Механика

УДК 532.529 **DOI: 10.14529/mmph180406**

РАВНОВЕСНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

Ю.М. Ковалев, Ф.Г. Магазов, Е.С. Шестаковская
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: leshest@list.ru

На основании общих уравнений сохранения гетерогенных многокомпонентных смесей построена математическая модель равновесной двухфазной смеси. Данная математическая модель была исследована на гиперболичность и на инвариантность относительно преобразования Галилея. Была показана гиперболичность математической модели равновесной двухфазной смеси, что доказало возможность проведения расчетов быстропротекающих процессов, например, процессов инициирования детонации в конденсированных взрывчатых веществах сильными ударными волнами. Гиперболичность математической модели равновесной двухфазной смеси приводит к тому, что скорость распространения возмущений (скорость звука) в смеси является конечной величиной. Данное обстоятельство очень важно при анализе процессов выхода инициирующих ударных волн на режим детонации. Предположение о равновесности смеси для расчетов инициирования детонации значительно упрощает общую математическую модель гетерогенных многокомпонентных смесей. Показано, что система законов сохранения в равновесной математической модели двухфазной смеси может быть сведена к системе законов сохранения для смеси, когда замыкающими уравнениями являются уравнения состояния для удельной внутренней энергии и давления фаз, а также обычные для гетерогенных смесей соотношения. В рамках равновесной математической модели двухфазной смеси было проведено обоснование согласования энергетики фазовых переходов. Было учтено, что фазовые переходы в детонационной волне происходят при постоянном объеме.

Анализ равновесной математической модели двухфазной смеси на инвариантность относительно преобразования Галилея показал ее инвариантность, что подтверждает правильность сделанных в работе допущений.

Ключевые слова: математическая модель; двухфазная смесь; уравнение состояния; быстропротекающий процесс; ударная волна.

Введение

Математические модели сплошных сред, широко применяемые для решения различных задач физики, химии и технологии, содержат, как правило, упрощающие гипотезы и эмпирические параметры. Это позволило разделить единую науку – механику сплошной среды, на направления, в каждом из которых для отыскания решений формулируются дополнительные упрощающие гипотезы и применяются оригинальные методы. Несмотря на то, что такой подход оказался эффективным для построения аналитических решений, применение основанных на упрощающих гипотезах математических моделей механики сплошных сред для математического моделирования сложных динамических процессов не позволяет в полной мере использовать возможности современной вычислительной техники. В силу того, что физический эксперимент все чаще стал заменяться математическим, успехи в этом направлении невозможны без создания математических моделей нового поколения, учитывающих неоднородность и реальные свойства веществ.

Наиболее полными и перспективными являются математические модели, основанные на гипотезе взаимопроникающих взаимодействующих континуумов [1–7]. В классе этих математических моделей есть простые и более сложные. Сложность математических моделей зависит от сделанных упрощений. Из-за сложности математической модели в процессе упрощения при переходе от общей математической модели к частной могут возникать физические противоречия такие как, например, не инвариантность относительно преобразования Галилея [8, 9].

В настоящее время теория математических моделей механики многокомпонентных сред активно развивается. С помощью изучения и применения упрощенных математических моделей идет накопление информации и опыта решения задач механики многокомпонентных сред. Продолжают сосуществовать диффузионные модели и математические модели, основанные на теории взаимопроникающих взаимодействующих континуумов. Математические модели, основанные на теории взаимопроникающих взаимодействующих континуумов, являются не замкнутыми. Для замыкания их требуются дополнительные соотношения, определяющие взаимодействие компонентов и фаз.

Целью настоящего исследования является построение равновесной математической модели, основанной на теории взаимопроникающих взаимодействующих континуумов, для исследования процессов инициировании и распространения детонационных волн в конденсированных взрывчатых веществах.

1. Общие уравнения сохранения многокомпонентных гетерогенных сред

Для описания как гомогенных, так и гетерогенных смесей методами механики сплошной среды необходимо ввести понятие многоскоростного континуума и определить взаимопроникающее движение его составляющих. Многоскоростной континуум представляет собой совокупность N континуумов, каждый из которых относится к своей составляющей (фазе или компоненту) смеси один и тот же объем, занятый смесью. Каждый из этих составляющих континуумов в каждой точке характеризуется своей приведенной плотностью ρ_i (масса i-й составляющей в единице объема среды), скоростью v_i (i = 1, 2, …, N) и другими параметрами, относящимися к своему континууму и своей составляющей смеси. Таким образом, в каждой точке объема, занятого смесью, будет определено N плотностей ρ_i, N скоростей v_i, по которым можно определить параметры смеси в целом, такие как: плотность смеси, среднемассовую (барицентрическую) скорость смеси, тензор поверхностных сил σ^{kl} и вектор массовых сил g

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i , \quad \rho v = \sum_{i=1}^{N} \rho_i v_i , \tag{1}$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i , \quad \rho g = \sum_{i=1}^{N} \rho_i g_i , \tag{2}$$

где σ_i – тензор поверхностных сил, относящийся к i-ой компоненте, а g_i – вектор массовых сил, относящийся к i-ой компоненте.

Для определения скорости движения составляющих относительно центра масс смеси или среды в целом используют диффузионные скорости w_i

$$w_i = v_i - v , \quad \sum_{i=1}^{N} \rho_i w_i = 0 . \tag{3}$$

Удельную энергию смеси E (приходящуюся на единицу массы среды) определим как сумму внутренней e и кинетической K энергий

$$E = e + K .$$

Рассмотрим случай, когда внутренняя энергия смеси аддитивна по массе входящих в нее составляющих

$$\rho e = \sum_{i=1}^{N} \rho_i e_i , \tag{4}$$

где e_i – удельные внутренние энергии фаз составляющих смесь, а кинетическая энергия определяется лишь макроскопическим движением фаз:

$$\rho K = \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_i v_i^2}{2}. \qquad (5)$$

Тогда энергия смеси может быть представлена в виде

$$\rho E = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \left(e_i + \frac{v_i^2}{2} \right) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i E_i, \quad E_i = e_i + \frac{v_i^2}{2}. \qquad (6)$$

Из равенств (5) и (3) следует, что $\rho K \neq 1/2 \rho v^2$, так как

$$\rho K = \frac{\rho v^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_i w_i^2}{2}. \qquad (7)$$

Следовательно, кинетическая энергия многоскоростной среды определяется не только ее движением как целого со скоростью центра масс, но и скоростями относительного движения составляющих, чему соответствует второе слагаемое равенства (7).

Для описания многоскоростной сплошной среды будем использовать субстанциональные производные d_i/dt и d/dt (барицентрическую субстанциональную производную), соответственно связанные с движением *i*-й составляющей и с движением среды в целом:

$$\begin{aligned} \frac{d_i}{dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_i \cdot \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_i^k \cdot \nabla^k \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_i^k \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}, \\ \frac{d}{dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v^k \cdot \nabla^k \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v^k \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Суммирование производится только по верхним индексам, относящимся к координатным осям.

Механика смесей строится на основе физических законов сохранения массы, импульса и энергии. Поэтому далее нужно записать балансовые соотношения массы, импульса и энергии для каждой составляющей в некотором фиксированном в пространстве объеме смеси *V*, ограниченном поверхностью *S*, учитывая при этом обмен (взаимодействие) не только с внешней (по отношению к выделенному объему *V*) средой, но и соответствующий обмен (взаимодействие) массой, импульсом и энергией между составляющими внутри объема *V*.

В отличие от гомогенных смесей, где каждый компонент может рассматриваться как занимающий весь объем смеси равноправно с другими компонентами ($V_1 = V_2 = \ldots = V_N = V$), в гетерогенной смеси каждая фаза занимает лишь часть объема смеси ($V_1 + V_2 + \ldots + V_N = V$). В общем случае гетерогенных смесей выделенный объем интегрирования можно представить разбитым на отдельные объемы, каждый из которых заполнен только одной какой-нибудь фазой.

В связи с этим в теории гетерогенных смесей необходимо использовать величины α_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), характеризующие доли объема смеси, занимаемые каждой фазой

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N = 1 \qquad (\alpha_i \geq 0), \qquad (9)$$

и, таким образом, помимо приведенных плотностей ρ_i, определяются истинные плотности веществ фаз ρ_i^0 (масса *i*-й фазы в единице объема *i*-й фазы)

$$\rho_i^0 = \rho_i / \alpha_i. \qquad (10)$$

Если в многокомпонентной гетерогенной смеси имеют место фазовые и химические превращения, то система законов сохранения может быть представлена в виде [1]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_i v_i = \sum_{j=1}^{N} J_{ji}, \\ \rho_i \frac{d_i v_i}{dt} = \nabla^k \sigma_i^k + \rho_i g_i + \sum_{j=1}^{N} (P_{ji} - J_{ji} v_i), \\ \rho_i \frac{d_i}{dt} \left(e_i + \frac{v_i^2}{2} \right) = \nabla \cdot c_i + \rho_i g_i \cdot v_i - \nabla q_i + \sum_{j=1}^{N} [E_{ji} - J_{ji}(e_i + \frac{v_i^2}{2})], \\ (i = 1, 2, \ldots, N), \quad J_{ij} = -J_{ji}, \; J_{ii} = 0, \qquad P_{ij} = -P_{ji}, \; P_{ii} = 0, \qquad E_{ij} = -E_{ji}, \; E_{ii} = 0. \end{gathered} \qquad (11)$$

Обмен импульсом между i-й и j-й фазами в единицу времени и в единице объема смеси представляется в виде суммы двух слагаемых:

$$P_{ij} = -P_{ji} = R_{ji} + J_{ji} v_{ji}, \quad (i = 1, 2, ..., N). \tag{12}$$

Здесь R_{ij} – межфазная сила (отнесенная к единице объема смеси). Второе слагаемое в правой части равенства (12) – изменение импульса соответствующей фазы за счет фазовых и химических превращений. Следовательно, уравнение сохранения импульса может быть переписано следующим образом

$$\rho_i \frac{d_i v_i}{dt} = \nabla^k \sigma_i^k + \rho_i g_i + \sum_{j=1}^{N} (R_{ji} + J_{ji}(v_{ji} - v_i)). \tag{13}$$

Рассмотрим величину E_{ij}, характеризующую приток энергии от i-ой к j-ой фазе, отнесенный к единице объема и времени. Эта величина может быть также представлена в виде суммы нескольких слагаемых

$$E_{ij} = -E_{ji} = W_{ij} + Q_{ji} + J_{ji}(e_{ji} + \tfrac{1}{2}(v_{ji})^2), \quad (i = 1, 2, ..., N), \tag{14}$$

где первый член правой части описывает передачу энергии между фазами за счет работы межфазных сил, второй – теплообмен между фазами и, наконец, последний член представляет собой изменение энергии фазы за счет фазовых и химических превращений. Следовательно, уравнение сохранения полной энергии i-ой фазы принимает следующий вид

$$\rho_i \frac{d_i}{dt}\left(e_i + \frac{v_i^2}{2} \right) = \nabla \cdot c_i + \rho_i g_i \cdot v_i - \nabla q_i + \sum_{j=1}^{N} [W_{ji} + Q_{ji} + J_{ji}(e_{ji} - e_i + \frac{v_{ji}^2 - v_i^2}{2})]. \tag{15}$$

Для построения равновесной модели смеси потребуется уравнение сохранение внутренней энергии i-ой фазы. С этой целью получим уравнение кинетической энергии i-ой фазы путем умножения уравнения сохранения импульса (11) на скорость i-ой фазы. В результате получается следующее уравнение

$$\rho_i \frac{d_i}{dt}\left(\frac{v_i^2}{2} \right) = v_i \cdot \nabla^k \sigma_i^k + \rho_i g_i \cdot v_i + \sum_{j=1}^{N} [R_{ji} \cdot v_i + J_{ji}(v_{ji} - v_i) \cdot v_i]. \tag{16}$$

Вычитая из уравнения полной энергии i-ой фазы (16) уравнение кинетической энергии i-й фазы, получим уравнение сохранения внутренней энергии i-ой фазы в следующей форме

$$\rho_i \frac{d_i}{dt}(e_i) = \nabla \cdot (c_i - q_i) + \rho_i g_i \cdot v_i - v_i \nabla^k \sigma_i^k + \sum_{j=1}^{N} [W_{ji} - R_{ji} \cdot v_i + Q_{ji} + J_{ji}(e_{ji} - e_i) + \frac{1}{2} J_{ji}(v_{ji} - v_i)^2]. \tag{17}$$

Таким образом, проблема многофазного движения в рамках многоскоростной (многожидкостной) модели сводится к заданию условий совместного движения фаз и определению величин, описывающих внутрифазные (силовое σ_i^{kl}, энергетическое c_i^k и q_i^k) и межфазные (массовое J_{ji}, силовое P_{ji}, энергетическое E_{ji}) взаимодействия.

2. Уравнения сохранения равновесной двухфазной гетерогенной смеси

Не ограничивая общности, рассмотрим равновесную смесь двух фаз. Для таких смесей температуры, давления и скорости фаз совпадают

$$T_1 = T_2 = T(x,t), \quad P_1 = P_2 = P(x,t), \quad v_1 = v_2 = v(x,t). \tag{18}$$

Это предположение справедливо для широкого класса физических явлений, когда

1) плотности фаз одного порядка;

2) перемещения фаз относительно друг друга малы;

3) значения коэффициентов температуропроводности фаз велики;

4) уровни давлений в фазах значительно выше значений компонентов девиаторной части тензора напряжений;

5) значения поверхностных сил значительно больше массовых.

Этим условиям будет соответствовать математическая модель инициирования сильными ударными волнами конденсированных взрывчатых веществ (ВВ) и распространения в них детонации. В этом случае первая фаза представляет собой ВВ, а вторая – продукты детонации

(ПД), которые образуются процессе химического превращения ВВ. В силу того, что в начальный момент времени вторая фаза отсутствует и появляется только в результате химического превращения, очень важно правильно согласовать внутренние энергии исходного ВВ и появившихся ПД.

Для двухфазной равновесной гетерогенной смеси уравнения неразрывности фаз и смеси (11), с учетом сделанных выше предположений, можно записать виде

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_1 v)=-J,\quad \frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_2 v)=J,\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v)=0, \tag{19}$$

где J – массовая скорость химического превращения ВВ в ПД.

Учитывая предположения (18) и второе равенство (1), получим уравнение сохранения импульса смеси

$$\rho\frac{dv}{dt}=-\nabla P\,. \tag{20}$$

С учетом предположений (18) получим вид уравнений для внутренней энергии фаз:

$$\rho_1\frac{d}{dt}(e_1)=-\alpha_1 P\nabla\cdot(v)-J(e_{21}-e_1)\,, \tag{21}$$

$$\rho_2\frac{d}{dt}(e_2)=-\alpha_2 P\nabla\cdot(v)+J(e_{12}-e_2)\,, \tag{22}$$

здесь e_{21} и e_{12} – теплоты образования ВВ и ПД соответственно.

Если воспользоваться первыми двумя уравнениями (19), равенства (21) и (22) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(\rho_1 e_i)=-\alpha_1 P\nabla\cdot(v)-Je_{21}\,, \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_2 e_2)=-\alpha_2 P\nabla\cdot(v)+Je_{12}\,. \tag{24}$$

Суммируя левые и правые части уравнений (23) и (24), получим уравнение сохранения удельной внутренней энергии смеси

$$\frac{d}{dt}\ (\rho_1 e_1+\rho_2 e_2)+P\nabla\cdot(v)=JQ_v\,, \tag{25}$$

где Q_v – теплота взрыва. Если воспользоваться третьим равенством (19) и ввести массовые концентрации $c_1=\rho_1/\rho$, $c_2=\rho_2/\rho$, то уравнение (25) принимает следующий вид

$$\frac{d}{dt}\ (c_1 e_1+c_2 e_2)+P\frac{d}{dt}(1/\rho)=JQ_v/\rho\,. \tag{26}$$

Система уравнений равновесной двухфазной гетерогенной смеси содержит 14 неизвестных: v, ρ, P, T, ρ_1, ρ_2, ρ_1^0, ρ_2^0, e_1, e_2, c_1, c_2, α_1, α_2. Для их нахождения воспользуемся законами сохранения (19), (20), (25) или (26). Система законов сохранения замыкается уравнениями состояния ВВ [10–13] и ПД [14–16]:

$$P=P_1(\rho_1^0,T_1),\quad P=P_2(\rho_2^0,T_2),\quad T=T_1=T_2,\quad e_1=e_1(\rho_1^0,T_1),\quad e_2=e_2(\rho_2^0,T_2) \tag{27}$$

и обычными для многокомпонентных и гетерогенных смесей связями:

$$\alpha_1+\alpha_2=1,\ \rho_1=\alpha_1\rho_1^0,\ \rho_2=\alpha_2\rho_2^0,\ \rho=\alpha_1\rho_1^0+\alpha_2\rho_2^0, c_1+c_2=1,\ c_1=\rho_1/\rho,\ c_2=\rho_2/\rho. \tag{28}$$

Предложенная система уравнений равновесной двухфазной гетерогенной смеси с дополнениями (27) и (28) становится замкнутой. Однако требуется проверка ее на гиперболичность и инвариантность относительно преобразования Галилея.

3. Исследование на гиперболичность и инвариантность системы уравнений гетерогенной смеси

Анализ системы уравнений на гиперболичность можно проводить как в эйлеровых, так и в лагранжевых переменных. Мы воспользуемся массовыми переменными Лагранжа и ограничимся одномерным плоским случаем, так как основные качественные закономерности просматриваются и в этом частном случае. Также примем, что вязкость и теплопроводность отсутствуют, то есть будем рассматривать среду без диссипации энергии.

Переход от эйлеровых переменных к лагранжевым осуществим с помощью следующих формул:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial m} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Система уравнений (19), (20), (25) примет вид:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho^2 \frac{\partial v}{\partial m} = 0, \tag{29}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial m}, \tag{30}$$

$$\frac{d\left(\rho_1 e_1 + \rho_2 e_2\right)}{dt} + \rho P \frac{\partial v}{\partial m} = 0. \tag{31}$$

В силу принятого выше допущения об отсутствии теплопроводности, уравнение сохранения энергии можно заменить уравнением сохранения энтропии вдоль траектории каждой частицы:

$$\frac{dS}{dt} = 0.$$

Заменим в уравнении сохранения импульса производную от давления:

$$\frac{\partial P}{\partial m} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S \frac{\partial \rho}{\partial m} + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\rho \frac{\partial S}{\partial m} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial m} + P_S \frac{\partial S}{\partial m},$$

где $c = \sqrt{\left(\partial P/\partial \rho\right)_S}$ – скорость звука, $P_S = \left(\partial P/\partial S\right)_\rho$.

Так как лагранжевы координаты каждой частицы сохраняются вдоль ее траектории, то полная производная в уравнениях (29)–(31) является частной в лагранжевых координатах:

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}.$$

Тогда система уравнений (29)–(31) примет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial v}{\partial m} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial m} + P_S \frac{\partial S}{\partial m} = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Составим матрицу коэффициентов при производных по координате

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \rho^2 & 0 \\ c^2 & 0 & P_S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Решая уравнение (32)

$$\det\left(A - \lambda E\right) = \lambda\left(\lambda^2 - c^2\rho^2\right) = 0,$$

находим собственные значения:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = c\rho, \quad \lambda_3 = -c\rho.$$

Они вещественны и различны при условии, что $\left(\partial P/\partial \rho\right)_S > 0$, которое выполняется для предложенной равновесной гетерогенной смеси. Таким образом, система (29)–(31) имеет гиперболический тип.

Проведем анализ системы (19), (20), (25) на инвариантность относительно преобразования Галилея по аналогии с [8–9]. Введем новую систему координат, которая движется с постоянной скоростью D относительно старой. Скорость в новой системе координат будет равна

$$v_H = v + D,$$

координата определяется из уравнения

$$x_H = x + Dt.$$

Производные по координате и времени определяются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_H}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + D\frac{\partial}{\partial x_H}.$$

Снова ограничимся одномерным плоским случаем, тогда системы (19), (20), (25) примут вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{33}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial\left(\rho_1 e_1 + \rho_2 e_2\right)}{\partial t} + v\frac{\partial\left(\rho_1 e_1 + \rho_2 e_2\right)}{\partial x} + P\frac{\partial v}{\partial x} = JQ_v. \tag{35}$$

Запишем эти уравнения, для новой системы координат:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + D\frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(v_H - D\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial\left(v_H - D\right)}{\partial x} = 0,$$

$$\rho\frac{\partial\left(v_H - D\right)}{\partial t} + \rho D\frac{\partial\left(v_H - D\right)}{\partial x} + \rho\left(v_H - D\right)\frac{\partial\left(v_H - D\right)}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\left(\rho_1 e_1 + \rho_2 e_2\right)}{\partial t} + D\frac{\partial\left(\rho_1 e_1 + \rho_2 e_2\right)}{\partial x} + \left(v_H - D\right)\frac{\partial\left(\rho_1 e_1 + \rho_2 e_2\right)}{\partial x} + P\frac{\partial\left(v_H - D\right)}{\partial x} = JQ_v.$$

После несложных преобразований и сокращения членов с противоположными знаками, получим уравнения, полностью совпадающие с (33), (34) и (35) соответственно. Таким образом, система уравнений равновесной двухфазной гетерогенной смеси инвариантна относительно преобразования Галилея.

Выводы

По результатам данной работы можно сделать следующие выводы:

1. Система законов сохранения в равновесной математической модели двухфазной смеси может быть сведена к системе законов сохранения для смеси, когда замыкающими уравнениями являются уравнения состояния для удельной внутренней энергии и давления фаз, а также обычные для гетерогенных смесей соотношения;

2. Система законов сохранения в равновесной математической модели двухфазной смеси является гиперболичной;

3. Система законов сохранения в равновесной математической модели двухфазной смеси инвариантна относительно преобразования Галилея.

Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

Литература

1. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1978. – 336 с.

2. Куропатенко, В.Ф. Модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко. – Челябинск: Изд-во Челябинского государственного университета, 2007. – 302 с.

3. Рахматуллин, Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред / Х.А. Рахматулин // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, Вып. 27. – С. 184–195.

4. Крайко, А.Н. Механика многофазных сред / А.Н. Крайко, Р.И. Нигматулин, В.К. Старков, Л.Б. Стернин // Итоги науки и техники. Гидромеханика. – 1973. – Т. 6. – С. 93–174.

5. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц / Н.Н. Яненко, Р.И. Солоухин, А.Н. Папырин, В.М. Фомин. – Новосибирск: Наука: Сиб. отд-ние, 1980. – 159 с.

6. Куропатенко, В.Ф. Модель многокомпонентной среды / В.Ф. Куропатенко // Доклады академии наук. – 2005. – Т. 403, № 6. – С. 761–763.

7. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 1. – С. 74–92.

8. Ковалев, Ю.М. Математическая модель газовзвеси с химическими превращениями в приближении парных взаимодействий / Ю.М. Ковалев, Е.Е. Пигасов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 40–49.

9. Ковалев, Ю.М. Математический анализ уравнений сохранения двухфазных смесей / Ю.М. Ковалев, Е.А. Ковалева // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 29–37.

10. Ковалев, Ю.М. Математическое моделирование тепловой составляющей уравнения состояния молекулярных кристаллов / Ю.М. Ковалев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 34–42.

11. Фортов, В.Е. Уравнения состояния вещества: от идеального газа до кварк-глюонной плазмы / В.Е. Фортов. – М.: Физматлит, 2012. – 490 с.

12. Хищенко, К.В. Исследование уравнений состояния материалов при высокой концентрации энергии / К.В. Хищенко, В.Е. Фортов // Известия Кабардино-Балкарского государственного университета. – 2014. – Т. 4, № 1. – С. 6–16.

13. Зельдович, Я.Б. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. – М.: Физматлит, 2008. – 652 с.

14. Моделирование взрыва шнурового заряда в пологе леса при отсутствии пожара / В.А. Антонов, А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев, Л.Ю. Наймушина // Физика горения и взрыва. – 1993. – Т. 29, № 4. – С. 115–123.

15. Куропатенко, В.Ф. Уравнение состояния продуктов детонации плотных ВВ / В.Ф. Куропатенко // Физика горения и взрыва. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 112–117.

16. Мейдер, Ч. Численное моделирование детонации / Ч. Мейдер. – М.: Мир, 1985. – 384 с.

Поступила в редакцию 22 июля 2018 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2018, vol. 10, no. 4, pp. 49–57

DOI: 10.14529/mmph180406

EQUILIBRIUM MATHEMATICAL MODEL OF MULTICOMPONENT HETEROGENEOUS MEDIA

Yu.M. Kovalev, F.G. Magazov, E.S. Shestakovskaya
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: leshest@list.ru

In this paper, a mathematical model of an equilibrium two-phase mixture is constructed based on the general equations of conservation of heterogeneous multicomponent mixtures. This mathematical model was studied for the presence of hyperbolicity and invariance regarding the Galilean transformation. Hyperbolicity of the mathematical model of the equilibrium two-phase mixture was demonstrated, which proved the possibility of calculating high-speed processes, for example, the processes of initiation of detonation in condensed explosives by strong shock waves. Hyperbolicity of the mathematical model of equilibrium two-phase mixture leads to the fact that velocity of propagation of disturbances (sound velocity) in the mixture is a finite value. This fact is very important in analyzing the processes of the output of initiating shock waves into the detonation regime. The assumption of the equilibrium of the mixture for calculating the initiation of detonation greatly simplifies the general mathematical model of heterogeneous multicomponent mixtures. It is shown that the system of conservation laws in an equilibrium mathematical model of two-phase mixture can be reduced to the system of conservation laws for a mixture, when the closing equations are the equations of state for specific internal energy and phase pressure, as well as the ratios that are usual for heterogeneous mixtures. Within the frameworks of the equilibrium mathematical model of two-phase mixture, justification for the coordination of energy of phase transitions was carried out. It was taken into account that phase transitions in a detonation wave occur at a constant volume.

Analysis of the equilibrium mathematical model of two-phase mixture for the presence of invariance regarding the Galileo transformation showed its invariance, which confirms the correctness of the assumptions made in this paper.

Keywords: mathematical model; two-phase mixture; equation of state; high-speed process; shock wave.

References

1. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* (Fundamentals of mechanics of heterogeneous media), Moscow, Nauka, 1978, 336 p. (in Russ.).

2. Kuropatenko V.F. *Modeli mekhaniki sploshnykh sred* (Models of continuum mechanics), Chelyabinsk, Izd-vo Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta Publ., 2007, 302 p. (in Russ.).

3. Rahmatulin H.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1956, Vol. 20, Issue 27, pp. 184–195. (in Russ.).

4. Kraiko A.N., Nigmatulin R.I., Starkov V.K., Sternin L.B. *Itogi nauki i tekhniki. Gidromekhanika*, 1973, Vol. 6, pp. 93–174. (in Russ.).

5. Yanenko N.N., Soloukhin R.I., Papyrin A.N., Fomin V.M. *Sverkhzvukovye dvukhfaznye techeniya v usloviyakh skorostnoy neravnovesnosti chastits* (Supersonic two-phase flows under conditions of high-speed non-equilibrium of particles), Novosibirsk, Nauka, Sibirskoe otdelenie Publ., 1980, 159 p. (in Russ.).

6. Kuropatenko V.F. Model of a multicomponent medium. *Doklady Physics*, 2005, Vol. 50, no. 8, pp. 423–425. DOI: 10.1134/1.2039984

7. Kuropatenko V.F. New model of continuum mechanics. *Journal of engineering physics and thermophysics*, 2011, Vol. 84, no. 1, pp. 77–99. DOI: 10.1007/s10891-011-0457-0

8. Kovalev Yu.M., Pigasov E.E. A Mathematical Model of Gas Suspension with Chemical Reactions in the Pair-Interaction Approximation. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 3, pp. 40–49. DOI: 10.14529/mmp140304

9. Kovalev Yu.M., Kovaleva E.A. A Mathematical Study of the Conservation Equation for Two-Phase Mixtures. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 2, pp. 29–37. DOI 10.14529/mmp140202

10. Kovalev Yu.M. Mathematical Modelling of the Thermal Component of the Equation of State of Molecular Crystals. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2013, Vol. 6, no. 1, pp. 34–42.

11. Fortov V.E. *Uravneniya sostoyaniya veshchestva: ot ideal'nogo gaza do kvark-glyuonnoy plazmy* (Equations of state of matter: from an ideal gas to a quark-gluon plasma), Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 490 p. (in Russ.).

12. Khishchenko K.V., Fortov V.E. Issledovanie uravneniy sostoyaniya materialov pri vysokoy kontsentratsii energii. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2014, Vol. 4, no. 1, pp. 6–16. (in Russ.).

13. Zel'dovich Ya.B., Rayzer Yu.P. *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavleniy* (Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena), Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 652 p. (in Russ.).

14. Antonov V.A., Grishin A.M., Kovalev Yu.M., Naymushina L.Yu. *Fizika goreniya i vzryva*, 1993, Vol. 29, no. 4, pp. 115–123.

15. Kuropatenko V.F. *Fizika goreniya i vzryva*, 1989, Vol. 25, no. 6, pp. 112–117. (in Russ.).

16. Mader C.L. *Numerical modeling of detonations*. University of California Press, Berkeley–Los Angeles–London, 1979, 485 p. DOI: 10.1002/prep.19810060306

Received July 22, 2018