УДК 519.635.1+517.956.223 DOI: 10.14529/mmph180402

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

В.В. Карачик
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: karachik@susu.ru

Аналогично известному элементарному решению уравнения Лапласа вводится элементарное решение бигармонического уравнения. Находится связь этого элементарного решения с элементарным решением уравнения Лапласа. В зависимости от размерности пространства, в котором исследуется краевая задача, через введенное элементарное решение бигармонического уравнения в явном виде определяется некоторая симметричная функция двух переменных. Затем доказывается, что эта функция обладает свойствами функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре. Отдельно исследуются два случая, когда размерность пространства два и когда размерность пространства больше двух. Аналогично функции Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре находится разложение функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре по полной, ортогональной на единичной сфере системе однородных гармонических многочленов. Это сделано в случае размерности пространства больше четырех. С помощью полученного разложения функции Грина вычисляется интеграл по шару с ядром из функции Грина от однородного гармонического многочлена, умноженного на положительную степень нормы независимой переменной. Полученные результаты согласуются с результатами, известными ранее в этой области.

Ключевые слова: задача Дирихле; бигармоническое уравнение; функция Грина.

Пусть $S=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$ – n-мерный единичный шар в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$, а $\partial S=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$ – единичная сфера. В единичном шаре S рассмотрим следующую однородную краевую задачу Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u=f(x),\quad x\in S, \tag{1}$$

$$u|_{\partial S}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial S}=0, \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ – внешняя нормальная производная к единичной сфере, $f\in C^1(\bar{S})$ – заданная функция. Найдем явное представление функции Грина этой краевой задачи. Хорошо известно (см., например, [1]), что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре при $n\ge 2$ имеет вид

$$G(x,\xi)=E(x,\xi)-E\Big(\frac{x}{|x|},|x|\,\xi\Big), \tag{3}$$

где

$$E(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-2}|x-\xi|^{2-n}, & n>2\\ -\ln|x-\xi|, & n=2\end{cases} \tag{4}$$

– элементарное решение уравнения Лапласа [1]. Явная форма функции Грина в секторе для бигармонического и тригармонического уравнений приведена в работах [2, 3]. Функция Грина задачи Неймана для уравнения Пуассона в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ в явном виде построена в [4], а функция Грина для задачи Робена в круге в работах [5–7]. Отметим также работы [8, 9], которые посвящены построению функции Грина для задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре и работы [10, 11], где найден оператор Грина задачи Дирихле для бигармонического и полигармонического уравнения в единичном шаре при полиномиальных данных. В работе [12] найдена функция Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона. В работах [13, 14] дано представление функции Грина для классических внешней и внутренней задач Неймана для уравнения Пуассона в единичном шаре.

Рассмотрим следующую функцию

$$E_4(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(n-2)(n-4)}|x-\xi|^{4-n}, & n>4, n=3\\ -\dfrac{1}{4}\ln|x-\xi|, & n=4\\ \dfrac{|x-\xi|^2}{4}\big(\ln|x-\xi|-1\big), & n=2\end{cases}, \tag{5}$$

которую, по аналогии с функцией $E(x,\xi)$ из (4), назовем элементарным решением бигармонического уравнения.

Лемма 1. Функция $E_4(x,\xi)$, определенная при $\xi\neq x$, удовлетворяет равенствам

$$\Delta_\xi E_4(x,\xi)=-E(x,\xi),\quad \Delta_x E_4(x,\xi)=-E(x,\xi)$$

и значит является бигармонической по x и ξ при $\xi\neq x$.

Доказательство. В силу симметричности функции $E_4(x,\xi)$ достаточно доказать лишь первое равенство. Пусть $n>4$ или $n=3$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}|x-\xi|^{4-n}=\left(2-\frac{n}{2}\right)2\big(\xi_i-x_i\big)|x-\xi|^{2-n}=(4-n)\big(\xi_i-x_i\big)|x-\xi|^{2-n}$$

и значит

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}|x-\xi|^{4-n}=(4-n)\Big(|x-\xi|^{2-n}+(2-n)\big(\xi_i-x_i\big)^2|x-\xi|^{-n}\Big).$$

Поэтому

$$\Delta_\xi|x-\xi|^{4-n}=(4-n)\sum_{i=1}^{n}\Big(|x-\xi|^{2-n}+(2-n)\big(\xi_i-x_i\big)^2|x-\xi|^{-n}\Big)=$$

$$=(4-n)\left(n|x-\xi|^{2-n}+(2-n)|x-\xi|^{-n}\sum_{i=1}^{n}\big(\xi_i-x_i\big)^2\right)=2(4-n)|x-\xi|^{2-n}.$$

Отсюда следует доказываемое равенство

$$\Delta_\xi E_4(x,\xi)=-\frac{1}{(n-2)}|x-\xi|^{2-n}=-E(x,\xi).$$

При $n=4$ будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}\ln|x-\xi|=\frac{(\xi_i-x_i)}{|x-\xi|^2},\quad \frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\ln|x-\xi|=\frac{|x-\xi|^2-2(\xi_i-x_i)^2}{|x-\xi|^4}$$

и значит

$$\Delta_\xi\Big(-\frac{1}{4}\ln|x-\xi|\Big)=-\frac{1}{4}\frac{2|x-\xi|^2}{|x-\xi|^4}=-\frac{1}{2}\frac{1}{|x-\xi|^2}=-E(x,\xi).$$

При $n=2$ будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}|x-\xi|^2\ln|x-\xi|=2(\xi_i-x_i)\ln|x-\xi|+|x-\xi|^2\frac{\xi_i-x_i}{|x-\xi|^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}|x-\xi|^2\ln|x-\xi|=2\ln|x-\xi|+4\frac{(\xi_i-x_i)^2}{|x-\xi|^2}+|x-\xi|^2\frac{|x-\xi|^2-2(\xi_i-x_i)^2}{|x-\xi|^4}$$

и значит

$$\Delta_\xi\big(|x-\xi|^2\ln|x-\xi|\big)=4\ln|x-\xi|+4.$$

Поэтому

$$\Delta_\xi E_4(x,\xi)=\Delta_\xi\Big(\frac{|x-\xi|^2}{4}\big(\ln|x-\xi|-1\big)\Big)=\ln|x-\xi|+1-1=-E(x,\xi)\,.$$

Последнее равенство легко также проверить с помощью *Mathematica*.

В силу свойства элементарного решения $\Delta_\xi E(x,\xi)=0$ при $\xi\neq x$ получаем бигармоничность функции $E_4(x,\xi)$ при $\xi\neq x$. Лемма доказана.

Рассмотрим однородный дифференциальный оператор $\Lambda u=\sum_{k=1}^{n}x_i u_{x_i}$ [17], который обладает полезным в дальнейшем свойством

$$\Big(\Lambda u-\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)\Big|_{\partial S}=0\,. \qquad (6)$$

Теорема 1. Пусть $n\geq 3$. Функция

$$G_4(x,\xi)=E_4(x,\xi)-E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)-\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big) \qquad (7)$$

является функцией Грина задачи Дирихле (1), (2), а именно функция

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_S G_4(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi\,, \qquad (8)$$

где $f\in C^1(\bar S)$ является решением задачи (1), (2). Функция Грина $G_4(x,\xi)$ симметрична относительно x и ξ и бигармоническая при $x,\xi\in S$, $x\neq\xi$.

Доказательство. Пусть $n>4$ или $n=3$ и $\xi\in S$ фиксировано. Докажем, что функция $G_4(x,\xi)$ бигармоническая при $x,\xi\in S$, $x\neq\xi$ и удовлетворяет однородным условиям (2).

Бигармоничность функции $E_4(x,\xi)$ доказана в лемме 1. Бигармоничность функции $E_4(x/|x|,|x|\xi)$ по обеим переменным при $x,\xi\in S$ следует из равенства

$$\big|x/|x|-|x|\xi\big|^{4-n}=\big|x/|x|-|x|\xi\big|^{2-n}\big|x/|x|-|x|\xi\big|^2,$$

поскольку функция $\big|x/|x|-|x|\xi\big|^{2-n}=E(x/|x|,|x|\xi)$ - гармоническая по $x,\xi\in S$ (это преобразование Кельвина по x гармонической функции $E(x,\xi)$ [18]) и

$$\Big|\frac{x}{|x|}-\xi|x|\Big|^2=\frac{|x|^2}{|x|^2}-2\Big(\frac{x}{|x|},\xi|x|\Big)+|\xi|^2|x|^2=1-2(x,\xi)+|\xi|^2|x|^2, \qquad (9)$$

а произведение таких функций – бигармоническая функция по $x,\xi\in S$. Аналогично функция

$$\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)$$

бигармоническая по $x,\xi\in S$, поскольку функция $E(x/|x|,|x|\xi)$ гармоническая по $x,\xi\in S$. Очевидно, что при $\xi\in S$ переменная x может принимать значение на ∂S.

Далее, при $\xi\in S$ функция $E(x/|x|,|x|\xi)$ ограничена по $x\in\bar S$ и значит первое условие из (2) выполнено

$$G_4(x,\xi)|_{x\in\partial S}=\Big(E_4(x,\xi)-E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)-\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)\Big)\Big|_{x\in\partial S}=0.$$

Докажем второе условие из (2). Нетрудно подсчитать

$$2(n-2)(n-4)\Lambda_x E_4(x,\xi)=\Lambda_x|x-\xi|^{4-n}=(4-n)\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|^{n-2}}=(4-n)\frac{|x|^2-(x,\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}$$

и

$$2(n-2)(n-4)\Lambda_x E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)=\Lambda_x\Big(1-2(x,\xi)+|x|^2|\xi|^2\Big)^{2-n/2}=$$

$$=\frac{4-n}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{-2\xi_i+2x_i|\xi|^2}{\big(1-2(x,\xi)+|x|^2|\xi|^2\big)^{n/2-1}}=(4-n)\frac{|x|^2|\xi|^2-(x,\xi)}{\big|x/|x|-|x|\xi\big|^{n-2}},$$

а поэтому при $x\in\partial S$

$$\Lambda_x\Big(E_4(x,\xi)-E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)\Big)=-\frac{1}{2(n-2)}\frac{|x|^2-|x|^2|\xi|^2}{\big|x/|x|-|x|\xi\big|^{n-2}}=\frac{|\xi|^2-1}{2}\frac{1}{n-2}\frac{1}{\big|x/|x|-|x|\xi\big|^{n-2}}=$$

$$=\frac{|\xi|^2-1}{2}E\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)=\Lambda_x\Big(\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)\Big).$$

Если перенести члены из правой части этого в левую часть, воспользоваться (6) и определением $G_4(x,\xi)$ найдем

$$\frac{\partial}{\partial\nu}G_4(x,\xi)\big|_{\partial S}=0.$$

Случаи $n>4$ и $n=3$ доказаны. Пусть $n=4$. Бигармоничность $E_4(x,\xi)$ при $x\neq\xi$ доказана в лемме 1. Если обозначить

$$-4E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)=\ln\Big|\frac{x}{|x|}-|x|\xi\Big|=\frac{1}{2}\ln\Big(1-2(x,\xi)+|x|^2|\xi|^2\Big)\equiv\frac{1}{2}\ln t,$$

то

$$-4\frac{\partial}{\partial x_i}E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)=\frac{-\xi_i+x_i|\xi|^2}{t},\quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)=-2\frac{(-\xi_i+x_i|\xi|^2)^2}{t^2}+\frac{|\xi|^2}{t}$$

при $i=1,\ldots,4$ и значит

$$-4\Delta_x E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)=-2\frac{|\xi|^2\,(1-2(x,\xi)+|x|^2|\xi|^2)}{t^2}+4\frac{|\xi|^2}{t}=$$

$$=2\frac{|\xi|^2}{t}=\frac{2|\xi|^2}{\big|x/|x|-|x|\xi\big|^2}=\frac{2|\xi|^2}{|x|^2\big|x/|x|^2-\xi\big|^2}.$$

Последняя функция является преобразованием Кельвина по x гармонической при $n=4$ функции $2|\xi|^2/\big|x-\xi\big|^2$, а поскольку преобразование Кельвина сохраняет гармоничность [18], то эта функция гармоническая по $x\in S$, а значит $E_4\big(x/|x|,|x|\xi\big)$ – бигармоническая по $x\in S$.

Проверим граничные условия (2). Начнем со второго. Нетрудно вычислить

$$-4\Lambda_x E_4(x,\xi)=\Lambda_x\ln|x-\xi|=\sum_{i=1}^{4}x_i\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|^2}=\frac{|x|^2-(x,\xi)}{|x-\xi|^2}$$

и

$$-4\Lambda_x E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)=\frac{1}{2}\Lambda_x\ln\Big(1-2(x,\xi)+|x|^2|\xi|^2\Big)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}x_i\frac{-2\xi_i+2x_i|\xi|^2}{1-2(x,\xi)+|x|^2|\xi|^2}=\frac{|x|^2|\xi|^2-(x,\xi)}{\big|x/|x|-|x|\xi\big|^2},$$

а поэтому при $x\in\partial S$

$$\Lambda_x\Big(E_4(x,\xi)-E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)\Big)=-\frac{1}{4}\frac{|x|^2-|x|^2|\xi|^2}{\big|x/|x|-|x|\xi\big|^2}=\frac{|\xi|^2-1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\big|x/|x|-|x|\xi\big|^2}=$$

$$=\frac{|\xi|^2-1}{2}E\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)=\Lambda_x\Big(\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)\Big).$$

Отсюда, после перенесения функции справа в левую часть равенства, получаем, что при $n=4$ функция $G_4(x,\xi)$ из (7) при $x\in S$ удовлетворяет условию $\frac{\partial}{\partial\nu}G_4(x,\xi)|_{\partial S}=0$. Условие

$G_4(x,\xi)|_{\partial S}=0$ при $\xi\in S$ очевидно тоже выполнено, поскольку функция $E(x/|x|,|x|\xi)$ ограничена по $x\in\overline{S}$.

Известно [18], что интегралы типа потенциала

$$\int_S \frac{\rho(\xi)}{|x-\xi|^{\alpha}}d\xi$$

являются функциями класса $C^p(\mathbb{R}^n)$ при ограниченной интегрируемой функции $\rho(x)$, причем дифференцирование возможно под знаком интеграла при всяком целом неотрицательном p таком, что $\alpha+p<n$. В нашем случае $\alpha=n-4$, а значит для интеграла

$$u_1(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_S E_4(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

$p=3$ и $u_1\in C^3(\mathbb{R}^n)$. Поэтому, учитывая лемму 1, при $x\in S$ получим

$$\Delta u_1(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_S \Delta_x E_4(x,\xi)f(\xi)d\xi=-\frac{1}{\omega_n}\int_S E(x,\xi)f(\xi)d\xi,$$

а значит, по свойству объемного потенциала [1] получим

$$\Delta^2 u_1(x)=\Delta\Big(-\frac{1}{\omega_n}\int_S E(x,\xi)f(\xi)d\xi\Big)=f(x),\quad x\in S.$$

Условие $f\in C^1(\overline{S})$ необходимо для выполнения равенства

$$\Delta(\Delta u_1(x))=f(x)$$

в S [1]. Выше было доказано, что функция

$$-E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)-\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)$$

является бигармонической по x в S при любом $\xi\in S$ и ее можно дифференцировать по x под знаком интеграла по ξ любое число раз. Обозначая интеграл по $\xi\in S$ от этой функции, умноженной на $1/\omega_n f(\xi)$, через $u_2(x)$ найдем

$$\Delta^2 u_2(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int_S \Delta_x^2\Big(E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)+\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)\Big)f(\xi)d\xi=0.$$

Поэтому, учитывая (7), функция $u(x)$ из (8) удовлетворяет равенству

$$\Delta^2 u(x)=\Delta^2 u_1(x)+\Delta^2 u_2(x)=f(x).$$

Наконец, в силу того, что $u\in C^3(\overline{S})$ и найденных граничных значений $G_4(x,\xi)$, найдем

$$u(x)|_{\partial S}=\frac{1}{\omega_n}\int_S G_4(x,\xi)|_{x\in\partial S}\ f(\xi)d\xi=0,\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial S}=\frac{1}{\omega_n}\int_S \frac{\partial G_4(x,\xi)}{\partial\nu}\Big|_{x\in\partial S}\ f(\xi)d\xi=0,$$

а значит условия (2) для функции $u(x)$ выполнены.

Симметричность функции Грина следует из вида функций $E_4(x,\xi)$, $E(x,\xi)$ и формулы (9). Теорема доказана.

Вид функции Грина, полученный в теореме 1, отличается от найденного в [8].

Замечание 1. Функцию Грина $G_4(x,\xi)$ с учетом леммы 1 можно записать в виде

$$G_4(x,\xi)=E_4(x,\xi)-E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)+\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}\Delta E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big).$$

Теорему 1 можно дополнить следующим утверждением.

Теорема 2. Пусть функция $E_4(x,\xi)$ находится из (5) при $n=2$. Тогда функция

$$G_4(x,\xi)=E_4(x,\xi)-E_4\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)-\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}\Big(E\Big(\frac{x}{|x|},|x|\xi\Big)+\frac{1}{2}\Big)$$

является функцией Грина задачи Дирихле (1), (2) при $n=2$. Функция Грина симметрична и бигармоническая при $x,\xi\in S$, $x\neq\xi$.

Доказательство. Докажем, что функция $G_4(x,\xi)$ бигармоническая при $x,\xi\in S$ и $x\neq\xi$ и удовлетворяет однородным условиям (2). Бигармоничность функции

$$E_4(x,\xi)=\frac{|x-\xi|^2}{4}\left(\ln|x-\xi|-1\right)$$

при $x\neq\xi$ была установлена в лемме 1. Исследуем функцию $E_4\left(x/|x|,|x|\xi\right)$. Аналогично случаю $n=4$ обозначим

$$\ln\left|\frac{x}{|x|}-|x|\xi\right|=\frac{1}{2}\ln\left(1-2(x,\xi)+|x|^2|\xi|^2\right)\equiv\frac{1}{2}\ln t.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2}\ln t=\frac{-\xi_i+x_i|\xi|^2}{t},\quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\frac{1}{2}\ln t=-2\frac{(-\xi_i+x_i|\xi|^2)^2}{t^2}+\frac{|\xi|^2}{t}$$

и значит

$$\Delta_x\frac{1}{2}\ln t=-2\frac{|\xi|^2\,(1-2(x,\xi)+|x|^2|\xi|^2)}{t^2}+2\frac{|\xi|^2}{t}=0,$$

т. е. функция $\ln\left|x/|x|-|x|\xi\right|$ гармоническая по $x\in S$. Так как множитель перед логарифмом в $E_4(x,\xi)$ равен $\left|x/|x|-|x|\xi\right|^2=1-2(x,\xi)+|x|^2|\xi|^2$, то функция $E_4\left(x/|x|,|x|\xi\right)$ при $n=2$ бигармоническая по x при $x,\xi\in S$. Наконец, функция

$$\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}\left(E\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right)+\frac{1}{2}\right)$$

бигармоническая, поскольку функция $E\left(x/|x|,|x|\xi\right)$ – гармоническая при $x,\xi\in S$.

Проверим граничные условия (2). Начнем со второго. Нетрудно видеть, что

$$\Lambda_x|x-\xi|^2=2(|x|^2-(x,\xi)),\quad \Lambda_x\ln|x-\xi|=\frac{|x|^2-(x,\xi)}{|x-\xi|^2},$$

а поэтому

$$4\Lambda_x E_4(x,\xi)=2(|x|^2-(x,\xi))\left(\ln|x-\xi|-1\right)+|x|^2-(x,\xi)=\left(|x|^2-(x,\xi)\right)(2\ln|x-\xi|-1)$$

Аналогично случаю $n=4$ найдем

$$\Lambda_x\left|x/|x|-|x|\xi\right|^2=2(|x|^2|\xi|^2-(x,\xi)),\quad \Lambda_x\ln\left|x/|x|-|x|\xi\right|=\frac{|x|^2|\xi|^2-(x,\xi)}{\left|x/|x|-|x|\xi\right|^2},$$

а поэтому, поскольку оператор Λ первого порядка, найдем

$$4\Lambda_x E_4\left(x/|x|,|x|\xi\right)=2(|x|^2|\xi|^2-(x,\xi))\left(\ln\left|x/|x|-|x|\xi\right|-1\right)+$$

$$+\left|x/|x|-|x|\xi\right|^2\frac{|x|^2|\xi|^2-(x,\xi)}{\left|x/|x|-|x|\xi\right|^2}=\left(|x|^2|\xi|^2-(x,\xi)\right)\left(2\ln\left|x/|x|-|x|\xi\right|-1\right).$$

Таким образом, при $x\in\partial S$ будем иметь

$$4\Lambda_x\left(E_4(x,\xi)-E_4\left(x/|x|,|x|\xi\right)\right)=\left(2\ln\left|x/|x|-|x|\xi\right|-1\right)(1-|\xi|^2)=$$

$$=4\left(-\ln\left|x/|x|-|x|\xi\right|+\frac{1}{2}\right)\frac{|\xi|^2-1}{2}=4\left(E\left(x/|x|,|x|\xi\right)+\frac{1}{2}\right)\frac{|\xi|^2-1}{2}=$$

$$=4\Lambda_x\left(\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}\left(E\left(x/|x|,|x|\xi\right)+\frac{1}{2}\right)\right).$$

Сокращая полученное равенство на 4 и перенося члены из правой части в левую часть, получим $\frac{\partial}{\partial\nu}G_4(x,\xi)\big|_{x\in\partial S}=0$. Условие $G_4(x,\xi)|_{x\in\partial S}=0$, где $\xi\in S$, очевидно тоже выполнено. Дальнейшее доказательство повторяет конец доказательства теоремы 1, в силу которого дифференцирование и предельный переход можно внести под знак интеграла в формуле (8). Симметрия доказывается аналогично. Теорема доказана.

Пусть $\{H_k^{(i)}(x): i=1,\dots,h_k, k\in\mathbb{N}_0\}$ – полная система однородных степени $k\in\mathbb{N}_0$ ортогональных сферических гармоник (см., например, [15]), нормированных так, что $\int_{\partial S}(H_k^{(i)}(\xi))^2\,ds_\xi=\omega_n$, где h_k – размерность базиса однородных гармонических многочленов степени k [16], а ω_n – площадь единичной сферы ∂S. Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $n>4$. Функция $G_4(x,\xi)$ при $|\xi|<|x|$ может быть записана в виде

$$G_4(x,\xi)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{|x|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2}\left(\frac{|x|^2}{2k+n-4}-\frac{|\xi|^2}{2k+n}\right)-\frac{1}{2k+n-2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2k+n-4}-\frac{|x|^2|\xi|^2}{2k+n}+\frac{|x|^2-1}{2}\left(|\xi|^2-1\right)\right)\Big)\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi).$$

При $|x|<|\xi|$ представление для $G_4(x,\xi)$ получается из приведенного выше перестановкой местами переменных x и ξ.

Замечание 2. С помощью теоремы 3 вычисляется интеграл

$$\frac{1}{\omega_n}\int_S G_4(x,\xi)|\xi|^{2l}\,H_m(\xi)\,d\xi=\frac{|x|^{2l+4}-1-(l+2)(|x|^2-1)}{C_{l,m}}H_m(x),$$

где $C_{l,m}=(2l+2)(2l+4)(2l+2m+n)(2l+2m+n+2)$ и $H_m(x)$ – однородный степени $m\in\mathbb{N}_0$ гармонический многочлен. Похожий результат при $l\in\mathbb{N}_0$ был получен в [19] с помощью результатов [20]. Представление функции $E(x,\xi)$, аналогичное полученному в теореме 2, было найдено ранее в [21], а равномерная сходимость аналогичных рядов исследовалась в [22].

Литература

1. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1982. – 336 с.

2. Wang, Y. Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector / Y. Wang, L. Ye // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2013. – Vol. 58, no. 1. – P. 7–22.

3. Wang, Y. Tri-harmonic boundary value problems in a sector / Y. Wang // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2014. – Vol. 59. – Issue 5. – P. 732–749.

4. Constantin, E. Green function of the Laplacian for the Neumann problem in $\mathbb{R}_+^n$ / E. Constantin, N.H. Pavel // Libertas Mathematica. – 2010. – Vol. 30. – P. 57–69.

5. Begehr, H. Modified harmonic Robin function / H. Begehr, T. Vaitekhovich // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2013. – Vol. 58. – Issue 4. – P. 483–496.

6. Sadybekov, M.A. On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle / M.A. Sadybekov, B.T. Torebek, B.Kh. Turmetov // AIP Conf. Proc. – 2015. – Vol. 1611. – P. 255–260.

7. Sadybekov, M.A. On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle / M.A. Sadybekov, B.T. Torebek, B.Kh. Turmetov // Advances in Pure and Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 6, Issue 3. – P. 163–172.

8. Кальменов, Т.Ш. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре / Т.Ш. Кальменов, Б.Д. Кошанов, М.Ю. Немченко // Доклады Академии Наук. – 2008. – Т. 421, № 3. – С. 305–307.

9. Кальменов, Т.Ш. О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения / Т.Ш. Кальменов, Д. Сураган // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 435–438.

10. Карачик, В.В. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. 15, № 2. – С. 86–98.

11. Карачик, В.В. Функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных / В.В. Карачик // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 4(2). – С. 550–558.

12. Карачик, В.В. О функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона / В.В. Карачик, Б.Х. Турметов // Математические труды. – 2018. – Т. 21, № 1. – С. 17–34.

13. Садыбеков, М.А. Представление функции Грина внешней задачи Неймана для оператора Лапласа / М.А. Садыбеков, Б.Т. Торебек, Б.Х. Турметов // Сиб. матем. журн. – 2017. – Т. 58, № 1. – С. 199–205.

14. Sadybekov, M.A. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball / M.A. Sadybekov, B.T. Torebek, B.Kh. Turmetov // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2016. – Vol. 61, no. 1. – P. 104–123.

15. Karachik, V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of American Mathematical Society. – 1998. – Vol. 126, no. 12. – P. 3513–3519.

16. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1966. – 295 с.

17. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 7. – С. 1149–1170.

18. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

19. Карачик, В.В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 1038–1047.

20. Карачик, В.В. Об одном разложении типа Альманси / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2008. – Т. 83, № 3. – С. 370–380.

21. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1674–1694.

22. Карачик, В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения / В.В. Карачик // Математические труды. – 2016. – № 2. – С. 86–108.

Поступила в редакцию 8 июня 2018 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2018, vol. 10, no. 4, pp. 13–22

DOI: 10.14529/mmph180402

ON REPRESENTATION OF GREEN’S FUNCTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR BIHARMONIC EQUATION IN A BALL

V.V. Karachik
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: karachik@susu.ru

Elementary solution of a biharmonic equation is introduced in analogy to the known elementary solution of the Laplace equation. Relation of this elementary solution with the elementary solution of the Laplace equation gets determined. Depending on dimensionality of space in which a boundary problem is being under research, a symmetric function of two variables gets determined in explicit form through the introduced elementary solution. Then it gets proved that this function possesses properties of Green’s function of the Dirichlet problem for biharmonic equation in a unit ball. Two cases when space dimensionality equals two and when space dimensionality is more than two are being researched separately. Analogous to Green’s function of the Dirichlet problem for Poisson’s equation in a ball, there is expansion of Green’s function of the Dirichlet problem for biharmonic equation in a ball in the full, orthogonal-at-the-unit-sphere, system of homogenous harmonic polynominals. This is to be done in case when space dimensionality is more than four. Using the obtained expansion of Green's function, integral gets calculated by a ball with the kernel out of Green's function from a homogenous harmonic polynominal multiplied by the positive degree of norm of the independent variable. The obtained results get complied with the previously known results in this sphere.

Keywords: Dirichlet problem; biharmonic equation; Green's function.

References

1. Bitsadze A.V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics), Moscow, Nauka Publ., 1982, 336 p. (in Russ.).

2. Wang Y., Ye L. Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2013, Vol. 58, no. 1, pp. 7–22. DOI: 10.1080/17476933.2010.551199

3. Wang Y. Tri-harmonic boundary value problems in a sector. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2014, Vol. 59, Issue 5, pp. 732–749. DOI: 10.1080/17476933.2012.759566

4. Constantin E., Pavel N.H. Green function of the Laplacian for the Neumann problem in $\mathbb{R}_+^n$. *Libertas Mathematica*, 2010, Vol. 30, pp. 57–69.

5. Begehr H., Vaitekhovich T. Modified harmonic Robin function. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2013, Vol. 58, Issue 4, pp. 483–496. DOI: 10.1080/17476933.2011.625092

6. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle. *AIP Conf. Proc.*, 2015, Vol. 1611, pp. 255–260. DOI: 10.1063/1.4893843

7. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, 2015, Vol. 6, Issue 3, pp. 163–172. DOI: 10.1515/apam-2015-0003

8. Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Yu. Green function representation in the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball. *Dokl. Math.*, 2008, Vol. 78, Issue 1, pp. 528–530. DOI: 10.1134/S1064562408040169

9. Kal'menov T.Sh., Suragan D. On a new method for constructing the Green Function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation. *Differ. Equ.*, 2012, Vol. 48, Issue 3, pp. 441–445. DOI: 10.1134/S0012266112030160

10. Karachik V.V., Antropova N.A. On polynomial solutions to the Dirichlet problem for a biharmonic equation in a ball. *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 2012, Vol. 15, no. 2, pp. 86–98. (in Russ.).

11. Karachik V.V. Green Function of the Dirichlet Boundary Value Problem for Polyharmonic Equation in a Ball Under Polynomial Data. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, Vol. 14, no. 4(2), pp. 550–558. (in Russ.).

12. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. *Matematicheskie Trudy*, 2018, Vol. 21, no. 1, pp. 17–34. (in Russ.).

13. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.K. Representation of the Green's function of the exterior Neumann problem for the Laplace operator. *Siberian Mathematical Journal*, 2017, Vol. 58, no. 1, pp. 153–158. DOI: 10.1134/S0037446617010190

14. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2016, Vol. 61, no. 1. pp. 104–123. DOI: 10.1080/17476933.2015.1064402

15. Karachik V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials. *Proceedings of American Mathematical Society*, 1998, Vol. 126, no. 12, pp. 3513–3519. DOI: 10.1090/S0002-9939-98-05019-9

16. Bateman H., Erdelyi A. *Higher transcendental functions*. Vol. 2 . McGraw-Hill, New York-London, 1953, 396 p.

17. Karachik V.V. Construction of Polynomial Solutions to the Dirichlet Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, Vol. 54, Issue 7, pp. 1122–1143. DOI: 10.1134/S0965542514070070

18. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow, Nauka Publ., 1981, 512 p. (in Russ.).

19. Karachik V.V. Solution of the Dirichlet problem with polynomial data for the polyharmonic equation in a ball. *Differential Equations*, 2015, Vol. 51, no. 8, pp. 1033–1042. DOI: 10.1134/S0012266115080078

20. Karachik V.V. On an expansion of Almansi type. *Mathematical Notes*, 2008, Vol. 83, pp. 335–344. DOI: 10.1134/S000143460803005X

21. Karachik V.V. Construction of polynomial solutions to some boundary value problems for Poisson's equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, Vol. 51, no. 9, pp. 1567–1587. DOI: 10.1134/S0965542511090120

22. Karachik V.V. A Neumann-type problem for the biharmonic equation. *Siberian Advances in Mathematics*, 2017, Vol. 27, Issue 2, pp. 103–118. DOI: 10.3103/S105513441702002X

Received June 8, 2018