda_2 \varepsilon_0 + 2 \left( \mu D_1 + \frac{1}{r^3} \left( \mu D_2 - \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{3} (7 + 12 \ln r) \right) - \mu_3 C_3^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где константы  $C_3^{(0)}$ ,  $C_4^{(0)}$  определяются соотношениями (10), в которых среда рассмотрена на момент полного сжатия пор и имеют вид

$$C_3^{(0)} = -\frac{\varepsilon_0}{3}, \quad C_4^{(0)} = \frac{c^2 \left( a^3 B (\gamma - c) + c \left( 4\mu_2 c^2 (\gamma - c) + P(\varepsilon_0/3) \right) \right)}{P}; \quad (17)$$

константы интегрирования  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$ , а так же  $\gamma$  – деформированный радиус контакта слоев на этом этапе деформирования находятся из следующей системы граничных условий и условий совместности

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=a} = -q_a \\ \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=b} = -q_b \\ \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=\gamma} = \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=\gamma} \\ u^{(1)} \Big|_{r=\gamma} = u^{(2)} \Big|_{r=\gamma} \\ \gamma = c + u^{(2)}(c) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 \varepsilon_0 + 2 \left( \mu D_1 - \frac{2}{a^3} \left( \mu D_2 - \mu_3 C_4^{(0)} \left( 4 \ln r + \frac{1}{3} \right) \right) - \mu_3 C_3^{(0)} \right) = -q_a, \\ A \cdot D_3 - 4\mu_1 \cdot \frac{D_4}{b^3} = -q_b, \\ A \cdot D_3 - 4\mu_1 \cdot \frac{D_4}{\gamma^3} = \lambda_2 \varepsilon_0 + 2 \left( \mu D_1 - \frac{2}{\gamma^3} \left( \mu D_2 - \mu_3 C_4^{(0)} \left( 4 \ln r + \frac{1}{3} \right) \right) - \mu_3 C_3^{(0)} \right), \\ D_3 \gamma + \frac{D_4}{\gamma^2} = D_1 \gamma + \frac{1}{\gamma^2} \left( D_2 - \frac{4\mu_3 C_4^{(0)}}{\mu} \left( \frac{1}{3} + \ln \gamma \right) \right), \\ \gamma = c + D_1 c + \frac{1}{c^2} \left( D_2 - \frac{4\mu_3 C_4^{(0)}}{\mu} \left( \frac{1}{3} + \ln c \right) \right), \end{array} \right.$$

разрешив которую получим константы интегрирования:

$$D_1 = \frac{12\mu c^2 (\gamma - c) + 12\mu_3 C_4^{(0)} \left( 1 + 4 \ln \frac{c}{a} \right) - a^3 (F + 3q_a)}{6\mu R},$$

$$D_2 = \frac{a^3 (6\mu c^2 (\gamma - c) + c^3 (F + 3q_a)) + 4\mu_3 C_4^{(0)} \left( 6 \ln (a^{2c^3} c^{a^3}) + c^3 + 2a^3 \right)}{6\mu R}, \quad (18)$$

$$D_3 = \frac{2c^2 y_1(\gamma) (6\mu (\gamma - c) + Fc) + 12\mu_3 C_4^{(0)} \left( 4 \ln \left( \frac{c^{y_1(\gamma)} \cdot \gamma^R}{a^{2c^3 + \gamma^3}} \right) + y_1(\gamma) \right) + 3(q_b b^3 R - q_a a^3 (2c^3 + \gamma^3))}{3AR y_2(\gamma)},$$

$$D_4 = \frac{b^3 \left( 2c^2 y_1(\gamma) (6\mu (\gamma - c) + Fc) + 12\mu_3 C_4^{(0)} \left( 4 \ln \left( \frac{c^{y_1(\gamma)} \cdot \gamma^R}{a^{2c^3 + \gamma^3}} \right) + y_1(\gamma) \right) + 3(q_b \gamma^3 R - q_a a^3 (2c^3 + \gamma^3)) \right)}{12\mu_1 R y_1(\gamma)},$$

а так же уравнение для поиска границы  $\gamma$  контакта слоев в случае деформирования сжатого скелета

$$4\mu_3 C_4^{(0)} \left( 12 \ln \left( \frac{c^{\mu y_1(\gamma) y_4(\gamma) - \mu_1 A y_2(\gamma) (2\gamma^3 + a^3)} \cdot \gamma^{R(\mu y_4(\gamma) + \mu_1 A y_2(\gamma))}}{a^{\mu y_4(\gamma) (2c^3 + \gamma^3) - 2A \mu_1 y_2(\gamma) y_3(\gamma)}} \right) + 3\mu y_4(\gamma) y_1(\gamma) - 6A \mu_1 y_2(\gamma) y_3(\gamma) \right) +$$

$$+ c^2 (6\mu (\gamma - c) + Fc) (2\mu y_4(\gamma) y_1(\gamma) - 2A \mu_1 a^3 y_2(\gamma)) + 2\mu_1 A \gamma^3 (F a^3 - 12\mu c^2 (\gamma - c)) y_2(\gamma) +$$

$$+ 3q_b \mu (4\mu_1 + A) b^3 \gamma^3 R + 3q_a a^3 (2\mu_1 A y_2(\gamma) y_3(\gamma) - \mu y_4(\gamma) (2c^3 + \gamma^3)) = 0, \quad (19)$$

В (18), (19) приняты следующие обозначения  $y_1(\gamma) = \gamma^3 - a^3$ ,  $y_2(\gamma) = \gamma^3 - b^3$ ,  $y_3(\gamma) = \gamma^3 - c^3$ ,  $y_4(\gamma) = 4\mu_1 \gamma^3 + A b^3$ .

Таким образом, НДС двухслойного сферического тела на этапе упругого деформирования пористого материала внутреннего слоя, то есть при реализации условия (12) определяется соотношениями (7), (8), (10), а на этапе упругого деформирования сжатого скелета внутреннего слоя (при выполнении условия (13)) – формулами (15)–(18). При этом деформированный радиус  $\gamma$  контакта слоев на первом и втором этапах деформирования находится соответственно из уравнений (11), (19).

Полученные в данной работе аналитические соотношения, описывающие НДС двухслойного сферического тела при действии сжимающих нагрузок, могут быть использованы в качестве ос-

новного докритического состояния при решении задач устойчивости многослойных крепей подземных сферических полостей, а также защитных сферических резервуаров, находящихся под действием всестороннего равномерного сжатия в случае упругой работы материалов.

При проведении численного эксперимента все соотношения приводились к безразмерному виду, при этом величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к величине  $\mu_1$ , а имеющие размерность длины – к радиусу  $b$ .

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 2 и 3.

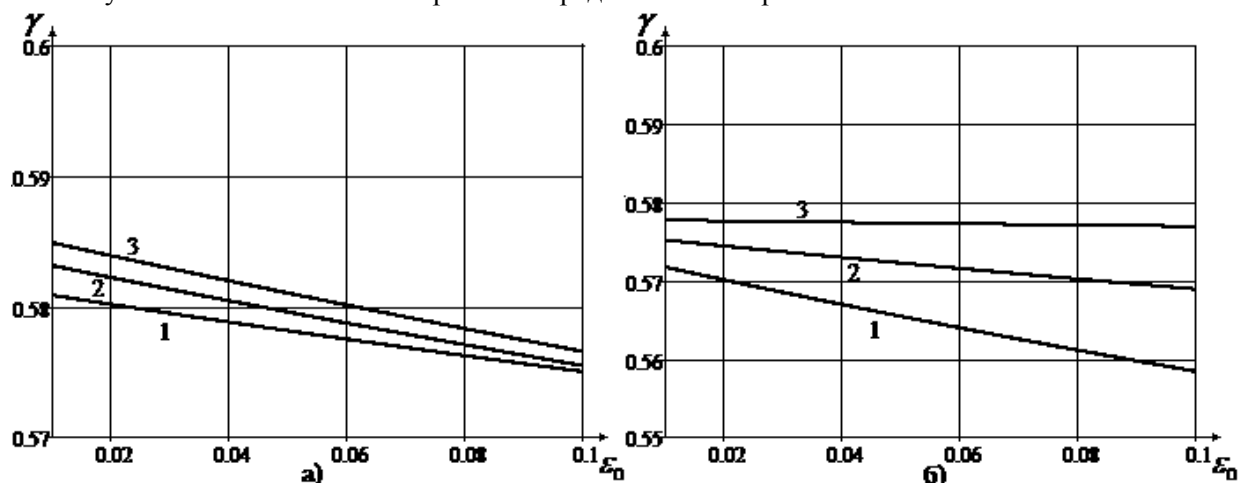


Рис. 2. Зависимость деформированной границы контакта слоев от начального раствора пор при деформировании сжатого скелета: а) 1 –  $\mu_2 = 3$ , 2 –  $\mu_2 = 4$ , 3 –  $\mu_2 = 5$ ; б) 1 –  $\mu_3 = 1$ , 2 –  $\mu_3 = 2$ , 3 –  $\mu_3 = 3$

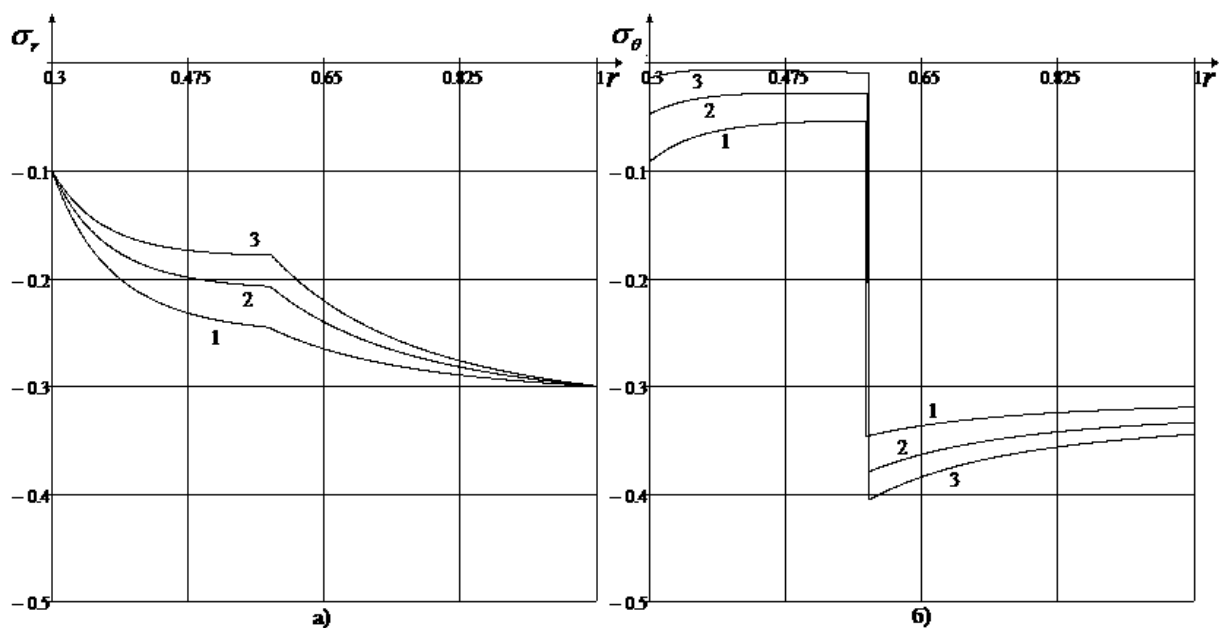


Рис. 3. Зависимость напряжений от координаты при деформировании сжатого скелета

На рис. 3 и 4 кривые 1 соответствуют  $\mu_1 = 1$ , кривые 2 –  $\mu_1 = 2$ , кривые 3 –  $\mu_1 = 3$ .

Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, брались следующими  $q_a = 0,1$ ,  $q_b = 0,3$ ,  $a = 0,3$ ,  $c = 0,6$ ,  $b = 1$ ,  $\epsilon_0 = 0,02$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\lambda_1 = 4$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $\mu_3 = 3$ .

Таким образом, в работе построена математическая модель для описания напряженно-деформированного состояния двухслойного сферического тела с учетом пористой структуры внутреннего слоя при упругой работе материалов. В рамках предложенного подхода к деформированию пористых сред получены аналитические соотношения, описывающие НДС двухслойного сферического тела, находящегося под действием всестороннего равномерного сжатия, на эта-

пах упругого сжатия пор и упругого деформирования тела с полностью сжатой матрицей. Выведена зависимость между внешней и внутренней нагрузками, необходимыми для полного сжатия пор во всей области внутреннего слоя. Для каждого из этапов деформирования получены уравнения для определения деформированной границы контакта слоев. При этом из анализа решений следует, что как при увеличении модуля сдвига  $\mu_2$  сжимаемого скелета на первом этапе деформирования, так и с ростом модуля сдвига  $\mu_2 + \mu_3$  сжатой матрицы величина деформированного радиуса раздела слоев увеличивается. Также для обоих этапов наблюдается убывающая зависимость радиуса контакта слоев от начального раствора пор.

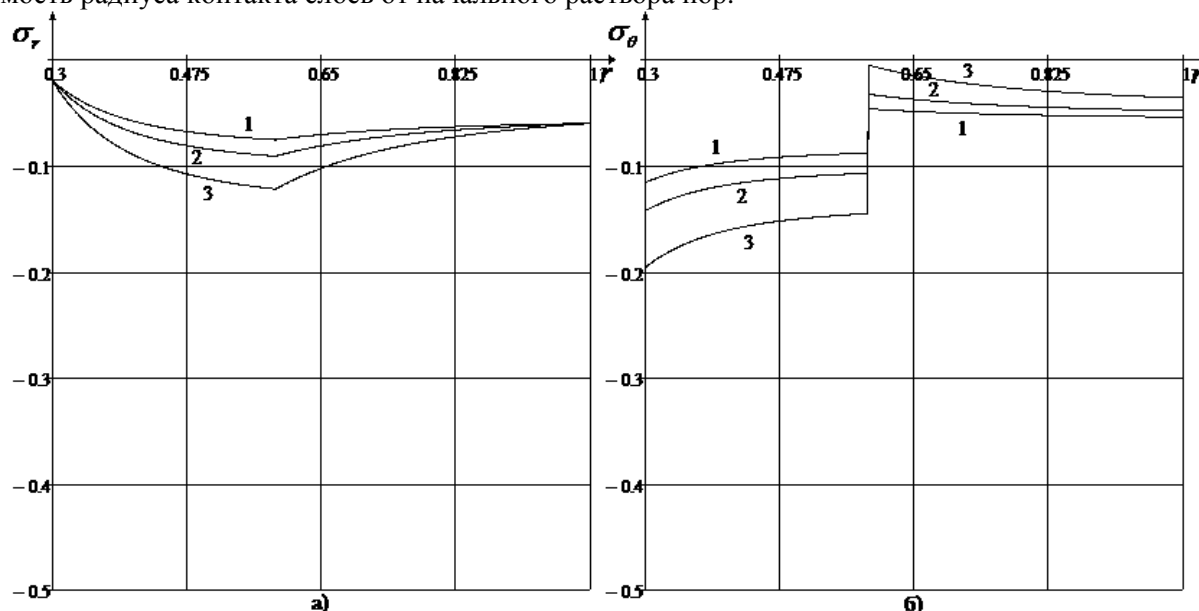


Рис. 4. Зависимость напряжений от координаты при деформировании несжатого скелета

### Литература

1. Спорыхин, А.Н., Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А.Н. Спорыхин, А.И. Шашкин. – М.: Физматлит, 2004. – 231 с.
2. Гоцев, Д.В. Устойчивость монолитной крепи подземного нефтехранилища сферической формы с учетом начальной пористости материала / Д.В. Гоцев, А.Е. Бунтов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4(22). – С. 114–123.
3. Ковалев, А.В. Об определении напряжений и перемещений в упругом пространстве, ослабленном сферической полостью, с учетом температуры / А.В. Ковалев, И.Г. Хвостов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 2(20). – С. 29–35.
4. Садовская, О.В. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О.В. Садовская, В.М. Садовский. – М.: Физматлит, 2008. – 368 с.
5. Гоцев, Д.В. Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок / Д.В. Гоцев, А.Н. Спорыхин. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2010. – 299 с.
6. Гоцев, Д.В. Математическое моделирование напряженно-деформированных состояний пористых цилиндрических и сферических тел при сжатии с учетом неупругого поведения сжатого скелета / Д.В. Гоцев, А.Е. Бунтов, Н.С. Перунов // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы». – Чувашский государственный педагогический университет, 2015. – С. 91–99.

Поступила в редакцию 17 января 2016 г.

**MATHEMATICAL MODEL OF INTENSE DEFORMED STATE OF TWO-LAYERED ELASTIC SPHERICAL BODY WITHIN THE POROSITY STRUCTURE OF THE MATERIAL****D.V. Gotsev, N.S. Perunov**

Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: rbgotsev@mail.ru

Mathematical model describing intense deformed state of two-layered heterogeneous spherical body under uniformly compressing loads within the porosity structure of the inner layer is built. Deformation of the porous medium under the influence of given uniformly compressing loads can be divided into two interrelated phases: deformation of the porous medium and further deformation of compressed matrix. Construction of mathematical model describing stress fields and displacement of the spherical body is carried out in a framework of axially symmetric installation. We have discovered analytical relations, defining the fields of stresses, strains and displacements. We have also discovered the equation for determining the deformed interface between the porous and non-porous areas for the first phase of deformation. Dependence of the external compressive loads that make initial porosity of the material reach its zero value at the whole level has been defined. We have derived analytical form for finding deflected modes in each layer during phase two. We have also deduced an equation for determining strained interface between the porous and nonporous zones. The continuity conditions of the radial component of the stress and displacement at the interface were chosen as the compatibility conditions for the strained interface of the porous and nonporous zones. We have estimated impact of each layer's constant strength on the value of medium's interfacial area. The curves are constructed for every of the stress components displaying the dependence of the coordinates and deformed interface of porous and nonporous zones on the parameter of initial pores' solution within different values of physical-mechanical and geometric parameters of the material and construction.

*Keywords: porous materials; heterogeneous spherical body under compressive load; intense deformed state.*

**References**

1. Sporykhin A.N., Shashkin A.I. *Ustoychivost' ravnovesiya prostranstvennykh tel i zadachi mekhaniki gornykh porod* (Stability of spatial equilibrium of bodies and spatial problems of the mechanics of rock). Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 231 p. (in Russ.).
2. Gotsev D.V., Buntov A.E. *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2014, no. 4(22), pp. 114–123. (in Russ.).
3. Kovalev A.V., Khvostov I.G. *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2014, no. 2(20), pp. 29–35.
4. Sadovskaya O.V., Sadovskiy V.M. *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh mekhaniki sypuchikh sred* (Mathematical modeling in problems of mechanics of bulk materials). Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 368 p. (in Russ.).
5. Gotsev D.V., Sporykhin A.N. *Metod vozmushcheniy v zadachakh ustoychivosti podkreplennykh gornykh vyrabotok* (Perturbation method in problems of underpinned excavation stability). Voronezh, Voronezhskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2010, 299 p. (in Russ.).
6. Gotsev D.V., Buntov A.E., Perunov N.S. *Matematicheskoe modelirovanie napryazhenno-deformirovannykh sostoyaniy poristykh tsilindricheskikh i sfericheskikh tel pri szhatii s uchetom neuprugogo povedeniya szhatogo skeleta* (Mathematical modeling of stress-strain states porous cylindrical and spherical bodies in compression considering inelastic behavior of compressed skeleton). *Materialy Vserossiyskoy nauchnoy shkoly-konferentsii "Mekhanika predel'nogo sostoyaniya i smezhnye voprosy"* (Proceedings of the scientific school-conference "Mechanics limit state and related problems"). Chuvashskiy gosudarstvennyy pedagogicheskiy universitet, 2015, pp. 91–99. (in Russ.).

*Received January 17, 2016*